ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC YOR

Étude de mesures de probabilité sur $C(R_+^*; R)$ quasi invariantes sous les translations de $\mathcal{D}(R_+^*; R)$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 2 (1975), p. 127-171
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_2_127_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XI, n° 2, 1975, p. 127-171. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Étude de mesures de probabilité sur $C(\mathbf{R}_+^*; \mathbf{R})$ quasi invariantes sous les translations de $\mathscr{D}(\mathbf{R}_+^*; \mathbf{R})$

par

Marc YOR [1]

Attaché de Recherche au CNRS, Laboratoire de Calcul des Probabilités,
Université Paris VI, 9, quai Saint-Bernard, Paris (5e)

SUMMARY. — It is shown that the laws $(P_x)_{x\in\mathbb{R}}$ on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ of the diffusion process $(X_t)_{t\geqq 0}$ with elliptic generator L defined by:

$$Lf(x) = \frac{1}{2}a(x)f''(x) + b(x)f'(x)$$

are quasi-invariant under the translations of $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ if, and only if: $a(x) = \alpha$, where α is a positive constant.

Moreover, we have the following:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\mu(.+f)}{d\mu} \triangleq a_f = \exp\int_0^\infty Q_f(s, X_s)ds && (1)\\ &Q_f(s, x) = \frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{2}f(s)\right)f''(s) + \mathscr{V}(x + f(s)) - \mathscr{V}(x) \quad f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \\ &\mathscr{V}'(x) = -\left(\frac{1}{\alpha}bb' + \frac{1}{2}b''\right)(x). && (2)\end{aligned}\right.$$

Conversely, if μ is a probability on $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ which is quasi-invariant (under the same translations), markovian, and has its density a_f given by (1), then there exists a process $(F(f, t, X_t))_{t\geqq 0}$ such that:

$$\mu(a_f/\sigma(X_s, s \leqq t)) = \exp\left(\int_0^t Q_f(s, X_s)ds + F(f, t, X_t)\right).$$

[1] Labo. associé au CNRS, n° 224.

Regularity hypothesis on F—or on the Markov semigroup attached to μ—imply that μ is a diffusion process with coefficients (α, b) verifying equation (2).

INTRODUCTION

Dans la lignée des idées présentées par Cartier au début de [*1*], sont construites en [*2*] et [*9*] les mesures de probabilité sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des champs euclidiens avec interaction (non nécessairement polynomiale, voir [*9*]) en dimension $d = 1$.

Ces mesures sont quasi-invariantes par les translations de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (2) : si μ désigne la probabilité sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ du champ euclidien avec interaction Q et si, pour f, fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, T_f désigne l'application de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même définie par : $\omega \to \omega - f$, alors $\mu^f = T_f(\mu)$ vérifie :

(1) $\forall f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\frac{d\mu^f}{d\mu}(\omega) = a_f(\omega)$$
$$= \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\omega(t) + \frac{1}{2}f(t)\right) f''(t) - P(\omega(t) + f(t)) + P(\omega(t)) \right\} dt$$

où P est tel que $P' = Q$.

A l'origine, ce travail avait pour but de classifier les champs euclidiens à l'aide de leur module de quasi-invariance $(a_f, f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire de montrer l'unicité de mesures de probabilité μ sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; markoviennes, euclidiennes, et de module de quasi-invariance donné par (1) (où P est une fonction donnée). Une telle étude a été faite en [*2*], sous certaines hypothèses de régularité. Nous nous proposons ici d'étudier une classe importante de mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) = \mathscr{W}^*$ (3), de module de quasi-invariance donné, à l'aide d'un problème de martingales, lorsque l'on suppose ces mesures markoviennes (mais non euclidiennes).

Le paragraphe 1 est consacré à l'étude des liens entre les mesures quasi-invariantes (4) sur les espaces $\mathscr{W} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\mathscr{W}^* = C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\mathscr{W}_x = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \{ \omega \mid \omega(0) = x \}$.

Dans le paragraphe 2, on étudie la propriété de Markov pour les mesures quasi invariantes sur $\mathscr{W}^*$.

(2) En fait, elles sont quasi invariantes par les translations de S(R), et la formule (1) est encore valable pour $f \in S(R)$ (voir [*2*] et [*9*]).

(3) On préfère $\mathscr{W}^*$ à C(R, R), pour unifier la présentation (voir § 3).

(4) Mesure quasi invariante signifiera toujours : quasi-invariante sous les translations de $\mathscr{D}(R_+^*, R)$

On résout la question suivante au paragraphe 3 : sur $\mathcal{W} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on désigne par $(\underline{\underline{F}}_t^-)_{t \geqq 0}$ la famille croissante de tribus $\underline{\underline{F}}_t^- = \sigma(X_s, s \leqq t)$ avec $X_s(\omega) = \omega(s)$. Soit P la loi sur $\mathcal{W}$ d'un processus de diffusion inhomogène. Quelles sont les applications $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\phi(t, X_t)$ soit encore un processus de diffusion de loi P^ϕ et que $P^\phi |_{\underline{\underline{F}}_t^-}$ soit équivalente à $P |_{\underline{\underline{F}}_t^-}$, pour tout t? Une fonction ϕ répondant à la question est dite admissible pour (X, P), et on note $a_t^\phi = \left.\dfrac{dP^\phi}{dP}\right|_{\underline{\underline{F}}_t^-}$. Les applications γ_f : $(t, x) \to x - f(t)$ $(f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*))$ sont un exemple de telles fonctions ϕ, lorsque X est une diffusion du type « mouvement brownien avec drift ». On calcule explicitement $a_t^{\gamma_f}$ et $a_\infty^{\gamma_f} = \lim\limits_{t \to \infty} a_t^{\gamma_f}$.

La notion et l'étude des $\mathcal{D}(I)$-cocycles permettent au paragraphe 4, sous certaines conditions de régularité, de donner une formule explicite du module de quasi-invariance d'une mesure quasi invariante sur $\mathcal{W}^*$.

Sous les mêmes conditions, on montre, au paragraphe 5, que les mesures de probabilité quasi invariantes, markoviennes sur $\mathcal{W}^*$ sont les lois de processus de diffusion pour lesquels les transformations $(\gamma_f, f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*))$ sont admissibles.

Enfin, au paragraphe 6, on donne des conditions suffisantes pour que les conditions de régularité précédentes soient réalisées, et on étudie les processus de diffusion, pour lesquels les transformations γ_f sont admissibles, qui sont aussi des processus gaussiens.

La rédaction de cet article était terminée lorsque nous avons eu la connaissance de l'article de G. Royer : « Unicité de certaines mesures quasi invariantes sur $C(\mathbb{R})$ » (à paraître aux *Annales de l'École Normale Supérieure*), dans lequel l'auteur obtient en particulier les résultats du théorème 4 lorsque le module de quasi-invariance est donné par :

$$a_f(\omega) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)\right) f''(t) - P(\omega(t) + f(t)) + P(\omega(t)) \right\} dt,$$

sans aucune condition de régularité, mais en prenant pour P un polynome borné inférieurement. De plus, les méthodes utilisées par G. Royer sont entièrement différentes des nôtres.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. L'étude de mesures quasi invariantes sur

$$\mathcal{W}^* = C(R_+^*; R) \text{ (resp } \mathcal{W}_{]a,b[} = C(]a, b[; R))$$

sous les translations de $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})$ (resp $\mathscr{D}(]a, b[;\mathrm{R})$) est un problème naturel, du point de vue de l'analyse fonctionnelle. Cette étude est très liée, *via* la méthode utilisée dans cet article, à celle des mesures quasi invariantes sur $\mathscr{W} = \mathrm{C}(\mathrm{R}_+;\mathrm{R})$ sous les translations de $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})$: cette seconde famille de mesures est également intéressante, étant donné le rôle important de $\mathscr{W}$ dans la théorie des processus de diffusion.

Nous nous limiterons à l'étude de mesures quasi invariantes, régulières (en un sens à préciser) sur $\mathscr{W}^* = \mathrm{C}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})$, sous les translations de $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})$. Dans toute la suite, on écrira seulement « mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$ » sans préciser « sous les translations de $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})$ ».

1.2. Notations

$\mathrm{R}_+^* = \mathrm{R}^+ - \{0\}$

$\mathscr{W} = \mathrm{C}(\mathrm{R}_+;\mathrm{R})$; $\quad \mathscr{W}_x = \mathscr{W} \cap \{\omega \mid \omega(o) = x\}$; $\quad \mathscr{W}^* = \mathrm{C}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})$.

La notation $n^{(*)}$ signifie : *n lorsque l'espace considéré est* $\mathscr{W}$ (éventuellement $\mathscr{W}_x$), n^* *lorsque l'espace est* $\mathscr{W}^*$.

Sur $\mathscr{W}^{(*)}$, on note X_t les projections habituelles :

$$\mathrm{X}_t(\omega) = \omega(t) ;$$

avec

$$\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^- = \sigma(\mathrm{X}_s ; s \leqslant t); \quad \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^+ = \sigma(\mathrm{X}_s ; s \geqslant t) ; \quad \underline{\underline{\mathrm{F}}}_b^a = \underline{\underline{\mathrm{F}}}_{[a,b]} = \sigma(\mathrm{X}_s ; a \leqslant s \leqslant b.)$$

Soit $f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})$; on note $\operatorname{supp} f < t$ lorsque $(x \in \operatorname{supp} f \Rightarrow x < t)$ et $t \,\emptyset f$ lorsque $\operatorname{supp} f < t$ ou $\operatorname{supp} f > t$

Soit $\mathrm{T}_f : \mathscr{W}^{(*)} \to \mathscr{W}^{(*)}$

$$\omega \to \omega - f(f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*;\mathrm{R})).$$

Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{W}^{(*)}$, on note $\mathrm{T}_f(\mu) = \mu^f$ et si de plus, μ est quasi invariante, on note $\dfrac{d\mu^f}{d\mu} = a_f$, et on appelle a_f module de quasi-invariance de μ, suivant la terminologie utilisée en [*2*].

Une mesure μ quasi invariante sur $\mathscr{W}^{(*)}$ est dite locale ([5]) lorsque :

$$\forall a < b \,;\, a, b \in \mathrm{R}_+ \ \operatorname{supp} f \subset]a, b[\Rightarrow a_f \in \underline{\underline{\mathrm{F}}}_{[a,b]}$$
$$\forall f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*),$$

([5]) Cette propriété joue un rôle important pour le caractère markovien de μ quasi-invariante. Voir 6.4.2 de [*2*], ou le paragraphe 2 ci-dessous.

Les mêmes définitions s'étendent au cas où l'on remplace le couple $(\mathscr{W}^{(*)}, \mathscr{D}(R_+^*))$ par $\{ C((a, b[; R); \mathscr{D}(]a, b[) \}$, où $(a, b[$ désigne indifféremment $]a, b[$ ou $[a, b[$.

Rappelons qu'une mesure μ sur $\mathscr{W}^{(*)}$ est markovienne lorsque :

$$\forall t, \forall F \in b(\underline{\underline{F}}_t^+), \ \mu[F \mid \underline{\underline{F}}_t^-] = \mu[F \mid X_t].$$

On note $(\theta_t)_{t \in R_+^{(*)}}$ les opérateurs de translation sur $\mathscr{W}^{(*)}$:

$$\forall \omega \in \mathscr{W}^{(*)} \quad , \quad (\theta_t \omega)(s) = \omega(t + s).$$

Une mesure μ sur $\mathscr{W}^{(*)}$ invariante par ces opérateurs est dite invariante par translation.

On définit de même $(\theta_t)_{t \in R}$ et s [opérateur de symétrie $s(\omega)(u) = \omega(-u)$] sur $C(R ; R)$; une mesure μ sur $C(R ; R)$ invariante par $(\theta_t)_{t \in R}$ et s est dite euclidienne.

1.3. Remarques sur les tribus de certains espaces de probabilité

(Ces remarques seront utiles en plusieurs points au cours de l'article).

LEMME 1.3. — Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable et $\Omega = \mathscr{B}(R_+, E)$ l'ensemble des fonctions mesurables de R_+ dans E. On note X_t l'application $\omega \to \omega(t)$ et $\underline{\underline{F}}_{[a,b]} = \sigma(X_s, a \leqslant s \leqslant b)$.

(*i*) Soit $F : \Omega \to R$, $\underline{\underline{F}}_{[0,\infty]}$ mesurable ; elle est $\underline{\underline{F}}_{[a,b]}$ mesurable si, et seulement si :

$$F(\omega) \equiv F(\omega_b^a), \quad \text{où} \quad \omega_b^a(t) = \begin{cases} \omega(t) & (a \leqslant t \leqslant b) \\ \omega(b) & (t \geqslant b) \\ \omega(a) & (a \leqslant t) \end{cases}$$

(*ii*) Soient $a < b < c$; $\underline{\underline{F}}_{[a,b]} \cap \underline{\underline{F}}_{[b,c]} = \underline{\underline{F}}_{\{b\}}$
$$= \{ f \circ X_b \, ; f \in \underline{\underline{\mathscr{E}}} \}$$

Preuve :

(*i*) Considérons $\mathscr{J}_{a,b} = \{ F \in \underline{\underline{F}}_{[0,\infty)} \ \forall \omega, F(\omega) = F(\omega_b^a) \}$

$\mathscr{J}_{a,b}$ est un espace vectoriel, stable par passage à la limite simple, contenant les constantes. De plus,

$$\mathscr{J}_{a,b} \supset \left\{ F \mid F(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i}(\omega)) \, ; a \leqslant t_i \leqslant b \, ; f_i \in \underline{\underline{\mathscr{E}}} \right\}$$

D'après le théorème de classe monotone, $\mathscr{J}_{a,b} \supset \underline{\underline{F}}_{[a,b]}$; inversement, l'application $\omega \to \omega_b^a$ est

$$[\underline{\underline{F}}_{[a,b]}, F_{[0,\infty)}] \text{ mesurable.}$$

(ii) Soit $t \in \underline{\underline{F}}_{[a,b]} \cap \underline{\underline{F}}_{[b,c]}$; alors, $\mathrm{F}(\omega) = \mathrm{F}[(\omega_b^a)_c^b]$
$= \mathrm{F}(\omega_b^b)$.

On définit ensuite $f \in \underline{\underline{\mathscr{E}}}$ par $f(\alpha) = \mathrm{F}({}^\alpha\omega)$, où ${}^\alpha\omega(t) \equiv \alpha$. On a alors $f(\mathrm{X}_b(\omega)) = \mathrm{F}(\omega_b^b) = \mathrm{F}(\omega)$.

Remarquons que ces résultats restent valables lorsque E est topologique et Ω = Cadlag $(\mathrm{R}_+^{(*)}\mathrm{E})$ ou $\mathrm{C}(\mathrm{R}_+^{(*)}, \mathrm{E})$, mais ne le sont plus pour $\Omega = \mathrm{C}^k(\mathrm{R}_+ \; ; \; \mathrm{R})$ (fonctions k-fois continûment dérivables).

1.4. Quasi-invariance sur C(R, R) et C(R_+, R)

— Les mesures de probabilité μ considérées dans le cadre de la théorie des champs (voir [2] et [9]) sont en particulier définies sur C(R, R), quasi invariantes sous les translations de $\mathscr{D}$(R, R), euclidiennes et locales.

Soit $i_+ \; : \; \begin{array}{l} \mathrm{C}(\mathrm{R}, \mathrm{R}) \to \mathrm{C}(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}) \\ \omega \to \omega/\mathrm{R}_+ \end{array}$. La mesure $i_+(\mu)$ est donc quasi invariante sur $\mathscr{W}$ (sous les translations de $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*, \mathrm{R})$) et suffit pour déterminer μ de façon unique (μ est euclidienne). De plus, $i_+(\mu)$ a pour module de quasi-invariance $\tilde{a}_f$, avec $\tilde{a}_f(\omega) = a_f(\omega_0)$ où

$$\omega_0 \in \mathrm{C}(\mathrm{R}, \mathrm{R}) \qquad \text{et} \qquad \omega_0(t) = \begin{cases} \omega(t) & t \geqslant 0 \\ \omega(0) & t \leqslant 0 \end{cases} \quad (\mu \text{ est locale}).$$

On note $\tilde{a}_f = i_+(a_f)$.

