ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

D. Bosq

Une définition qualitative de l'indépendance et ses applications

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 3 (1975), p. 225-252

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_3_225_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 3, 1975, p. 225-252.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Une définition qualitative de l'indépendance et ses applications

par

D. BOSQ

Université de Lille I.
Département de Mathématiques. BP 36, 59650 Villeneuve-d'Ascq

RÉSUMÉ. — On propose une réponse à un problème posé par L. Savage en définissant une notion d'indépendance sur les Algèbres de probabilité qualitative. On étudie les liens entre cette indépendance et l'indépendance stochastique et on obtient notamment un critère qualitatif d'indépendance stochastique. La principale application est un critère qualitatif de normalité.

SUMMARY. — A definition of independence on Probability qualitative Algebras is given. The main result is a qualitative criterion of normality.

INTRODUCTION

Il est de notoriété publique que le modèle probabiliste classique n'est pas toujours bien adapté aux phénomènes pour lesquels les probabilités envisagées ne sont pas des limites de fréquences. Certains statisticiens ont alors été conduits à supprimer purement et simplement le modèle probabiliste de leurs travaux. D'autres, sans prendre une position aussi extrême, ont jugé utile d'assouplir les modèles classiques ; en particulier, B. De Finetti et L. Savage qui considèrent une Probabilité comme un préordre total sur l'Algèbre $\mathscr{A}$ des événements ; ce point de vue est lié au fait qu'un observateur a, dans bien des cas, une idée *a priori*, non nécessairement quantifiable sur les événements considérés.

La plupart des travaux sur les Probabilités dites « qualitatives » sont consacrés à la recherche de conditions de compatibilité avec une Probabilité quantitative. Sans négliger l'importance de ce problème, il nous paraît cependant utile d'insister sur l'intérêt d'un développement autonome de la Théorie. Dans ce contexte une des premières questions qui se pose est celle d'une définition de l'indépendance ; L. Savage écrit à ce sujet dans [*1*], p. 91 : « ... it would be desirable, if possible, to find a simple qualitative personal description of independence between events ».

Nous avons tenté, dans ce travail, de donner une réponse au problème posé par L. Savage : étant donné deux sous-classes $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathscr{A}$, on dira que $\mathscr{B}$ est qualitativement indépendante de $\mathscr{C}$ si « l'opinion » qu'un observateur a sur $\mathscr{B}$ n'est pas modifiée par la réalisation d'un événement non nul de $\mathscr{C}$; autrement dit si le préordre induit par un événement non nul de $\mathscr{C}$ coïncide, sur $\mathscr{B}$, avec le préordre initial.

La première partie est consacrée à des généralités sur les probabilités qualitatives. Dans une deuxième partie nous donnons certaines propriétés élémentaires de l'indépendance qualitative. Dans la suite, nous étudions ses relations avec d'autres types d'indépendance ; nous obtenons notamment un critère qualitatif d'indépendance stochastique. Comme application nous donnons une forme qualitative d'un critère de normalité bien connu. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous définissons une indépendance qualitative globale et nous donnons comme application un résultat relatif à la loi de Cauchy.

La plupart des résultats présentés dans ce travail ont été annoncés dans [*11*] et [*12*].

I. PROBABILITÉS QUALITATIVES

§ 1. Définitions et notations

DÉFINITION. — *Soit* Ω *un ensemble non vide et soit* $\mathscr{A}$ *une Algèbre de parties de* Ω. *Une* probabilité qualitative *sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *est une relation binaire sur* $\mathscr{A}$, *notée* $\leqslant$, *et vérifiant les axiomes suivants :*

C_0 — $\varnothing \leqslant \Omega$ *et* $\Omega \not\leqslant \varnothing$

C_1 — $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \leqslant B$ *ou* $B \leqslant A$

C_2 — $A, B, C \in \mathscr{A}\,;\ A \leqslant B\,;\ B \leqslant C \Rightarrow A \leqslant C$

C_3 — $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \varnothing \leqslant A$

C_4 — $A, B, C \in \mathscr{A}\,;\ A \cap (B \cup C) = \varnothing \Rightarrow [B \leqslant C \Leftrightarrow A \cup B \leqslant A \cup C]$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ *est une* Algèbre de Probabilité Qualitative (A. P. Q.).

NOTATIONS. — Dans la suite les notations $\geqslant$, $>$, $<$ sont employées dans leur sens habituel. $A \sim B$ signifie $A \leqslant B$ et $B \leqslant A$. Sauf quand il y a ambiguïté, $\leqslant$ sert aussi à désigner la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}$.

Les deux axiomes suivants sont souvent utiles :

C_5 — $\mathscr{A}$ possède un sous-ensemble dénombrable $\mathscr{D}$ *dense pour le préordre* $\leqslant$ c'est-à-dire tel que

$$A, B \in \mathscr{A} - \mathscr{D} \,;\, A < B \Rightarrow \exists D \in \mathscr{D} : A \leqslant D \leqslant B .$$

C_6 — Si $\mathscr{A}$ est une tribu et si (A_n) est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, soit B un événement vérifiant $B \leqslant A_n$ pour tout n, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \geqslant B$ *(continuité monotone)*.

Si $\mathscr{A}$ est une tribu et si $\leqslant$ est une probabilité qualitative sur $\mathscr{A}$ qui vérifie C_6, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ s'appelle une *σ-algèbre de probabilité qualitative* (σ-A. P. Q.).

Compatibilité et presque compatibilité :

Une fonction numérique P, définie sur $\mathscr{A}$, est dite *presque compatible* avec $\leqslant$ si

$$A, B \in \mathscr{A} \,;\, A \leqslant B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$$

P est dite *compatible* avec $\leqslant$ si

$$A, B \in \mathscr{A} \,;\, A \leqslant B \Leftrightarrow P(A) \leqslant P(B) .$$

On trouvera une synthèse sur la compatibilité dans [*4*], p. 21-28.

§ 2. **Atomes et variables aléatoires**

On dit que l'événement A de l'algèbre de probabilité qualitative $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ est un atome si $A > \emptyset$ et

$$B \in \mathscr{A},\ B \subset A \Rightarrow B \sim A \quad \text{ou} \quad B \sim \emptyset$$

D'autre part étant donné une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ et à valeurs dans $(E, \mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ est une algèbre de parties de E, on dira que $a \in E$ est un atome de X si $(X = a) \in \mathscr{A}$ et $(X = a) > \emptyset$.

Le préordre sur $\mathscr{B}$ défini par $B \underset{X}{\leqslant} B' \Leftrightarrow X^{-1}(B) \leqslant X^{-1}(B')$ définit une probabilité qualitative sur $(E, \mathscr{B})$ que nous appellerons la loi qualitative de X. Remarquons que si $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ est une σ-algèbre de probabilité qualitative, il en est de même pour $(E, \mathscr{B}, \leqslant)$ si $\mathscr{B}$ est une tribu.

Dans ces conditions il est clair que si a est un atome de X, $\{ a \}$ est un atome de $\underset{\mathrm{X}}{\leqslant}$. Le lemme suivant fournit une réciproque de cette proposition.

LEMME 1. — *Soit* $(\mathrm{E}, \mathscr{B}_{\mathrm{E}})$ *un espace topologique métrisable et séparable muni de sa tribu Borélienne et soit* $\leqslant$ *un préordre sur* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ *tel que* $(\mathrm{E}, \mathscr{B}_{\mathrm{E}}, \leqslant)$ *soit une* σ*-algèbre de probabilité qualitative. Alors si* A *est un atome de* $\leqslant$, A *contient un point* a *tel que* $\{ a \} \sim \mathrm{A}$.

Démonstration. — Soit d une distance compatible avec la topologie de E et soit $[(\mathrm{B}_{in}, i \in \mathbb{N}^*), n \in \mathbb{N}^*]$ une suite de partitions de E en Boréliens de diamètres respectifs $\leqslant \frac{1}{n}$.

De $\mathrm{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_{i1})$ on déduit l'existence d'un entier j_1 unique tel que $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_{j_1 1} \sim \mathrm{A}$. De $\mathrm{A}_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_{i2})$ on déduit de même l'existence d'un j_2 unique tel que $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_{j_2 2} \sim \mathrm{A}$. De proche en proche on définit ainsi une suite (A_n) de Boréliens inclus dans A, décroissante pour l'inclusion et telle que $\mathrm{A}_n \sim \mathrm{A}$ pour tout n. Par continuité monotone on en déduit que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n \sim \mathrm{A}$ mais comme A_n a un diamètre $\leqslant \frac{1}{n}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$ est un ensemble non vide de diamètre nul donc réduit à un point.

§ 3. Construction d'une probabilité qualitative par prolongement

Pour terminer cette première partie nous donnons une proposition qui est une forme qualitative d'un théorème de prolongement de E. Marczewski.

PROPOSITION 1. — *Soit* Ω *un ensemble non vide et soit* $\mathscr{C}$ *une classe de parties de* Ω. *On suppose que* $\mathscr{C}$ *est une classe d'ensembles indépendants au sens ensembliste* ([1]) *et on se donne un préordre total* $\leqslant$ *sur* $\mathscr{C}$.

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\leqslant$ *se prolonge en une probabilité qualitative compatible avec une probabilité additive sur l'algèbre* $a(\mathscr{C})$ *engendrée par* $\mathscr{C}$ *est que* $\mathscr{C}$ *possède un ensemble dénombrable dense pour le préordre* $\leqslant$.

([1]) Pour la définition de cette notion voir [*8*], p. 16.

Démonstration :

— *Condition suffisante :* soit Γ l'ensemble quotient de $\mathscr{C}$ par la relation d'équivalence $\sim$ et soit $\preccurlyeq$ l'ordre total induit sur Γ par $\leqslant$.

$\mathscr{D}$ désignant un sous-ensemble dénombrable de $\mathscr{C}$ dense pour le préordre $\leqslant$, posons :

$$\Delta = \{ \mathscr{A} : \mathscr{A} \in \Gamma, \exists \mathrm{D} \in \mathscr{D} \cap \mathscr{A} \} ;$$

l'application de $\mathscr{D}$ dans Δ définie par $\mathrm{D} \to$ classe de D étant surjective, Δ est dénombrable.

