

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL FLIESS

## **Séries rationnelles positives et processus stochastiques**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 11, n° 1 (1975), p. 1-21

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1975\\_\\_11\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_1_1_0)

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Séries rationnelles positives et processus stochastiques

par

Michel FLIESS

50, rue de Charonne, 75011 Paris

**RÉSUMÉ.** — Cet article est consacré à l'étude des séries formelles non commutatives, qui sont rationnelles positivement engendrées, et à leur application aux processus stochastiques.

**SUMMARY.** — This paper is devoted to the study of positively generated rational non-commutative formal power series and to their application to stochastic processes.

### TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction . . . . .	2
II. Rappels sur les séries rationnelles . . . . .	2
a) Définitions et propriétés générales . . . . .	2
b) Matrice de Hankel et représentation réduite. . . . .	4
III. Séries rationnelles positives . . . . .	7
a) Définition et proposition fondamentale . . . . .	7
b) Propriété à la Fatou des séries posi-rationnelles . . . . .	10
c) Pôles d'une série posi-rationnelle en une indéterminée. . . . .	11
d) Décomposition d'une série posi-rationnelle . . . . .	12
IV. Processus stochastiques. . . . .	13
V. Processus stochastiques rationnels . . . . .	16
a) Définition. . . . .	16
b) Une propriété ergodique . . . . .	16
c) Chaînes de Markov. . . . .	17
d) Processus induits par une chaîne de Markov . . . . .	18
e) Processus rationnels échangeables. . . . .	19
Bibliographie . . . . .	20

## I. INTRODUCTION

On sait que M. P. Schützenberger et certains de ses élèves ont utilisé des manipulations algébrico-combinatoires du monoïde libre pour élucider certains phénomènes issus du calcul des probabilités. Cet article se situe dans ce cadre de pensée dans la mesure où il est consacré aux applications probabilistes des séries formelles rationnelles en indéterminées non commutatives.

La théorie des automates finis, stochastiques ou non (cf. Claus [4], Eilenberg [6], Paz [19]), conduit à l'étude de séries rationnelles non commutatives positivement engendrées. Utilisant les travaux de Heller [13] [14], nous en entreprenons une approche systématique basée sur les propriétés de leur matrice de Hankel, ce qui nous permet de répondre à une conjecture d'Eilenberg et Schützenberger (cf. [6]).

Les processus stochastiques, que nous définissons à l'aide du monoïde libre, sont mis en rapport avec les travaux de Cartier [3] sur les arbres. A tout tel processus correspond canoniquement une série formelle en indéterminées non commutatives. Lorsque celle-ci est rationnelle positivement engendrée, le processus est une fonction simple d'une chaîne de Markov (cf. Heller [13] [14]), résultat que nous montrons être l'analogue d'un théorème classique sur les langages rationnels dû à Medvedev.

Les séries et langages algébriques, dont il ne sera pas question ici, sont aussi susceptibles d'applications probabilistes concernant, par exemple, les marches aléatoires sur un groupe libre (cf. Schützenberger [22]).

Une partie des résultats se trouve dans la thèse [9] de l'auteur et dans « Automates stochastiques et séries rationnelles non commutatives », in *Automata, languages and programming* (M. Nivat, éd.), p. 397-411. Amsterdam, North-Holland, 1973.

## II. RAPPELS SUR LES SÉRIES RATIONNELLES (cf. [6] [9] [10])

### a) Définitions et propriétés générales.

Soient  $X$  un ensemble fini non vide appelé *alphabet*,  $X^*$  le monoïde libre qu'il engendre. Un élément de  $X^*$  est appelé *mot*. L'élément neutre, ou mot *vide*, est noté « 1 ».

Soient  $A$  un semi-anneau <sup>(1)</sup> commutatif unitaire,  $A \langle X \rangle$  et  $A \langle\langle X \rangle\rangle$

<sup>(1)</sup> Un semi-anneau  $A$  est un ensemble muni de deux lois de composition, appelées addition et multiplication, satisfaisant aux axiomes :

- (i) pour l'addition,  $A$  est un monoïde commutatif ;
- (ii) la multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition ;
- (iii)  $0$  désignant l'élément neutre de l'addition, pour tout  $a \in A$ , on a  $a0 = 0a = 0$ .

les semi-anneaux des polynômes et des séries formels en les indéterminées associatives, non commutatives  $x \in X$ , à coefficients dans  $A$ . Un élément  $s \in A \langle\langle X \rangle\rangle$  est noté :

$$s = \Sigma \{ (s, f) f \mid f \in X^* \}, \quad \text{où} \quad (s, f) \in A.$$

Une série  $s \in A \langle\langle X \rangle\rangle$  est dite inversible ss'il existe  $s^{-1} \in A \langle\langle X \rangle\rangle$  telle que  $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$ . Lorsque  $A$  est un anneau,  $s$  est inversible ssi son *terme constant*  $(s, 1)$  l'est dans  $A$ . Une série  $s$  est dite *quasi-inversible* ssi  $(s, 1) = 0$ . Le quasi-inverse  $\tilde{s}$  est défini par :

$$\tilde{s} = \sum_{n \geq 1} s^n.$$

Il vérifie les relations :

$$\tilde{s} = s + s\tilde{s} = s + \tilde{s}s.$$

Un sous-semi-anneau  $R$  de  $A \langle\langle X \rangle\rangle$  est dit *rationnellement clos* ssi le quasi-inverse (resp. l'inverse) de tout élément quasi-inversible (resp. inversible) de  $R$  appartient encore à  $R$ . Le semi-anneau  $A \langle (X) \rangle$  des séries *rationnelles*, introduit par Schützenberger, est le plus petit sous-semi-anneau rationnellement clos de  $A \langle\langle X \rangle\rangle$ , qui contienne  $A \langle X \rangle$ .