On peut donc se borner, pour étudier les mesures μ quasi invariantes euclidiennes sur C(R, R), à étudier les mesures quasi invariantes sur $\mathscr{W}$. De plus, si μ est locale, l'application i_+ préserve le module de quasi-invariance.

— De façon générale, les remarques faites en 1.1 conduisent à examiner les relations entre les notions de quasi-invariance sur $\mathscr{W}_{[a,b[}$ et $\mathscr{W}_{]a,b[}$.

Soit $a < c < b$. On note i_c :

$$\begin{array}{l} \mathscr{W}_{]a,b[} \to \mathscr{W}_{[c,b[} \\ \quad \omega \to \omega/_{[c,b[} \end{array}$$

et j_a :

$$\begin{array}{l} \mathscr{W}_{[a,b[} \to \mathscr{W}_{]a,b[} \\ \quad \omega \to \omega/_{]a,b[}. \end{array}$$

Si la mesure μ sur $\mathscr{W}_{]a,b[}$ est quasi invariante et locale, sous les translations de $\mathscr{D}(]a, b[, \mathrm{R})$, pour tout $a < c < b$, la mesure $i_c(\mu)$ est quasi invariante et locale, sous les translations de $\mathscr{D}(]c, b[, \mathrm{R})$, de module de quasi-invariance $i_c(a_f)$; on fait une remarque analogue pour l'application j_a.

En particulier, puisque l'on ne s'intéresse ici qu'à la quasi invariance, il suffit, pour l'étude de μ-mesure quasi-invariante, locale sur $\mathscr{W}$, de considérer son image $j_0(\mu)$ sur $\mathscr{W}^*$.

— Enfin, à l'aide de la désintégration régulière des mesures de probabilité sur $\mathscr{W}$, on montre que l'on peut passer — sous certaines conditions (voir la proposition 1.4) — de l'étude de la quasi-invariance sur $\mathscr{W}$, à celle de la quasi-invariance sur $\mathscr{W}_{x,x\in R}$.

On munit $\mathscr{W}^{(*)} = C(R_+^{(*)}, R)$ (resp $\mathscr{W}_x$) de la topologie métrisable de la convergence uniforme sur les compacts de $R_+^{(*)}$. La tribu borélienne de $\mathscr{W}^{(*)}$ (resp $\mathscr{W}_x$) coïncide avec $\underline{\underline{F}}_\infty^-$; enfin, $(\mathscr{W}^{(*)}, \underline{\underline{F}}_\infty^-)$ est un espace standard (voir [8], pages 132-150) : en particulier, si μ est une probabilité sur $\mathscr{W}$, il existe donc une espérance conditionnelle régulière $(\mu_x, x\in R)$ de μ quand X_0.

PROPOSITION 1.4 :

1. Soit μ une probabilité quasi invariante sur $\mathscr{W}$, et $(\mu_x, x \in R)$ une version régulière de l'espérance conditionnelle $\mu(. \mid X_0)$. S'il existe une version $a_f(\omega)$ du module de quasi-invariance de μ telle que :

1. *a)* L'application $(f, \omega) \to a_f(\omega)$ de $\mathscr{D}(R_+^*) \times \mathscr{W}$ dans R est séparément continue $(\mathscr{D}(R_+^*)$ est muni d'une topologie $\mathscr{C}$ qui en fait un espace séparable, avec l'injection $(\mathscr{D}(R_+^*), \mathscr{C}) \hookrightarrow \mathscr{W}$ continue$)$

1.*b*) (6) $\qquad \left\{\begin{array}{l}\forall\omega\in\mathscr{W},\\ \forall f\in\mathscr{D}(R_+^*),\end{array}\right. \quad a_f(\omega)a_{-f}(\omega+f) = 1,$

alors, sauf sur un ensemble N de $\mu_0 = X_0(\mu)$ mesure nulle, on a :

$$\mu_x(X_0 = x_0) = 1$$

et μ_x est une mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}$, de module de quasi-invariance a_f.

2. Soient μ_0 une mesure de probabilité sur R et $(x, A) \to \mu_x(A)$ un noyau borélien sous-markovien sur $R \times \underline{\underline{F}}_\infty^-$ $(\mathscr{W})$ vérifiant :

2.*a*) $\qquad \mu_x(X_0 = x) = 1 \ \mu_0(dx)$ p. s.

2. *b)* $\mu_0(dx)p.s$, μ_x est une mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}$. Alors,

$$\mu = \int \mu_0(dx)\mu_x$$

est une mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}$.

(6) Remarquons que la relation de cocycle donne seulement :

$$a_{f+g}(\omega) = a_f(\omega + g)a_g(\omega)\mu \text{ p. s.}$$

3. Le support de γ, mesure non nulle, quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$ (resp $\mathscr{W}_x$) est $\mathscr{W}^*$ (resp $\mathscr{W}_x$).

Preuve :

1. Par définition de la version régulière, $(\mu_x)_{x\in\mathrm{R}}$, il existe N_1, avec $\mu_0(\mathrm{N}_1)=0$, tel que : $\forall x \notin \mathrm{N}_1$, $\mu_x(\mathrm{X}_0 = x) = 1$.

Soient ϕ, ϕ_i des fonctions de $\mathscr{B}_b(\mathrm{R})$, des réels positifs $t_1 \leqslant t_2 \leqslant - \leqslant t_n$, et f appartenant à $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$.

Par définition de (a_f), et $(\mu_x)_{x\in\mathrm{R}}$, on a :

$$\mu\left[\phi(\mathrm{X}_0)\prod_{i=1}^n \phi_i(\mathrm{X}_{t_i} - f(t_i))\right] = \mu\left[\phi(\mathrm{X}_0)\prod_{i=1}^n \phi_i(\mathrm{X}_{t_i})a_f\right]$$

et donc :

$$\mu\left[\phi(\mathrm{X}_0)\mu_{\mathrm{X}_0}\left[\prod_{i=1}^n \phi_i(\mathrm{X}_{t_i} - f(t_i))\right]\right] = \mu\left[\phi(\mathrm{X}_0)\mu_{\mathrm{X}_0}\left[\prod_{i=1}^n \phi_i(\mathrm{X}_{t_i})a_f\right]\right].$$

Cette identité étant valable pour tout $\phi \in \mathscr{B}_b(\mathrm{R})$, il existe un ensemble $\mathrm{N}_{[(\phi_i,t_i)_{i\leqslant n},f]}$ de μ_0 mesure nulle, hors duquel :

$$\mu_x\left[\prod_{i=1}^n \phi_i(\mathrm{X}_{t_i} - f(t_i))\right] = \mu_x\left[\prod_{i=1}^n \phi_i(\mathrm{X}_{t_i})a_f\right].$$

En faisant varier n dans N, $(t_i)_{i\leqslant n}$ dans Q^n, f dans une suite $(f_p)_{p\in\mathrm{N}}$ dense dans $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$ (pour la topologie $\mathscr{C}$ spécifiée en 1. a), on obtient l'existence d'un ensemble N_2 de μ_0 mesure nulle tel que, d'après le théorème de classe monotone,

$$\begin{array}{l}\forall x \notin \mathrm{N}_2,\ \forall p \in \mathrm{N},\\ \forall \mathrm{F} \in b(\underline{\underline{\mathrm{F}}}_\infty^-)\end{array} \quad \mu_x[\mathrm{F}(\omega - f_p)] = \mu_x[\mathrm{F}(\omega)a_{f_p}(\omega)].$$

D'après la continuité de $f \to a_f(\omega)$, on obtient, lorsque $\mathrm{F} : \mathscr{W} \to \mathrm{R}$ est continue et positive :

$$\begin{array}{l}\forall x \notin \mathrm{N}_2,\\ \forall f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)\end{array} \quad \mu_x[\mathrm{F}(\omega)a_f(\omega)] \leqslant \mu_x[\mathrm{F}(\omega - f)] = \mathrm{T}_f(\mu_x)(\mathrm{F})$$

(Si F est bornée, le lemme de Fatou donne le résultat ; si F est non bornée, on l'approche par $\mathrm{F} \wedge n$ et on utilise le théorème de Beppo-Levi). Inversement, pour F continue positive,

$$\begin{aligned}\forall x \notin \mathrm{N}_2,\ \mu_x[\mathrm{F}(\omega - f)] &= \mu_x\left[\mathrm{F}(\omega - f)a_{-f}(\omega)\frac{1}{a_{-f}(\omega)}\right] \\ &\leqslant \mu_x\left[\mathrm{F}(\omega)\frac{1}{a_{-f}(\omega + f)}\right] \text{ (inégalité précédente et 1.}a) \\ &= \mu_x[\mathrm{F}(\omega)a_f] \text{ (d'après 1.}b).\end{aligned}$$

Finalement, on obtient le résultat en prenant $N = N_1 \cup N_2$.

2. Quitte à modifier (μ_x) sur un ensemble de μ_0 mesure nulle, on peut supposer μ_x quasi invariante pour tout $x \in R$. On désigne par $a_f^x(\omega)$ un module de quasi-invariance de μ_x. D'après un lemme bien connu de Doob, et le caractère borélien du noyau $(x, A) \to \mu_x(A)$, pour f donnée, il existe une version — notée $\tilde{a}_f^x(\omega)$ — de $a_f^x(\omega)$, mesurable pour $\mathscr{B}(R) \otimes \underline{\underline{F}}_\infty^-(\mathscr{W})$.

Il est alors immédiat que μ est quasi invariante, de module de quasi invariance

$$a_f(\omega) = \tilde{a}_f^{X_0(\omega)}(\omega).$$

3. Le support de γ mesure non nulle contient au moins un point ω_1, et donc $\omega_1 + \mathscr{D}(R_+^*)$, par quasi-invariance. D'où :

Supp $\gamma = \mathscr{W}^*$ (resp $\mathscr{W}_x$) par densité de $\omega_1 + \mathscr{D}(R_+^*)$ dans $\mathscr{W}^*$ (resp $\mathscr{W}_x$).

2. CARACTÈRE MARKOVIEN D'UNE MESURE QUASI INVARIANTE SUR $\mathscr{W}$

2.1. Remarque préliminaire

La question de savoir si une mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$ vérifie la propriété de Markov est intéressante en elle-même. De plus, cette question est tout à fait naturelle dans le cadre de la théorie des champs (voir [*2*], [*9*] et les travaux de E. Nelson, [*6*] par exemple). Enfin, cette propriété joue un rôle fondamental dans la méthode utilisée ci-dessous pour l'étude des mesures quasi invariantes.

2.2. Le théorème suivant ([7]) donne des conditions suffisantes pour que μ, mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$ soit markovienne.

THÉORÈME 1. — Soit μ mesure de probabilité quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$, $t > 0$ et $F \in b(\underline{\underline{F}}_t^+)$.

Si les conditions suivantes sont réalisées :

i) Il existe une application a : $\mathscr{D}(R_+^*) \times \mathscr{W}^* \to R$
$$(f, \omega) \to a_f(\omega)$$
telle que :

$$\forall f \in \mathscr{D}(R_+^*) \quad , \quad \frac{d\mu^f}{d\mu}(\omega) = a_f(\omega) \ \mu\text{.p. s.}$$

([7]) Son énoncé et sa démonstration figurent également en [*2*] (voir la condition (*) en 6.4.2 de [*2*]).

ii) $\forall t \in \mathrm{R}$, $\forall f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$,

$$\operatorname{supp} f < t \Rightarrow a_f \in \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^- .$$

iii) Il existe une version Z continue en ω de $\mu[\mathrm{F} \mid \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-](\omega)$. Alors,

$$\mu[\mathrm{F} \mid \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-] = \mu[\mathrm{F} \mid \mathrm{X}_t].$$

Le corollaire découle du théorème de classe monotone.

COROLLAIRE 1.1. — Soit μ mesure de probabilité quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$ vérifiant les conditions *i)* et *ii)* du théorème précédent, ainsi que :

iii) Pour tout couple (t, u) avec $0 < t < u$, pour toute fonction

$$\phi \in \mathrm{C}_b^\infty(\mathrm{R}, \mathrm{R})$$

il existe une version Z, continue en ω, de $\mu\{\phi(\mathrm{X}_u) \mid \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-\}(\omega)$.

Alors, μ est markovienne pour les tribus $(\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-)$:

$$\forall \mathrm{F} \in b(\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^+) \quad , \quad \mu\{\mathrm{F} \mid \mathrm{F}_t^-\} = \mu\{\mathrm{F} \mid \mathrm{X}_t\}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Soient $(f_i)_{i \leqslant n}$ fonctions boréliennes bornées, $\mathrm{F} \in b(\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^+)$, $t_i \leqslant t$, et $f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$ telle que $\operatorname{supp} f < t$. Soit Z une version continue de

$$\mu[\mathrm{F} \mid \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-](\omega).$$

Montrons alors que $\mathrm{T}_f(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$

$$\mu\left[\prod_{i=1}^n f_i(\mathrm{X}_{t_i} - f(t_i))\mathrm{F}\right] = \mu\left[\prod_{i=1}^n f_i(\mathrm{X}_{t_i} - f(t_i))\mathrm{Z}\right]$$

$$= \mu\left[\prod_{i=1}^n f_i(\mathrm{X}_{t_i})\mathrm{T}_{-f}(\mathrm{Z})a_f\right] \text{ (Définition de } a_f).$$

D'autre part, d'après les rappels de 1.3, on a : $\mathrm{T}_f(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. D'où :

$$\mu\left[\prod_{i=1}^n f_i(\mathrm{X}_{t_i} - f(t_i))\mathrm{F}\right] = \mu\left[\prod_{i=1}^n f_i(\mathrm{X}_{t_i})a_f\mathrm{F}\right] \text{ (Définition de } a_f)$$

$$= \mu\left[\prod_{i=1}^n f_i(\mathrm{X}_{t_i})a_f\mathrm{Z}\right] \qquad (a_f \in \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-)$$

D'après le théorème de classe monotone, on a donc :

$$a_f(\omega)\mathrm{Z}(\omega) = \mathrm{T}_f(\mathrm{Z})(\omega)a_f(\omega)\mu.\text{p s.}$$

Or, $a_f(\omega) > 0$, $\mu.p.s.$ D'où : $\mathrm{Z}(\omega) = \mathrm{Z}(\omega + f)\mu.p.s.$

D'après la continuité de Z et l'égalité supp $\mu = \mathscr{W}^*$ (proposition 1.4), on a :

$$\forall \omega \in \mathscr{W}^*, \forall f \in \mathscr{D}(R_+^*), \operatorname{supp} f < t \Rightarrow Z(\omega) = Z(\omega + f)$$

La continuité de Z entraîne encore :

$$\begin{matrix} \omega, \omega' \in \mathscr{W}^* \\ \omega(s) = \omega'(s), s \geqslant t \end{matrix} \Rightarrow Z(\omega) = Z(\omega')$$

D'après le lemme 1.3, ceci entraîne $Z \in \underline{\underline{F}}_t^+$. D'où :

$$Z \in \underline{\underline{F}}_t^+ \cap \underline{\underline{F}}_t^- = \underline{\underline{F}}_{\{t\}}.$$

2.3. Un exemple de mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}$, non markovienne

Le cadre particulier des processus gaussiens permet de mieux comprendre les hypothèses faites dans le théorème précédent :

Soit $[(X_t)_{t \in R_+^{(*)}} ; P]$ processus gaussien, centré, de covariance K, dont les trajectoires sont des éléments de $\mathscr{W}^{(*)}$ et μ image de P sur $\mathscr{W}^{(*)}$ par l'application $\omega \to X(\omega)$.