D'autre part, Δ est dense dans Γ pour l'ordre $\preccurlyeq$ [2] car si $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \Gamma - \Delta$; $\mathscr{A} < \mathscr{B}$ cela signifie que $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$ entraînent $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{C} - \mathscr{D}$; dans ces conditions il existe $\mathrm{D} \in \mathscr{D}$ tel que $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{D} \leqslant \mathrm{B}$, on en déduit $\mathscr{A} \preccurlyeq$ classe de $\mathrm{D} \preccurlyeq \mathscr{B}$ mais classe de $\mathrm{D} \in \Delta$ donc $\mathscr{A} \prec$ classe de $\mathrm{D} \prec \mathscr{B}$.

Comme Γ admet un sous-ensemble dénombrable dense on en déduit qu'il est isomorphe à une sous-chaîne de $\mathbb{R}$ [3]. Soit alors ψ un isomorphisme de Γ sur $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$, et soit u l'application canonique de $\mathscr{C}$ sur Γ, de

$$\mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \Leftrightarrow \text{cl. A} \preccurlyeq \text{cl. B} \Leftrightarrow \psi[\text{cl. A}] \leqslant \psi[\text{cl. B}]$$

on déduit que $\psi \circ u$ est une fonction numérique compatible avec $\leqslant$. On ne restreint pas la généralité en supposant que $\psi \circ u$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

On se trouve alors dans les conditions d'application du théorème de Marczewski ([*8*], p. 18) ce qui permet d'affirmer l'existence d'une probabilité additive sur $a(\mathscr{C})$ qui prolonge $\psi \circ u$ et qui définit donc une probabilité qualitative qui prolonge $\leqslant$.

— *Condition nécessaire :* soit $\underset{1}{\leqslant}$ la probabilité qualitative qui prolonge $\leqslant$ à $a(\mathscr{C})$. L'hypothèse de compatibilité pour $\underset{1}{\leqslant}$ entraîne que Γ est isomorphe à une sous-chaîne de $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème 2, p. 32 de [*9*], qu'il admet un ensemble dénombrable dense pour l'ordre $\preccurlyeq$. Soit Δ_1 un tel ensemble ; d'après l'axiome du choix on peut définir une fonction de choix f de Δ_1 dans $\mathscr{C}$ telle que $\forall \mathscr{A} \in \Delta_1, f(\mathscr{A}) \in \mathscr{A}$. Posons $f(\Delta_1) = \mathscr{D}_1$: $\mathscr{D}_1$ est dénombrable.

Montrons pour terminer que $\mathscr{D}_1$ est dense dans $\mathscr{C}$ pour le préordre $\leqslant$: soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{C} - \mathscr{D}_1$ tels que $\mathrm{A} < \mathrm{B}$. Si cl. $\mathrm{A} \in \Delta_1$ il existe $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_1$ tel que $\mathrm{A} \sim \mathrm{D}$ donc $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{D} < \mathrm{B}$; si cl. $\mathrm{B} \in \Delta_1$ il existe $\mathrm{D}' \in \mathscr{D}_1$ tel que $\mathrm{B} \sim \mathrm{D}'$ donc $\mathrm{A} < \mathrm{D}' \leqslant \mathrm{B}$; enfin si cl. A, cl. $\mathrm{B} \notin \Delta_1$ il existe $\mathscr{A} \in \Delta_1$ tel que cl. $\mathrm{A} < \mathscr{A} <$ cl. B donc $\mathrm{A} < f(\mathscr{A}) < \mathrm{B}$ ce qui achève la démonstration.

[2] Au sens de [*9*], p. 31.

[3] [*9*] théorème 2, p. 32.

II. INDÉPENDANCE QUALITATIVE DE DEUX CLASSES D'ÉVÉNEMENTS

§ 1. Définition. Critère d'indépendance qualitative

L. J. Savage dans [1], p. 43-44 définit la *probabilité qualitative conditionnelle* de la façon suivante :

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ une algèbre de probabilité qualitative et soit $C \in \mathscr{A}$, $C > \emptyset$, la probabilité qualitative conditionnée par C est notée $\underset{C}{\leqslant}$ et se définit par

$$A \underset{C}{\leqslant} A' \Leftrightarrow A \cap C \leqslant A' \cap C \qquad (A, A' \in \mathscr{A})$$

il pose ensuite le problème de la définition d'une « indépendance qualitative » ; nous proposons la définition suivante :

DÉFINITION. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ *une algèbre de probabilité qualitative et soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *deux classes non vides d'événements.*

On dira que $\mathscr{B}$ *est qualitativement indépendante de* $\mathscr{C}$ *(par rapport à* $\leqslant$*) si* $\leqslant$ *et* $\underset{C}{\leqslant}$ *coïncident sur* $\mathscr{B}$ *pour tout* $C \in \mathscr{C}$ *tel que* $C > \emptyset$.

On dira que $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *sont qualitativement indépendantes (par rapport à* $\leqslant$*) si* $\mathscr{B}$ *est qualitativement indépendante de* $\mathscr{C}$ *et si* $\mathscr{C}$ *est qualitativement indépendante de* $\mathscr{B}$.

NOTATION. — « $\mathscr{B}$ est qualitativement indépendante de $\mathscr{C}$ » sera noté $\mathscr{B}$.Q.I.$\mathscr{C}$. « $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont qualitativement indépendantes » sera noté $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$.Q.I.

Remarque. — Il est bien clair que $\mathscr{B}$.Q.I.C $\not\Rightarrow$ $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$.Q.I. comme le montre l'*exemple 1 :* $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, $\leqslant$ est définie par la probabilité quantitative P telle que $P(\omega_i) = i/20$, $i = 1, 2, 3$. Alors si $\mathscr{B} = a(\{ \omega_1, \omega_2 \})$, $\mathscr{C} = a(\{ \omega_2, \omega_3 \})$, $\mathscr{B}$.Q.I.$\mathscr{C}$. mais l'on n'a pas $\mathscr{C}$.Q.I.$\mathscr{B}$.

LEMME 2.

1) $\mathscr{B}$.Q.I.$\mathscr{C}$., $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ *p. s.* (4), $\mathscr{C}' = \mathscr{C}$ *p. s.* $\Rightarrow$ $\mathscr{B}'$Q.I.$\mathscr{C}'$.

2) *Une algèbre* $\mathscr{B}$ *vérifie* $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$Q.I., $\forall \mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ *si et seulement si elle est presque sûrement égale à l'algèbre triviale* $\{ \emptyset, \Omega \}$.

Démonstration. — Elémentaire.

(4) $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ p. s. signifie $\forall B' \in \mathscr{B}'$, $\exists B \in \mathscr{B}$ tel que $B \Delta B' \sim \emptyset$.

NOTATIONS. — Soit $\mathscr{E}$ une classe d'événements, on désigne par $a(\mathscr{E})$ l'algèbre engendrée par $\mathscr{E}$, et on pose $\mathscr{E}^* = \{ A : A \in \mathscr{E}, A > \emptyset \}$.

PROPOSITION 2 *(Critère d'indépendance qualitative)*

a) *Soient* $\mathscr{S}_1$ *et* $\mathscr{S}_2$ *deux semi-algèbres d'événements. Alors*

$$\mathscr{S}_2 \mathrm{Q.I.} \mathscr{S}_1 \Rightarrow \mathscr{S}_2 \mathrm{Q.I.} a(\mathscr{S}_1)$$

b) *En particulier*

$$(a(\mathscr{S}_1), a(\mathscr{S}_2))\mathrm{Q.I.} \Leftrightarrow a(\mathscr{S}_2)\mathrm{Q.I.}\mathscr{S}_1 \quad et \quad a(\mathscr{S}_1)\mathrm{Q.I.}\mathscr{S}_2$$

Démonstration. — On pose

$$\mathscr{D} = \{ D : D \in \mathscr{A}, D > \emptyset ; A \leqslant B \Leftrightarrow D \cap A \leqslant D \cap B (A, B \in \mathscr{S}_2) \}$$

Par hypothèse $\mathscr{D}$ contient $\mathscr{S}_1^*$. Montrons que $\mathscr{D}$ est stable pour la réunion finie disjointe ; soient $D, D' \in \mathscr{D}$ avec $D \cap D' = \emptyset$. Il est clair que $D \cup D' > \emptyset$; d'autre part :

$$A, B \in \mathscr{S}_2 ; A \leqslant B \Rightarrow (D \cap A) \cup (D' \cap A) \leqslant (D \cap B) \cup (D' \cap B)$$

(cf. [1], 5.*a*., p. 32)

inversement

$$(D \cup D') \cap A \leqslant (D \cup D') \cap B \Rightarrow D \cap A \leqslant D \cap B \quad \text{ou} \quad D' \cap A \leqslant D' \cap B$$
$$\Rightarrow A \leqslant B$$

(cf. [1], 5.*b*., p. 33)

donc

$$A \leqslant B \Leftrightarrow (D \cup D') \cap A \leqslant (D \cup D') \cap B \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On en déduit que $\mathscr{D}$ contient la classe des réunions finies disjointes de parties non nulles de $\mathscr{S}_1$; cette classe étant presque sûrement égale à $a(\mathscr{S}_1)^*$ la démonstration de *a*) est terminée.

b) est une conséquence immédiate de *a*) puisque $a(\mathscr{S}_1)$ et $a(\mathscr{S}_2)$ sont des semi-algèbres.

§ 2. Relations avec l'indépendance ensembliste et l'indépendance stochastique

PROPOSITION 3.

1) *Si* $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$Q.I. *(ou si* $\mathscr{B}$.Q.I.$\mathscr{C}$*) et si* $\emptyset \in \mathscr{B}$ *alors* $\mathscr{B}^*$ *et* $\mathscr{C}^*$ *sont indépendantes au sens ensembliste* ([5]).

2) *Si* $\leqslant$ *possède une probabilité additive* P *compatible et si* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *sont stochastiquement indépendantes par rapport à* P, *alors* $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$Q.I.

