ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN SAINT-PIERRE

Désintégration d'une mesure non bornée

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 3 (1975), p. 275-286
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_3_275_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section **B** :
Vol. XI, n° 3, 1975, p. 275-286. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Désintégration d'une mesure non bornée

par

Jean SAINT-PIERRE

RÉSUMÉ. — On donne un théorème de désintégration d'une mesure positive λ définie sur le produit d'un espace mesurable (T, $\mathcal{T}$) et d'un espace topologique U. Les hypothèses sont que la projection de λ sur T est strictement localisable et que la projection de λ sur U est une mesure de Radon. Il s'agit par conséquent d'une extension de résultats de J. Hoffman-Jørgensen et de M. Valadier.

SUMMARY. — We give a disintegration theorem for a positive measure λ on the product of an abstract measurable space (T, $\mathcal{T}$) with a topological space U. Our hypothesis are that the projection of λ on T is strictly localizable and that the projection of λ on U is a Radon measure. It is therefore an extension of results of J. Hoffman-Jørgensen and of M. Valadier.

§ 1. INTRODUCTION

Nous choisissons pour énoncer notre théorème le cadre d'un produit car il est facile d'en déduire les autres formes que peuvent prendre les théorèmes de désintégration. Le cas d'un produit de deux espaces topologiques a été étudié dans [*4*] et [*5*] notamment.

Cependant, dans la plupart des cas, les théorèmes originaux de M. Jiřina dans le cadre abstrait contiennent les résultats topologiques. Voir [*6*] et [*7*].

Les résultats de Jiřina ont été repris dans [*10*] et aussi en partie dans [*2*] avec quelques simplifications.

J. Hoffmann-Jørgensen [*3*] puis M. Valadier [*11*] et [*12*] ont amélioré les résultats connus dans le cas où l'un des facteurs est abstrait et l'autre topologique.

Le but recherché ici est l'extension de ces résultats « mixtes » au cas où l'on n'a plus une mesure de probabilité mais une mesure positive non nécessairement bornée.

La démonstration est inspirée en partie de [*9*] que l'on retrouve en corollaire sous une forme plus explicite.

§ 2. PRÉLIMINAIRES

A. Mesures de Radon

Soit U un espace topologique, B(U) la tribu des boréliens de U et ν une mesure sur (U, B(U)) à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.

DÉFINITION 1. — ν est *intérieurement régulière* si pour tout $A \in B(U)$ on a :

$$\nu(A) = \sup \{ \nu(K), K \subset A \text{ et } K \text{ compact} \}$$

ν est *localement bornée* si tout point $x \in U$ admet un voisinage ouvert V tel que $\nu(V) < +\infty$.

ν est *de Radon* si elle est localement bornée et intérieurement régulière.

Il est équivalent de se donner une mesure $\tilde{\nu}$ au sens de Bourbaki telle que $\tilde{\nu}^{\cdot}(A) = \nu(A)$ pour tout borélien A ([*1*], § 3, théorème 2, p. 46).

Si ν est de Radon on connaît l'existence d'un *concassage de* U *pour* ν, c'est-à-dire d'une famille localement dénombrable $(K_i)_{i\in I}$ de parties compactes de U deux à deux disjointes telles que l'ensemble $N = U - \bigcup_{i\in I} K_i$ soit localement $\tilde{\nu}$-négligeable ([*1*], § 1, proposition 9, p. 18).

De plus si on désigne par ν_i la mesure définie par $\nu_i(A) = \nu(A \cap K_i)$ on a pour toute fonction f mesurable positive sur U :

$$\nu(f) = \sum_{i\in I} \nu_i(f) = \sup_{J\in P_f(I)} \nu_J(f)$$

où $P_f(I)$ désigne l'ensemble des parties finies de I et $\nu_J(f) = \sum_{i\in J} \nu_i(f)$.

B. Mesures localisables et strictement localisables

Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesurable muni d'une mesure positive μ.

DÉFINITION 2. — $(T, \mathcal{C}, \mu)$ a la *propriété de la partie de mesure finie* si :

$$\text{P. F.}\left\{\begin{array}{l}\text{toute partie mesurable de T de mesure strictement positive}\\ \text{contient une partie intégrable de mesure strictement positive}\end{array}\right.$$

Cela est équivalent à dire qu'une partie de T est μ-négligeable si et seulement si son intersection avec toute partie μ-intégrable est μ-négligeable ([*13*], chap. 7, § 34, théorème 2, p. 257).