$N_1$  et  $N_2$  désignant deux entiers positifs, soit  $A^{N_1 \times N_2}$  l'ensemble des matrices à  $N_1$  lignes et  $N_2$  colonnes, à coefficients dans  $A$ .  $N$  désignant un entier positif, une *représentation (linéaire)*  $\rho : X^* \rightarrow A^{N \times N}$  est un homomorphisme du monoïde  $X^*$  dans le monoïde multiplicatif sous-jacent de  $A^{N \times N}$ .

**THÉORÈME 2.1** (dit de Kleene-Schützenberger). — *Pour qu'une série  $r \in A \langle\langle X \rangle\rangle$  soit rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe un entier  $N \geq 1$ , une représentation  $\rho : X^* \rightarrow A^{N \times N}$ , une matrice  $p \in A^{N \times N}$  tels que :*

$$r = \Sigma \{ (\text{Tr } p\rho f) f \mid f \in X^* \},$$

où  $\text{Tr } p\rho f$  désigne la trace de la matrice  $p\rho f$ .

**COROLLAIRE** (dû à Schützenberger). — *Pour qu'une série  $r \in A \langle\langle X \rangle\rangle$  soit rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe un entier  $N \geq 1$ , une représentation  $\rho : X^* \rightarrow A^{N \times N}$ , des matrices ligne  $\lambda \in A^{1 \times N}$  et colonne  $\gamma \in A^{N \times 1}$  tels que :*

$$(1) \quad r = \Sigma \{ \lambda \rho f \gamma \mid f \in X^* \}.$$

*Remarque.* — Lorsque  $A$  est un corps  $K$  et lorsque  $X$  est réduit à un

seul élément  $x$ , une série rationnelle de  $\mathbf{K} \langle\langle x \rangle\rangle$  (noté aussi  $\mathbf{K}[[x]]$ ) est le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle  $P/Q$  où  $P, Q \in \mathbf{K} \langle x \rangle$  (noté aussi  $\mathbf{K}[x]$ ) et  $Q(0) \neq 0$ .

### b) Matrice de Hankel et représentation réduite.

Supposons que  $A$  est un corps  $\mathbf{K}$ . Associons à toute série  $s \in \mathbf{K} \langle\langle X \rangle\rangle$  un tableau infini, appelé *matrice de Hankel* et noté  $\mathcal{H}(s)$ , dont lignes et colonnes sont indexées par  $X^*$  et tel que l'élément d'indice  $(f, g) \in X^* \times X^*$  soit le coefficient  $(s, fg)$ .

Le *rang* de la matrice de Hankel, que l'on appelle aussi *rang de la série*, est par définition :

- zéro ssi la série, et donc la matrice, sont nulles ;
- fini, non nul, égal à  $\alpha$ , ssi l'on peut extraire un sous-déterminant non nul d'ordre  $\alpha$  et si tout sous-déterminant d'ordre  $\alpha + 1$  est nul ;
- infini dans les autres cas.

**THÉORÈME 2.2** (cf. [9] [10]). —  *$\mathbf{K}$  étant un corps, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série  $r \in \mathbf{K} \langle\langle X \rangle\rangle$  soit rationnelle est qu'elle soit de rang fini  $\bar{N}$ . Il existe alors une représentation  $\bar{\rho} : X^* \rightarrow \mathbf{K}^{\bar{N} \times \bar{N}}$ , des matrices ligne  $\bar{\lambda} \in \mathbf{K}^{1 \times \bar{N}}$  et colonne  $\bar{\gamma} \in \mathbf{K}^{\bar{N} \times 1}$ , telles que :*

$$r = \Sigma \{ (\bar{\lambda} \bar{\rho} f \bar{\gamma}) f \mid f \in X^* \}.$$

On peut déterminer :

- deux ensembles de  $\bar{N}$  mots  $\{d_j\}_{j=1}^{\bar{N}}, \{g_i\}_{i=1}^{\bar{N}}$  ;
- une application  $\chi : X^* \rightarrow \mathbf{K}^{\bar{N} \times \bar{N}}$  définie, pour tout  $f \in X^*$ , par  $(\chi f)_{i,j} = (r, g_i f d_j)$  ( $i, j = 1, \dots, \bar{N}$ ), telle que  $\chi 1$  soit inversible et vérifiant  $\chi f = \chi 1 \bar{\rho} f$  ;
- $\bar{N}^2$  matrices  $m_{i,j} \in \mathbf{K}^{\bar{N} \times \bar{N}}$  ( $i, j = 1, \dots, \bar{N}$ ) vérifiant, pour tout  $f \in X^*$ ,  $\bar{\rho} f = \sum_{i,j} m_{i,j}(r, g_i f d_j)$ .

Soient un entier  $N \geq 1$ , une représentation  $\rho : X^* \rightarrow \mathbf{K}^{N \times N}$ , des matrices ligne  $\lambda \in \mathbf{K}^{1 \times N}$  et colonne  $\gamma \in \mathbf{K}^{N \times 1}$  tels que :

$$r = \Sigma \{ (\lambda \rho f \gamma) f \mid f \in X^* \}.$$

Alors,  $N \geq \bar{N}$ . Si  $N = \bar{N}$ , il existe une matrice inversible  $P \in \mathbf{K}^{\bar{N} \times \bar{N}}$  telles que :  $P \rho f P^{-1} = \bar{\rho} f$ ,  $\bar{\lambda} P = \lambda$ ,  $P \gamma = \bar{\gamma}$  (les représentations  $\rho$  et  $\bar{\rho}$  sont donc semblables).