On sait alors que ([7], pages 54-55 et 174) :

1) μ est quasi invariante si et seulement si, $\mathscr{D}(R_+^*) \subset \mathscr{H}(K)$, où $\mathscr{H}(K)$ désigne l'espace auto-reproduisant associé à K;

2) μ est markovienne si, et seulement si, K est triangulaire :

$$\forall u \leqslant s \leqslant t, \ K(u, t) = \frac{K(u, s)K(s, t)}{K(s, t)}.$$

Les mesures W_x sur $\mathscr{W}_x$, du mouvement brownien partant de x, sont à la fois quasi invariantes et markoviennes

$$(K(s, t) = s \wedge t)$$

Voici un exemple de mesure μ sur $\mathscr{W}_0$, gaussienne, quasi invariante et non markovienne :

Soit

$$K(s, t) = s \wedge t + \int_0^t \int_0^s \phi(u)\phi(v) du dv, \qquad \text{où} \qquad \phi \geqslant 0, \ \phi \in C^\infty([0, \infty)) ;$$

K est de type positif. Elle est triangulaire si et seulement si, ϕ est constante (cas que nous excluons).

Une réalisation du processus gaussien de covariance K est :

$$X_t = B_t + \Phi(t)\zeta,$$

où B_t est un mouvement brownien issu de 0, ζ une variable aléatoire normale, indépendante de $B_.$, et

$$\Phi' = \phi \; ; \quad \Phi(0) = 0.$$

On peut prendre pour espace de probabilité

$$\Omega = \mathscr{W}_0 \times \mathrm{R} \; ; \; \mathrm{Q} = \mathrm{W}_0 \otimes \mu_0\left(\mu_0(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right).$$

On note sur cet espace $\underline{\underline{F}}_t^X = \sigma(X_s, s \leqslant t)$. On obtient facilement les formules suivantes :

$$. \mathrm{E}[\zeta \mid \underline{\underline{F}}_t^X] = \frac{1}{\left(1 + \int_0^t (\phi'(u))^2 du\right)} \left[\phi'(t) X_t - \int_0^t \phi''(u) X_u du\right]$$

$$. \forall u > t, \ \mathrm{E}[X_u \mid \underline{\underline{F}}_t^X] = X_t + (\phi(u) - \phi(t)) \mathrm{E}[\xi \mid \underline{\underline{F}}_t^X]$$

(La propriété de Markov n'est donc pas vérifiée, mais $\mathrm{E}[X_u \mid \underline{\underline{F}}_t^X]$ admet une version, fonction continue de $X_.(\omega)$)

$$. \frac{dQ^f}{dQ} = \exp\left\{\int_0^\infty f''(s) X_s ds - \frac{1}{2}\int_0^\infty f'^2(s) ds - \int_0^\infty f''(s)\phi(s) ds . \zeta\right\}$$

$$. \mathrm{Q}\left[\frac{dQ^f}{dQ} \middle| \underline{\underline{F}}_\infty^X\right] = \exp\left\{\int_0^\infty f''(s) X_s ds - \frac{1}{2}\int_0^\infty (f'(s))^2 ds\right\} \mathrm{Q}\left[e^{-\int_0^\infty ds f''(s)\phi(s)\zeta} \middle| \underline{\underline{F}}_\infty^X\right]$$

Ce module de quasi-invariance de $\mathrm{Q} \mid \underline{\underline{F}}_\infty^X$ ne vérifie pas la condition *ii)* du théorème, sinon ζ serait $\underline{\underline{F}}_{0+}$ mesurable, ce qui n'est pas (d'après la 1re formule, par exemple).

3. PROCESSUS DE DIFFUSION A VALEURS DANS R ET MESURES QUASI INVARIANTES SUR $C(R_+, R)$

La loi de certains processus de diffusion, à valeurs dans R, sur $C(R_+, R)$ est quasi invariante, et locale : le but de ce paragraphe est de caractériser les processus de diffusion tels que cette propriété soit réalisée, et de donner une formule du module de quasi-invariance des mesures en question.

Inversement, on remarquera, à la suite du théorème 4 (§ 5) que ces mesures sont les prototypes des mesures quasi invariantes, markoviennes et locales sur $C(R_+, R)$.

3.1. Définitions

$(\Omega, \underline{\underline{G}}, P)$ désigne un espace de probabilité, muni d'une famille croissante, continue à droite de sous-tribus $\underline{\underline{G}}_t$ de $\underline{\underline{G}}$; $\underline{\underline{G}}_0$ est supposée complète pour P.

1. On appelle processus de diffusion de coefficients σ et b, un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$, défini sur $(\Omega, \underline{\underline{G}}, P)$, solution de l'équation stochastique :

$$E(x, \sigma, b) : X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds, \text{ où}$$

— $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un $(\underline{\underline{G}}_t, P)$ mouvement brownien réel.
— Les fonctions $\sigma, b : R_+ \times R \to R$ vérifient la condition (U) :

$$(\mathrm{U}) \begin{cases} (\mathrm{U.1})\ \sigma \text{ est bicontinue en } (t, x), \text{ ne s'annule pas, et} \\ \forall T, \forall t \leqslant T, \forall x, |\sigma(t, x)| \leqslant K_T(1 + |x|) \\ (\mathrm{U.2})\ \sigma \text{ et } b \text{ sont localement lipschitziennes en } x, \text{ sur } R_+ \times R \\ (\mathrm{U.3})\ b \text{ est localement bornée sur } R_+ \times R. \end{cases}$$

On note P^X la mesure $X.(P)$ sur $\mathscr{W}_x$.

2. On appelle transformation de diffusion toute application $\gamma : R_+ \times R \to R$, de classe $C^{1,2}(R_+ \times R)$, vérifiant la condition (V) :

$$(\mathrm{V}) \begin{cases} (\mathrm{V.1}).\ \gamma(0, x) = x \\ (\mathrm{V.2}).\ \forall t \geqslant 0,\ \gamma(t, .) \text{ est bijective sur R et} \\ \qquad \forall T, \forall t \leqslant T, \forall x, |\gamma_t^{-1}(x)| \leqslant K_T(1 + |x|) \\ (\mathrm{V.3}).\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial x} \text{ est bornée uniformément, et ne s'annule pas.} \\ \text{Les dérivées } \dfrac{\partial^2\gamma}{\partial^2 x} \text{ et } \dfrac{\partial\gamma}{\partial t} \text{ sont localement lipschitziennes en } x, \text{ sur } R_+ \times R. \end{cases}$$

Remarquons, d'après la formule de Ito, que si X est un processus de diffusion de coefficients (σ, b), le processus X^γ définit par $X_t^\gamma = \gamma(t, X_t)$ est encore un processus de diffusion, de coefficients σ^γ et b^γ, avec :

$$(2_\gamma) \quad \begin{aligned} \sigma^\gamma(t, .) &= \left[\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t, .)\sigma(t, .)\right] \circ \gamma(t, .)^{-1} \\ b^\gamma(t, .) &= \left[\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t, .)b(t, .) + \frac{\partial\gamma}{\partial t}(t, .) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(t, .)\sigma^2(t, .)\right] \circ \gamma(t, .)^{-1} \end{aligned}$$

3. Une transformation de diffusion $\gamma : R_+ \times R \to R$ est dite admissible pour le processus de diffusion X, si et seulement si,
P^{X^γ} et P^X sont équivalentes sur chaque tribu $\underline{\underline{F}}_t^-$ de $\mathscr{W}$.

3.2. Absolue continuité de processus de diffusion

En [*11*] et [*3*] (en particulier), figurent des énoncés de théorèmes sur l'absolue continuité de processus de diffusion.

Le théorème suivant est bien connu, mais semble souvent cité dans la littérature sous des hypothèses plus restrictives, ou seulement avec la condition suffisante.

THÉORÈME 2. — Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(X'_t)_{t\geq 0}$ deux processus de diffusion, à valeurs dans R, de coefficients respectifs (σ, b) et (σ', b'). Alors, P^X et $P^{X'}$ sont équivalentes sur $\underline{\underline{F}}_t^-$, pour tout t, si, et seulement si :

$$\sigma^2(t, X_t)(\omega)) = (\sigma')^2(t, X_t(\omega))dt \otimes P^X \text{ et } dt \otimes P^{X'} \text{ p. s.}$$

On peut démontrer ce théorème en se ramenant tout d'abord au cas $b = b' = 0$, à l'aide de la formule de Cameron-Martin. Ensuite, on peut utiliser les résultats généraux de [*4*], après les avoir étendus aux processus de Markov non homogènes, à l'aide de la transformation d'espace-temps [*5*] (voir également la remarque 3.5.2).

COROLLAIRE 2.1. — Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de diffusion de coeffi cients (σ, b) et γ une transformation de diffusion. Alors, γ est admissible pour X si, et seulement si, les processus

$$\sigma^2(t, X_t(\omega)) \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t, .)\sigma(t, .)\right]^2 \circ \gamma(t, .)^{-1} \circ X_t(\omega)$$

sont indistinguables.

Preuve. — C'est la conséquence du théorème, de la première formule (2_γ) et de la continuité en t des deux processus.

COROLLAIRE 2.2. — Les seules transformations admissibles du mouvement brownien sont les applications γ_f et $-\gamma_f$, avec $\gamma_f(t, x) = x - f(t)$, où $f : R_+ \to R$ est de classe C^1, avec $f(o) = 0$.

Inversement, les applications γ_f sont admissibles pour un processus de diffusion de coefficients σ et b si, et seulement si, $\sigma(x, s) = \delta(s)$, où δ est une fonction continue de s, ne s'annulant pas.

Preuve. — Si les applications γ_f sont admissibles pour X, la loi de $X_t(t>0)$ sous P^X est quasi invariante par les translations de R, et a donc pour support R.

On déduit donc du corollaire précédent, et de la continuité de σ en x

$$\forall t,\ \forall x,\ \sigma^2(t, x) = \sigma^2(t, x + f(t))$$

σ ne s'annulant pas, et étant continue en t, on obtient, en faisant varier $f(t)$, $\sigma(t, x) = \delta(t)$, où δ est une fonction continue en t. ■

On note ensuite $X^{\gamma_f} = X^f$, et si les applications γ_f sont admissibles pour X, on note $M_t^f = \left.\frac{dP^{X^f}}{dP^X}\right|_{\underline{\underline{F}}_t^-}$.

3.3. Formule explicite de la densité M_t^f

PROPOSITION 3.3. — Soit X processus de diffusion, de coefficients $\sigma(s, x) = \delta(s)$ et $b(s, x)$. Les applications $(\gamma_f)_{f \in C^1(R_+); f(o)=0}$ sont alors admissibles pour X et si $f \in C^1(R_+)$, $f(o) = 0$, on a :

$$(3) \quad M_t^f = \exp\left\{ \int_0^t c(s)[b(s, X_s + f(s)) - b(s, X_s) - f'(s)]d\tilde{X}_s \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^t ds[b(s, X_s + f(s)) - b(s, X_s) - f'(s)]^2 c(s) \right\}$$

où

$$\tilde{X}_t = X_t - x - \int_0^t b(s, X_s)ds \; ; \; \delta^2(s)c(s) = -1$$

Si, de plus, $b \in C^{1,1}(R_+ \times R)$, $\delta \in C^1(R_+)$, $f \in C^2(R_+)$, M_t^f est donnée par :

$$(4) \quad M_t^f = \exp\left\{ c(t)f'(t)X_t - c(t)[\widehat{b}(t, X_t + f(t)) - \widehat{b}(t, X_t)] + \frac{1}{2}c(t)f(t)f'(t) \right.$$
$$\left. + \int_0^t ds \left\{ \mathscr{V}_{(\delta,b)}(s, X_s + f(s)) - \mathscr{V}_{(\delta,b)}(s, X_s) - (cf')'(s)\left(X_s + \frac{1}{2}f(s)\right) \right\} \right\}$$

où

$$\widehat{b}(t, x) = \int_a^x b(t, y)dy$$

et

$$\mathscr{V}_{(\delta,b)}(s, x) = \frac{1}{2}\left\{ c(s)b^2(s, x) + 2c'(s)\widehat{b}(s, x) + 2c(s)\frac{\partial \widehat{b}}{\partial s} - \frac{\partial b}{\partial x}(s, x) \right\}$$

Preuve. — Soit $f \in C^1(R_+)$, $f(o) = 0$. L'équation stochastique vérifiée par $X_t^f = X_t - f(t)$ est :

$$X_t^f = x + \int_0^t \delta(s)dB_s + \int_0^t [b\left(s, X_s^f + f(s)\right) - f'(s)]ds.$$

En appliquant la formule de Cameron-Martin aux processus X^f et X, et en utilisant la formule de définition de c : $\delta^2(s)c(s) = -1$, on obtient (3).

Si de plus $b \in C^{1,1}(R_+ \times R)$, $\delta \in C^1(R_+)$, $f \in C^2(R_+)$, en posant

$$\widehat{b}(t, x) = \int_a^x b(t, y)dy,$$

et en appliquant la formule de Ito à

$$\phi(t, X_t) = c(t)f'(t)X_t - c(t)[\widehat{b}(t, X_t + f(t)) - \widehat{b}(t, X_t)]$$

on obtient la formule (4) à partir de (3).

Remarque. — Cette méthode a également été utilisée en [9] pour des diffusions homogènes.

Le corollaire suivant concerne le problème de l'unicité de *mesures de diffusion* quasi invariantes, de module de quasi-invariance donné.

COROLLAIRE 3.3.1. — Soient X et $\bar{X}$ deux processus de diffusion, de coefficients respectifs $(\sigma(s, x) = \delta(s), b(s, x))$, et $(\bar{\sigma}(s, x) = \bar{\delta}(s), \bar{b}(s, x))$, où les fonctions b et $\bar{b}$ appartiennent à $C^{1,2}(R_+ \times R)$, δ et $\bar{\delta} \in C^1(R_+)$.

On a alors :

$$\forall f \in \mathscr{D}(R_+^*),\ M_\infty^f = (\bar{M})_\infty^f P^X p.s \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \delta^2 &= (\bar{\delta})^2 \\ \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(\delta, b) &= \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(\bar{\delta}, \bar{b}) \end{aligned} \right.$$

Preuve. — P^X étant une mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}_x$, d'après la proposition 1.4, et la continuité de $\omega \to M_\infty^f(\omega)$, ou $(\bar{M})_\infty^f(\omega)$, l'égalité $M_\infty^f = (\bar{M}')_\infty^f$ a lieu en tout $\omega \in \mathscr{W}_x$.

On en déduit, en dérivant $M_\infty^{\lambda f}(\omega) = (\bar{M})_\infty^{\lambda f}(\omega)$ en $\lambda = 0$, l'égalité :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathscr{W}_x, \quad & \int_0^\infty \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(\delta, b)(s, X_s(\omega))f(s) - (cf')'(s)X_s(\omega)ds \\ \forall f \in \mathscr{D}(R_+^*) \quad & = \int_0^\infty \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(\bar{\delta}, \bar{b})(s, X_s(\omega))f(s) - (\bar{c}f')'(s)X_s(\omega)ds \end{aligned}$$

d'où le résultat, en identifiant les distributions de même ordre.

3.4. Quelques problèmes de martingales

Remarquons tout d'abord que comme cas particulier de la formule (4) de 3.3, on a obtenu lorsque X est le mouvement brownien à valeurs dans R et $f_\lambda(t) = -\lambda t$, $\lambda \in R$, $M_t^{f_\lambda} = \exp\left\{\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right\}$.

Or, le seul processus X_t à trajectoires continues tel que

$$M_t^{f_\lambda} = \exp\left\{\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right\}$$

soit une martingale pour tout λ est le mouvement brownien.

Plus généralement, on est ainsi amené, connaissant les formules (3) et (4) de 3.3, à poser le *premier problème* suivant :

Les fonctions c, $\mathscr{V}$ et $\widehat{b}$ étant données, quelles sont les probabilités P sur $C(R_+, R)$ telles que pour toute $f \in C^\infty(R_+, R)$, avec $f(o) = 0$, M_t^f soit une $(P; \underline{\underline{F}}_t^-)$ martingale?

Notons, en particulier, que la transformation de la formule (3) en (4) permet de poser un problème « naturel », c'est-à-dire ne faisant pas intervenir d'intégrales stochastiques.

La proposition suivante donne les solutions de ce problème, posé pour simplifier dans le cadre homogène

$$(c = -1; \quad \mathscr{V}(s, x) = P(x); \quad \widehat{b}(t, x) = B(x)).$$

Sa démonstration figure en particulier dans la démonstration du théorème 4 au paragraphe 5.