La propriété P. F. est également équivalente à :

Pour tout E μ-mesurable on a :

$$\mu(E) = \operatorname{Sup} \{ \mu(F) : F \subset E, F\mu\text{-intégrable} \} \qquad ([13]\ \textit{ibidem})$$

Désignons pour E mesurable dans T (resp. f mesurable de T dans un ensemble) par E^* (resp. f^*) la classe d'équivalence de E (resp. de f) pour l'égalité μ-presque partout.

DÉFINITION 3. — $(T, \mathcal{T}, \mu)$ est *localisable* s'il possède la propriété P. F. et si pour toute collection $\{ F_\beta \}_{\beta\in B}$ d'ensembles μ-intégrables la borne supérieure $\operatorname{Sup}_{\beta\in B} F_\beta^*$ existe.

Il est équivalent de dire que toute « section » $\langle f_E^* \rangle$ (c'est-à-dire pour tout E intégrable on se donne une classe f_E^* de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ de façon que f_E^* et f_F^* coïncident sur $E \cap F$ pour tout E et F intégrables) est déterminée par une fonction f définie sur tout T.

Il est encore équivalent de dire que $(T, \mathcal{T}, \mu)$ à la propriété de Radon-Nikodym soit :

R. N. { Toute mesure positive μ' définie sur la même tribu $\mathcal{T}$ que μ et absolument continue par rapport à μ est représentable par une intégrale

$$\mu(E) = \int_E f.d\mu \qquad \text{pour tout } E \in \mathcal{T}$$

La classe de f est alors unique (voir [*13*], chap. 7, § 34 et 35, théorème de Segal).

DÉFINITION 4. — L'espace mesuré $(T, \mathcal{T}, \mu)$ *est strictement localisable* s'il existe une famille d'ensemble $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que :

— $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une partition de T.

— $\forall\alpha \in A$, $T_\alpha \in \mathcal{T}$ et $\mu(T_\alpha) < +\infty$.

— Tout $E \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ est contenu excepté pour un ensemble négligeable dans une réunion dénombrable de T_α (cf. [*13*], p. 250).

On dit encore que T est la *somme directe des* $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ *pour* $\mathcal{T}$ *et* μ.

Un espace mesuré strictement localisable est localisable ([*13*], chap. 7, § 35, théorème 1, p. 263).

Notons que si $(T, \mathscr{T}, \mu)$ est l'espace mesuré complété de $(T, \mathscr{T}', \mu)$ pour μ et si $(T, \mathscr{T}', \mu)$ est strictement localisable la famille $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ est encore une partition de T telle que $T_\alpha \in \mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ et $\mu(T_\alpha) < +\infty$. Si $E \in \mathscr{T}$ avec $\mu(E) < +\infty$, $E = E_1 \cup N$ avec $E_1 \in \mathscr{T}'$ et $\mu(N) = 0$ donc $(T, \mathscr{T}, \mu)$ est strictement localisable.

La stricte localisabilité lorsque $\mathscr{T}$ est complète pour μ est équivalente à l'existence d'un relèvement de $L^\infty(T, \mathscr{T}, \mu)$ ([*4*], IV.3, théorème 5) c'est-à-dire d'une application ρ de $L^\infty(T, \mathscr{T}, \mu)$ dans $\mathscr{L}^\infty(T, \mathscr{T}, \mu)$ telle que :

$$
\begin{aligned}
R_1 &: \rho(f) \in f \\
R_2 &: \rho(1^*) = 1 \\
R_3 &: f \geq 0 \Rightarrow \rho(f) \geq 0 \\
R_4 &: \rho(af + bg) = a\rho(f) + b\rho(g) \\
R_5 &: \rho(fg) = \rho(f)\rho(g)
\end{aligned}
$$