3) *Les deux réciproques sont fausses.*

([5]) Pour la définition de l'indépendance ensembliste entre algèbres (qui s'étend aisément aux classes quelconques) voir [3], p. 39.

Démonstration.

1) Soient $B \in \mathscr{B}^*$ et $C \in \mathscr{C}^*$ ([6]), comme $B > \emptyset$ et $\emptyset \in \mathscr{B}$ l'indépendance qualitative de $\mathscr{B}$ par rapport à $\mathscr{C}$ et le fait que $C > \emptyset$ impliquent $B \cap C > \emptyset \cap C = \emptyset$ donc $B \cap C \neq \emptyset$. C. Q. F. D.

2) Si $\mathscr{B}$ (ou $\mathscr{C}$) ne contient que des événements nuls, le résultat cherché est évident. Sinon soient $C \in \mathscr{C}^*$; $B, B' \in \mathscr{B}$ alors $P(C) > 0$ et l'on a la suite d'équivalences :

$$B \leqslant B' \Leftrightarrow P(B) \leqslant P(B') \Leftrightarrow P(B)P(C) \leqslant P(B')P(C) \Leftrightarrow P(B \cap C) \leqslant P(B' \cap C) \Leftrightarrow B \cap C \leqslant B' \cap C \Leftrightarrow B \underset{C}{\leqslant} B'$$

donc $\mathscr{B}.\mathrm{Q.I.}\mathscr{C}$. On démontre de même que $\mathscr{C}.\mathrm{Q.I.}\mathscr{B}$.

3) Dans l'exemple 1, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont indépendantes au sens ensemblistes mais l'on n'a pas $\mathscr{C}.\mathrm{Q.I.}\mathscr{B}$.

En reprenant l'exemple 1 avec $P(\omega_1) = 2/10$, $P(\omega_2) = 1/10$, $P(\omega_3) = 3/10$, $P(\omega_4) = 4/10$ on obtient $(\mathscr{B}, \mathscr{C}).\mathrm{Q.I.}$ alors que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ ne sont pas stochastiquement indépendantes.

Remarques.

1) Des conditions pour que l'indépendance qualitative implique l'indépendance stochastique seront étudiées plus loin.

2) Le résultat du 2) reste valable quand on suppose seulement que la restriction de $\leqslant$ à $a(\mathscr{B} \cup \mathscr{C})$ possède une probabilité additive compatible.

§ 3. **Relation avec l'indépendance au sens de Fine**

T. L. Fine dans [*4*] a proposé une axiomatique de l'indépendance entre événements. L'indépendance, notée $\perp\!\!\!\perp$, est une relation binaire sur $\mathscr{A}$ vérifiant les axiomes suivants :

I_1 — $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow B \perp\!\!\!\perp A$

I_2 — $A \perp\!\!\!\perp \Omega$

I_3 — $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c$

I_4 — $B \cap C = \emptyset,\ A \perp\!\!\!\perp B,\ A \perp\!\!\!\perp C \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp (B \cup C)$

$$I_5 - \begin{cases} A \perp\!\!\!\perp B,\ C \perp\!\!\!\perp D,\ B \geqslant D \Rightarrow (A \geqslant C \Rightarrow A \cap B \geqslant C \cap D) \\ A \perp\!\!\!\perp B,\ C \perp\!\!\!\perp D,\ B > D \Rightarrow (A > C \Rightarrow A \cap B > C \cap D) \end{cases}$$

La proposition suivante précise les liens entre $\perp\!\!\!\perp$ et l'indépendance qualitative entre deux événements, cette dernière étant définie comme l'indépendance des algèbres qu'ils engendrent.

([6]) Si $\mathscr{B}^*$ ou $\mathscr{C}^*$ est vide la propriété est triviale.

PROPOSITION 4.

1) *Si* $\leqslant$ *vérifie* $C_1 - C_5$ *et si* $\perp\!\!\!\perp$ *vérifie* I_1, I_2, I_3, I_5 *alors* $A \perp\!\!\!\perp B$ *entraîne* $[a(A), a(B)]$Q.I.

2) *L'indépendance qualitative entre deux événements vérifie* I_1, I_2, I_3 *mais ni* I_4, *ni* I_5.

3) *L'indépendance qualitative vérifie :*

$$I'_4 — B \cap C = \emptyset,\ a(A)\text{Q.I.}(B),\ a(A).\text{Q.I.}(C) \Rightarrow a(A).\text{Q.I.}(B \cup C)$$
$$I'_5 — a(B).\text{Q.I.}(A),\ a(D).\text{Q.I.}(C),\ A \geqslant C\ (\text{resp. } A > C),\ B^c \leqslant B,$$
$$D \leqslant D^c \Rightarrow A \cap B \geqslant C \cap D \qquad (\text{resp. } A \cap B > C \cap D).$$

Démonstration.

1) D'après I_1 il suffit de montrer que $a(B)$.Q.I.$a(A)$. D'autre part si $A \sim \emptyset$ ou $A^c \sim \emptyset$ (resp. $B \sim \emptyset$ ou $B^c \sim \emptyset$)$a(A)$ (resp. $a(B)$) est presque sûrement égale à l'algèbre triviale et le lemme 1 permet de conclure immédiatement. Finalement, puisque $a(A) = a(A^c)$ et $a(B) = a(B^c)$ on pourra toujours supposer que $\emptyset < A \leqslant A^c < \Omega$ et $\emptyset < B, B^c < \Omega$.

. Supposons maintenant que $\emptyset < B \leqslant B^c < \Omega$. Alors, A' désignant A ou A^c, les relations $A' \perp\!\!\!\perp B^c$, $A' \perp\!\!\!\perp B$, $B^c \geqslant B$, $A' \geqslant A'$ et I_5 impliquent $A' \cap B^c \geqslant A' \cap B$.

D'autre part, comme I_2 et I_3 impliquent $\emptyset \perp\!\!\!\perp \emptyset$, les relations $A' \perp\!\!\!\perp B'$, $\emptyset \perp\!\!\!\perp \emptyset$, $A' > \emptyset$, $B' > \emptyset$ et I_5 impliquent $A' \cap B' > \emptyset$ (B' désignant B ou B^c).

Enfin comme $A' = (A' \cap B) \cup (A' \cap B^c)$, $A' \cap B > \emptyset$ et $A' \cap B^c > \emptyset$ entraînent $A' \cap B^c < A'$.

Par conséquent $\emptyset < A' \cap B \leqslant A' \cap B^c < A'$.

. Inversement, montrons que $A' \cap B^c \geqslant A' \cap B$ implique $B^c \geqslant B$. D'après le théorème 10, p. 33 de [*4*] il existe P compatible et G telles que $P(A' \cap B^c) = G(P(A'), P(B^c))$ et $P(A' \cap B) = G(P(A'), P(B))$. Donc $A' \cap B^c \geqslant A' \cap B$ implique $G(P(A'), P(B^c)) \geqslant G(P(A'), P(B))$. Mais $P(A') > 0$ donc $y \rightarrow G(P(A'), y)$ est strictement croissante ; on en déduit $P(B^c) \geqslant P(B)$ donc $B^c \geqslant B$ et la démonstration du 1) est terminé.

2) Il est clair que l'indépendance qualitative entre deux événements vérifie I_1, I_2, I_3.

En revanche I_4 n'est pas vérifié comme le montre l'exemple suivant : $\Omega = \{ \omega_i ; 1 \leqslant i \leqslant 6 \}$; $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$; $\leqslant$ définie par la probabilité P telle que $P(\omega_1) = P(\omega_4) = 3/27$, $P(\omega_2) = P(\omega_3) = 6/27$, $P(\omega_5) = 4/27$, $P(\omega_6) = 5/27$; $A = \{ \omega_2, \omega_3, \omega_5 \}$, $B = \{ \omega_1, \omega_2 \}$, $C = \{ \omega_3, \omega_4 \}$.

On peut voir qu'il en est de même pour I_5 en prenant le même Ω, P tel que $P(\omega_1) = 47/375$, $P(\omega_2) = 71/375$, $P(\omega_3) = 80/375$, $P(\omega_4) = 56/375$,

$P(\omega_5)=59/375$, $P(\omega_6)=62/375$; $A=\{\omega_1,\omega_2\}$, $B=\{\omega_1,\omega_3\}$, $C=\{\omega_4,\omega_5\}$, $D=\{\omega_4,\omega_6\}$.

3) Pour montrer I'_4 on peut, comme au 1), éliminer les cas où $A \sim \emptyset$ ou $A \sim \Omega$. De même, on supposera que $\emptyset < B$ et que $\emptyset < C$. Dans ces conditions :

— $B > \emptyset \Rightarrow A' \cap B > \emptyset \Rightarrow A' \cap (B \cup C) > \emptyset$

— $A' \cap B < B$, $A' \cap C < C$, $B \cap C = \emptyset \Rightarrow A' \cap (B \cup C) < B \cup C$

— $A \leqslant A^c \Rightarrow A \cap B \leqslant A^c \cap B$, $A \cap C \leqslant A^c \cap C$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \leqslant A^c \cap (B \cup C) \quad (\text{car } (A^c \cap B) \cap (A^c \cap C) = \emptyset)$$

— $A \cap (B \cup C) \leqslant A^c \cap (B \cup C) \Rightarrow A \cap B \leqslant A^c \cap B$ ou $A \cap C \leqslant A^c \cap C$

$$\Rightarrow A \leqslant A^c$$

et la démonstration de I'_4 est terminée.

. Montrons enfin I'_5 : de $A \geqslant C \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \geqslant (C \cap D) \cup (C \cap D^c)$ on tire $A \cap B \geqslant C \cap D$ ou $A \cap B^c \geqslant C \cap D^c$.

Alors si $A \cap B < C \cap D$ cela implique $A \cap B^c \geqslant C \cap D^c$. Or, de $B^c \leqslant B$ on tire $A \cap B^c \leqslant A \cap B$ d'où $A \cap B^c < C \cap D$ donc $C \cap D^c < C \cap D$ et d'après l'indépendance qualitative de $a(D)$ par rapport à C il vient $D^c < D$ qui est une contradiction.