*Preuve.* — (i) Soit  $r \in \mathbf{K} \langle X \rangle$  définie par :

$$r = \Sigma \{ \lambda \rho f \gamma \mid f \in X^* \},$$

où  $\rho, \lambda, \gamma$ , qui ont la signification habituelle, sont de dimension  $N$ . Le  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}(r)$  est de dimension finie : c'est un sous-espace vectoriel de celui engendré par les  $N$  colonnes dont les coefficients d'indice  $f$  sont ceux du  $N$ -uplet  $\lambda \rho f$ . D'où la finitude du rang.

(ii) Soit  $r \in \mathbf{K} \langle X \rangle$  de rang fini  $\bar{N}$ . Il existe deux ensembles de  $\bar{N}$  mots  $\{d_1, \dots, d_{\bar{N}}\}, \{g_1, \dots, g_{\bar{N}}\}$  tels que le déterminant de la matrice d'ordre  $\bar{N}$   $[(r, g_i d_j)]$  soit non nul. Pour deux mots quelconques  $f$  et  $f'$ , il vient :

$$(2) \quad (r, f'f) = \sum_{j=1}^{\bar{N}} m_j(f)(r, f' d_j)$$

où  $m_j(f) = (-1)^{j+\bar{N}} \Delta_j(f) / \det [(r, g_i d_j)]$ ,  $\Delta_j(f)$  étant le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant  $d_j$  par  $f$  dans  $[(r, g_i d_j)]$ . La formule (2) exprime que les colonnes d'indices  $d_1, \dots, d_{\bar{N}}$  forment une base du  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}(r)$ .

Soient  $\bar{\rho}, \chi : X^* \rightarrow \mathbf{K}^{\bar{N} \times \bar{N}}$ , les applications définies par  $(\bar{\rho}f)_{i,j} = m_i(f d_j)$ ,  $(\chi f)_{i,j} = (r, g_i f d_j)$ . En vertu de (2), il vient :

$$(3) \quad \chi f = \chi \bar{\rho} f.$$

Comme  $\chi \bar{\rho}$  est inversible, on vérifie que  $\bar{\rho}$  est une représentation. Soit  $\bar{\lambda} \in \mathbf{K}^{1 \times \bar{N}}$  et  $\bar{\gamma} \in \mathbf{K}^{\bar{N} \times 1}$  les matrices ligne et colonne dont les  $j^{\text{ièmes}}$  coefficients sont respectivement  $(r, d_j)$  et  $m_j(1)$ . En vertu de (2), il vient :

$$r = \Sigma \{ (\bar{\lambda} \bar{\rho} f \bar{\gamma}) \mid f \in X^* \}.$$

(3) permet de déterminer  $\bar{N}^2$  matrices  $m_{i,j} \in \mathbf{K}^{\bar{N} \times \bar{N}}$  telles que

$$\rho f = \sum_{i,j} m_{i,j}(r, g_i f d_j).$$

(iii) Un  $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module sériel <sup>(2)</sup> gauche est un triple  $(E, c, l)$  où  $E$  est un  $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module gauche,  $c$  un élément de  $E$ ,  $l : E \rightarrow \mathbf{K}$  une application  $\mathbf{K}$ -linéaire. A un tel module sériel correspond la série  $s = \Sigma \{ (l f c) f \mid f \in X^* \}$ . Réciproquement, à une série  $s \in \mathbf{K} \langle\langle X \rangle\rangle$  correspond un module sériel gauche  $(E, c, l)$ , où  $E$  n'est autre que  $\mathbf{K} \langle X \rangle$  considéré comme

<sup>(2)</sup> Comparer avec les *modules stochastiques* de Heller [13] [14].

$\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module gauche,  $c$  le polynôme unité,  $l$  l'application qui à  $p \in \mathbf{K} \langle X \rangle$  fait correspondre  $\Sigma \{ (p, f)(s, f) \mid f \in X^* \}$ . Un morphisme

$$\varphi : (E, c, l) \rightarrow (E', c', l')$$

de  $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -modules sériels gauches est un morphisme du  $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module  $E$  dans le  $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module  $E'$ , tel que  $\varphi c = c'$ ,  ${}^t\varphi l' = l$  ( ${}^t\varphi$  désigne l'application duale de  $\varphi$  considéré comme morphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels). On a isomorphisme ssi  $\varphi$  est un isomorphisme entre  $E$  et  $E'$ .

$(E, c, l)$  est dit *réduit* ssi  $E = \mathbf{K} \langle X \rangle c$  et si

$$\{ n \mid n \in E, l(\mathbf{K} \langle X \rangle n) = 0 \} = \{ 0 \}.$$

Soient

$$\mathfrak{R} = \{ n \mid n \in \mathbf{K} \langle X \rangle c, l(\mathbf{K} \langle X \rangle n) = 0 \}.$$

un sous- $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module de  $\mathbf{K} \langle X \rangle c$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{K} \langle X \rangle c / \mathfrak{R}$ ,  $\alpha : \mathbf{K} \langle X \rangle c \rightarrow \mathbf{R}$  l'épimorphisme canonique. Il existe une application  $\mathbf{K}$ -linéaire  $l_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}$  telle que la restriction de  $l$  à  $\mathbf{K} \langle X \rangle c$  soit égale à  $l_0 \alpha$ .  $(\mathbf{R}, c_0, l_0)$ , où  $c_0 = \alpha c$ , est clairement un module sériel réduit. Il est d'autre part évident que deux modules sériels réduits, associés à la même série, sont isomorphes.

On peut doter le  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}(s)$  d'une structure de  $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module gauche de la manière suivante : tout mot  $f \in X^*$  opérant sur la colonne d'indice  $f' \in X^*$  lui fait correspondre la colonne d'indice  $ff'$ .  $\mathbf{R}$  est isomorphe à ce module, ce qui en donne une interprétation remarquable.