§ 3. THÉORÈME PRINCIPAL

Soit U *un espace topologique séparé,* B(U) *l'ensemble des boréliens de* U, $(T, \mathscr{T}')$ *un espace mesurable abstrait,* λ *une mesure positive sur* $(T \times U, \mathscr{T}' \otimes B(U))$. *On suppose que la projection* ν *de* λ *sur* U *est de Radon. Soit* μ *la projection de* λ *sur* T *et* $\mathscr{T}$ *la* μ*-complétée de* $\mathscr{T}'$. *On suppose que l'espace mesuré* $(T, \mathscr{T}, \mu)$ *est strictement localisable. Alors il existe une application* $\varphi(t \to \varphi_t)$ *de* T *dans l'ensemble des mesures de Radon sur* U *positives de masse totale* ≤ 1 *telle que : pour toute* f *mesurable de* $T \times U$ *dans* $\mathbb{R}$ *pour* $\mathscr{T}' \hat{\otimes}_\lambda B(U)$ *et* $B(\mathbb{R})$ *et intégrable sur tout produit* $B \times U$ ($B \in \mathscr{T}$ *et* $\mu(B) < +\infty$ i. e. $\lambda(B \times U) < +\infty$) *et pour tout* $B \in \mathscr{T}$ μ*-intégrable on a :*

$$t \to \int_U f(t, x) d\varphi_t(x)$$

est définie μ*-p. p.,* μ*-mesurable et :*

$$\int_B \left[\int_U f(t, x) d\varphi_t(x) \right] d\mu(t) = \int_{B \times U} f(t, x) d\lambda(t, x) \tag{1}$$

($\mathscr{T}' \hat{\otimes}_\lambda B(U)$ *désigne la tribu* λ*-complétée de* $\mathscr{T}' \otimes B(U)$ *et on a* $\mathscr{T}' \hat{\otimes}_\lambda B(U) = \mathscr{T} \hat{\otimes}_\lambda B(U) = \mathscr{T} \hat{\otimes}_\lambda (B(U)_\nu)$).

Remarques :

1. Notons que les fonctions mesurables bornées vérifient les conditions

du théorème et qu'il suffit de démontrer le théorème pour ces fonctions-là. En effet si f mesurable est intégrable sur tout produit $B \times U$ (B μ-intégrable) $|f|$ est aussi intégrable sur ces produits (par définition) et comme $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ avec $f_n = \inf(\sup(f, -n), n)$ il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue ($|f_n| \leq |f|$).

2. Si $f(t, x) = 1_E(t).1_A(x)$ où 1_E est la fonction caractéristique d'un ensemble E mesurable de T et 1_A la fonction caractéristique d'un ouvert A de U la relation (1) se réduit à

$$\int_{B\cap E} \varphi_t(A)d\mu(t) = \lambda(B \cap E) \times A)$$

Pour démontrer cette formule il suffit évidemment de montrer que pour tout B μ-intégrable on a :

$$\int_B \varphi_t(A)d\mu(t) = \lambda(B \times A) \tag{2}$$

§ 4. AUTRE FORME DU THÉORÈME DU PARAGRAPHE 3

LEMME. — *Dans les conditions du* § 3, *soit f une fonction de* $T \times U$ *dans* $\mathbb{R}$ *mesurable pour* $\mathscr{C}' \hat{\otimes}_\lambda B(U)$ *et* $B(\mathbb{R})$ *et intégrable sur* $B \times U$ *pour tout* B *μ-intégrable alors il existe une classe unique de fonctions μ-mesurables de* T *dans* $\mathbb{R}$ *que l'on désignera par* $E(f \mid \pi)$ (π *étant la projection* $T \times U \to T$) *telle que pour toute* $g \in E(f \mid \pi)$ *et tout* B *μ-intégrable on a :*

$$\int_B g.d\mu = \int_{B\times U} f.d\lambda$$

De plus $f \to E(f \mid \pi)$ *est linéaire et si on a λ p. p.* $\alpha \leq f \leq B$ *on a μ p. p.* $\alpha \leq g \leq B$.