PROPOSITION 3.4. — Soient B, P : $R \to R$ deux fonctions de classe C^2. S'il existe une probabilité μ sur $C(R_+, R)$ telle que

$$M_t^f = \exp\left\{ B(X_t + f(t)) - B(X_t) - X_t f'(t) - \frac{1}{2} f(t) f'(t) \right.$$
$$\left. + \int_0^t ds \left\{ \left(X_s + \frac{1}{2} f(s) \right) f'(s) - P(X_s + f(s)) + P(X_s) \right\} \right\}$$

soit une $(\mu, \underline{\underline{F}}_t^-)$ martingale, pour toute $f \in C^\infty(R_+, R)$, alors, on a :

$$(B')^2 + 2B'' = 2P + C^{te}.$$

Si cette égalité est réalisée, μ est alors la loi du processus (X_t) solution de :

$$X_t = X_0 + Y_t + \int_0^t B'(X_s) ds,$$

où Y_t est un $\underline{\underline{F}}_t^-$ mouvement brownien.

3.5. **Remarques**

3.5.1. Plus généralement, on aurait pu étudier les processus de diffusion $(X_t)_{t>0}$, c'est-à-dire les solutions de

$$(0 < s < t) X_t = X_s + \int_s^t \sigma(u, X_u) dB_u + \int_s^t \zeta(u, X_u) du$$

pour obtenir des mesures quasi invariantes sur $\mathscr{W}^*$ (non forcément portées par $\mathscr{W}$). Les calculs sont alors identiques. On peut se reporter au théorème 4, où de tels processus apparaissent alors de façon naturelle.

3.5.2. On s'est intéressé spécialement ici à la classe des applications translations γ_f : ces transformations apparaissent naturellement dans le problème à l'origine de ce travail. D'autre part, elles sont admissibles pour une classe importante de diffusions.

De même, on pourrait poser des problèmes analogues, avec d'autres classes de transformations, après avoir établi la formule (4) de 3.3 correspondante.

3.5.3. On peut généraliser les différentes parties de ce paragraphe dans le cadre général des processus de Hunt, à l'aide des résultats de [*4*], sur l'absolue continuité des processus de Hunt, de la notion du générateur étendu d'un processus de Hunt (voir également [*4*]), de la transformation d'espace-temps [*5*], et de la formule générale de changement de variables de Kunita-Watanabé.

4. EXPLICITATION DU MODULE DE QUASI-INVARIANCE

Nous cherchons maintenant à donner une formule explicite du module de quasi-invariance a_f d'une mesure de probabilité μ, quasi invariante, sur $\mathscr{W}^*$ « régulière » en un sens à préciser (voir les conditions R1 et R2 énoncées dans la proposition 4.3 et le théorème 3). Dans ce but, nous étudions en préliminaire les $\mathscr{D}(\mathrm{I})$.cocycles (définition 4.2) qui apparaîtront largement dans la suite de l'étude.

4.1. **Définitions et notations**

<u>$C^{p,q}(\mathrm{I} \times \mathrm{J})$</u> : I et J sont deux intervalles ouverts de R; $(p, q) \in \mathrm{N}^2$;

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathrm{R} \\ (x, y) \to f(x, y) \end{array} \right.$$

appartient à $C^{p,q}(\mathrm{I} \times \mathrm{J})$ si, et seulement si, elle est p.fois dérivable en x, q fois dérivable en y, et les $(p + q)$ dérivées ainsi définies sont bicontinues sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.

<u>$.\mathrm{D}^n(\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*), \mathscr{W}^*)$</u> : n est un entier, supérieur ou égal à 1.

<u>$n = 1$</u> F : $\mathscr{W}^* \to$ R appartient à $\mathrm{D}^1(\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*); \mathscr{W}^*)$ si et seulement si, pour tout $f \in \mathscr{W}^*$, il existe $\frac{d}{df}\mathrm{F}(f) \in \mathscr{D}'(\mathrm{R}_+^*)$ telle que: $\forall h \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$, l'application $\lambda \to \mathrm{F}(f + \lambda h)$ soit continûment dérivable, avec

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \mathrm{F}(f + \lambda h) = \left\langle \frac{d}{df}\mathrm{F}(f), h \right\rangle_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}}$$

(En particulier, F est $\mathscr{D}(R_+^*)$. faiblement différentiable au sens de Gâteaux.)

$\underline{n > 1}$ F appartient à $D^n(\mathscr{D}(R_+^*), \mathscr{W}^*)$ si F appartient à $D^1(\mathscr{D}(R_+^*), \mathscr{W}^*)$ et pour tous $f \in \mathscr{W}^*$, $h \in \mathscr{D}(R_+^*)$, l'application $\lambda \to F(f + \lambda h)$ est n fois dérivable.

On définit de façon semblable $D^n(\mathscr{D}(R_+^*), \mathscr{D}(R_+^*))$ que l'on note simplement $D^n(\mathscr{D}(R_+^*))$.

$\underline{.C^{p,q}(\mathscr{D}(R_+^*) \times I)}$: $(p, q) \in N^2$, avec $p \geqslant 1$; I est un intervalle ouvert de R; $F : \mathscr{D}(R_+^*) \times I \to R$, appartient à $C^{p,q}(\mathscr{D}(R_+^*) \times I)$ si et seulement si,
$(f, t) \to F(f, t)$
pour tout t, $F(., t) \in D^p(\mathscr{D}(R_+^*))$ et pour tout $(f, g) \in \mathscr{D}(R_+^*) \times \mathscr{D}(R_+^*)$, l'application $(\lambda, t) \to F(f + \lambda g, t)$ appartient à $C^{p,q}(R \times I)$. On pourrait évidemment faire des définitions analogues dans des situations plus générales.

4.2. Étude des $\mathscr{D}$(I).cocycles

DÉFINITION 4.2. — Soit I un intervalle ouvert de R et $\mathscr{D}(I)$ les fonctions définies sur I, de classe C^∞, à support compact dans I. Une application $G : \mathscr{D}(I) \times I \times R \to R$ est appellée $\mathscr{D}$(I).cocycle si elle vérifie

Co1 [8] : $\forall t \in I, \forall x \in R, G(0, t, x) = 0$

Co2 : $\begin{matrix} \forall f, g \in \mathscr{D}(I) \\ \forall t \in I, \forall x \in R \end{matrix}$, $G(f + g, t, x) = G(f, t, x + g(t)) + G(g, t, x)$.

Co3 : $\forall t \in I$, $\forall f \in \mathscr{D}(I)$, $t \varnothing f \Rightarrow G(f, t\ x) \equiv 0$.

Les $\mathscr{D}$(I).cocycles vérifient les propriétés immédiates suivantes :

— Les $\mathscr{D}$(I).cocycles forment un R.espace vectoriel, sont stables par multiplication par une fonction de t, et par dérivation en x : si G est partiellement dérivable en x, $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ est encore un $\mathscr{D}$(I).cocycle.

— Si T_t est une distribution, l'application $(t, f) \to T_t(f)$ est un $\mathscr{D}$(I).cocycle si et seulement si supp $(T_t) \subset \{ t \}$.

— Supposons G, $\mathscr{D}$(I).cocycle, faiblement $\mathscr{D}$(I).différentiable (au sens de Gâteaux) en $f = 0$; alors, G est faiblement $\mathscr{D}$(I).différentiable en tout f si, et seulement si, G est dérivable en x (propriété *Co2*).

De plus, si pour tout x de R, $G(., ., x) \in C^{p,q}(\mathscr{D}(I) \times I)$ $(p \geqslant 1)$, alors pour tout $f \in \mathscr{D}(I)$, $G(f, ., .) \in C^{p,q}(I \times R)$ (d'après *Co2*).

— Soit G, $\mathscr{D}$(I).cocycle. Supposons que pour tout $(t, x) \in I \times R$, $G(., t, x)$

[8] *Co2* entraîne évidemment *Co1*, propriété que l'on a voulu néanmoins dégager.

appartient à $D^1(\mathscr{D}(I))$. D'après les propriétés *Co1* et *Co3*, le support de la distribution $\frac{\partial}{\partial f}G(o, t, x)$ est alors inclus dans $\{ t \}$. En particulier, $\frac{\partial}{\partial f}G(o, t, x)$ est d'ordre fini.

PROPOSITION 4.2. — Soit G un $\mathscr{D}(I)$.cocycle vérifiant de plus :

i) $\begin{matrix}\forall t \in I \\ \forall x \in R\end{matrix}$, $G(., t, x) \in D^1(\mathscr{D}(I))$.

ii) $\forall g \in \mathscr{D}(I)$, l'application $(t, x) \to \left\langle \frac{\partial}{\partial f}G(0, t, x), g \right\rangle_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}}$ appartient à $C^{p,q}(I \times R)[(p, q) \in N^2]$.

iii) L'ordre de $\frac{\partial}{\partial f}G(o, t, x)$ est majoré uniformément en (t, x) par $k \in N$.

Il existe alors une fonction $\mathscr{V} \in C^{p,q+1}(I \times R)$, des fonctions $(C_r)_{1 \leqslant r \leqslant k}$ appartenant à $C^p(I)$ telles que :

$$G(g, t, x) = \mathscr{V}(t, x + g(t)) - \mathscr{V}(t, x) + \sum_{r=1}^{k} C_r(t) g^{(r)}(t).$$

Notations. — Un $\mathscr{D}(I)$.cocycle vérifiant les hypothèses de la proposition 4.4.2 est dite de classe $(p, q + 1)$ (et d'ordre $\leqslant k$).

Démonstration de la proposition 4.2. — D'après *iii)*, il existe $(k+1)$ fonctions $\phi^r(t, x)$ telles que :

$$\frac{\partial}{\partial f}G(0, t, x) = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_t^{(r)}(-1)^r \phi^r(t, x).$$

Soit pour $t \in I$, $g^0 \in \mathscr{D}(I)$, avec $g^0(u) = 1$ dans un voisinage de t.

D'après *ii)*, $\phi^0 \in C^{p,q}(I \times R)$ puisque cela est vrai pour

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial f}G(0, \ldots), g^0 \right\rangle.$$

Il en est de même, par itération, pour toutes les fonctions ϕ^r, en utilisant $g^r \in \mathscr{D}(I)$, $g^r(u) = u^r$ dans un voisinage de t.

D'après *Co1*, $G(g, t, x) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial f}G(\lambda g, t, x), g \right\rangle d\lambda.$

Co2 implique : $\left\langle \frac{\partial}{\partial f}G(\lambda g, t, x) ; g \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial f}G(0, t, x + \lambda g(t)) ; g \right\rangle$

D'où :

$$G(g, t, x) = \sum_{r=0}^{k} g^{(r)}(t) \int_0^1 \phi^r(t, x + \lambda g(t)) d\lambda$$

$$= U^0(t, x + g(t)) - U^0(t, x) + \sum_{r=1}^{k} \frac{g^{(r)}(t)}{g(t)} [U^r(t, x + g(t)) - U^r(t, x)]$$

(a) lorsque $g(t) \neq 0$

$$= \sum_{r=1}^{k} g^{(r)}(t) \phi^r(t, x) \quad \text{lorsque} \quad g(t) = 0,$$

avec

$$U^r(t, x) = \int_0^x \phi^r(t, v) dv.$$

En reportant l'égalité (a) dans l'identité *Co2* des $\mathscr{D}(I)$.cocycles, on obtient : $\forall f, g \in \mathscr{D}(I)$,

$$(b) \quad \sum_{r=1}^{k} \frac{(f+g)^{(r)}}{(f+g)} (t) [U^r(t, x + f(t) + g(t)) - U^r(t, x)])$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \frac{f^{(r)}}{f} (t) [U^r(t, x + f(t) + g(t)) - U^r(t, x + g(t))]$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} \frac{g^{(r)}}{g} (t) [U^r(t, x + g(t) - U^r(t, x)]$$

lorsque

$$f(t), g(t) \neq 0 \quad \text{et} \quad (f+g)(t) \neq 0$$

En faisant $\begin{cases} g(u) = C \\ f(u) = \lambda u \end{cases}$ dans un voisinage de t, il vient :

$$\frac{\lambda}{\lambda t + C} [U^1(t, x + C + \lambda t) - U^1(t, x)] = \frac{1}{t} [U^1(t, x + C + \lambda t) - U^1(t, x + C)]$$

En divisant les deux membres par λ, et en faisant tendre λ vers 0, puis en prenant $x + C = 0$, on obtient que $U^1(t, .)$ est affine. En reportant ce résultat dans (b), on obtient l'équation (b) avec des sommations de 2 à k. En prenant ensuite $g(u) = C$ et $f(u) = \lambda u^2$, on obtient le même résultat pour U^2, puis pour tout U^p, ce qui termine la démonstration.

4.3. Forme explicite du module de quasi-invariance

Si μ mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$ vérifie les conditions de régularité R1 (voir proposition 4.3), on peut donner une forme explicite de son module de quasi-invariance a_f. Si, de plus, μ est markovienne, et vérifie les conditions R2 (voir théorème 3), on peut donner une forme explicite de $\mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-]$ pour tout t (module de quasi-invariance de $\mu \mid \underline{\underline{F}}_t^-$).

On pose, pour simplifier, $a_f(\omega) = e^{A_f(\omega)}$. La relation de cocycle donne l'égalité :

$$(\mathrm{CO})\forall f, g \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*), \qquad \mathrm{A}_{f+g}(\omega) = \mathrm{A}_f(\omega + g) + \mathrm{A}_g(\omega)\, \mu\text{.p. s.}$$

— S'il existe une version $a_f(\omega)$ du module de quasi-invariance, avec a_f continue, pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$, l'égalité (CO) a alors lieu partout (car supp $\mu = \mathscr{W}^*$; proposition 1.4).

— Si, de plus, pour tout ω, A_f appartient à $\mathrm{D}^1(\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*))$, alors, pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$, $\mathrm{A}_f \in \mathrm{D}^1[\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*), \mathscr{W}^*]$.

On peut maintenant énoncer la :

PROPOSITION 4.3. — Soit μ mesure de probabilité quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$. On suppose qu'il existe une application $\mathrm{A} : \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*) \times \mathscr{W}^* \to \mathrm{R}$ telle que $\frac{d\mu^f}{d\mu}(\omega) = e^{\mathrm{A}_f(\omega)}$, vérifiant les propriétés suivantes :

R1 *a)* $\forall f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$, l'application $\mathrm{A}_f : \mathscr{W}^* \to \mathrm{R}$ est continue.

R1 *b)* A est local : $\forall f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$, supp $f \in [a, b] \Rightarrow \mathrm{A}_f \in \underline{\underline{F}}_{[a,b]}$.

R1 *c)* $\forall \omega \in \mathscr{W}^*$, l'application $f \to \mathrm{A}_f(\omega)$ appartient à $\mathrm{D}^1(\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*))$ et, pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$, $\frac{\partial}{\partial \omega} \mathrm{A}_f(\omega)$ (9) est une mesure sur R_+^*, égale à $\overline{\mathrm{D}}_f(s, \omega)ds$, avec $\overline{\mathrm{D}}_f$ fonction bicontinue en (s, ω).

Il existe alors un $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$.cocycle D tel que :

$$\forall f, \forall s > 0, \forall \omega, \mathrm{D}(f, s, \mathrm{X}_s(\omega)) = \overline{\mathrm{D}}_f(s, \omega)$$

Si, de plus, R1 *d)*, D est un $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$.cocycle de classe (1,1), d'ordre $\leqslant k$, il existe alors une fonction $\mathscr{V} \in \mathrm{C}^{1,2}(\mathrm{R}_+^* \times \mathrm{R})$, avec $\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x} \in \mathrm{C}^{1,1}(\mathrm{R}_+^* \times \mathrm{R})$ des fonctions $(d_p)_{1 \leqslant p \leqslant k}$ de $\mathrm{C}^1(\mathrm{R}_+^*)$ telles que :

$$(\mathrm{I}) \quad \mathrm{A}_f(\omega) = \mathrm{A}_f(0) + \int_0^\infty ds \left\{ \mathscr{V}(s, \mathrm{X}_s(\omega) + f(s)) - \mathscr{V}(s, \mathrm{X}_s(\omega)) \right.$$
$$\left. - [\mathscr{V}(s, f(s)) - \mathscr{V}(s, 0)] + \mathrm{X}_s(\omega) \left(\sum_{p=1}^k d_p(s) f^{(p)}(s) \right) \right\}$$

(9) D'après R1 *a)* et les remarques précédant cet énoncé, $\mathrm{A}_f \in \mathrm{D}^1[\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*), \mathscr{W}^*]$.