Définitions et propriétés analogues pour les modules sériels droits et les lignes de la matrice de Hankel.

Soit  $r \in \mathbf{K} \langle X \rangle$  donnée comme en (1). A  $\rho, \lambda, \gamma$  on peut associer le module sériel gauche  $(E, c, l)$  où :

—  $E = \mathbf{K}^{N \times 1}$ ,  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel sur lequel opèrent canoniquement les matrices  $\rho f$  et que l'on peut donc considérer comme un  $\mathbf{K} \langle X \rangle$ -module gauche ;

—  $c = \gamma$  ;

—  $l$  est l'application repérée par  $\lambda$ , c'est-à-dire telle que  $l f c = \lambda \rho f \gamma$ .

Les assertions du théorème concernant les liens entre  $\rho, \lambda, \gamma$  et  $\bar{\rho}, \bar{\lambda}, \bar{\gamma}$  apparaissent alors comme la traduction en langage matriciel des propriétés des modules sériels réduits. ■

La représentation  $\bar{\rho}$ , qui est définie à une similitude près, est appelée *représentation (linéaire) réduite*.

COROLLAIRE. —  $\mathbf{K}$  étant un corps, pour qu'une série  $r \in \mathbf{K} \langle\langle X \rangle\rangle$  soit rationnelle, il faut et il suffit que le  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel engendré par les

lignes ou les colonnes de la matrice de Hankel soit de dimension finie. Les dimensions de ces deux espaces vectoriels sont égales au rang de  $r$ .

Il existe une dualité canonique entre ces deux espaces, celle qui à la ligne d'indice  $f$  et à la colonne d'indice  $g$  fait correspondre le coefficient  $(r, fg)$ .

*Remarque.* — Dans le cas d'une seule indéterminée, les liens entre matrices de Hankel de rang fini et séries rationnelles sont classiques (voir, par exemple, Gantmacher [12], p. 201).

### III. SÉRIES RATIONNELLES POSITIVES

#### a) Définition et proposition fondamentale.

Soit  $A$  un anneau commutatif ordonné<sup>(3)</sup> de corps de fractions  $K$  et  $A_+$  le semi-anneau formé par les éléments non négatifs de  $A$ . Une série rationnelle de  $A_+ \langle X \rangle$  est dite rationnelle *positivement engendrée* ou, plus brièvement, *rationnelle positive*, ou encore *posi-rationnelle*<sup>(4)</sup>. Le but de ce paragraphe est de caractériser ces séries.

*Exemple.* —  $Z$  désignant l'anneau des entiers, soit  $\rho : X^* \rightarrow Z^{2 \times 2}$ , où  $X = \{x, y\}$ , la représentation définie par :

$$\rho x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La série :

$$r = \Sigma \{ (\rho f)_{1,2} f \mid f \in X^* \} = \{ (|f|_x - |f|_y) f \mid f \in X^* \},$$

où l'on note  $|f|_x, |f|_y$  les nombres d'occurrences de  $x$  et  $y$  dans  $f$ , est rationnelle dans  $Z \langle X \rangle$ . Le produit d'Hadamard (cf. [6] [9]) de cette série par elle-même est la série rationnelle de  $Z \langle X \rangle$  :

$$r' = \Sigma \{ (|f|_x - |f|_y)^2 f \mid f \in X^* \},$$

qui n'est pas posi-rationnelle, quoique ses coefficients soient non

<sup>(3)</sup> Un anneau  $A$  est dit ordonné ssi la propriété pour un élément d'être positif ( $> 0$ ) vérifie les axiomes :

- (i) pour tout élément  $a \in A$ , on a soit  $a = 0$ , soit  $a > 0$ , soit  $-a > 0$  ;
- (ii) si  $a > 0, b > 0$ , alors  $a + b > 0, ab > 0$ .

Tout anneau ordonné est intègre et de caractéristique nulle.

<sup>(4)</sup> Ce terme nous a été suggéré par G. M. Bergman. Tenant compte de la nature de  $A_+$ , Jacob [16] a affiné cette définition.



négatifs. En effet, son support, c'est-à-dire la partie de  $X^*$  définie par :

$$\text{supp } r' = \{ f \mid |f_x| \neq |f|_y \},$$

n'est pas un *langage rationnel* <sup>(5)</sup>.

Soient  $s \in A \langle\langle X \rangle\rangle$ ,  $\mathcal{H}(s)$  la matrice de Hankel,  $\mathbb{C}$  le  $A$ -module formé par les colonnes à coefficients dans  $A$  du  $K$ -espace vectoriel engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}(s)$ . Un *cône convexe positif* de  $\mathbb{C}$  est le cône convexe positif engendré par une famille  $\mathcal{F} = \{c_i \mid i \in I\}$  d'éléments de  $\mathbb{C}$  à coefficients non négatifs, c'est-à-dire l'ensemble des sommes finies :

$$\sum_{i \in I'} \alpha_i c_i$$

( $I'$  est une partie finie de  $I$ ,  $\alpha_i \in A_+$ ). Un tel cône est dit *stable ssi*, étant donné un de ses éléments  $c$ , que l'on peut exprimer sous la forme d'une somme finie :

$$c = \sum_k \beta_k c_{f_k}$$

( $\beta_k \in A$ ,  $f_k \in X^*$ ,  $c_{f_k}$  colonne de  $\mathcal{H}(r)$  d'indice  $f_k$ ), pour tout  $f \in X^*$ , la colonne  $\sum_k \beta_k c_{ff_k}$  appartient encore au cône. Le cône est dit *polyédral*

ssi il est engendré par un nombre fini d'éléments. Lorsque  $A$  est un corps ordonné, on retrouve ainsi la définition classique à partir des faces et des arêtes.