Si $A > C$ on montre d'une manière analogue que $A \cap B > C \cap D$ et la démonstration est terminée.

§ 4. Un critère qualitatif d'indépendance stochastique

Dans ce paragraphe, nous désignerons par $\mathscr{M}(\mathscr{T})$ l'ensemble (éventuellement vide) des probabilités additives définies sur la sous-algèbre $\mathscr{T}$ de $\mathscr{A}$ et presque compatibles avec la restriction de $\leqslant$ à $\mathscr{T}$.

D'autre part nous dirons que $\mathscr{B}$ *est presque qualitativement indépendante de* $\mathscr{C}$ si

$$B, B' \in \mathscr{B} ; C \in \mathscr{C}, C > \emptyset, B \leqslant B' \Rightarrow B \cap C \leqslant B' \cap C \qquad (1)$$

Il est clair que $\mathscr{B}.Q.I.\mathscr{C} \Rightarrow (1)$.

PROPOSITION 5. — *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux sous-algèbres de $\mathscr{A}$. On fait les hypothèses suivantes :*

a) *$\mathscr{B}$ est presque qualitativement indépendante de $\mathscr{C}$.*

b) *Il existe une sous-algèbre $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$, contenant $a(\mathscr{B} \cup \mathscr{C})$ et telle que $\mathscr{M}(\mathscr{A}') \neq \emptyset$.*

Alors si δ désigne le diamètre de $\mathscr{M}(\mathscr{B})$ pour la distance en variations, on a l'inégalité :

$$\sup_{B \in \mathscr{B}} |P(B \cap C) - P(B)P(C)| \leqslant \delta P(C), \ \forall C \in \mathscr{C}, \ \forall P \in \mathscr{M}(\mathscr{A}') \qquad (2)$$

En particulier, si $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ n'a qu'un élément, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont stochastiquement indépendantes par rapport à tout élément de $\mathcal{M}(\mathcal{A}')$.

Démonstration. — Rappelons tout d'abord que la distance en variations de deux probabilités additives P_1 et P_2 sur une algèbre $\mathcal{T}$ est définie par la formule

$$d_v(P_1, P_2) = \sup_{A \in \mathcal{T}} | P_1(A) - P_2(A) | .$$

Remarquons d'autre part que δ est bien défini puisque

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}') \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B}) \neq \emptyset .$$

Cela dit soient $P \in \mathcal{M}(\mathcal{A}')$ et $C \in \mathcal{C}$. Si $P(C) = 0$ l'inégalité annoncée est évidente, nous supposerons donc que $P(C) > 0$. Comme $P \in \mathcal{M}(\mathcal{A}')$ il vient alors $C > \emptyset$ et l'hypothèse *a*) permet d'écrire :

$$B, B' \in \mathcal{B} ; B \leqslant B' \Rightarrow B \cap C \leqslant B' \cap C$$

Comme $B \cap C$ et $B' \cap C \in \mathcal{A}'$ on en déduit l'implication

$$B, B' \in \mathcal{B} ; B \leqslant B' \Rightarrow P(B \cap C) \leqslant P(B' \cap C)$$

ou encore

$$B, B' \in \mathcal{B} ; B \leqslant B' \Rightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \leqslant \frac{P(B' \cap C)}{P(C)}$$

ce qui montre que la restriction de $P(. | C)$ à $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Comme la restriction de P à $\mathcal{B}$ est aussi un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, on peut écrire :

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} | P(B) - P(B | C) | \leqslant \delta$$

d'où le résultat annoncé.

Dans le cas particulier où $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ n'a qu'un élément, cet élément est nécessairement la restriction à $\mathcal{B}$ de tous les éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{A}')$. Le fait que $\delta = 0$ et l'inégalité (2) permettent donc d'affirmer l'indépendance stochastique de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ par rapport à tout élément de $\mathcal{M}(\mathcal{A}')$. C. Q. F. D.

Exemple. — Si $\leqslant$ et sa restriction à $\mathcal{B}$ sont fines et si $\mathcal{B}.\mathrm{Q.I.}\mathcal{C}$. alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont stochastiquement indépendantes par rapport à l'unique probabilité additive P presque compatible avec $\leqslant$ ([7]).

Remarque. — On peut dans la proposition 5 remplacer les hypothèses de presque compatibilité par des hypothèses de compatibilité. On obtient en particulier le :

COROLLAIRE 1. — *Si*

α) $\leqslant$ *est compatible avec une probabilité additive* P.

([7]) Pour l'existence et l'unicité de P voir [*6*], p. 1588.

β) La restriction de P *à* $\mathscr{B}$ *est l'unique probabilité additive compatible avec la restriction de* $\leqslant$ *à* $\mathscr{B}$.

γ) $\mathscr{B}$ *est qualitativement indépendante de* $\mathscr{C}$.

Alors $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *sont* P*-stochastiquement indépendantes.*

Il est clair que les résultats ci-dessus s'adaptent immédiatement au cas où les probabilités compatibles ou presque compatibles considérées sont σ-additives. Si $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{A}'$ sont des tribus et si les probabilités presque compatibles sont σ-additives on a notamment le

COROLLAIRE 2. — *Soient* r *et* s *deux réels positifs tels que* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. *Soit* X *une v. a. r.* $\mathscr{B}$*-mesurable et* Y *une v. a. r.* $\mathscr{C}$*-mesurable telles que* $E(|X|^r) < +\infty$ *et* $E(|Y|^s) < \infty$, *alors :*

$$|E(XY) - EX.EY| \leqslant 2\delta^{1/r}[E(|X|^r)]^{1/r}.[E(|Y|^s)]^{1/s}$$

Démonstration. — Tout à fait analogue à celle du lemme 1, p. 170 de [5].

Remarque. — L'inégalité (2) est une condition d'indépendance stochastique « à δ près », cependant elle ne constitue pas une condition suffisante de presque indépendance qualitative.

Pour terminer ce paragraphe nous allons voir que sous des hypothèses de non atomicité on obtient des critères d'indépendance plus précis :

LEMME 3. — *Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *deux sous-algèbres de* $\mathscr{A}$. *On suppose que la restriction de* $\leqslant$ *à* $\mathscr{B}$ *vérifie la condition suivante*

$$B, B' \in \mathscr{B}, B' \leqslant B \Rightarrow \exists B'' \in \mathscr{B} : B'' \subset B, B'' \sim B' \quad (\textit{condition } (a)).$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{B}$ *soit qualitativement indépendante de* $\mathscr{C}$ *est que*

$$B, B' \in \mathscr{B}, C \in \mathscr{C}, C > \emptyset \Rightarrow (B \sim B' \Leftrightarrow B \cap C \sim B' \cap C) \quad (\textit{condition } (b)).$$

Démonstration.

. Il est clair que b est une condition nécessaire pour que $\mathscr{B}$.Q.I.$\mathscr{C}$.

. Soit $C \in \mathscr{C}$, $C > \emptyset$ et soient B, B' avec $B \leqslant B'$. D'après (a) on peut trouver $B'' \in \mathscr{B}$ tel que $B'' \subset B'$ et $B'' \sim B$; (b) implique alors $B'' \cap C \sim B \cap C$ or $B'' \cap C \subset B' \cap C$ donc $B'' \cap C \leqslant B' \cap C$ et finalement $B \cap C \leqslant B' \cap C$.

. Inversement montrons que $B \cap C \leqslant B' \cap C$ entraîne $B \leqslant B'$: si $B' < B$ la première partie de la démonstration permet d'affirmer que $B' \cap C \leqslant B \cap C$ on en déduit $B' \cap C \sim B \cap C$ d'où, en vertu de (b), $B' \sim B$ ce qui est contradictoire, on a donc bien $B \leqslant B'$. C. Q. F. D.

Exemple. — Si la restriction de $\leqslant$ à $\mathscr{B}$ est fine la condition (a) est vérifiée.

COROLLAIRE 3. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé, soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *deux sous-tribus de* $\mathscr{A}$*. Alors, si la restriction de* P *à* $\mathscr{B}$ *est non atomique, une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *soient stochastiquement indépendantes est que*

$$\mathrm{B}, \mathrm{B}' \in \mathscr{B} ; \mathrm{C} \in \mathscr{C} ; \mathrm{P}(\mathrm{C}) > 0 \Rightarrow [\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}') \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}' \cap \mathrm{C})] \quad (\mathscr{I})$$

Démonstration. — La probabilité qualitative $\underset{\mathrm{P}}{\leqslant}$ associée à P est non atomique et possède la propriété de continuité monotone, alors, en vertu du théorème 3, p. 1794 de [7], P est l'unique probabilité compatible avec $\underset{\mathrm{P}}{\leqslant}$.

D'autre part la condition $(\mathscr{I})$ n'est autre que la condition (b) du lemme 3 écrite pour $\underset{\mathrm{P}}{\leqslant}$ et comme $\underset{\mathrm{P}}{\leqslant}$ vérifie (a), le lemme 3 montre que $(\mathscr{I})$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{B}.\mathrm{Q.I.}\mathscr{C}$.

Pour terminer la démonstration il suffit alors d'appliquer le corollaire 1 ([8]) et la proposition 3.

Remarque 1. — On peut donner une démonstration directe du corollaire 3 en considérant l'application ψ_{C} de [0, 1] dans [0, 1] définie par $\psi_{\mathrm{C}}[\mathrm{P}(\mathrm{B})] = \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ (l'hypothèse $(\mathscr{I})$ montre qu'elle est bien définie) et en montrant qu'elle se prolonge canoniquement en une fonction continue et additive sur $\mathbb{R}$, donc linéaire.

Remarque 2. — On peut remplacer l'hypothèse de non atomicité par une hypothèse exprimant le fait que les probabilités des atomes ne sont pas « trop grandes » (cf. à ce sujet le lemme 10).