Preuve :

α) D'après R1 *a)*, la relation (CO) a lieu pour tout $\omega \in \mathscr{W}^*$.

On en déduit : $\forall \lambda \in R$, $\forall f$, $h \in \mathscr{D}(R_+^*)$, avec Supp $f(h) \subset I_{f(h)}$ [10]

$$\frac{1}{\lambda}\{ A_f(\omega + \lambda h) - A_f(\omega) \} = \frac{1}{\lambda}\{ A_{\lambda h}(\omega + f) - A_{\lambda h}(\omega) \}$$

D'après R1 *c)*, la limite de ces expressions lorsque ($\lambda \to 0$) existe et est égale à :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \omega} A_f(\omega), h \right\rangle = \int_0^\infty \overline{D}_f(s, \omega) h(s) ds$$

D'après R1 *b)*, $\left\langle \frac{\partial}{\partial \omega} A_f(\omega), h \right\rangle \in \underline{\underline{F}}_{I_f} \cap \underline{\underline{F}}_{I_h}$: soit (h_n) une suite de fonctions régularisantes, approximant l'unité, avec supp $h_n \subset \left[-\frac{1}{n} ; +\frac{1}{n} \right]$ la continuité de $\overline{D}_f(., \omega)$ entraîne $(h_n * \overline{D}_f(., \omega))(y) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \overline{D}_f(y, \omega)$. On a donc :

$$\overline{D}_f(y, .) \in \bigcap_n \underline{\underline{F}}_{\left[y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n} \right]} ;$$

d'après le lemme 1.3 et la continuité de $\overline{D}_f(y, .)$, il existe une fonction $D(f, s, x)$ (bicontinue en (s, x)) telle que : $D(f, s, X_s(\omega)) = D_f(s, \omega)$ partout.

β) D est un $\mathscr{D}(R_+^*)$.cocycle :

— La relation (CO) vérifiée par A entraîne :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} A_{f+g}(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} A_f(\omega + g) + \frac{\partial}{\partial \omega} A_g(\omega),$$

et donc :

Co2 : $$D(f + g, s, x) = D(f, s, x + g(s)) + D(g, s, x)$$

— L'égalité $D(0, s, x) = 0$ est évidente.

— Soit f, $h \in \mathscr{D}(R_+^*)$, de supports disjoints; A_f étant $\underline{\underline{F}}_f$ mesurable, d'après le lemme 1.3, on a : $A_f(\omega + \lambda h) - A_f(\omega) = 0$, et donc

$$\int_0^\infty D_f(s, X_s(\omega)) h(s) ds = 0$$

Par régularisation, on obtient finalement *Co3* : $s \phi f \Rightarrow D(f, s, x) = 0$.

γ) Supposons que D est un $\mathscr{D}(R_+^*)$.cocycle de classe (1,1), d'ordre $\leqslant k$. Soit $h \in \mathscr{D}(R_+^*)$.

---

(10) I_f et I_h sont deux intervalles fermés.

On a alors :

$$\begin{aligned}
A_f(h) &= A_f(0) + \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial\omega} A_f(\lambda h), h \right\rangle d\lambda \\
&= A_f(0) + \int_0^1 d\lambda \int_0^\infty D(f, s, \lambda h(s))h(s)ds \\
&= A_f(0) + \int_0^\infty ds h(s) \int_0^1 d\lambda D(f, s, \lambda h(s)) \\
&= A_f(0) + \int_0^1 ds[\widehat{D}(f, s, h(s)) - \widehat{D}(f, s, 0)],
\end{aligned}$$

où $\widehat{D}(f, s, .)$ est une primitive de $D(f, s, .)$.

La proposition 4.2, appliquée à D, permet d'écrire la formule (I) lorsque $\omega = h$. L'égalité (I) se prolonge alors à $\mathscr{W}^*$, par densité de $\mathscr{D}(R_+^*)$ dans $\mathscr{W}^*$ ■

Soit μ mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$, dont le module de quasi-invariance $a_f(\omega)$ est égal à $e^{A_f(\omega)}$, où A_f vérifie la formule (I), que l'on note pour simplifier :

$$\text{(I)} \qquad A_f(\omega) = A_f(0) + \int_0^\infty Q_f(s, X_s(\omega))ds$$

Si l'on suppose de plus que μ est markovienne, il existe alors une fonctionnelle $F : \mathscr{D}(R_+^*) \times R_+^* \to L^0(R, dx)$ telle que :

$$\text{(II)} \qquad \mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-] = \exp\left\{ \int_0^t Q_f(s, X_s(\omega))ds + F(f, t)(X_t(\omega)) \right\}$$

Les conditions de régularité R2 du théorème ci-dessous portent sur la fonctionnelle F.

THÉORÈME 3. — Soit μ mesure de probabilité, quasi invariante, markovienne sur $\mathscr{W}^*$, dont le module de quasi-invariance $a_f(\omega)$ est donné par $a_f(\omega) = e^{A_f(\omega)}$, où A est défini par (11) :

$$\text{(I)} \left\{ \begin{aligned}
A_f(\omega) &= A_f(0) + \int_0^\infty Q_f(s, X_s(\omega))ds \\
Q_f(s, x) &= [\mathscr{V}(s, x + f(s)) - \mathscr{V}(s, x)] - [\mathscr{V}(s, f(s)) - \mathscr{V}(s, 0)] \\
&\qquad + x\left\{ \sum_{p=1}^k d_p(s) f^{(p)}(s) \right\} \\
\mathscr{V} &\in C^{1,2}(R_+^* \times R), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x} \in C^{1,1}(R_+^* \times R),\ d_p \in C^1(R_+^*).
\end{aligned} \right.$$

---

(11) Les résultats de la proposition 4.3 permettent d'énoncer de telles hypothèses.

Si la fonctionnelle F : $\mathscr{D}(R_+^*) \times R_+^* \to L^0(R, dx)$ définie par :

$$\text{(II)} \qquad \mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-] = \exp\left\{ \int_0^t Q_f(s, X_s(\omega))ds + F(f, t)(X_t(\omega)) \right\}$$

vérifie les conditions suivantes :

R2 *a)* $\forall (t, f)$, $F(f, t)$ admet une version continue en x, notée $F(f, t, x)$.

R2 *b)* $\forall x$, l'application $(f, t) \to F(f, t, x)$ appartient à $C^{1,2}(\mathscr{D}(R_+^*) \times R_+^*)$

R2 *c)* L'ordre de $\frac{\partial}{\partial f} F(0, t, x)$ est majoré uniformément en (t, x) par k.

il existe alors deux fonctions $\tilde{\mathscr{V}}(t, x)$ et $U(t, x)$ de $C^{1,2}(R_+^* \times R)$, $(k+1)$ fonctions c, $(b_r)_{1 \leqslant r \leqslant k}$ de $C^1(R_+^*)$ telles que :

$$\text{(III)} \quad \log \mu[a_f \mid F_t^-]$$
$$= \int_0^t [\tilde{\mathscr{V}}(u, X_u + f(u)) - \tilde{\mathscr{V}}(u, X_u)] - [c'(u)f'(u) + c(u)f''(u)]\left(X_u + \frac{1}{2} f(u)\right) du$$
$$+ U(t, X_t + f(t)) - U(t, X_t) + c(t)f'(t)\left[X_t + \frac{1}{2} f(t)\right] + \sum_{r=1}^{k} f^{(r)}(t) b_r(t)$$

et :

$$\text{(I')} \quad A_f = \log a_f$$
$$= \int_0^\infty \left\{ [\tilde{\mathscr{V}}(u, X_u + f(u)) - \tilde{\mathscr{V}}(u, X_u)] - (c'(u)f'(u) + c(u)f''(u))\left(X_u + \frac{1}{2} f(u)\right) \right\} du$$

Preuve. — On note

$$\log \mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-] = A(f, t, \omega) = \int_0^t Q_f(s, X_s(\omega))ds + F(f, t, X_t(\omega))$$

La relation de cocycle donne :

$$A(f + g, t, \omega) = A(f, t, \omega + g) + A(g, t, \omega) \mu.p.s,$$

et donc partout, d'après R2 *a)*. De cette identité et de la forme de Q_f donnée par la formule (I), on déduit :

$$(a) \quad F(f + g, t, x) = F(f, t, x + g(t)) + F(g, t, x)$$
$$+ \int_0^t ds[\mathscr{V}(s, f(s) + g(s)) - \mathscr{V}(s, f(s)) - \mathscr{V}(s, g(s)) + \mathscr{V}(s, 0)]$$
$$- \int_0^t ds g(s)\left(\sum_{p=1}^{k} d_p(s) f^{(p)}(s)\right).$$

D'après R2 *b)*, et la relation (*a*), on déduit que pour tout $f \in \mathscr{D}(R_+^*)$, l'application $(t, x) \to F(f, t, x)$ appartient à $C^{1,2}(R_+^* \times R)$. L'identité (a) entraîne alors que $\frac{\partial}{\partial x} F$ vérifie *Co2* : $(I = R_+^*)$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(f + g, t, x) = \frac{\partial}{\partial x} F(f, t, x + g(t)) + \frac{\partial}{\partial x} F(g, t, x).$$

— On a évidemment $F(0, t, x) = 0$.
— Si supp $f < t$, $\mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-] = a_f$ (d'après la formule (I).

Si supp $f < t$, $\mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-] = 1$ (définition de a_f)
$= \exp F(f, t, X_t)$.

On en déduit donc : $t \phi f \Rightarrow F(f, t, x) = 0$.

On a donc démontré que F possède les propriétés *Co1*, *Co3*, et vérifie (a) (égalité analogue à *Co2*); de plus, $\frac{\partial}{\partial x} F$ est un $\mathscr{D}(R_+^*)$.cocycle.

En reprenant le début de la démonstration de la proposition 4.2, on obtient :

D'après R2 $c)$, il existe $(k + 1)$ fonctions ϕ^r (de classe C^1 en x, d'après R2 (b) et (a)) telles que :

$$\frac{\partial}{\partial f} F(0, t, x) = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_t^{(r)}(-1)^r \phi^r(t, x).$$

D'après (a) :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial f} F(f, t, x), g \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial f} F(0, t, x + f(t), g \right\rangle$$
$$+ \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathscr{V}(s, f(s)) - \frac{\partial}{\partial x} \mathscr{V}(s, 0) \right] g(s) ds$$
$$- \int_0^t f(s) \left(\sum_{p=1}^{k} d_p(s) g^{(p)}(s) \right) ds$$

D'où :

$$F(f, t, x) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial f} F(0, t, x + \lambda f(t)), f \right\rangle d\lambda$$
$$+ \int_0^1 d\lambda \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathscr{V}(s, \lambda f(s)) - \frac{\partial}{\partial x} \mathscr{V}(s, 0) \right] f(s) ds$$
$$- \int_0^1 d\lambda \lambda \int_0^t f(s) \sum_{p=1}^{k} d_p(s) f^{(p)}(s) ds$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
F(f, t, x) = & \int_0^t \left[\mathscr{V}(s, f(s)) - \mathscr{V}(s, 0) - \frac{\partial}{\partial x}\mathscr{V}(s, 0)f(s) \right] ds \\
& - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)\Sigma d_p(s) f^{(p)}(s)ds \\
& + \int_0^1 d\lambda \sum_{r=0}^{k} \phi^r(t, x + \lambda f(t))f^{(r)}(t).
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(f, t, x) = \int_0^1 d\lambda \sum_{r=0}^{k} \frac{\partial}{\partial x}\phi^r(t, x + \lambda f(t))f^{(r)}(t)$$

est donc un $\mathscr{D}(R_+^*)$.cocycle qui vérifie les conditions de la proposition 4.2 : ceci est possible si, et seulement si, les primitives de $\frac{\partial}{\partial x}\phi^r$, donc ϕ^r, $(r \geqslant 1)$ sont affines en x. On pose alors

$$\phi^r(t, x) = a_r(t)x + b_r(t) \ (r \geqslant 1)$$
$$\widehat{\phi^0} = U \text{ (primitive en } x \text{ de } \phi^0).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
(b) \qquad F(f, t, x) = & \int_0^t ds \left[\mathscr{V}(s, f(s)) - \mathscr{V}(s, 0) - \frac{\partial}{\partial x}\mathscr{V}(s, 0)f(s) \right] \\
& - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)\left(\sum_{p=1}^{k} d_p(s) f^{(p)}(s) \right) ds \\
& + U(t, x + f(t)) - U(t, x) \\
& + \sum_{r=1}^{k} f^{(r)}(t) \left\{ a_r(t)\left(x + \frac{1}{2}f(t) \right) + b_r(t) \right\}
\end{aligned}$$

En reportant cette égalité dans (a), on obtient :

(c) $\forall f, g \in \mathscr{D}(R_+^*)$, $\forall t > 0$,

$$\sum_{r=1}^{k} a_r(t)(f^{(r)}g - gf^{(r)})(t) + \int_0^t ds \sum_{p=1}^{k} d_p(s)(fg^{(p)} - gf^{(p)})(s) = 0$$

En dérivant en t, et en identifiant les différents termes, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_r \equiv 0 & \text{pour} & r > 1 \\ d_r \equiv 0 & \text{pour} & r > 2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} d_1 + a_1' = 0 \\ d_2 + a_1 = 0 \end{array} \right.$$

On pose $a_1 = C$. En reportant l'expression de F figurant dans (*b*), ainsi simplifiée, dans la formule (II), on obtient la formule III en posant :

$$\tilde{\mathscr{V}}(u, x) = \mathscr{V}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x}\mathscr{V}(u, 0)x.$$

La formule (I′) se déduit de (III), avec $t > \operatorname{Supp} f$.

5. RÉSULTAT FINAL

Nous terminons l'étude des mesures μ, quasi invariantes, markoviennes sur $\mathscr{W}^*$ de la manière suivante :

Soient $\mathscr{V} \in C^{1,2}(R_+^* \times R)$ et $c \in C^1(R_+^*)$ deux fonctions.
On note :

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{aligned} & t > 0 \,;\, a_f(t) = e^{A(f,t)} = e^{\int_0^t Q_f(s,X_s)ds + F(f,t,X_t)} \\ & 0 < s < t \,;\, a_f(s, t) = e^{A(f;s,t)} = e^{\int_s^t Q_f(u,X_u)du + F(f,t,X_t)} \\ & Q_f(u, x) = \mathscr{V}(u, x + f(u)) - \mathscr{V}(u, x) \\ & \qquad\qquad - [c'(u)f'(u) + c(u)f''(u)]\left(x + \frac{1}{2}f(u)\right) \\ & F(f, t, x) = U(t, x + f(t)) - U(t, x) \\ & \qquad\qquad + c(t)f'(t)\left(x + \frac{1}{2}f(t)\right) + \sum_{r=1}^{k} f^{(r)}(t)b_r(t) \end{aligned}\right.$$

où $U \in C^{1,2}(R_+^* \times R)$ et $b_r \in C^1(R_+^*)$ sont des fonctions arbitraires.

Les fonctions $\mathscr{V}$ et c étant données, quelles sont les mesures μ sur $\mathscr{W}^*$ telles que $(e^{A(f,t)}, t > 0)$ (donné par les formules (IV)) soit une $(\mu, \underline{\underline{F}}_t^-)_{t>0}$ martingale pour toute fonction $f \in \mathscr{D}(R_+^*)$? Les résultats précédents permettent de poser le problème en ces termes, pour des mesures μ vérifiant de plus les conditions R1 et R2.

Le lemme suivant permet de considérer des fonctions $f \in C^\infty([s, \infty))$, $s > 0$.

LEMME 5.1. — Soit $s > 0$ et μ probabilité sur $\mathscr{W}^*$ telle que pour $f \in \mathscr{D}(]s, \infty[)$, $(e^{A(f;s,t)}, t > s)$ soit une $\underline{\underline{F}}_t^s$ martingale.