Le cône a une image canonique dans le  $K \langle X \rangle$ -module sériel gauche réduit associé à  $s$  (cf. § II. b). La stabilité s'y traduit de la manière suivante : pour tout élément  $c'$  appartenant à l'image du cône et tout  $p \in A_+ \langle X \rangle$ ,  $pc'$  appartient encore à cette image.

Définitions analogues pour les lignes de la matrice de Hankel.

Le théorème suivant est inspiré de Heller [13] [14].

**THÉORÈME 3.1.** —  *$K$  étant un corps ordonné, pour qu'une série  $r \in K \langle\langle X \rangle\rangle$ , à coefficients non négatifs, soit posi-rationnelle, il faut et il suffit que les colonnes (resp. lignes) de la matrice de Hankel soient contenues dans un*

<sup>(5)</sup> Un *langage rationnel* n'est autre qu'un *regular set* ou *K-langage*. On montre aisément (cf. [6] [9]) que le support

$$\text{supp } r = \{ f \mid f \in X^*, (r, f) \neq 0 \}$$

d'une série  $r$  de  $A_+ \langle X \rangle$  est nécessairement un langage rationnel.

cône convexe positif polyédral stable du  $K$ -espace vectoriel engendré par les colonnes (resp. lignes).

*Preuve.* — (i) La condition est nécessaire. Soit  $r \in K_+ \langle X \rangle$  donnée par  $N$ ,  $\rho : X^* \rightarrow K_+^{N \times N}$ ,  $\lambda \in K_+^{1 \times N}$ ,  $\gamma \in K_+^{N \times 1}$  selon la formule (1). Comme dans la démonstration du théorème 2.2, on construit un  $A \langle X \rangle$ -module sériel gauche  $(E, c, l) = (K^{N \times 1}, \gamma, \lambda)$ , et un cône convexe polyédral stable qui n'est autre que  $K_+^{N \times 1}$ . Le cône que l'on en déduit pour le module sériel gauche réduit, qui contient les images canoniques des colonnes de  $\mathcal{H}(r)$ , permet de vérifier la propriété cherchée.

(ii) La condition est suffisante. Soit  $\{a_1, \dots, a_N\}$  un système générateur du cône. Définissons la représentation  $\rho : X^* \rightarrow K_+^{N \times N}$  pour tout  $x \in X$ , par :

$$x a_j = \sum_{i=1}^N (\rho x)_{i,j} a_i.$$

$c_1$  désignant la colonne d'indice 1, posons :

$$c_1 = \sum_{i=1}^N \gamma_i a_i \quad (\gamma_i \in K_+)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} \in K_+^{N \times 1}.$$

Définissons  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in K_+^{1 \times N}$  par  $\lambda_i = a_i(1)$ , c'est-à-dire le coefficient d'indice 1 de  $a_i$ . Il vient :

$$r = \Sigma \{ (\lambda \rho f \gamma) f \mid f \in X^* \}. \quad \blacksquare$$

Le nombre d'états d'une série posi-rationnelle est, par définition, égal au nombre minimal d'arêtes d'un cône positif polyédral stable contenant les lignes ou les colonnes de la matrice de Hankel. Il est clair que le nombre d'états est supérieur ou égal au rang. Une série rationnelle positive est dite *simplicielle* ss'il y a égalité. L'intuition géométrique permet d'énoncer :

**PROPOSITION 3.2.** —  $K$  étant un corps ordonné, toute série posi-rationnelle de  $K \langle\langle X \rangle\rangle$  de rang au plus deux, est simplicielle.

**PROPOSITION 3.3** <sup>(6)</sup>. —  $\mathbf{R}$  étant le corps des nombres réels, pour qu'une série rationnelle de  $\mathbf{R} \langle\langle X \rangle\rangle$  de rang au plus deux, soit posi-rationnelle, il faut et il suffit que ses coefficients soient non négatifs.

<sup>(6)</sup> E. Birger et J. Berstel avaient démontré ce résultat dans le cas d'une seule indéterminée.

*Remarque.* — Les résultats précédents sont intimement liés aux problèmes de minimisation des automates stochastiques (cf. Paz [19], chap. I, § B, Claus [4], chap. 2). Ce qui est souvent appelé dans la littérature *réalisation* des automates stochastiques, apparaît comme l'étude de séries positionnelles, normées de manière élémentaire. Les éléments de  $\mathbf{N}\langle X \rangle$  ont été considérés, sous une terminologie différente, par Eilenberg [6]. Enfin, les *fonctions de croissance des systèmes de Lindenmayer* (cf. Paz et Salomaa [20]) sont des séries particulières de  $\mathbf{N}\langle X \rangle$ , qu'il serait intéressant d'étudier en tant que telles (<sup>7</sup>).

### b) Propriété à la Fatou des séries posi-rationnelles.

En [9] [10], nous avons défini la *propriété de Fatou (faible)* pour un anneau commutatif unitaire intègre  $A$ , de corps de fractions  $K$  : toute série de  $K\langle X \rangle$ , à coefficients dans  $A$ , appartient à  $A\langle X \rangle$ .

Le résultat suivant, qui répond à une conjecture d'Eilenberg et Schützenberger (cf. [6]), donne une propriété analogue pour  $\mathbf{N}$ .

**PROPOSITION 3.4.** —  $\mathbf{Q}$  étant le corps des nombres rationnels, toute série posi-rationnelle de  $\mathbf{Q}_+\langle X \rangle$ , à coefficients entiers, est posi-rationnelle dans  $\mathbf{N}\langle X \rangle$ .