Démonstration. — Il s'agit de vérifications faciles identiques à celles du cas λ finie qui est classique et que nous rappelons brièvement pour la commodité du lecteur. Soit :

$$f = f^+ - f^- \qquad (f^+ = \mathrm{Sup}\,(f, 0))$$

Les formules

$$\mu'(B) = \int_{B\times U} f^+.d\lambda \qquad \text{et} \qquad \mu''(B) = \int_{B\times U} f^-.d\lambda$$

définissent deux mesures positives sur $(T, \mathscr{C})$ absolument continues par rapport à μ. Comme l'espace $(T, \mathscr{C}, \mu)$ possède la propriété de Radon-Nikodym il existe deux classes uniques $E(f^+ \mid \pi)$ et $E(f^- \mid \pi)$ de fonctions μ-mesurables telles que pour tout B μ-intégrable, tout $g_1 \in E(f^+ \mid \pi)$ et tout $g_2 \in E(f^- \mid \pi)$ on ait :

$$\int_B g_1 . d\mu = \int_{B \times U} f^+ . d\lambda \qquad \text{et} \qquad \int_B g_2 . d\mu = \int_{B \times U} f^- . d\lambda$$

Ces intégrales étant finies dans $\mathbb{R}$ par notre hypothèse, on en déduit

$$0 \leq g_1 < +\infty \qquad \text{et} \qquad 0 \leq g_2 < +\infty \qquad \mu\text{-p. p. sur B}$$

et comme $(T, \mathscr{C}, \mu)$ a la propriété P. F. on a :

$$0 \leq g_1 < +\infty \qquad \text{et} \qquad 0 \leq g_2 < +\infty \qquad \mu\text{-p. p.}$$

$g_1 - g_2$ est donc bien défini et appartient à $\mathbb{R}$ μ-p. p. et on peut poser $E(f \mid \pi) = E(f^+ \mid \pi) - E(f^- \mid \pi)$.

La linéarité et la dernière propriété sont de vérification aisée.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME *(bis)*. — *Dans les conditions du théorème du paragraphe 3 l'application* $t \to \int_U f(t, x) d\varphi_t(x)$ *est définie μ-p. p. et appartient à* $E(f \mid \pi)$.

§ 5. CONSTRUCTION DE φ

Soit $(K_i)_{i \in I}$ un concassage de U pour ν. On posera $N = U - \bigcup_{i \in I} K_i$.

Pour tout élément $i \in I$ et tout élément $t \in T$ nous allons définir une mesure de Radon sur U, $\varphi_{t,i}$ dont le support sera contenu dans le compact K_i.

Pour toute fonction f d'une partie A de U dans $\mathbb{R}$ nous définirons $\tilde{f}$ de $T \times U$ dans $\mathbb{R}$ par $\tilde{f}(t, x) = f(x)$ si $x \in A$, $\tilde{f}(t, x) = 0$ si $x \in U \backslash A$. Soit f une fonction définie et continue sur K_i. f, fonction continue sur un compact est bornée $\forall x \in K_i$, $|f(x)| \leq M$ et l'on a par construction : $\forall t \in T$, $\forall x \in U$, $|\tilde{f}(t, x)| \leq M$. D'après le lemme du paragraphe 4 $E(\tilde{f} \mid \pi)$ existe et appartient à $L^\infty(T, \mathscr{C}, \mu)$ et on définit une mesure $\tilde{\psi}_{t,i}$ sur K_i en posant

$$\tilde{\psi}_{t,i}(f) = \rho[E(\tilde{f} \mid \pi)](t)$$

où ρ est un relèvement de $L^\infty(T, \mathscr{C}, \mu)$ dans $\mathscr{L}^\infty(T, \mathscr{C}, \mu)$. Toujours d'après le lemme cette mesure $\tilde{\psi}_{t,i}$ est positive, elle induit une mesure positive $\tilde{\varphi}_{t,i}$ sur U telle que pour toute fonction h de U dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ on ait :

$$\tilde{\varphi}^{\bullet}_{t,i}(h) = \tilde{\psi}^{\bullet}_{t,i}(h|_{K_i}) \qquad ([1], \S\ 1, \text{n}^\circ\ 3, \text{lemme 2, p. 12})$$

Si $J \in P_f(I)$ ensemble des parties finies de I on a :

$$\sum_{i\in J} \tilde{\varphi}_{t,i}(1_U) = \sum_{i\in J} \tilde{\psi}_{t,i}(1_{K_i}) = \sum_{i\in J} \rho[E(\tilde{1}_{K_i} \mid \pi)](t) = \rho[E(\tilde{1}_{\bigcup_{i\in J} K_i} \mid \pi)](t) \leq 1$$

d'après la linéarité de $E(\,.\mid\pi)$ et les propriétés R_3 et R_4 des relèvements.