Alors, pour toute fonction $f \in C^\infty([s, \infty))$, $(e^{A(f;s,t)}, s < t)$ est une $\underline{\underline{F}}_t^s$. martingale $\left(\text{avec } \underline{\underline{F}}_s^s = \bigcap_{\varepsilon > 0} \underline{\underline{F}}_{s+\varepsilon}^s\right)$

Preuve. — Soit $f \in C^\infty([s, \infty))$ et $f_n \in \mathscr{D}(]s, \infty[)$, avec $f_n = f$ sur $\left[s + \frac{1}{n}, n\right]$;

pour $s < t$, on a : $e^{A(f;s,t)}(\omega) = \lim_{n\to\infty} e^{A(f_n;s,t)}(\omega)$ et donc d'après le lemme de Fatou, $E[e^{A(f;s,t)}] \leqslant 1$.

Soit $s < u < t$; en prenant n tel que $f_n = f$ sur un voisinage de $[u, t]$, on obtient, d'après l'expression de $A(f; s, t)$,

$$E[e^{A(f;s,t)} \mid \underline{\underline{F}}_u^s] = e^{A(f;s,u)}$$

Cette égalité se prolonge en $u = s$. En effet $(e^{A(f;s,u)}, u \in]s, t[)$ est une famille équi-intégrable de variables aléatoires, qui converge, pour tout ω, vers $e^{A(f;s,s)} = e^{F(f;s,X_s)}$. Cette convergence a donc également lieu dans $L^1(\mu)$, ce qui donne le résultat.

La même démonstration permet de faire la remarque suivante : soit μ mesure quasi invariante, markovienne sur $\mathscr{W}$, avec $a_f(s, t)(0 < s < t)$ donné par les formules (IV) : si les fonctions $(\mathscr{V}, U)$ et (c, b_r) appartiennent respectivement à $C^{1,2}(R_+ \times R)$ et $C^1(R_+)$, alors, pour $f \in C^\infty(R_+)$, $(e^{A_f(t)}, t \geqslant 0)$ est une $(\mu . \underline{\underline{F}}_t^-)$ martingale intégrable continue.

On définit, pour les besoins du théorème 4, la notion suivante :

DÉFINITION 5.2. — Soit μ une probabilité sur $(\mathscr{W}^*; \underline{\underline{F}}_\infty^-)$. On appelle μ.mouvement brownien indexé par R_+^*, un processus $(\Gamma_t)_{t>0}$, à trajectoires continues, tel que, pour tout $s > 0$, $(\Gamma_{t+s} - \Gamma_t)_{t\geqslant 0}$ soit un $(\underline{\underline{F}}_{s+t}^s; \mu)$ mouvement brownien.

THÉORÈME 4 :

a) Soit μ mesure markovienne, quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$, dont le module de quasi-invariance est $a_f = e^{A_f}$, avec :

(I') $A_f =$

$$\int_0^\infty \left\{ [\mathscr{V}(u, X_u + f(u)) - \mathscr{V}(u, X_u)] - (c'(u)f'(u) + c(u)f''(u))\left(X_u + \frac{1}{2}f(u)\right) \right\} du,$$

où

$$\mathscr{V} \in C^{1,2}(R_+^* \times R) \qquad \text{et} \qquad c \in C^\infty(R_+^*)$$

la fonction c ne s'annulant pas.

Si l'on suppose de plus que μ vérifie la condition R2, alors, pour tout $s > 0$, $(X_t)_{t\geqslant s}$ est solution de :

$$X_t = X_s + \int_s^t \delta(u)dB_u + \int_s^t \zeta(u, X_u)du,$$

(1) $(B_t)_{t>0}$ est un μ.mouvement brownien indexé par R_+^*.

(2) $$\delta^2 = -\frac{1}{c}$$

(3) ζ est la dérivée en x d'une fonction $\widehat{\zeta} \in C^{1,2}(R_+^* \times R)$ et vérifie

$$V_\zeta(t, x) = 2\mathscr{V}(t, x) + \phi(t),$$

où

$$V_\zeta(t, x) = c(t)\zeta^2(t, x) + 2c'(t)\widehat{\zeta}(t, x) + 2c(t)\frac{\partial \widehat{\zeta}}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial \zeta}{\partial x}(s, x)$$

et ϕ est une fonction arbitraire de t.

b) Réciproquement, soit μ probabilité sur $\mathscr{W}^*$ et $(B_t)_{t>0}$ un μ.mouvement brownien tels que :

$$\forall s > 0, X_t = X_s + \int_s^t \delta(u)dB_u + \int_s^t \zeta(u, X_u)du$$

où δ est une fonction de $C^1(R_+^*)$ ne s'annulant pas, et $\zeta = \frac{\partial}{\partial x}\widehat{\zeta}$, avec $\widehat{\zeta} \in C^{1,2}(R_+^* \times R)$.

Alors, μ est quasi-invariante, markovienne sur $\mathscr{W}^*$, vérifie R2, a pour module de quasi-invariance a_f donné par la formule (I'), où c et $\mathscr{V}$ vérifient respectivement (2) et (3) de la partie *a)*.

Preuve :

i) Supposons tout d'abord μ portée par $\mathscr{W}$, avec les fonctions (voir formule (IV)) $\mathscr{V}$, $U \in C^{1,2}(R_+ \times R)$, $b_r \in C^1(R_+)$, et $c \in C^\infty(R_+)$, ne s'annulant pas. On pose, pour simplifier,

$$V(t, f) = \sum_{r=1}^{k} b_r(t) f^{(r)}(t)$$

(formule (IV)). Soit $f \in C^\infty([0, \infty))$. En dérivant $a_{\lambda f}(t)$ en $\lambda = 0$, on obtient, d'après la remarque suivant le lemme 5.1 :

$$U_t^f = c(t)X_t f'(t) + \frac{\partial U}{\partial x}(t, X_t)f(t) + V(t, f) + \int_0^t du \left\{ -(c'(u)f'(u) + c(u)f''(u))X_u + \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, X_u)f(u) \right\}$$

est une $(\mu.\underline{\underline{F}}_t^-)$ martingale locale.

c ne s'annulant pas, et étant de classe C^∞ sur $[0, \infty)$, $f_1(t) = \int_0^t \frac{1}{c(u)} du$ appartient à $C^\infty([0, \infty))$. Soit f_2 la fonction constante 1.

On a donc :

$$U_t^{f_1} = X_t + \frac{\partial U}{\partial x}(t, X_t)f_1(t) + V(t, f_1) + \int_0^t \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, X_u)f_1(u)du$$

$$U_t^{f_2} = \frac{\partial U}{\partial x}(t, X_t) + \int_0^t du \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, X_u)$$

sont deux martingales locales.

En développant $U_t^{f_1}$ à l'aide de la seconde égalité, il vient :

$$U_t^{f_1} = X_t + \int_0^t f_1(s)dU_s^{f_2} + \int_0^t \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s)ds + V(t, f_1)$$

$$X_t - X_0 + \int_0^t \frac{1}{c(s)} \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s)ds + V(t, f_1) - V(0, f_1)$$

est une martingale locale, nulle en $t = 0$, que l'on note N_t. Soit $\langle N \rangle_t$ son processus croissant.

A l'aide de ce résultat, en utilisant la formule de Ito pour exprimer $U(t, X_t + f(t)) - U(t, X_t)$ et $c(t)f'(t)X_t$ en fonction de N et $\langle N \rangle$, on obtient :

$$(\alpha) \quad \operatorname{Log} a_f(t) = A_f(t)$$
$$= \int_0^t \left[\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s + f(s)) - \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s) + c(s)f'(s)\right]dN_s + V(t, f)$$
$$+ \int_0^t (\mathscr{V}(u, X_u + f(u)) - \mathscr{V}(u, X_u))du + \frac{1}{2}\int_0^t c(u)f'(u))^2 du$$
$$- \int_0^t c(s)f'(s)\left[\frac{1}{c(s)}\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s) + \frac{\partial V}{\partial s}(s, f_1)\right]ds + L_t,$$

où :

$$L_t = \int_0^t \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s, X_s + f(s)) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s, X_s)\right]d\langle N \rangle_s$$
$$- \int_0^t \left(\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s + f(s)) - \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s)\right)\left(\frac{1}{c(s)}\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s) + \frac{\partial V}{\partial s}(s, f_1)\right)ds$$
$$+ \int_0^t ds \left\{\frac{\partial U}{\partial t}(s, X_s + f(s)) - \frac{\partial U}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s + f(s))f'(s)\right\}$$

On utilise ensuite le résultat suivant :

Soit M_t une martingale locale continue et A_t processus continu à variation bornée, avec $M_0 = A_0 = 0$; $U_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}A_t\right\}$ est une martingale locale si, et seulement si, $\langle M \rangle_t = A_t$.

En appliquant ceci à $a_f(t)$, on obtient, d'après (α) :

$$(\beta)\quad \int_0^t \left[\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s + f(s)) - \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s) + c(s)f'(s)\right]^2 d\langle N\rangle_s$$

$$= -\int_0^t c(s)(f'(s))^2 ds - 2(V(t,f) - V(0,f))$$

$$- 2\int_0^t (\mathscr{V}(u, X_u + f(u)) - \mathscr{V}(u, X_u))du$$

$$+ 2\int_0^t f'(s)\left[\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s) + c(s)\frac{\partial V}{\partial s}(s, f_1)\right]ds - 2L_t.$$

On remplace f par $(f + \lambda g)$ dans (β), et on dérive les 2 membres en $\lambda = 0$. En égalisant les termes en $g' = h$, on obtient :

$$(\gamma)\quad \int_0^t \left[\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s + f(s)) - \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s) + c(s)f'(s)\right] c(s)h(s)d\langle N\rangle_s$$

$$= -\int_0^t c(s)f'(s)h(s)ds + \int_0^t h(s)c(s)\frac{\partial V}{\partial s}(s, f_1)ds - \sum_{r=1}^{k}(b_r(t)h^{(r-1)}(t) - b_r(0)h^{(r-1)}(0))$$

$$+ \int_0^t h(s)ds\left[\frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s) - \frac{\partial U}{\partial x}(s, X_s + f(s)\right].$$

On remplace dans (γ) f par λf, et on dérive en $\lambda = 0$.
D'où :

$$\int_0^t c^2(s)f'(s)h(s)d\langle N\rangle_s = -\int_0^t c(s)f'(s)h(s)ds$$

On a donc :

$$(\delta)\quad d\langle N\rangle_s = -\frac{1}{c(s)}ds \Rightarrow \langle N\rangle_s = -\int_0^t \frac{1}{c(s)}ds.$$

En reportant ceci dans (γ), on obtient : $b_r' + b_{r-1} = 0$ $(2 \leqslant r \leqslant k)$ et $b_k = 0$; d'où : $b_r \equiv 0$ $(1 \leqslant r \leqslant k)$.

D'autre part, d'après (δ), la fonction c est constamment négative.

On note $\delta = \sqrt{-\frac{1}{c}}$; la martingale $B_t = \int_0^t \frac{1}{\delta(s)} dN_s$ a pour processus croissant t : c'est donc un $\underline{\underline{F}}_t^-$ mouvement brownien, et $N_t = \int_0^t \delta(s)dB_s$.

La définition de N_t donne :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \delta(s)dN_s + \int_0^t \zeta(s, X_s)ds$$

si l'on pose :

$$\zeta(s, x) = -\frac{1}{c(s)}\frac{\partial U}{\partial x}(s, x)$$

D'après les hypothèses, il existe bien $\widehat{\zeta} \in C^{1,2}(R_+ \times R)$, primitive de ζ en x.

ii) Soit maintenant μ probabilité sur $\mathscr{W}^*$, satisfaisant aux hypothèses de la partie *a)* du théorème :

Par la démonstration précédente, on a montré que pour tout $s > 0$, il existe un $\underline{\underline{F}}_{t+s}^{s}$.mouvement brownien $B_t^{(s)}$ tel que :

$$\begin{aligned} Y_{s,s+t} &= X_{t+s} - X_s - \int_s^{s+t} \zeta(u, X_u)du \\ &= \int_s^{s+t} \delta(u)dB_u^{(s)} \end{aligned}$$

Or, si $0 < s < s'$, on a : $Y_{s,s'+t} = Y_{s,s+t} + Y_{s+t,s'+t}$
D'où, δ étant continue, et strictement positive,

$$\int_{s+t}^{s'+t} \delta(u)dB_u^{(s)} = \int_{s+t}^{s'+t} \delta(u)dB_u^{(s+t)}$$

entraîne :

$$B_{s'+t}^{(s+t)} = B_{s'+t}^{(s)} - B_{s+t}^{(s)}$$

Soit une suite $S = (s_n)_{n \in N}$ de réels décroissants vers 0. En remarquant, que si $s' < s$, $s, s' \in S$, les processus $B_u^{(s')} - B_s^{(s')}$ et $B_u^{(s)}$ $(u > s)$ sont indistinguables, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall 0 < \varepsilon < T, \lim_{\substack{s,s' \in S \\ s,s' \to 0}} E[\sup_{\varepsilon < u < T} (B_u^{(s)} - B_u^{(s')})^2] &= \lim_{\substack{s,s' \in S \\ s,s' \to 0}} E[(B_{s'}^{(s)})^2] \\ &= \lim_{\substack{s,s' \in S \\ (s,s' \to 0)}} (s' - s) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit, par un raisonnement classique, l'existence d'un processus B_u à trajectoires continues. De plus, si $u_0 < u$, on déduit de l'égalité :

$$(s \in S) s < u_0 < u \Rightarrow B_u^{(s)} - B_{u_0}^{(s)} = B_u^{(u_0)},$$

par passage à la limite en s, que $(B_u)_{u>0}$ est un μ.mouvement brownien indexé par R_+^*, ce qui est le résultat cherché.

iii) On démontre simultanément *b)* et (3) :

Inversement, soient μ probabilité sur $\mathscr{W}^*$ et $(B_t)_{t>0}$ un μ.mouvement brownien vérifiant :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \delta(s)dB_s + \int_{t_0}^t \zeta(s, X_s)ds, \ (t > t_0),$$

où $\delta \in C^1(R_+^*)$ ne s'annule pas, et

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial x} \widehat{\zeta}, \qquad \text{avec} \qquad \widehat{\zeta} \in C^{1,2}(R_+^* \times R).$$

μ est alors quasi invariante, d'après le corollaire 2.2. La formule (4) de la proposition 3.3 (et $a_f(t) = M_t^f$) entraîne le résultat (3) du théorème.

D'autre part, on sait que μ est markovienne [(X_t) est une diffusion inhomogène] et vérifie R2, d'après la formule (4) de la proposition 3.3.

Remarque. — *A posteriori*, on a montré que les fonctions (b_r) intervenant dans la formule (IV) définissant F sont nulles, pour μ satisfaisant aux conditions énoncées dans la partie (*a*) du théorème. Remarquons alors, que si cela était connu *a priori*, on pourrait supposer seulement, dans la partie *a*), que $c \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$, le lemme 5.1 s'étendant alors aux fonctions $f \in C^2([s, \infty))$.

6. REMARQUES FINALES

6.1. Vérification de la condition R.2

On a essayé, dans l'étude faite précédemment, de rester dans l'esprit d'un « problème de martingales », c'est-à-dire de ne considérer qu'une seule mesure μ (quasi invariante et markovienne), et de se limiter à des hypothèses portant sur le module de quasi-invariance de μ.

Nous nous proposons de donner ici des conditions suffisantes pour que la condition (R2) soit vérifiée.