III. FORME QUALITATIVE D'UN CRITÈRE DE NORMALITÉ DE S. BERNSTEIN

§ 1. Notations et définition

. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ une Algèbre de Probabilité qualitative et soit E un ensemble muni d'une Algèbre $\mathscr{B}$. Étant données deux v. a. X et Y définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ et à valeurs dans $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ on dira que X est qualitativement indépendante de Y (resp. que X et Y sont qualitativement indépendantes) si $\mathrm{X}^{-1}(\mathscr{B}).\mathrm{Q.I.Y}^{-1}(\mathscr{B})$ (resp. $[\mathrm{X}^{-1}(\mathscr{B}), \mathrm{Y}^{-1}(\mathscr{B})].\mathrm{Q.I.}$).

. Dans toute cette partie, on supposera que E est un espace vectoriel

([8]) Sous forme σ-additive.

topologique réel, normé et séparable, et que $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne de Ω. Étant donnée une v. a. T définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ et à valeurs dans $(E, \mathscr{B})$ on désignera par A_T l'ensemble des atomes de T.

. Dans la suite, on notera :

K_1 la condition « $a \in A_X, b \in A_Y \Rightarrow \{X = a, Y = b\} > \emptyset$ »
K_2 la condition « $a \in A_{X+Y}, b \in A_{X-Y} \Rightarrow \{X + Y = a, X - Y = b\} > \emptyset$ »
I_1 la condition « X est Q.I. de Y »
I_2 la condition « X + Y est Q.I. de X − Y »

il est clair que $I_j \Rightarrow K_j ; j = 1, 2$.

§ 2. Propriétés de A_X

LEMME 4. — $a \in A_X, b \in A_Y, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, K_1 \Rightarrow \alpha a + b\beta \in A_{\alpha X + \beta Y}$.

Démonstration. — $\{X = a, Y = b\} \subset \{\alpha X + \beta Y = \alpha a + \beta b\}$ or $K_1 \Rightarrow \{X = a, Y = b\} > \emptyset$ donc $\{\alpha X + \beta Y = \alpha a + \beta b\} > \emptyset$.

C. Q. F. D.

LEMME 5. — $A_{X+Y} \neq \emptyset$, $A_{X-Y} \neq \emptyset$, $K_1, K_2 \Rightarrow A_{X+Y} = A_X + A_Y$ et $A_{X-Y} = A_X - A_Y$.

Démonstration. — Soit $c \in A_{X+Y}$, $d \in A_{X-Y}$

$$K_2 \Rightarrow \{X + Y = c, X - Y = d\} > \emptyset$$

donc

$$\left\{X = \frac{1}{2}(c + d),\ Y = \frac{1}{2}(c - d)\right\} > \emptyset$$

d'où

$$\frac{1}{2}(c + d) \in A_X \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}(c - d) \in A_Y$$

or

$$c = \frac{1}{2}(c + d) + \frac{1}{2}(c - d) \qquad \text{et} \qquad d = \frac{1}{2}(c + d) - \frac{1}{2}(c - d)$$

d'où

$$A_{X+Y} \subset A_X + A_Y \qquad \text{et} \qquad A_{X-Y} \subset A_X - A_Y .$$

. Soit maintenant $a \in A_X$, $b \in A_Y$; d'après le lemme 4, $a + b \in A_{X+Y}$ et $a - b \in A_{X-Y}$ donc $A_X + A_Y \subset A_{X+Y}$ et $A_X - A_Y \subset A_{X-Y}$: le lemme est démontré.

Remarque. — On peut remplacer les conditions $A_{X+Y} \neq \emptyset$ et $A_{X-Y} \neq \emptyset$ par les conditions $A_X \neq \emptyset$ et $A_Y \neq \emptyset$ car, d'après le lemme 4, $A_X \neq \emptyset$, $A_Y \neq \emptyset$, K_1 entraînent $A_{X+Y} \neq \emptyset$ et $A_{X-Y} \neq \emptyset$.

LEMME 6. — $O \in A_X = A_Y$, $g \neq 0$, $g \in A_X$, K_1, $K_2 \Rightarrow 2^{-n} g \in A_X$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_X$ *infini.*

Démonstration. — $O = O - O \in A_{X-Y}$ et $g = O + g \in A_{X+Y}$ (lemme 4) donc le lemme 5 appliqué à $X' = X + Y$, $Y' = X - Y$, $X' + Y' = 2X$, $X' - Y' = 2Y$ entraîne $A_{X+Y} + A_{X-Y} = A_{2X}$ (on peut aussi le démontrer directement).

On en déduit que $g = g + O \in A_{2X}$ (puisque $g \in A_{X+Y}$ et $O \in A_{X-Y}$) donc $\frac{1}{2} g \in A_X$.

Par récurrence, il vient immédiatement $2^{-n} g \in A_X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et il y a bien une infinité d'atomes.

LEMME 7. — *Sous les hypothèses du lemme 6, on a* $A_X = A_Y = A_{X+Y} = A_{X-Y}$ *et, de plus,* A_X *est un sous-groupe de* E ([9]).

Démonstration.

1) Soit $a \in A_X$, comme $O \in A_Y$ il vient

$$a = a + O \in A_{X+Y} \qquad \text{et} \qquad a = a - O \in A_{X-Y} \qquad \text{(lemme 4)}$$

donc $A_X \subset A_{X+Y} \cap A_{X-Y}$.

2) Soit maintenant $b \in A_{X+Y}$, comme $\frac{1}{2} b \in A_{\frac{1}{2}(X+Y)}$ et $O \in A_{\frac{1}{2}(X-Y)}$ il vient $\frac{1}{2} b = \frac{1}{2} b + O \in A_{\frac{1}{2}(X+Y)+\frac{1}{2}(X-Y)} = A_X \left(\text{lemme 4 appliqué à } \frac{1}{2}(X+Y) \text{ et } \frac{1}{2}(X-Y) \right)$.

Toujours d'après le lemme 4, on a les implications

$$\frac{1}{2} b \in A_X,\ O \in A_Y \Rightarrow \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} b - O \in A_{X-Y}$$

$$O \in A_X,\ \frac{1}{2} b \in A_Y \Rightarrow -\frac{1}{2} b = O - \frac{1}{2} b \in A_{X-Y}.$$

. Maintenant

$$\frac{1}{2} b \in A_{\frac{1}{2}(X+Y)},\ -\frac{1}{4} b \in A_{\frac{1}{2}(X-Y)}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4} b = \frac{1}{2} b - \left(-\frac{1}{4} b \right) \in A_{\frac{1}{2}(X+Y)-\frac{1}{2}(X-Y)} = A_Y = A_X$$

([9]) Il en est bien entendu de même si $A_X = A_Y = \{ 0 \}$.

d'où

$$\frac{3}{4}b + \frac{3}{4}b = \frac{3}{2}b \in A_{X+Y}$$

d'où

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}b\right) - \left(-\frac{1}{4}b\right) \in A_{\frac{1}{2}(X+Y)-\frac{1}{2}(X-Y)} = A_Y .$$

On a donc montré que $b \in A_{X+Y} \Rightarrow b \in A_Y$ donc que $A_{X+Y} \subset A_Y$ d'après le 1) $\boxed{A_Y = A_{X+Y}}$.

3) Soit $b \in A_{X-Y}$ alors

$$O + \frac{1}{2}b \in A_{\frac{1}{2}(X+Y)+\frac{1}{2}(X-Y)} = A_X = A_Y$$

donc

$$b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \in A_X + A_Y = A_{X+Y}$$

mais $A_{X+Y} = A_Y$ 2) donc $b \in A_Y$: on a donc montré que $A_{X-Y} \subset A_Y$ d'où $A_{X-Y} = A_Y$ 1).

On a donc bien

$$\boxed{A_X = A_Y = A_{X+Y} = A_{X-Y}} .$$

4) Montrons que A_X est un sous-groupe de E :

$$a \in A_X,\ b \in A_X = A_Y \Rightarrow a - b \in A_{X-Y} = A_X \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§ 3. Le cas purement atomique

Dans la suite, on supposera que $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ est une σ-Algèbre de probabilité qualitative.

LEMME 8. — *Sous les hypothèses du lemme 6 et si* X *et* Y *sont purement atomiques, si* a_0 *désigne un atome maximal de* X *et* b_0 *un atome maximal de* X + Y *alors*

$$I_1 \Rightarrow \{ X + Y = b_0 \} \leqslant \{ X = a_0 \}$$

et l'inégalité est stricte si les atomes de X *ne sont pas deux à deux équivalents.*

Démonstration.

1) On peut écrire

$$\{ X + Y = b_0 \} = \bigcup_{x \in A_X} \{ X = x, Y = b_0 - x \}$$

si $\{ Y = b_0 - x \} \sim \emptyset$, *a fortiori* $\{ X = x, Y = b_0 - x \} \sim \emptyset$
si $\{ Y = b_0 - x \} > \emptyset$, l'inégalité $\{ X = a_0 \} \geqslant \{ X = x \}$ et I_1 entraînent

$$\{ X = a_0, Y = b_0 - x \} \geqslant \{ X = x, Y = b_0 - x \} .$$

Les événements $\{ X = a_0, Y = b_0 - x \}$ étant deux à deux disjoints et A_X étant dénombrable ([10]) il vient, compte tenu de la continuité monotone de $\leqslant$ ([11]).

$$\{ X + Y = b_0 \} = \bigcup_{x \in A_X} \{ X = x, Y = b_0 - x \} \leqslant \bigcup_{x \in A_X} \{ X = a_0, Y = b_0 - x \}$$

or

$$\bigcup_{x \in A_x} \{ X = a_0, Y = b_0 - x \} \subset \{ X = a_0 \}$$

d'où

$$\{ X + Y = b_0 \} \leqslant \{ X = a_0 \} .$$

2) On suppose maintenant que les atomes de X ne sont pas tous équiprobables. Soit alors $x_0 \in A_X$ tel que $\{ X = x_0 \} < \{ X = a_0 \}$ on sait que

$$\{ Y = b_0 - x_0 \} > \emptyset$$

puisque, d'après le lemme 7,

$$x_0 \in A_X, b_0 \in A_{X+Y} = A_X \Rightarrow b_0 - x_0 \in A_X = A_Y .$$

On en déduit que $\{ X = x_0, Y = b_0 - x_0 \} < \{ X = a_0, Y = b_0 - x_0 \}$ puisque X est Q.I. de Y.