L'encombrement $\sum_{i\in I} \tilde{\varphi}_{t,i}$ est donc borné et la somme de la famille de mesures $\{\tilde{\varphi}_{t,i}\}_{i\in I}$ est bien définie et est une mesure $\tilde{\varphi}_t$ bornée par 1 ([*1*], § 1, n° 7), $\tilde{\varphi}_t = \sum_{i\in I} \tilde{\varphi}_{t,i}$. On désigne par φ_t l'unique mesure de Radon telle que $\varphi_t(A) = \tilde{\varphi}_t(A)$ pour tout borélien A de U.

§ 6. RÉDUCTION DU PROBLÈME

Rappelons le lemme classique suivant (cf. par exemple [*8*], app. 1, lemme 3, p. 241) appelé principe de prolongement par mesurabilité.

LEMME. — *Soient Ω un ensemble, $\mathscr{P}$ une famille de parties de Ω stable pour les intersections finies. Soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel de fonctions réelles sur Ω possédant les propriétés* (P_1) *et* (P_2) *suivantes :*

(P_1) : *Pour toute suite (h_n) croissante de fonctions positives extraite de $\mathscr{H}$, telle que $h = \sup_n h_n$ est finie (resp. bornée) on a : $h \in \mathscr{H}$.*

(P_2) : $1_\Omega \in \mathscr{H}$ *et pour tout* $P \in \mathscr{P}\, 1_P \in \mathscr{H}$.

Alors $\mathscr{H}$ contient toutes les fonctions $\sigma(\mathscr{P})$-mesurables (resp. $\sigma(\mathscr{P})$-mesurables et bornées) ou $\sigma(\mathscr{P})$ est la tribu engendrée par $\mathscr{P}$.

Supposons que l'on ait démontré que pour tout B μ-intégrable et tout A ouvert on a la relation (2).

Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions de $T \times U$ dans $\mathbb{R}$ mesurables pour $\mathscr{T} \hat{\otimes}_\lambda B(U)$ et $B(\mathbb{R})$ et qui vérifient la relation (1). $\mathscr{H}$ est un espace vectoriel qui vérifie (P_1) pour $h = \sup_n h_n$ bornée (théorème de convergence monotone) ; de plus d'après la remarque 2 du paragraphe 3, $\mathscr{H}$ vérifie (P_2) en prenant pour $\mathscr{P}$ la famille des produits $E \times A$ ($E \in \mathscr{T}$ et A ouvert de U). D'après le lemme $\mathscr{H}$ contient donc l'ensemble des fonctions bornées de $T \times U$ dans $\mathbb{R}$ mesurables pour $\mathscr{T} \otimes B(U)$ et $B(\mathbb{R})$. Soit $\mathscr{N}$ la famille des ensembles λ-négligeables de $T \times U$, tout ensemble E de $\mathscr{T} \hat{\otimes}_\lambda B(U)$ peut s'écrire $E = E' + N$ (réunion disjointe) où $E' \in \mathscr{T} \otimes B(U)$ et $N \in \mathscr{N}$.

D'après ce qui précède $1_{E'} \in \mathscr{H}$, d'autre part $N \in \mathcal{N}$ signifie qu'il existe $N' \in \mathscr{T} \otimes B(U)$ tel que $N \subset N'$ et $\lambda(N') = 0$, d'où (B μ-intégrable) :

$$0 \leqslant \int_B [1_N(t, x) d\varphi_t(x)] d\mu(t) \leqslant \int_B [1_{N'}(t, x) d\varphi_t(x)] d\mu(t)$$

et comme $1_{N'}$ vérifie (1) cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{B \times U} 1_{N'}(t, x) d\lambda(t, x) = \lambda(B \times U \cap N') \leqslant \lambda(N') = 0$$

ce qui prouve que 1_N et donc ($\mathscr{H}$ est un espace vectoriel) 1_E appartiennent à $\mathscr{H}$. $\mathscr{H}$ possède donc les propriétés (P_1) et (P_2) du lemme en prenant cette fois-ci pour $\mathscr{P}$ toute la tribu $\mathscr{T} \hat{\otimes}_\lambda B(U)$. On peut conclure alors que $\mathscr{H}$ contient toutes les fonctions bornées de $T \times U$ dans $\mathbb{R}$ mesurables pour $\mathscr{T} \hat{\otimes}_\lambda B(U)$ et $B(\mathbb{R})$. La remarque 1 du paragraphe 3 nous permet donc de conclure que pour démontrer le théorème du paragraphe 3 il suffit de vérifier que pour tout B μ-mesurable et tout ouvert A de U on a la relation (2).