*Preuve.* — Soient  $r \in \mathbf{Q}_+\langle X \rangle$ , à coefficients entiers, et :

- $C_{\mathbf{Q}}$  le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}(r)$  ;
- $C_{\mathbf{Z}}$  le  $\mathbf{Z}$ -module engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}(r)$  ;
- $C$  un cône convexe positif polyédral stable de  $C_{\mathbf{Q}}$  contenant les colonnes de  $\mathcal{H}(r)$ .

D'après un résultat de [9] [10],  $r$  appartient à  $\mathbf{Z}\langle X \rangle$  et  $C_{\mathbf{Z}}$  est un  $\mathbf{Z}$ -module de type fini :  $\mathbf{Z}$  vérifie la propriété de Fatou forte. Soient  $\{a_1, \dots, a_k\}$  un système générateur de  $C$  et :

$$C' = \{n_1 a_1 + \dots + n_k a_k \mid n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}\}.$$

Considérons  $C_{\mathbf{Z}}$  et  $C'$  comme des sous-monoïdes de type fini de  $C_{\mathbf{Q}}$ , considéré comme monoïde additif. En vertu de deux théorèmes dus à Eilenberg et Schützenberger [7], leur intersection  $C''$  est encore un monoïde de type fini, de même que :

$$C''' = \{c \mid c \in C_{\mathbf{Z}}, \exists_{\mathbf{N}} n : nc \in C''\}.$$

(<sup>7</sup>) Tâche entreprise avec succès par J. Berstel dans le cas d'une seule indéterminée (résultats non encore publiés).

La construction de la représentation  $\rho : X^* \rightarrow \mathbf{N}^{\mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ , de  $\lambda \in \mathbf{N}^{1 \times \mathbf{N}}$ ,  $\gamma \in \mathbf{N}^{\mathbf{N} \times 1}$  produisant  $r$ , se fait alors comme dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 3.1. ■

*Remarque.* — Eilenberg et Schützenberger (cf. [6]) ont aussi proposé la conjecture suivante : toute série de  $\mathbf{R}_+ \langle X \rangle$ , à coefficients rationnels, appartient à  $\mathbf{Q}_+ \langle X \rangle$ .

### c) Pôles d'une série posi-rationnelle en une indéterminée.

La proposition suivante, que nous présentons comme une conséquence du théorème de Perron-Frobenius sur le spectre des matrices non négatives, a été démontrée par Berstel [1] selon une méthode toute différente (voir aussi Eilenberg [6]).

**PROPOSITION 3.5.** — *Les arguments des pôles situés sur le cercle de convergence d'une série posi-rationnelle en une indéterminée, à coefficients réels, sont commensurables avec  $\pi$ .*

*Preuve.* — Soit  $r \in \mathbf{R}_+ \langle X \rangle$  de nombre d'états  $N_0$ , donné par :

$$r = \sum_{n \geq 0} (\lambda \rho x^n \gamma) x^n$$

où  $\rho : \{x\}^* \rightarrow \mathbf{R}_+^{N_0 \times N_0}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}_+^{1 \times N_0}$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}_+^{N_0 \times 1}$ .

En vertu du théorème de Perron-Frobenius (cf. Gantmacher [12], chap. 13, § 2, 3, 4) <sup>(8)</sup>,  $\rho x$  possède une racine réelle positive  $\alpha$  de module maximum à laquelle correspond un vecteur propre de coordonnées non négatives. Donc, dans le  $\mathbf{R}[x]$ -module sériel réduit  $(E_0, c_0, l_0)$  ( $\mathbf{R}[x]$  étant commutatif, il n'est pas nécessaire de préciser s'il s'agit d'un module gauche ou droit), il existe un élément non nul  $v \in E_0$  tel que  $xv = \alpha v$ . Par conséquent, si  $\bar{\rho} : \{x\}^* \rightarrow \mathbf{R}^{\bar{N} \times \bar{N}}$  désigne la représentation réduite associée à  $r$  (cf. § II. b),  $\alpha$  est la valeur propre de  $\bar{\rho} x$  de module maximum. D'après le théorème de Perron-Frobenius, les arguments des autres valeurs propres de  $\rho x$  de module  $\alpha$  sont commensurables avec  $\pi$ , il en est donc de même pour  $\bar{\rho} x$ . Or, les pôles de  $r$  (en comptant, s'il le faut, le point à l'infini) sont les inverses des valeurs propres de  $\bar{\rho} x$ , d'où le résultat. ■

*Application.* — On a ainsi un critère commode pour prouver qu'une série rationnelle à coefficients non négatifs n'est pas positive. La série

<sup>(8)</sup> En fait, le théorème est démontré pour les matrices *irréductibles*. Mais l'on peut utiliser la forme normale (cf. Gantmacher [12], chap. 13, § 4).

rationnelle  $\sum_{n \geq 0} x^n \sin^2 n\theta$ , produit d'Hadamard par lui-même du développement de

$$\frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2},$$

n'est pas positive si  $\theta$  est incommensurable avec  $\pi$  <sup>(9)</sup>. Lorsque  $\theta$  est commensurable avec  $\pi$ , on vérifie aisément que la série est positive.

#### d) Décomposition d'une série posi-rationnelle.

Soient  $K$  un corps ordonné,  $r \in K_+ \langle X \rangle$  une série posi-rationnelle,  $(E_0, c_0, l_0)$  le  $K \langle X \rangle$ -module sériel gauche réduit associé à  $r$ .