On en tire aisément

$$\{ X + Y = b_0 \} = \bigcup_{x \in A_X} \{ X = x, Y = b_0 - x \} < \bigcup_{x \in A_X} \{ X = a_0, Y = b_0 - x \}$$

d'où

$$\{ X + Y = b_0 \} < \{ X = a_0 \} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME 9. — *Si* X *et* Y *sont purement atomiques et si* $O \in A_X = A_Y$ *alors*

$$I_1, I_2 \Rightarrow \{ X = 0 \} \sim \{ Y = 0 \} \sim \Omega .$$

Démonstration. — Si X possède un atome non nul, A_X est infini (lemme 6) donc les atomes de X ne sont pas deux à deux équivalents ([7], corollaire p. 1790) d'où :

$$\{ X + Y = b_0 \} < \{ X = a_0 \} \qquad \text{(lemme 8)}$$

Posons $A = A_X = A_Y = A_{X+Y} = A_{X-Y}$ ce qui est légitime d'après le

([10]) Cf. [7], lemme 4, p. 1791.
([11]) Cf. [7], proposition 3, p. 1790.

lemme 7. Comme $\{X+Y \notin A\} \subset \{X \notin A\} \cup \{Y \notin A\}$, $X+Y$ est purement atomique ; il en est de même pour $X-Y$. On peut donc écrire

$$\{2X=b\} = \bigcup_{z\in A} \{X+Y=z, X-Y=b-z\}, \qquad \forall b \in A$$

Maintenant $\{X+Y=b_0\} \geqslant \{X+Y=z\}$ entraîne

$$\{X+Y=b_0, X-Y=a\} \geqslant \{X+Y=z, X-Y=a\}, \qquad \forall a \in A$$

(puisque $X+Y$ est Q.I. de $X-Y$)
comme A est un groupe, $b-z \in A$ donc

$$\bigcup_{z\in A}\{X+Y=z, X-Y=b-z\} \leqslant \bigcup_{z\in A}\{X+Y=b_0, X-Y=b-z\}$$

([7], proposition 3, p. 1790) d'où

$$\{2X=b\} \leqslant \{X+Y=b_0\}$$

mais $2a_0 \in A$ donc $\{2X=2a_0\} = \{X=a_0\}$ vérifie

$$\{X=a_0\} \leqslant \{X+Y=b_0\}$$

on aboutit à une contradiction ce qui montre que O est bien le seul atome de X. C. Q. F. D.

§ 4. Cas d'une loi mixte

Dans la suite, la condition « $\{X=x\} \leqslant \{X \notin A_X\}, \forall x \in E$ » sera notée C_1 ; la condition « $\{X+Y=z\} \leqslant \{X+Y \notin A_{X+Y}\}, \forall z \in E$ » sera notée C_2.

D'autre part, si $A_X \neq \varnothing$, on supposera que $O \in A_X$ puisque cette condition ne fait pas perdre de généralité.

LEMME 10. — *Soit* $B = \bigcup_n B_n$ *la réunion, éventuellement vide, des atomes de* $\leqslant$. *Alors si*

$$B_n \leqslant B^c, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

il existe au plus *une probabilité compatible avec* $\leqslant$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que (1) entraîne $B^c > \varnothing$ (car $B^c \sim \varnothing$ et (1) $\Rightarrow \Omega \sim \varnothing$).
et (1)

1er cas : Si $B^c \sim \Omega$ c'est que $\leqslant$ est non atomique et le résultat est une conséquence immédiate d'un théorème de Villegas (théorème 3 [7], p. 1794).

2e cas : Si $B^c < \Omega$. Soient P et Q deux probabilités compatibles avec $\leqslant$.

Les probabilités $\dfrac{P}{P(B^c)}$ et $\dfrac{Q}{Q(B^c)}$ définies sur $\mathscr{A} \cap B^c$ sont compatibles avec la restriction de $\leqslant$ à $\mathscr{A} \cap B^c$. Cette restriction étant non atomique il vient : $\dfrac{P}{P(B^c)} = \dfrac{Q}{Q(B^c)}$ (théorème de Villegas).

Considérons alors l'atome B_n ; comme $P(B_n) \leqslant P(B^c)$ et que P est non atomique sur B^c il existe $B'_n \in \mathscr{A} \cap B^c$ tel que $P(B'_n) = P(B_n)$; de même $Q(B'_n) = Q(B_n)$ puisque P et Q sont compatibles.

On en déduit

$$Q(B_n) = Q(B'_n) = \frac{Q(B^c)}{P(B^c)} P(B'_n) = \frac{Q(B^c)}{P(B^c)} P(B_n)$$

on en tire immédiatement que $Q = \dfrac{Q(B^c)}{P(B^c)} P$ sur $\mathscr{A}$ tout entier.

En particulier $Q(\Omega) = \dfrac{Q(B^c)}{P(B^c)} P(\Omega)$ d'où $Q(B^c) = P(B^c)$ et finalement $Q = P$.

C. Q. F. D.

Remarques. — (1) n'entraîne pas l'existence d'une probabilité compatible.

— (1) et L (cf. [*4*], p. 25) ne sont pas conséquence l'un de l'autre.

— Si on abandonne (1), l'existence de P compatible n'entraîne pas l'unicité.

LEMME 11. — *Soit* P *une probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *compatible avec* $\leqslant$. *Alors* $I_1, C_1 \Rightarrow$ X *et* Y *sont* P-*stochastiquement indépendantes.*

Démonstration. — La σ-algèbre de probabilité qualitative $(\Omega, X^{-1}(\mathscr{B}), \leqslant)$ vérifie les conditions du lemme 10 (à cause de C_1) donc la restriction de P à $X^{-1}(\mathscr{B})$ est l'unique probabilité compatible avec $\leqslant$.

Le corollaire 1 permet alors de conclure.

. Dans la suite, on suppose que X et Y ont la même loi qualitative. Il est alors clair que $A_X = A_Y$. De plus, si C_1 est vérifié, X et Y ont la même loi pour toute probabilité P compatible avec $\leqslant$ (en effet $\underset{X}{\leqslant}$ et $\underset{Y}{\leqslant}$ coïncident, PX^{-1} est compatible avec $\underset{X}{\leqslant}$, PY^{-1} est compatible avec $\underset{Y}{\leqslant}$ donc $PX^{-1} = PY^{-1}$ d'après le lemme 10 appliqué à $\underset{X}{\leqslant}$).

LEMME 12. — *Soit* P *une probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *compatible avec* $\leqslant$. *Alors* $I_1, I_2, C_1 \Rightarrow X + Y$ *et* $X - Y$ *sont* P-*stochastiquement indépendantes.*

Démonstration. — 1) Si X et Y sont sans atomes alors $X + Y$ et $X - Y$

également (lemme 5) donc C_2 est vérifiée et on conclut comme au lemme 11 que $X + Y$ et $X - Y$ sont stochastiquement indépendantes.

2) Si $A_X = A_Y \neq \emptyset$ alors $A = A_X = A_Y = A_{X+Y} = A_{X-Y}$ est un sous-groupe de E (lemme 7). D'autre part, X et Y sont stochastiquement indépendantes (lemme 11) ; on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} P(X + Y \in A) &= \sum_{a \in A} P(X + Y = a) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{x \in A} P(X = x)\, P(Y = a - x) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{a \in A} P(X = x)\, P(Y = a - x) \\ &= \sum_{x \in A} P(X = x) \sum_{a \in A} P(Y = a - x) \end{aligned}$$

d'où, puisque A est un groupe :

$$P(X + Y \in A) = P(X \in A)\, P(Y \in A) = [P(X \in A)]^2$$

donc

$$\begin{aligned} P(X + Y \notin A) &= 1 - [P(X \in A)]^2 \\ &\geqslant 1 - P(X \in A) = P(X \notin A) \end{aligned}$$

Or, une propriété bien connue des variables aléatoires indépendantes est que

$$\operatorname*{Max}_{z \in E} P(X + Y = z) \leqslant \operatorname*{Max}_{x \in E} P(X = x)$$

D'après C_1 il vient alors :

$$\operatorname*{Max}_{z \in E} P(X + Y = z) \leqslant \operatorname*{Max}_{x \in E} P(X = x) \leqslant P(X \notin A) \leqslant P(X + Y \notin A)$$

ce qui signifie que C_2 est vérifié. On en déduit l'indépendance stochastique de $X + Y$ et $X - Y$ comme au 1).

LEMME 13. — *Soit* P *une probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *compatible avec* $\leqslant$. *Alors :*

$$\begin{aligned} & O < P(X \in A_X^c) < 1,\ I_1, I_2,\ \textit{non}\ C_1\ (^{12}) \\ & \Rightarrow \max_{z \in E} P(X + Y = z) < \max_{x \in E} P(X = x). \end{aligned}$$

(12) Non $C_1 \Rightarrow P(X \in A_X^c) < 1$.

Démonstration. — a_0 et b_0 ayant la même signification qu'au lemme 8, on peut écrire :

$$P(X + Y = b_0) = \sum_{x \in A} P(X = x, Y = b_0 - x) + P(X + Y = b_0, X \notin A)$$

Or

$$(X + Y = b_0, X \notin A) \Rightarrow (X \notin A, Y \notin A)$$

(en effet $(X + Y = b_0, Y \in A) \Rightarrow X \in A$) compte tenu de I_1 on en tire

$$P(X + Y = b_0) \leqslant \sum_{x \in A} P(X = a_0, Y = b_0 - x) + P(X \notin A, Y \notin A) \quad (1)$$

D'autre part

$$P(X = a_0) = \sum_{x \in A} P(X = a_0, Y = b_0 - x) + P(X = a_0, Y \notin A) \quad (2)$$

(le Σ est étendu aux $x \in A$ puisque A est un groupe) ; de (1) et (2) on tire alors :

$$P(X + Y = b_0) \leqslant P(X = a_0) + [P(X \notin A, Y \notin A) - P(X = a_0, Y \notin A)]$$

mais « non C_1 » implique $P(X = a_0) > P(X \notin A)$ on en déduit, compte tenu de $P(Y \notin A) > 0$ [13] et de I_1 que la quantité entre crochets est strictement négative d'où

$$P(X + Y = b_0) < P(X = a_0) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME 14. — *Sous les hypothèses du lemme 13, C_2 est vérifiée.*

Démonstration. — Supposons que l'on ait « non C_2 ». On écrit

$$P(2X=2a_0)= \sum_{z \in A} P(X+Y=z, X-Y=2a_0-z)+P(X=a_0, X+Y\notin A) \quad (1)$$

mais

$$(X = a_0, X + Y \notin A) \Rightarrow (X + Y \notin A, X - Y \notin A)$$

(car $X = a_0, X - Y \in A \Rightarrow X + Y \in A$).