Soit μ mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$, de module de quasi-invariance $a_f = e^{A_f}$ avec

$$A_f = \int_0^\infty \left\{ \mathscr{V}(u, X_u + f(u)) - \mathscr{V}(u, X_u) - (cf')'(u)\left(X_u + \frac{1}{2}f(u)\right) \right\} du,$$

avec $\mathscr{V} \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, $c \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, ne s'annulant pas. On suppose qu'il existe des fonctions $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues, croissantes, nulles en 0, des fonctions C, D, E : $\mathbb{R}_+^{(*)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}, & |\mathscr{V}(u, x+y) - \mathscr{V}(u, x)| \leqslant C(u, x)\alpha(|y|) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \left| \dfrac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, x+y) - \dfrac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, x) \right| \leqslant D(u, x)\beta(|y|). \\ \forall u \in \mathbb{R}_+^*, & \left| \dfrac{\partial^2 \mathscr{V}}{\partial x^2}(u, x+y) - \dfrac{\partial^2 \mathscr{V}}{\partial x^2}(u, x) \right| \leqslant E(u, x)\gamma(|y|). \end{cases}$$

La proposition suivante concerne les mesures quasi invariantes dont le module de quasi-invariance a_f est « homogène » ($\mathscr{V}$ ne dépend pas de u, $c = C^{te}$) (voir les études faites en [*2*] et [*9*]).

PROPOSITION 6.1.1. — Soient $(P_x)_{x \in \mathbb{R}}$ les lois d'un processus de Markov homogène, à valeurs dans R, à trajectoires continues, telles que $\mu = P_{x_0}$

soit une mesure quasi invariante, de module de quasi-invariance donné par :

$$a_f(\omega) = \exp \int_0^\infty \left\{ \left(X_u + \frac{1}{2} f(u)\right) f''(u) - (P(X_u + f(u)) - P(X_u)) \right\} du,$$

où P est une fonction de classe C^2.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(S.1) $\forall f \in \mathscr{D}(R)$, l'application $x \to E_x[a_f]$ est continue.

(S.2) $\forall x \in R$, $\forall K > 0$, $\forall \beta > 0$, $\forall \phi$, $\psi \in \mathscr{D}(R)$,

avec

$$\phi_1^K = 1 + \left(\int_0^K X_u \phi(u) du\right)^2 + \int_0^K \Phi(X_u) du ; \qquad \Phi = P'^2 + D^2 + | P'' | + E$$

$$\phi_2^K = \beta \int_0^K C(X_u) du + \left| \int_0^K \phi(u) X_u du \right| + \int_0^K \psi(u) X_u du$$

$$E_x\left[\phi_1^K e^{\phi_2^K}\right] < \infty$$

Alors $\mu = P_{x_0}$ vérifie la condition R2.

Preuve. — Les probabilités (P_x) étant les lois d'un processus de Markov homogène, on a :

$$\forall f \in \mathscr{D}(R_+^*) \qquad a_f(t) = \mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-]$$

$$\forall t > 0 \qquad = \exp\left(\int_0^t Q_f(s, X_s) ds\right) E_{X_t}\left[\exp \int_0^\infty Q_{f_t}(s, X_s) ds\right]$$

où

$$Q_f(s, x) = \left(x + \frac{1}{2} f(u)\right) f''(u) - (P(x + f(u)) - P(x))$$

$$f_t(u) = f(t + u) \in \mathscr{D}(R)$$

D'après la condition (S.1), on peut donc prendre

$$F(f, t, x) = \operatorname{Log}\{ E_x(a_{f_t}) \}$$

et la condition R2 *a)* est vérifiée.

La condition (S.2) assure que $(\lambda, t) \to F(f + \lambda g, t, x)$ appartient à $C^{2,1}(R \times R)$, et que l'on peut faire les dérivations correspondantes sous le signe E_x.

En particulier :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial f} F(0, t, x), f \right\rangle = E_x\left[\int_0^\infty (X_u f''(u + t) - P'(X_u) f(u + t)) du\right]$$

et l'on peut appliquer le théorème de Fubini : ainsi, R2 *b)* et R2 *c)* sont réalisées.

Remarque :

1. Lorsque P désigne un polynôme borné inférieurement, non constant (c'est le cadre de l'étude de [*2*]), les probabilités P_x^P (notées P_x^ρ en [*9*] : pour la correspondance entre les fonctions ρ et P, voir le lemme 1.5 de [*2*]) construites en [*9*] vérifient les hypothèses (S.1) et (S.2) :

(S.1) est une conséquence de la formule de Cameron-Martin.

On vérifie (S.2) à l'aide de la formule $(\mathrm{III}_{\rho,0})$ du théorème 7 de [*9*]. En effet, on a :

$$\rho^{1/2}(x)E_x^\rho\left(\phi_1^K e^{\phi_2^K}\right) = W_x\left[\rho^{1/2}(X_K)\phi_1^K e^{\phi_2^K - \int_0^K P(X_s)ds}\right]$$

où W_x désigne la loi du mouvement brownien partant de x. P étant un polynôme de degré $2n$, on peut prendre $C(x) = R(|x|)$, où R est un polynôme d'ordre $\leqslant (2n-1)$. La fonction

$$P(x) - \beta C(x) - |x||\phi(u)|$$

est donc bornée inférieurement; enfin, $\rho \in S(R)$, et l'on sait que ϕ_1^K appartient à $L^1(W_x)$ (en prenant pour D et E des fonctions du type $S(|x|)$, avec S polynôme).

2. Notons de manière générale que si la fonction P et ses deux premières dérivées sont bornées, avec P″ uniformément lipschitzienne, d'ordre $\alpha > 0$, (S.2) se réduit à :

$$E_x\left[\left\{1 + \left(\int_0^K X_u\phi(u)du\right)^2\right\} e^{\left|\int_0^K X_u\phi(u)du\right| + \int_0^K X_u\psi(u)du}\right] < \infty$$

Revenons maintenant à la situation générale, où n'est donnée que la seule mesure μ, quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$ de module de quasi-invariance donné par la formule (I′), et markovienne : la quasi-invariance de μ entraîne que, pour tout $t > 0$, la loi $X_t(\mu) = \mu_t$ est équivalente à la mesure de Lebesgue. Soit $0 < u < t$ et $\phi \in L^1(\mu_u)$.

On désigne par $\tilde{N}_{t,u}\phi$ l'élément de $L^1(\mu_t)$ déterminé par :

$$\tilde{N}_{t,u}\phi(X_t) = \mu[\phi(X_u) \mid X_t].$$

μ étant markovienne, on a aussi : $\tilde{N}_{t,u}\phi(X_t) = \mu[\phi(X_u) \mid F_t^+]$ et $(\tilde{N}_{t,u})_{0<u<t}$ est un semi-groupe généralisé $(0 < u < s < t \Rightarrow \tilde{N}_{t,u} = \tilde{N}_{t,s} \circ \tilde{N}_{s,u})$ d'opérateurs respectivement contractants de $L^1(\mu_u)$ dans $L^1(\mu_t)$.

Enfin, χ désigne l'application identité de R. On peut alors énoncer la :

PROPOSITION 6.1.2. — Soit μ mesure quasi invariante, markovienne sur $\mathscr{W}^*$, de module de quasi-invariance donné par la formule (I′).

Si μ vérifie les conditions suivantes :

(T.1) Il existe une application $\rho : R_+^* \times R \to R_+^*$
$$(t, x) \to \rho_t(x)$$
appartenant à $C^{1,2}(R_+^* \times R)$, telle que ; $d\mu_t(x) = \rho_t(x)dx$.

(T.2) $\forall$K Compact de R_+^*,
$$\mu\left[\int_K \left\{ \left| \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, X_u) \right| + | X_u | \right\} du \right] < \infty$$

(T.3) Les applications $\tilde{N}_{t,u}\chi(x)$ et $\tilde{N}_{t,u}\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, .)(x)\right)$, définies du $\otimes \mu_u(dx)ps$ et appartenant à $L^1(1_K(u)du \otimes \mu_u(dx))$, pour tout compact K de R_+^*, admettent respectivement les représentants $\Phi_{t,u}(x)$ et $\psi_{t,u}(x)$, tels que les fonctions Φ et ψ, définies sur $D_1 = \{ 0 < u < t \} \times R$ sont de classe C^2 en x, et pour tout (u, x), dérivables à droite sur $[u, \infty[$.

Toutes les dérivées considérées sont supposées continues sur $D_1 \times R$, alors μ vérifie la condition (R2).

Preuve. — On utilise les notations suivantes :
$$a_f(\omega) = \exp A_f(\omega) = \exp [A_f^-(t) + A_f^+(t)]$$
$$a_f^t(\omega) = \mu[a_f \mid \underline{\underline{F}}_t^-]. \qquad (t > 0),$$
avec
$$A_f(\omega) = \int_0^\infty du Q_f(u, X_u(\omega))$$
$$A_f^-(t) = \int_0^t du Q_f(u, X_u)du \quad ; \quad A_f^+(t) = \int_0^\infty ds Q_f(s, X_s)ds.$$

a) Soit $t > 0$. Par approximation de f sur $[t, \infty)$ par une suite de fonctions (f_n) de $\mathscr{D}(R_+^*)$, à support dans $]t, \infty[$, au sens de la convergence uniforme des fonctions, et de leurs deux premières dérivées, sur les compacts de $]t, \infty[$, on obtient $\mu\left[e^{A_f^+(t)}\right] \leqslant 1$, $\forall f \in \mathscr{D}(R_+^*)$, d'après le lemme de Fatou. On note $G(f, t, x)$ l'élément de $L^1(\mu_t)$ ([12]), défini par :
$$G(f, t, X_t) = \mu\left[e^{A_f^+(t)} \middle| \underline{\underline{F}}_t^-\right], \ \mu \text{ étant markovienne.}$$

b) Par application directe du lemme 5.2.1 de [2], d'après la condition (T.2), $\forall F : \mathscr{W}^* \to R$, continue, bornée, l'application
$$\lambda \to \mu[F(\omega)a_{\lambda f}(\omega)]$$

([12]) On utilise abusivement une notation de fonction. *A posteriori*, sous les hypothèses (T), il existe un représentant de $G(f, t, .)$ de classe C^2 en x.

est continûment différentiable sur R, pour toute fonction f de $\mathscr{D}(\mathrm{R}_+^*)$, et :

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} \mu[\mathrm{F}(\omega)a_{\lambda f}(\omega)] = \mu\left[\mathrm{F}(\omega-\lambda_0 f)\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}(\omega)\right].$$

En particulier, pour $\mathrm{F} \in \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-$, on a :

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} \mu[\mathrm{F}(\omega-\lambda f] = \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} \mu[\mathrm{F}(\omega)a_{\lambda f}^t(\omega)] = \mu\left[\mathrm{F}(\omega-\lambda_0 f)\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}(\omega)\right]$$
$$= \mu\left[\mathrm{F}(\omega-\lambda_0 f)\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}^-(t) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}^+(t)\right\}\right].$$

D'après (T.2), $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}^-(t)$ et $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}^+(t)$ appartiennent à $\mathrm{L}^1(\mu)$, et en posant

$$\psi_f^t(\mathrm{X}_t) = \mu\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}^+(t) \,\Big|\, \underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-\right] \qquad (\mu \text{ est markovienne})$$

il vient :

$$(*) \quad \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mu[\mathrm{F}(\omega-\lambda f)] = \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} \mu[\mathrm{F}(\omega)a_{\lambda f}^t(\omega)]$$
$$= \mu\left[\mathrm{F}(\omega-\lambda_0 f)\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \mathrm{A}_{\lambda f}^-(t,\omega) + \psi_f^t(\mathrm{X}_t)\right\}\right]$$

c) En particulier, en prenant $\mathrm{F}(\omega) = \phi(\mathrm{X}_t(\omega))$, avec $\phi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, continue, bornée, à support compact, et $\lambda_0 = 0$, on a, avec les notations de (T.1) et (T.3) :

$$\int \rho_t'(x)\phi(x)dx f(t) = \int \rho_t(x)\phi(x)\psi_f^t(x)dx$$
$$+ \mu\left[\phi(\mathrm{X}_t)\int_0^t du\left[\tilde{\mathrm{N}}_{t,u}\left\{\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial x}(u,\,.)\right\}(\mathrm{X}_t)f(u) - (cf')'(u)\tilde{\mathrm{N}}_{t,u}\chi(\mathrm{X}_t)\right]\right]$$
$$= \int \rho_t(x)\phi(x)\psi_f^t(x) + \int \rho_t(x)\phi(x)dx\int_0^t du[\psi_{t,u}(x)f(u) - (cf')'(u)\phi_{t,u}(x)]$$

D'où

$$(**) \qquad \psi_f^t(x) = \frac{\rho_t'(x)}{\rho_t(x)}f(t) - \int_0^t du[\psi_{t,u}(x)f(u) - (cf')'(u)\Phi_{t,u}(x)]$$

d) D'après la formule (*), on a :

$$\mu[\mathrm{F}(\omega)a_{\lambda f}^t(\omega)] = \mu[\mathrm{F}(\omega)]$$
$$+ \mu\left[\mathrm{F}(\omega)\int_0^\lambda d\mu a_{\mu f}^t(\omega)\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathrm{A}_{\varepsilon f}^-(t,\omega+\mu f) + \psi_f^t(\mathrm{X}_t(\omega)+\mu f(t)\right\}\right]$$

pour toute fonction F, continue, bornée, $\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^-$.mesurable.

D'après (T.2), cette égalité s'étend à toute fonction F, $\underline{\underline{F}}_t^-$ .mesurable, bornée. Si l'on note

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} A_{\varepsilon f}^-(t, \omega) + \psi_f^t(X_t(\omega))$$

le lemme de Gronwall entraîne l'unicité des applications $\phi : R_+ \to L^1(\mu, \underline{\underline{F}}_t^-)$, bornées, et solutions de :

$$\forall F \in b(\underline{\underline{F}}_t^-), \qquad \mu[F(\omega)\phi(\lambda)] = \mu[F(\omega)] + \mu\left[F(\omega)\int_0^\lambda d\mu\phi(\mu)\mathcal{H}(\omega + \mu f)\right]$$
$$\forall \lambda > 0$$

En effet, si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux telles fonctions, on a alors :

$$\forall \lambda < \Lambda,\ \mu\,[\operatorname*{Sup}_{u \leqslant t} |\,\omega(u)\,| \langle n\ ;\ |\,\phi_1(\lambda) - \phi_2(\lambda)\,|]$$
$$\leqslant \mu\left[\operatorname*{Sup}_{u<t} |\,\omega(u)\,| \langle n\ ;\ \int_0^\lambda d\mu\,|\,\phi_1(\mu) - \phi_2(\mu)\,|\right]$$
$$\times \operatorname*{Sup}_{\{\omega \mid |\omega(u)| < a, \forall u \leqslant t\} : \mu \leqslant \Lambda} |\,\mathcal{H}(\omega + \mu f)\,|$$

D'après la formule (**) et les hypothèses (T.1) et (T.3),

$$\operatorname*{Sup}_{\{\omega \mid |\omega(u)| < n, \forall u \leqslant t\} \times (\mu \leqslant \Lambda)} \mathcal{H}(\omega + \mu f) < \infty,$$

et on peut alors appliquer le lemme de Gronwall à

$$f(\lambda) = \mu\,[\operatorname*{Sup}_{u \leqslant t} |\,\omega(u)\,| \langle n\ ;\ |\,\phi_1(\lambda) - \phi_2(\lambda)\,|].$$

De plus, l'unique solution ne peut être que :

$$\phi(\lambda) = \exp \int_0^\lambda \mathcal{H}(\omega + \mu f)d\mu.$$

e) On obtient donc finalement :

$$a_f^t(\omega) = \exp \int_0^1 \mathcal{H}(\omega + \mu f)d\mu$$
$$= \exp\left\{\int_0^t \left\{\mathcal{V}(u, X_u(\omega) + f(u)) - \mathcal{V}(u, X_u(\omega)) - (cf')'(u)\left(X_u(\omega) + \frac{1}{2}f(u)\right)\right\}du + \int_0^1 \psi_f^t(X_t + \mu f(t))d\mu\right\}$$

On avait par définition : $a_f^t(\omega) = \exp A_f^-(t, \omega)G(f, t, X_t)$.
Avec les notations du théorème 3, on a :

$$F(f, t, X_t) = \operatorname{Log} G(f, t, X_t)$$
$$= \int_0^1 \psi_f^t(X_t(\omega) + \mu f(t))d\mu$$

On peut donc prendre pour fonctionnelle F, d'après la formule (**) :

$$\begin{aligned} F(f,t,x) &= \operatorname{Log}\rho_t(x+f(t)) - \operatorname{Log}\rho_t(x) \\ &+ \frac{1}{f(t)}\int_0^t du[(cf')'(u)(\Phi_{t,u}(x+f(t))-\Phi_{t,u}(x))+(\widehat{\psi}_{t,u}(x+f(t))-\widehat{\psi}_{t,u}(x))f(u))] \quad \text{si } f(t)\neq 0 \\ &= \int_0^t du[(cf')'(u)\phi_{t,u}(x)+f(u)\psi_{t,u}(x)] \quad \text{si } f(t)=0 \end{aligned}$$

Les hypothèses (T.1) et (T.3) entraînent alors que (R.2) est vérifiée.