Suivant les méthodes de Bleicher et Schneider [2] et de Heller [14], qui consistent à généraliser le théorème de Krull-Schmidt,  $(E_0, c_0, l_0)$  peut être décomposé de manière unique en la somme directe finie de  $K \langle X \rangle$ -modules sériels gauches  $(E_0^{(i)}, c_0^{(i)}, l_0^{(i)})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de sorte que :

$$- E_0 = \bigoplus_{i=1}^n E_0^{(i)};$$

$$- c_0 = \bigoplus_{i=1}^n c_0^{(i)};$$

$$- \forall_{E_0} v \text{ que l'on peut écrire } v = \bigoplus_{i=1}^n v^{(i)} \text{ (} v^{(i)} \in E_0^{(i)} \text{), il vient :}$$

$$l_0 v = \sum_{i=1}^n l_0^{(i)} v^{(i)};$$

$$- \forall_{X^*} f \quad l_0^{(i)}(f c_0^{(i)}) \geq 0 \text{ (} i = 1, \dots, n \text{)}.$$

Les modules sériels  $(E_0^{(i)}, c_0^{(i)}, l_0^{(i)})$  sont nécessairement réduits.

A cette décomposition, correspond une décomposition  $r = \sum_{i=1}^n r_i$ , où  $r_i \in K_+ \langle X \rangle$  ( $i = 1, \dots, n$ ), en séries rationnelles positives indécomposables deux à deux étrangères <sup>(10)</sup>, telle que  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) soit donnée

<sup>(9)</sup> Exemple dû à Eilenberg [6].

<sup>(10)</sup> Deux séries rationnelles  $r_1, r_2 \in K \langle X \rangle$  sont dites étrangères (cf. [9] [10]) ssi le rang de  $r_1 + r_2$  est égal à la somme des rangs de  $r_1$  et  $r_2$ .

par le module sériel  $(E_0^{(i)}, c_0^{(i)}, l_0^{(i)})$ . Comme en [9] [10], lors de l'étude de la décomposition d'une série rationnelle, le théorème de Levitzki sur les semi-groupes de matrices nilpotentes permet d'isoler un polynôme, à coefficients non négatifs, que nous appellerons encore *partie entière* de  $r$ . On peut donc énoncer :

**PROPOSITION 3.6.** — *K étant un corps ordonné, toute série posi-rationnelle de  $\mathbf{K}_+ \langle\langle X \rangle\rangle$  peut être décomposée de manière unique en la somme d'une partie entière (polynôme à coefficients non négatifs) et de séries posi-rationnelles indécomposables de  $\mathbf{K}_+ \langle\langle X \rangle\rangle$ , deux à deux étrangères.*

#### IV. PROCESSUS STOCHASTIQUES

On appelle *processus stochastique* ou *processus aléatoire* toute application  $\pi : X^* \rightarrow \mathbf{R}_+$  vérifiant :

$$\begin{aligned} & - \pi 1 = 1 ; \\ & - \forall_{X^*} f \quad \pi f = \sum_{x \in X} \pi f x \quad (4). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & - \sum_{x \in X} \pi x = 1 ; \\ & - \forall_{X^*} f, \quad 0 \leq \pi f \leq 1. \end{aligned}$$

Le lecteur verra aisément que cette définition se ramène à celles données dans les traités classiques de probabilités (cf. Claus [4], p. 173).

La série formelle  $\tilde{\pi}$  associée à  $\pi$  est, par définition, la série de  $\mathbf{R}_+ \langle\langle X \rangle\rangle$  :

$$\tilde{\pi} = \sum \{ (\pi f) f \mid f \in X^* \}.$$

Cette notion est, bien évidemment, liée à celle, classique, de fonction génératrice. Remarquons que, en vertu de (4), le support de  $\tilde{\pi}$ , c'est-à-dire l'ensemble des mots de coefficient non nul, que nous nommerons aussi support de  $\pi$  et noterons :

$$\text{supp } \pi = \{ f \mid \pi f \neq 0 \},$$

jouit de la propriété suivante :

**PROPOSITION 4.1.** — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie  $P \subset X^*$  soit support d'un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est qu'elle vérifie les conditions suivantes : (i) le complément de  $P$  est un idéal à droite de  $X^*$ , (ii) pour tout  $f \in P$ , on a  $fX \cap P \neq \emptyset$ .*

Soit  $X^\infty$  l'ensemble des mots infinis vers la droite, c'est-à-dire l'ensemble des produits infinis  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \dots$ . Soient  $X^n$  l'ensemble des mots de longueur  $n$ ,  $P_n : X^n \rightarrow X^{n-1}$  l'application canonique surjective définie par :

$$P_n x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}} x_{i_n} = x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}.$$

On obtient un système projectif :

$$\{1\} \xleftarrow{P_1} X \xleftarrow{P_2} X^2 \xleftarrow{P_3} \dots \xleftarrow{P_n} X^n \xleftarrow{P_{n+1}} \dots$$

dont  $X^\infty$  est la limite.

Il est aisé de doter  $X^* \cup X^\infty$  d'une métrique qui en fait un espace topologique complet totalement discontinu (cf. Eilenberg [6]). La distance de deux éléments  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \dots$  et  $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k} \dots$  est  $2^{-n}$  où  $n$  est le plus petit entier tel que :

$$x_{i_1} = x_{j_1}, \dots, x_{i_{n-1}} = x_{j_{n-1}}, \quad x_{i_n} \neq x_{j_n}.$$

Alors  $X^*$  est une partie partout dense de  $X^* \cup X^\infty$ , dont  $X^\infty$  est un sous-espace compact totalement discontinu. Cette topologie de  $X^\infty$  est la limite projective des topologies discrètes triviales des  $X^n$ .

Soit  $\hat{S}$  l'adhérence topologique dans  $X^* \cup X^\infty$  du support du processus  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$ .  $\hat{S} \cap X^\infty$  est la *frontière droite* du processus. On définirait de même la *frontière gauche*.