D'autre part,

$$P(X - Y \notin A) > 0 \quad (2)$$

(car $\quad P(X \notin A) > 0, \; P(Y \in A) > 0 \quad$ (puisque $O < P(X \notin A) < 1$ et $O < P(Y \notin A) < 1$)

[13] Car X et Y ont même loi qualitative.

donc $$P(X \notin A, Y \in A) > 0 \qquad (\text{à cause de } I_1)$$

d'où (2) puisque

$$(X \notin A, Y \in A) \Rightarrow (X - Y \notin A))$$

mais « non C_2 » signifie $P(X + Y = b_0) > P(X + Y \notin A)$ alors I_2 implique

$$P(X + Y = b_0, X - Y \notin A) > P(X + Y \notin A, X - Y \notin A).$$

Finalement, compte tenu de I_1 et de (1) il vient :

$$P(X = a_0) \leqslant \sum_{z \in A} P(X + Y = b_0, X - Y = 2a_0 - z) + P(X + Y = b_0, X - Y \notin A)$$

soit

$$P(X = a_0) < P(X + Y = b_0, X - Y \in A) + P(X + Y = b_0, X - Y \notin A)$$

ou $P(X = a_0) < P(X + Y = b_0)$

ce qui est contradictoire avec le lemme 13. Donc C_2 est vérifiée.

C. Q. F. D.

LEMME 15. — *Soit* P *une probabilité compatible avec* $\leqslant$. *Alors*

$$O < P(X \in A^c) < 1, \qquad I_1, I_2 \Rightarrow C_1$$

Démonstration. — Si C_1 n'est pas vérifié c'est que C_2 est vérifié (lemme 14) donc $X + Y$ et $X - Y$ sont stochastiquement indépendantes. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} P(X \in A) = P(2X \in A) &= \sum_a P(2X = a) \\ &= \sum_a \sum_x P(X + Y = x, X - Y = a - x) \\ &= \sum_x \sum_a P(X + Y = x) P(X - Y = a - x) \end{aligned}$$

(ces deux dernières égalités proviennent de l'indépendance de $X + Y$ et $X - Y$)

d'où $$\begin{aligned} P(X \in A) &= \sum_x P(X + Y = x) \sum_a P(X - Y = a - x) \\ &= P(X + Y \in A) P(X - Y \in A) \end{aligned}$$

donc $$P(X \in A) = P(X + Y \in A, X - Y \in A)$$

mais $(X + Y \in A, X - Y \in A) \Rightarrow (X \in A, Y \in A)$

(cf. les lemmes 6 et 7)

d'où $P(X \in A) \leqslant P(X \in A, Y \in A) \; (\leqslant P(X \in A))$

donc $P(X \in A) = P(X \in A, Y \in A)$

il vient $P(X \in A, Y \notin A) = 0$

mais $P(Y \notin A) > 0$ et $P(X \in A) > 0$ donc, comme X est Q.I. de Y, $P(X \in A, Y \notin A) > 0$.

On aboutit donc à une contradiction ce qui montre que C_1 est vérifié.

PROPOSITION 6. — *Soient deux v. a.* X *et* Y *définies sur la même* σ-A.P.Q. $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$, *à valeurs dans* $(E, \mathscr{B})$ *espace vectoriel topologique réel normé et séparable, muni de sa tribu borélienne. On suppose*

a) *que* X *et* Y *ont même loi qualitative,*
b) *que* X *est* Q.I. *de* Y,
c) *que* $X + Y$ *est* Q.I. *de* $X - Y$

dans ces conditions, X *et* Y *sont gaussiennes, de même loi et stochastiquement indépendantes par rapport à toute probabilité* P *sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *compatible avec* $\leqslant$.

Démonstration. — 1^er^ cas : La loi de X *est purement atomique*, alors $X = 0$ p. s. et $Y = 0$ p. s. (lemme 9) : X et Y sont gaussiennes dégénérées donc stochastiquement indépendantes.

2^e^ cas : La loi de X *vérifie* C_1 (donc X et Y sont de même loi). X et Y sont alors stochastiquement indépendantes (lemme 11), il en est de même pour $X + Y$ et $X - Y$ (lemme 12) d'où le résultat en appliquant le théorème de S. Bernstein sous la forme donnée par Darmois et Skitovitch (cf. [*10*], p. 316) ([14]).

. *La démonstration est alors complète car* $P(X \in A^c) = 1 \Rightarrow C_1$, $P(X \in A^c) = 0$ n'est autre que le 1^er^ cas et d'après le lemme 15

$$O < P(X \in A^c) < 1, \; I_1, \; I_2 \Rightarrow C_1 .$$

Remarques.

1) On déduit aisément de ce qui précède que toute loi normale non dégénérée sur un EVT normé et séparable est non-atomique.

2) La proposition 6 est encore vraie si l'on remplace « normé » par « métrisable ».

([14]) Il est clair que ce théorème s'étend à des v. a. à valeurs dans un E. V. T. normé.

IV. L'INDÉPENDANCE QUALITATIVE GLOBALE

§ 1. Définition et propriétés élémentaires

DÉFINITION. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ *une* A.P.Q. *et soit* $(\mathscr{B}_i, i \in I)$ *une famille de classes non vides d'événements. Le cardinal de* I *étant supposé* > 1 *on dira que les* $\mathscr{B}_i$ *sont* globalement qualitativement indépendantes (G.Q.I) *si* $\forall J \subset$ *fini* $\subset I$ *(inclusion stricte),* $\forall i_0 \in I - J$, $\forall B = \left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) > \emptyset$ *avec* $B_i \in \mathscr{B}_i$ $\forall i \in J$, *les probabilités qualitatives* $\leqslant$ *et* $\underset{B}{\leqslant}$ *coïncident sur* $\mathscr{B}_{i_0}$.

PROPOSITION 7.

1) *L'indépendance qualitative globale entraîne l'indépendance deux à deux.*

2) *Si* $\emptyset \in \mathscr{B}_i$, $\forall i \in I$, *l'indépendance qualitative globale des* $\mathscr{B}_i$ *entraîne l'indépendance ensembliste des* $\mathscr{B}_i^*$.

3) *Si* $\leqslant$ *possède une probabilité additive* P *compatible et si les* $\mathscr{B}_i$ *sont* P-*stochastiquement indépendantes elles sont* G.Q.I.

4) *Les réciproques de ces trois propositions sont fausses.*

Démonstration.

1) Évident (prendre card J = 1).

2) Soient $\{ i_1, \ldots, i_k \} \subset I$ et soit $A_{i_1} \in \mathscr{B}_{i_1}^*, \ldots, A_{i_k} \in \mathscr{B}_{i_k}^*$, il faut montrer que $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \neq \emptyset$.

De $A_{i_1} > \emptyset$ et $A_{i_2} > \emptyset$ on tire d'abord $A_{i_1} \cap A_{i_2} > \emptyset$ (à cause de $(\mathscr{B}_{i_1}, \mathscr{B}_{i_2})$Q.I.), puis comme $\mathscr{B}_{i_1}, \mathscr{B}_{i_2}, \mathscr{B}_{i_3}$ sont G.Q.I. de $A_{i_1} \cap A_{i_2} > \emptyset$ et $A_{i_3} > \emptyset$ on tire $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} > \emptyset$. En raisonnant par récurrence on obtient $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} > \emptyset$ d'où $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \neq \emptyset$.

3) On se donne $\bigcap_{i\in J} B_i > \emptyset$ et $A, A' \in \mathscr{B}_{i_0}$. Le résultat cherché provient alors de la suite d'équivalences logiques :

$$A \leqslant A' \Leftrightarrow P(A) \leqslant P(A') \Leftrightarrow P(A)\,P\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) \leqslant P(A')\,P\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right)$$
$$\Leftrightarrow P\left[A \cap \left(\bigcap_{i\in J} B_i\right)\right] \leqslant P\left[A' \cap \left(\bigcap_{i\in J} B_i\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow A \cap \left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) \leqslant A' \cap \left(\bigcap_{i\in J} B_i\right).$$

4) Pour le 1) il suffit de prendre $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}$ muni de la probabilité qualitative associée à la mesure de comptage et les événements

$A = \{ \omega_1, \omega_2 \}$, $B = \{ \omega_1, \omega_3 \}$ et $C = \{ \omega_1, \omega_4 \}$ pour obtenir l'indépendance deux à deux de $a(A)$, $a(B)$, $a(C)$ alors que ces algèbres ne sont pas G.Q.I.

— Pour le 2) et le 3) on peut reprendre les exemples donnés dans la démonstration de la proposition 3.

Voici maintenant un critère d'indépendance stochastique analogue au corollaire 1.

PROPOSITION 8. — *Soit* $(\mathscr{B}_i, i \in I)$ *une famille de sous-algèbres de* $\mathscr{A}$. *Si*

α) $\leqslant$ *est compatible avec une probabilité additive* [15] P.

β) $\forall i \in I$, *la restriction de* P *à* $\mathscr{B}_i$ *est l'unique probabilité additive* [15] *compatible avec la restriction de* $\leqslant$ *à* $\mathscr{B}_i$.

γ) *Les* $\mathscr{B}_i$ *sont* G.Q.I.