La proposition suivante est intéressante dans le cadre de la théorie des champs, où les mesures quasi invariantes considérées sont euclidiennes ([13]) (voir [*1*] et [*2*], par exemple).

PROPOSITION 6.1.3. — Soit μ probabilité markovienne sur $\mathscr{W}^*$, dont le module de quasi-invariance est $a_f = e^{A_f}$, avec :

$$(\mathrm{I}') \quad A_f = \int_0^\infty \left\{ \mathscr{V}(u, X_u + f(u)) - \mathscr{V}(u, X_u) - (cf')'(u)\left(X_u + \frac{1}{2}f(u)\right) \right\} du,$$

où $\mathscr{V} \in C^{1,2}(R_+^* \times R)$ et $c \in C^\infty(R_+^*)$, la fonction c ne s'annulant pas.

On suppose de plus que les variables $(X_t)_{t>0}$ ont même loi $\mu_0(dx)$.

Si μ vérifie les conditions (T) ([14]), qui s'écrivent ici :

(T.1) $\mu_0(dx) = \rho(x)dx,$ avec $\rho \in C^2(R)$; $\rho > 0,$

(T.2) $\forall K$ compact de R_+^*, $\int_K du \int_R dx\rho(x)\left[\left|\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u,x)\right| + |x|\right] < \infty$

(T.3) ([14])

alors :

$\forall 0 < s \leqslant t,$ $\quad X_t = X_s + \int_s^t \delta(u)dB_u + \int_s^t \zeta(u, X_u)du,$

où :

(1) $(B_t)_{t>0}$ est un μ.mouvement brownien

(2) $$\delta^2 = -\frac{1}{c}$$

(3) $$\zeta(s,x) \doteq \frac{-1}{2}\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \times \frac{1}{c(s)}$$

Preuve. — La proposition 6.1.2 et le théorème 4 entraînent l'existence d'un

---

([13]) Voir 1.2.

([14]) Voir la proposition 6.1.2.

μ.mouvement brownien $(B_t)_{t>0}$, et d'une fonction $\zeta \in C^{1,1}(R_+^* \times R)$ tels que :

$$\forall 0 < s \leqslant t, \qquad X_t = X_s + \int_s^t \delta(u) dB_u + \int_s^t \zeta(u, X_u) du.$$

Soit F primitive d'une fonction ϕ de $\mathscr{D}(R)$. La formule de Ito entraîne :

$$F(X_t) = F(X_s) + \int_s^t F'(X_u)\delta(u) dB_u + \int_s^t du F'(X_u)\zeta(u, X_u) + \frac{1}{2}\int_s^t F''(X_u)\delta^2(u) du.$$

Par définition de F, il existe une constante C telle que

$$| F(x) | \leqslant C(1 + | x |).$$

D'après (T.2), $F(X_t)$ est donc dans $L^1(\mu)$. D'où :

$$E[F(X_t)] = E[F(X_s)] + \int_s^t du E[F'(X_u)\zeta(u, X_u)] + \frac{1}{2}\int_s^t du E[F''(X_u)]\delta^2(u).$$

Les variables $(X_t)_{t>0}$ ayant même loi, et les fonctions

$$u \to E[F'(X_u)\zeta(u, X_u)] \quad \text{et} \quad u \to E[F''(X_u)]\delta^2(u)$$

étant continues, on a :

$$\forall s > 0, \qquad 0 = E[F'(X_s)\zeta(s, X_s)] + \frac{1}{2}\delta^2(s) E[F''(X_s)]$$

Or, $F' = \phi \in \mathscr{D}(R)$. D'où :

$$\int \rho(x) dx \phi(x) \zeta(s, x) = \frac{1}{2}\delta^2(s) \int \phi(x) \rho'(x) dx,$$

ce qui entraîne (3).

Remarque. — La formule (3) de la proposition 6.1.3 est l'une des formules fondamentales figurant en [*2*] (1.5, chapitre 1) et [*9*] (formule β) paragraphe 2), où $c(s) \equiv -1$ et la fonction ζ qui y est étudiée est ici $(-\zeta)$.

6.2. **Remarques**

Il est intéressant — malgré les cadres différents des études faites en [*2*] et ici : les mesures μ considérées en [*2*] sont markoviennes, quasi invariantes et, de plus, *euclidiennes* — de comparer les conditions de régularité RE (1-2-3) figurant dans l'énoncé du théorème 6.1 de [*2*] et les conditions T (1-2-3) :

(T.1) est analogue à la première partie de RE 3 : la mesure μ_0 admet une densité ρ partout positive et C^∞.

L'analogue de (T.2) figure dans la proposition 6.3.1 de [*2*] : $Q \in L^1(R, \mu_0)$

(Voir également la condition L2 de la proposition 5.2 de [2]). La seconde partie de RE 3 est : $Q \in L^2(R, \mu_0)$.

L'analogue de (T.3) est (RE 2) : le domaine de H contient $\mathscr{D}(R)$. Notons que (RE 1) : la valeur propre de 0 de H est simple et isolée, qui intervient dans la démonstration de la proposition 6.3.2 de [2], n'a pas d'équivalent ici.

2. Supposons que le semi-groupe $\tilde{N}_{t,u}$ soit induit par un semi-groupe de noyaux $\tilde{N}_{t,u}(x, dy)$ tel que $\tilde{N}_{t,u}(x, |\chi|) < \infty$ et $\tilde{N}_{t,u}\left(x, \left|\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, .)\right|\right) < \infty$, et que les applications $\tilde{N}_{t,u}(x, \chi)$ et $\tilde{N}_{t,u}\left(x, \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, .)\right)$ soient continues en x. En prenant soin de définir les termes employés, la condition (T.3) signifie en particulier :

$$\chi \in \mathscr{D}(A_u) \; ; \; \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(u, .) \in \mathscr{D}(A_u), \qquad \text{où} \qquad (A_u)_{u>0}$$

désigne le générateur infinitésimal du semi-groupe $\tilde{N}_{t,u}$.

En rapprochant ceci du théorème de Dynkin 5.7, chapitre 5 de [10], sur la caractérisation des diffusions, on peut alors poser la conjecture :

Soit μ mesure quasi invariante, markovienne sur $\mathscr{W}_{x_0}$, de module de quasi-invariance donné par la formule (I') et vérifiant la condition (T.3). μ est alors la loi d'un processus de diffusion (inhomogène) partant de x_0 en $t = 0$.

On peut formuler une conjecture analogue dans le cadre de l'étude de [2], vis-à-vis de l'hypothèse (RE 2).

Notons que, dans le cas homogène, la condition (S.2) (plus restrictive que (T.2) permet de parvenir à (R.2) sans aucune hypothèse sur le semi-groupe (P_t) du processus de Markov (X_t).

3. Si l'on suppose que μ mesure quasi invariante sur $\mathscr{W}_{x_0}$, de module de quasi-invariance donné par la foımule (I') est la loi d'un processus de diffusion de coefficients σ et b, avec

$$b \in C^{1,2}(R_+ \times R), \; \sigma \in C^1(R_+)$$

On a, d'après le corollaire 3.3.1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(s, x) = \delta(s), \qquad \text{avec} \qquad \delta^2(s)c(s) = -1 \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \mathscr{V}}{\partial x}(\delta, b) = \dfrac{\partial \mathscr{V}}{\partial x} \end{array} \right.$$

4. La propriété, pour une mesure μ quasi invariante sur $\mathscr{W}^*$, d'être portée par $\mathscr{W}$, est très liée, lorsque μ vérifie les hypothèses du théorème 4,

au comportement en 0 des fonctions $\zeta(s)$ et $\zeta(s, x)$ — définies dans le théorème 4.

En particulier, à l'aide des majorations habituelles sur les équations stochastiques, si $\int_0 \delta^2(u)du < \infty$ et $\int_0 \mu \mid \zeta(u, X_u) \mid du < \infty$, on voit facilement que μ est en fait pseudo-portée par $\mathscr{W}$.

6.3. Mesures quasi invariantes sur $\mathscr{W}^{(*)}$ et processus gaussiens

On a déjà montré en 2.3 que l'étude de la quasi-invariance et de la propriété de Markov pour les processus gaussiens dont les trajectoires sont presque sûrement à valeurs dans $\mathscr{W}^{(*)}$ est particulièrement simple. Il est donc intéressant de caractériser les solutions $(X_t)_{t>0}$ d'équations stochastiques $E(\delta, \zeta)$ (intervenant dans le théorème 4) qui sont des processus gaussiens. On énonce, pour simplifier, la proposition 6.3, pour des mesures portées par $\mathscr{W}$.

PROPOSITION 6.3 :

1. Soit $\delta : R_+ \to R$, fonction continue, ne s'annulant pas,
$\zeta : R_+ \times R \to R$, fonction continue vérifiant :

$$\forall (m, n) \in N^2, \quad \sup_{\substack{u \leqslant n \\ |x|, |y| \leqslant m}} \mid \zeta(u, x) - \zeta(u, y) \mid \leqslant C(n, m) \mid x - y \mid$$

et (B_t) mouvement brownien défini sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, P)$.

$(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une solution de $E(x, \delta, \zeta)$: $X_t = x + \int_0^t (s)dB_s + \int_0^t \zeta(s, X_s)ds$ et l'on suppose de plus que le processus $\zeta(u, X_u)_{u\geqslant 0}$ est continu dans $L^1(P)$.

$(X_t)_{t\geqslant 0}$ est alors un processus gaussien si, et seulement si, ζ est une fonction affine de x : $\zeta(u, x) = a(u)x + b(u)$.

2. $\mu = X.(P)$ est une mesure de probabilité quasi invariante sur $\mathscr{W}_x$. Si, de plus, δ, a, b appartiennent à $C^1(R_+)$, le module de quasi-invariance a_f de μ est donné par la formule :

(I″) $\log a_f(\omega) =$

$$\int_0^\infty du \left\{ [A(u)f(u) - (cf')'(u)]\omega(u) + \frac{1}{2}A(u)f^2(u) - \frac{1}{2}(cf')'(u) + B(u)f(u) \right\}$$

avec :

$$\delta^2 c = -1; \quad A = ca^2 + c'a + ca'; \quad B = abc + c'b + cb'.$$

Enfin, la probabilité μ vérifie la condition de régularité (R.2).

Preuve. — Supposons que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$, solution de $E(x, \delta, \zeta)$ (unique, d'après la condition de lipschitzialité sur ζ) soit un processus gaussien.

Soit $\underline{\underline{F}}_t^X = \sigma(X_s, s \leqslant t)$; on a $\underline{\underline{F}}_t^X \subset \underline{\underline{F}}_t$ (par exemple, à cause de la méthode d'itération utilisée pour construire (X_t)).

On en déduit :

$$\forall 0 < s < t, \qquad \frac{1}{(t-s)} E[X_t - X_s \mid \underline{\underline{F}}_s^X] = \frac{1}{t-s}\int_s^t du E[\zeta(u, X_u) \mid \underline{\underline{F}}_s^X].$$

Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est markovien pour les tribus $(\underline{\underline{F}}_t^X)_{t\geq 0}$ et la probabilité P (C'est une diffusion inhomogène). On a donc :

$$E[X_t - X_s \mid \underline{\underline{F}}_s^X] = E[X_t - X_s \mid X_s]$$

Le processus (X_t) étant supposé gaussien, il existe deux réels $\alpha(s, t)$ et $\beta(s, t)$ tels que :

$$E[X_t - X_s \mid \underline{\underline{F}}_s^X] = \alpha(s, t)X_s + \beta(s, t).$$

D'après l'hypothèse de continuité de $\zeta(t, X_t)_{t\geq 0}$ dans $L^1(P)$, on a :

$$\zeta(s, X_s) = L^1(P).\lim_{(t\downarrow s)} \frac{1}{(t-s)}[\alpha(s, t)X_s + \beta(s, t)].$$

δ étant supposé continue et strictement positive, on a, d'après la formule de Cameron-Martin, $\mu = X.(P)$ quasi invariante. En particulier, le support de $X_s(P)$, $(s > 0)$ est R, et aucune des variables gaussiennes X_s, $s > 0$ n'est dégénérée. On déduit de ceci que la limite précédente existe si, et seulement si, les deux expressions :

$$a(s) = \lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\alpha(s, t) \qquad \text{et} \qquad b(s) = \lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\beta(s, t)$$

existent. D'où : $\zeta(s, x) = a(s)x + b(s) dxp.s$, et donc partout, par continuité de $\zeta(s, .)$.

2. La seconde partie de la proposition est une application du théorème 4-*b* lorsque $\zeta(s, x) = a(s)x + b(s)$.

Rappelons enfin qu'il est démontré en [*2*] (proposition 6.4.1), qu'il y a unicité des mesures de probabilité μ sur S′(R, R), quasi invariantes sous les translations de S(R, R), de module de quasi-invariance a_f donné par :

$$a_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} du\left[\omega(u)(f''(u) - m^2 f(u)) + \frac{1}{2}(f''(u) - m^2 f^2(u))\right]$$

avec $m > 0$, l'unique mesure étant la mesure $\mu^{(m)}$ du champ libre de masse m, portée par C(R, R). Le résultat est une conséquence de l'injectivité de la transformée de Fourier des probabilités sur S'(R), et du fait que l'application $\Sigma_m : f \to f'' - m^2 f$ de S(R, R) dans lui-même est bijective (voir la proposition 6.4.1 de [2]). Une telle méthode ne s'applique pas dans le cadre choisi ici — quasi-invariance sous les translations de $\mathscr{D}(R_+^*)$, ou $\mathscr{D}(R) - \Sigma_m$ n'étant pas bijectif de $\mathscr{D}(R)$ dans lui-même, d'après la formule :

$$\Sigma_m^{-1}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2m} e^{-m|t-s|} f(s) ds.$$

(formule 2.6.3 donnée en [2]).

RÉFÉRENCES

[1] P. CARTIER, *Problèmes mathématiques de la Théorie Quantique des Champs II*. Prolongement analytique. Séminaire Bourbaki, Vol. 1972-1973, novembre 1972.

[2] Ph. COURREGE et P. RENOUARD, Oscillateur anharmonique, mesures quasi invariantes sur C(R, R) et théorie quantique des champs en dimension $d = 1$ *(à paraître)*.

[3] T. KOMATSU, *On absolute continuity of probability solutions of certain martingale equations*. Second Japan-USSR Symposium on probability theory. Kyoto, August 1972, Vol. 2, p. 124.

[4] H. KUNITA, Absolute continuity of Markov processes and generators. *Nagoya Math. J.*, Vol. 36, 1969, p. 1-26.

[5] C. MAYER, Processus de Markov non stationnaires et espace-temps. *Annales I. H. P.*, Vol. IV, n° 3, 1968.

[6] E. NELSON, *Quantum Fields and Markoff Fields*. American Math. Soc. Summer, Institute on Partial Differential Equations held at Berkeley, 1971.

[7] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens*. Presse de l'Université de Montréal, été 1968.

[8] K. PARTHASARATHY, *Probability measures on metric spaces*. Academic Press, 1967.

[9] P. PRIOURET et M. YOR, Processus de diffusion à valeurs dans R et mesures quasi-invariantes sur C(R, R) *(à paraître)*.

[10] E. D. DYNKIN, *Markov Processes*, Vol. I. Springer-Verlag, 1965.

[11] A. V. SKOROKHOD, *Studies in the theory of random processes*. Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

(Manuscrit reçu le 7 février 1975).