§ 7. DÉMONSTRATION

Vérifions d'abord que (1) est réalisée pour toute fonction $f(t, x) = g(x)$ où g est continue sur K_i et nulle en dehors de K_i

$$\int_B \left[\int_U g(x) d\varphi_t(x) \right] d\mu(t) = \int_B \tilde{\varphi}_{t,i}(g) d\mu(t)$$
$$= \int_B \rho[E(f \mid \pi)](t) d\mu(t) = \int_{B \times U} f(t, x) d\lambda(t, x)$$

Comme $\mathscr{H}$ est un espace vectoriel ($f \in \mathscr{H}$) $\mathscr{H}$ contient toutes fonctions de la forme $f(t, x) = g(x)$ où g est continue sur un nombre fini de K_i et nulle en dehors de ces K_i.

Soit maintenant A un ouvert de U, pour $J \in P_f(I)$ ensemble des parties finies de I on notera G_J l'ensemble des fonctions g positives, nulles en dehors de $\bigcup_{i \in J} K_i$, inférieures à $1_A(x)$ et dont la restriction à K_i pour $i \in J$ est continue. On appellera G la réunion des G_j pour J parcourant $P_f(I)$.

Pour $g \in G$ on posera $\tilde{g}(t, x) = g(x)$. On a alors par définition de φ_t

$$\varphi_t(A) = \sup_{J \in P_f(I)} \left(\sum_{i \in J} \varphi_{t,i}(A) \right) = \sup_{J \in P_f(I)} \sup_{g \in G_j} \sum_{i \in J} \varphi_{t,i}(g) = \sup_{g \in G} \rho[E(\tilde{g} \mid \pi)](t)$$

On a donc l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante de relèvements et on peut appliquer ([4], théorème 3, chap. III, p. 40) soit :

$$\int_B [\varphi_t(A)]d\mu(t) = \int_B [\operatorname*{Sup}_{g\in G} \rho[E(\tilde{g} \mid \pi)](t)]d\mu(t)$$

$$= \operatorname*{Sup}_{g\in G} \int_B E(\tilde{g} \mid \pi)(t)d\mu(t) = \operatorname*{Sup}_{g\in G} \int_{B\times U} \tilde{g}(t, x)d\lambda(t, x) = \operatorname*{Sup}_{g\in G} \int_U f(x)d\nu_1(x)$$

où ν_1 est la mesure défini sur (U, B(U)) par

$$\nu_1(E) = \lambda(B \times E) \leq \lambda(T \times E) = \nu(E),$$

ν_1 est intérieurement régulière car si un compact $K \subset E$ est tel que $\nu(E - K) \leq \varepsilon$ on a *a fortiori* $\nu_1(A - K) \leq \varepsilon$. De plus ν_1 est bornée car $\nu_1(E) \leq \nu_1(U) = \lambda(B \times U) < +\infty$ par hypothèse (B μ-intégrable).

$U = \bigcup_{i\in I} K_i \cup N$ est aussi un concassage pour ν_1 car N qui est localement ν-négligeable (i. e. $\tilde{\nu}^{\cdot}(N) = 0$) est aussi localement ν_1-négligeable (car $\nu_1 \leq \nu \Rightarrow \tilde{\nu}_1 \leq \tilde{\nu} \Rightarrow \tilde{\nu}_1^{\cdot} \leq \tilde{\nu}^{\cdot}$). (De plus comme ν_1 est bornée N est ν_1-négligeable (cf. [1], § 1, proposition 14)).