Alors les $\mathscr{B}_i$ *sont* P-*stochastiquement indépendantes.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{B}_{i_1}, \ldots, \mathscr{B}_{i_k}$ une famille finie d'algèbres extraites de $(\mathscr{B}_i, i \in I)$. Soient $B_2 \in \mathscr{B}_{i_2}, \ldots, B_k \in \mathscr{B}_{i_k}$; $C = B_2 \cap \ldots \cap B_k$.

1) Si $P(C) > 0$ on définit sur $\mathscr{B}_{i_1}$ une probabilité qualitative $\preccurlyeq$ en posant

$$B_1 \preccurlyeq B'_1 \Leftrightarrow \frac{P(B_1 \cap C)}{P(C)} \leqslant \frac{P(B'_1 \cap C)}{P(C)} \qquad (B_1, B'_1 \in \mathscr{B}_{i_1})$$

Or l'indépendance qualitative des $\mathscr{B}_i$ implique

$$B_1 \leqslant B'_1 \Leftrightarrow P(B_1 \cap C) \leqslant P(B'_1 \cap C) \qquad (B_1, B'_1 \in \mathscr{B}_{i_1})$$

donc $\preccurlyeq$ et $\leqslant$ coïncident sur $\mathscr{B}_{i_1}$ et d'après β)

$$\frac{P(B_1 \cap C)}{P(C)} = P(B_1), \qquad \forall B_1 \in \mathscr{B}_{i_1}$$

ce qui peut s'écrire

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = P(B_1)\, P(B_2 \cap \ldots \cap B_k)$$

Comme $P(B_i \cap \ldots \cap B_k) > 0$ pour $i \geqslant 2$ on peut recommencer le même raisonnement pour $\mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_k$ et l'on obtiendra finalement

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = P(B_1) \ldots P(B_k) \tag{1}$$

égalité valable chaque fois que $P(B_2 \cap \ldots \cap B_k) > 0$.

2) Si $P(C) = 0$ on a aussi $P(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = 0$ on en déduit que l'un au moins des $P(B_i)$ est nul car, $P(B_1) > 0, \ldots, P(B_k) > 0 \Leftrightarrow B_1 > \varnothing, \ldots, B_k > \varnothing$ et d'après la démonstration du 2) de la proposition 7 ·

$$B_1 > \varnothing, \ldots, B_k > \varnothing \Rightarrow B_1 \cap \ldots \cap B_k > \varnothing$$

[15] Ou σ-additive.

ce qui est contradictoire. Finalement on a bien (1) ce qui termine la démonstration.

Remarque. — Dans l'énoncé de la proposition 8 on peut remplacer « compatible » par « presque compatible ».

§ 2. **Application : forme qualitative d'un théorème relatif à la loi de Cauchy**

PROPOSITION 9. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *un espace probabilisé et soit* $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ *une suite de v. a. r. définies sur* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *et de même loi* μ *non dégénérée. Si*

a) *Les* X_n *sont globalement, qualitativement indépendantes par rapport à la probabilité qualitative associée à* P.

b) $\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i$ *est de loi* μ, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Alors μ *est une loi de Cauchy.*

Démonstration.

1) Montrons d'abord par l'absurde que μ ne peut pas être purement atomique. μ étant supposée purement atomique, soit A l'ensemble de ses atomes : card $A > 1$ puisque μ est non dégénérée. D'autre part on ne perd pas de généralité en supposant que $O \in A$. Dans ces conditions si $g \in A$ et $g \neq 0$ le fait que les X_n sont G.Q.I. implique

$$\{ X_1 = 0, \ldots, X_k = 0, X_{k+1} = g, \ldots, X_p = g \} > \emptyset$$

donc $\frac{p-k}{p} g \in A_{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i} = A$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \leqslant p$ donc A est infini et les éléments de A ne sont donc pas équi-probables. Supposons alors que O soit un atome maximal de μ, on peut écrire :

$$\{ X+Y=0 \} = \bigcup_{x \in A} \{ X=x, Y=-x \} < \bigcup_{x \in A} \{ X=x, Y=0 \} = \{ Y=0 \}$$

et l'on aboutit à une contradiction puisque $P\left(\frac{1}{2}(X+Y)=0\right) = P(Y=0)$.

2) Nous allons maintenant montrer que

$$\mu(\{ 0 \}) \leqslant \mu(A^c)$$

ce qui permettra de conclure.

On peut écrire

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 0) &= \sum_{a \in A} P(X_1 = a, X_2 = -a) + P(X_1 \notin A, X_1 + X_2 = 0) \\ &\leqslant P(X_1 \in A, X_2 = 0) + P(X_1 \notin A, X_1 + X_2 = 0) \end{aligned}$$

mais $P(X_1 + X_2 = 0) = P\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2) = 0\right) = P(X_2 = 0)$ d'où

$$P(X_2 = 0, X_1 \notin A) \leqslant P(X_1 \notin A, X_1 + X_2 = 0) \tag{1}$$

mais

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2 = 0, X_1 \notin A, X_2 \in A) &= \bigcup_{a \in A} (X_1 + X_2 = 0, X_1 \notin A, X_2 = a) \\ &= \bigcup_{a \in A} (X_1 = -a, X_2 = a, X_1 \notin A) \end{aligned}$$

si $-a \in A : P(X_1 = -a, X_1 \notin A) = 0$ et si
$-a \notin A : P(X_1 = -a) = 0$ donc $P(X_1 + X_2 = 0, X_1 \notin A, X_2 \in A) = 0$;
on en tire $P(X_1 + X_2 = 0, X_1 \notin A) = P(X_1 + X_2 = 0, X_1 \notin A, X_2 \notin A)$ d'où

$$P(X_1 + X_2 = 0, X_1 \notin A) \leqslant P(X_1 \notin A, X_2 \notin A)$$

et compte tenu de (1) $P(X_2 = 0, X_1 \notin A) \leqslant [(X_2 \notin A, X_1 \notin A)$; or d'après la première partie de la démonstration $P(X_1 \notin A) > 0$ d'où comme X_1 et X_2 sont Q.I.

$$P(X_2 = 0) \leqslant P(X_2 \notin A)$$

les atomes éventuels de μ vérifient donc la condition du lemme 10 ; on peut alors appliquer la proposition 8 aux tribus engendrées par les X_n ce qui permet d'affirmer que les X_n sont stochastiquement indépendants.

On conclut à l'aide du théorème VII, p. 173 de [*2*].

COROLLAIRE 4. — *Si X_1 et X_2 sont deux v. a. r. qualitativement indépendantes et de même loi μ et si $\frac{X_1 + X_2}{2}$ a pour loi μ, X_1 et X_2 sont stochastiquement indépendantes.*

ANNEXE

1. On dit qu'une classe $\mathscr{C}$ de parties d'un ensemble Ω est une classe d'ensembles indépendants (au sens ensembliste) si

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C} \Rightarrow A_1' \cap \ldots \cap A_n' = \emptyset \qquad (A_i' = A_i \text{ ou } A_i^c).$$

THÉORÈME DE MARCZEWSKI. — $\mathscr{C}$ étant une classe d'ensembles indépendants, il existe, pour toute fonction ν définie sur $\mathscr{C}$ et à valeurs dans $[0, 1]$, une probabilité additive μ sur l'algèbre engendrée par $\mathscr{C}$ telle que

1) $\mu(A) = \nu(A)$ pour $A \in \mathscr{C}$.
2) Les ensembles de $\mathscr{C}$ sont stochastiquement indépendants.

2. Soit $(\Gamma, \leqslant)$ un ensemble ordonné et Δ une partie de Γ. On dit que Δ est dense pour l'ordre $\leqslant$ si

$$\forall A, B \in \Gamma - \Delta, \qquad \exists C \in \Delta : A < C < B$$

THÉORÈME. — Γ est isomorphe à une sous-chaîne de $\mathbb{R}$ si et seulement si il admet un sous-ensemble dénombrable dense pour l'ordre.

3. Une famille $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ d'algèbres est indépendante si $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall i_1, \ldots, i_n \in I$; $\forall A_{i_1} \in \mathscr{A}_{i_1} - \{\emptyset\}, \ldots, A_{i_n} \in \mathscr{A}_{i_n} - \{\emptyset\}\ A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$.

4. Une probabilité qualitative est dite fine si $\forall B > \emptyset$ $(B \in \mathscr{A})$, $\exists(A_1, \ldots, A_n)$ partition de Ω en éléments de $\mathscr{A}$ telle que

$$B \dot{\geqslant} A_i ; \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Une probabilité qualitative fine est presque compatible avec une probabilité additive P et P est unique.

5. THÉORÈME DE VILLEGAS. — Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \leqslant)$ une σ-algèbre de probabilité qualitative. Alors, si $\leqslant$ est non atomique, il existe une et une seule probabilité σ-additive compatible avec $\leqslant$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. J. SAVAGE, *The foundations of statistics*. Dover, 2e édition, 1972.
[2] D. DUGUE, *Traité de Statistique théorique et appliquée*. Masson, 1958.
[3] R. SIKORSKI, *Boolean Algebras*. Springer, 2e édition, 1964.
[4] T. FINE, *Theories of Probability*. Academic Press, 1973.
[5] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*. Wiley, 1968.
[6] I. NIINILUOTO, A note on fine and tight qualitative probabilities. *A. M. S.*, t. **43**, n° 5, 1972, p. 1581-1591.
[7] C. VILLEGAS, On qualitative probability σ-Algebras. *A. M. S.*, t. **35**, 1964, p. 1787-1796.
[8] E. MARCZEWSKI, Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure. *Fund. Math.*, t. **35**, 1948, p. 13-28.
[9] G. BIRKHOFF, Lattice theory (2e édition). *Pub. Am. Math. Soc.*, 1948.
[10] A. RENYI, *Calcul des Probabilités*. Dunod, 1966.
[11] D. BOSQ, Indépendance ensembliste, indépendance qualitative, indépendance stochastique. *C. R. Acad. Sci.*, Série A, t. **278**, 14 janvier 1974.
[12] D. BOSQ, Une forme qualitative d'un critère de normalité de S. BERNSTEIN. *C. R. Acad. Sci.*, série A, t. **279**, 23 décembre 1974.

(Manuscrit reçu le 7 mars 1975)