On a donc :

$$\nu_1 = \sum_{i\in I} \nu_1^i \qquad \text{ou} \qquad \nu_1^i(E) = \nu_1(E \cap K_i)$$

(cf. [1], § 1, n° 8 et § 2, n° 2) autrement dit (définition d'une somme de mesures)

$$\nu_1 = \operatorname*{Sup}_{J\in P_f(I)} \nu_1^J \qquad \text{avec} \qquad \nu_1^J = \sum_{i\in J} \nu_1^i$$

Désignons par g_J la restriction de $g \in G$ à $\bigcup_{i\in J} K_i$, on a :

$$\int_B \varphi_t(A)d\mu(t) = \operatorname*{Sup}_{g\in G} \int_U g(x)d\nu_1(x)$$

$$= \operatorname*{Sup}_{g\in G} \operatorname*{Sup}_{J\in P_f(I)} \int_U g.d\nu_1^J = \operatorname*{Sup}_{g\in G} \operatorname*{Sup}_{J\in P_f(I)} \int_U g_J d\nu_1^J = \operatorname*{Sup}_{J\in P_f(I)} \int_U \operatorname*{Sup}_{g\in G} g_J d\nu_1^J$$

On a interverti les Sup et les g_J étant continues sur $K_J = \bigcup_{i\in J} K_i$ on applique [1], § 1, n° 6 sur K_J.

D'autre part $\operatorname*{Sup}_{g\in G} g_J = 1_{A\cap K_J}$ et on a donc :

$$\int_B \varphi_t(A)d\mu(t) = \operatorname*{Sup}_{J\in P_f(I)} \nu_1^J(A) = \nu_1(A) = \lambda(B \times A) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 8. CAS D'UNE MESURE IMAGE

Soit un espace topologique U muni d'une mesure de Radon. Soit $(T, \mathscr{T}')$ un espace mesurable et φ une application mesurable de $(U, B(U)_\nu)$ dans $(T, \mathscr{T}')$ ($B(U)_\nu$ désigne la tribu ν complétée de $B(U)$). Désignons par μ la mesure image de ν par φ :

$$\mu(A) = \nu[\varphi^{-1}(A)] \qquad \text{pour } A \in \mathscr{T}'$$

Soit $\mathscr{T}$ la tribu μ-complétée de $\mathscr{T}'$, Γ le graphe de φ dans $T \times U$, π et π' les projections :

$$\pi : T \times U \to T, \qquad \pi' : T \times U \to U$$

Pour $E \subset T \times U$ posons chaque fois que cela a un sens $\lambda(E) = \nu[\pi'(E \cap \Gamma)]$. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $T \times U$ pour lesquelles $\lambda(E_n)$ est définie c'est-à-dire pour lesquelles $\pi'(E_n \cap \Gamma) \in B(U)_\nu$ alors comme $\pi'\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \cap \Gamma\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi'(E_n \cap \Gamma)$, $\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$ est bien définie. De plus comme Γ est un graphe fonctionnel si les E_n sont disjoints il en est de même des $\pi'(E_n \cap \Gamma)$ d'où la σ-additivité de λ. Enfin pour la même raison si E^c est le complémentaire de E dans $T \times U$, $\pi'(E^c \cap \Gamma)$ est le complémentaire de $\pi'(E \cap \Gamma)$ dans U. λ est donc une mesure sur une tribu $\mathscr{S}$ de parties de $T \times U$. Soit $A \in B(U)_\nu$ et $B \in \mathscr{T}'$ on a : $\pi'(B \times A \cap \Gamma) = A \cap \phi^{-1}(B)$ et comme ϕ est mesurable pour $B(U)_\nu$ et $\mathscr{T}'$, $B \times A \in \mathscr{S}$.

Donc $\mathscr{S}$ contient $\mathscr{T}' \otimes B(U)_\nu$.

Les projections de λ sur U et sur T ne sont autres que ν et μ :

$$\lambda(T \times A) = \nu[\pi'(T \times A \cap \Gamma)] = \nu(A)$$
$$\lambda(B \times U) = \nu[\pi'(B \times U \cap \Gamma)] = \nu[\phi^{-1}(B)] = \mu(B)$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable pour $B(U)_\nu$ et $B(\mathbb{R})$.

En posant $\tilde{f}(t, x) = f(x)$ on obtient une fonction de $T \times U$ dans $\mathbb{R}$ mesurable pour $\mathscr{T}' \hat{\otimes}_\lambda B(U) \supset \mathscr{T} \otimes B(U)_\nu$ et $B(\mathbb{R})$.

Si $f = 1_A$ où $A \in B(U)_\nu$ alors $\tilde{f} = 1_{T\times A}$ et B μ-intégrable on a :

$$\int_{B\times U} f(t, x)d\lambda(t, x) = \lambda(B \times A) = \int_{\phi^{-1}B} f(x)d\nu(x)$$

On en déduit simplement que cette égalité est encore vraie pour f fonction mesurable en escalier puis pour f mesurable quelconque. Si on suppose de plus que f est intégrable sur tout ensemble intégrable $\tilde{f}$ est alors intégrable sur tout produit $B \times U(\mu(B) < +\infty)$ car on a

$$(\nu(\phi^{-1}(B)) = \mu(B) < +\infty)$$

et on peut appliquer les résultats des paragraphes 3 et 4.

COROLLAIRE. — *Soit* U *un espace topologique muni d'une mesure de Radon positive* ν, $(T, \mathcal{T}')$ *un espace mesurable abstrait,* ϕ *une application de* U *dans* T *mesurable pour* $B(U)_\nu$ *et* $\mathcal{T}'$, μ *la mesure image de* ν *par* ϕ, $\mathcal{T}$ *la tribu* μ*-complétée de* $\mathcal{T}'$. *On suppose que* $(T, \mathcal{T}, \mu)$ *est strictement localisable. Alors il existe une application* $\varphi(t \to \varphi_t)$ *de* T *dans l'ensemble des mesures de Radon sur* U *positives et de masse totale* ≤ 1, *telle que :*

Pour toute fonction f *de* U *dans* $\mathbb{R}$ *mesurable pour* $B(U)_\nu$ *et* $B(\mathbb{R})$ *et* ν*-intégrable sur toute partie* ν*-intégrable de* U *et tout* B μ*-intégrable on a :*

$$t \to \int_U f(x) d\varphi_t(x)$$

est définie μ*-p. p. et* μ*-mesurable*

$$\int_B \left[\int_U f(x) d\varphi_t(x) \right] d\mu(t) = \int_{\phi^{-1}(B)} f(x) d\nu(x)$$

il existe une classe unique de fonctions μ*-mesurables* $E(f \mid \Phi) = E(\tilde{f} \mid \pi)$ *telle que pour toute* $g \in E(f \mid \pi)$

$$\int_B g d\mu = \int_{\phi^{-1}(B)} f d\nu$$

L'application $t \to \int_U f(x) d\varphi_t(x)$ *appartient à* $E(f \mid \phi)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Intégration. Chapitre IX. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, p. 1343, Hermann, Paris, 1969.

[2] P. L. HENNEQUIN et A. TORTRAT, *Théorie des probabilités et quelques applications*, Masson, 1965.

[3] J. HOFFMANN-JØRGENSEN, Existence of conditional probabilities. *Math. Scand.*, t. **28**, 1971, p. 257-264.

[4] A. et C. IONESCU TULCEA, *Topics in the theory of lifting*. Springer-Verlag, n° 48, 1969.

[5] C. IONESCU TULCEA, Two theorems concerning the disintegration of measures. *Journal of mathematical analysis and applications*, t. **26**, 1969, p. 376-380.

[6] M. JIŘINA, Conditional probabilities on σ-algebras with countable basis. Article original en russe : *Journal Mathématique Tchécoslovaque*, t. **4**, n° 79, 1954, p. 372-380.

Traduction anglaise : *Selected Translations in Math. Statistics and Probability*, vol. **2**, 1962, p. 79-86.

[*7*] M. JIŘINA, On regular conditional probabilities. *Journal Mathématique Tchécoslovaque*, t. **9**, n° 84, 1959, p. 445-450.

[*8*] M. MÉTIVIER, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1968.

[*9*] J. PELLAUMAIL, Application de l'existence d'un relèvement à un théorème sur la désintégration des mesures. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Section B, Vol. III, n° 3, 1972, p. 211-215.

[*10*] J. PFANZAGL and W. PIERLO, Compact Systems of sets. *Lectures notes*, n° 16, Springer Verlag, 1966.

[*11*] M. VALADIER, Désintégration d'une mesure sur un produit. *C. R. Acad. Sci.*, t. **276**, 1973.

[*12*] M. VALADIER, *Comparaison de trois théorèmes de désintégration*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, Exposé n° 10.

[*13*] A. C. ZAANEN, *Integration* (Second edition). North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

(Manuscrit reçu le 14 avril 1975)