Le processus  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  induit une mesure de probabilité sur  $X^\infty$ . Soit, en effet,  $A$  une partie de  $X^\infty$ ,  $A_n$  l'ensemble des mots facteurs gauches de longueur  $n$  des éléments de  $A$ . En vertu de (4), la suite

$$\varpi_n A_n = \Sigma \{ \pi f \mid f \in A_n \}$$

est décroissante au sens large, donc convergente. Par définition,  $\varpi_\infty A = \lim \varpi_n A_n$ . On en déduit que  $\varpi_\infty X^\infty = 1$ . En fait,  $\varpi_\infty$  est portée par la frontière droite de  $\pi$ .

*Remarques.* — (i) Au processus  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$ , faisons correspondre la chaîne de Markov infinie, stationnaire, homogène suivante :

— l'ensemble des états est  $X^*$  ;

— pour  $f, g \in X^*$ , la probabilité de transition  $t(f, g)$  de  $f$  à  $g$  est donnée par :

$$t(f, g) = \begin{cases} \pi f x / \pi f & \text{si } \pi f \neq 0 \quad \text{et} \quad g = fx \in fX \\ 0 & \text{si l'une des deux conditions n'est pas remplie ;} \end{cases}$$

— la distribution initiale de probabilités est portée par le seul mot vide 1.

La frontière droite de  $\pi$  n'est autre que la *frontière de Martin* de





## V. PROCESSUS STOCHASTIQUES RATIONNELS

### a) Définition.

Un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est dit *rationnel* ssi la série associée  $\tilde{\pi}$  l'est, c'est-à-dire appartient à  $\mathbf{R} \langle X \rangle$ . Par définition, la matrice de Hankel et le rang de  $\tilde{\pi}$  sont ceux de  $\pi$ . Le théorème 2.1 conduit à énoncer :

PROPOSITION 5.1. — *Un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est rationnel si seulement s'il est de rang fini.*

*Remarque.* — La proposition précédente donne un critère pour montrer que certains processus sont irrationnels. Il en existe d'autres, parfois plus commodes. Soit, par exemple,  $\pi : X^* \rightarrow \mathbf{Q} \cap [0, 1]$  un processus rationnel, à valeurs rationnelles. D'après la propriété de Fatou (cf. [9] [10]),  $\tilde{\pi}$  appartient à  $\mathbf{Q} \langle X \rangle$ . Il est alors aisé de généraliser un résultat d'Eisenstein en prouvant qu'il existe un entier  $M$ , tel qu'en substituant dans  $\tilde{\pi}$ , à tout  $x \in X$ ,  $Mx$ , on obtienne une série de  $\mathbf{Z} \langle X \rangle$  (cf. [9]). On en déduit immédiatement que le processus examiné par Traub [24] est irrationnel.

### b) Une propriété ergodique.

Un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est dit *mélangeant* (en anglais *mixing*) ssi pour tout  $f, g \in X^*$ , la limite de

$$\pi(fX^n g) = \Sigma \{ \pi(fwg) \mid w \in X^n \},$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , existe et vaut  $\pi f \pi g$ . Un tel processus est un *automorphisme* (en anglais *K-shift*) ssi,  $f$  étant donné, la convergence est uniforme par rapport à  $g$ . Robertson [21] a démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 5.2. — *Tout processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$ , qui est rationnel mélangeant, est un automorphisme.*

*Preuve.* — Soit  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  un processus rationnel mélangeant. Supposons  $\pi$  donné, comme dans le théorème 2.2, par la représentation réduite :

$$\forall_{x^*} f \quad \pi f = \bar{\lambda} \bar{\rho} f \bar{\gamma}.$$

Posons  $\mathbf{M} = \Sigma \{ \bar{\rho} x \mid x \in X \}$ . Par hypothèse, pour tout  $f, g \in X^*$ , on a :

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\lambda} \bar{\rho} f \mathbf{M}^n \bar{\rho} g \bar{\gamma} = \bar{\lambda} \bar{\rho} f \bar{\gamma} \bar{\lambda} \bar{\rho} g \bar{\gamma}.$$

Soient  $\mathbf{E}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N} \times 1}$  engendré par l'ensemble

$\{\bar{\rho}g\bar{\gamma} \mid g \in X^*\}$  <sup>(11)</sup>,  $\alpha$  et  $\alpha_n : E \rightarrow \mathbf{R}$  les applications  $\mathbf{R}$ -linéaires, qui sont les restrictions à  $E$  de  $\bar{\lambda}\bar{\rho}f\bar{\gamma}\bar{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}\rho f\bar{M}^n$ . (5) montre que  $\alpha_n$  tend vers  $\alpha$  pour la topologie de la convergence simple et donc, la dimension de  $E$  étant finie, pour une norme quelconque de  $E$ . Or, d'après une formule du théorème 2.1

$$\bar{\rho}g = \sum_{i,j} m_{i,j} \pi(g_i g d_j),$$

où  $\pi(g_i g d_j)$  est inférieur ou égal à 1, toute norme de  $\bar{\rho}g$  est bornée indépendamment de  $g$ . Comme

$$\pi(fX^n g) - \pi f \pi g = (\alpha_n - \alpha) \bar{\rho}g \bar{\gamma},$$

la convergence, pour  $f$  donné, est uniforme par rapport à  $g$ . ■

On notera que la convergence est aussi uniforme par rapport à  $f$ .

### c) Chaînes de Markov.

Un processus stochastique  $M : X^* \rightarrow [0, 1]$  est une *chaîne de Markov finie homogène* (que nous supposons toujours *stationnaire*) ss'il peut être défini de la manière suivante : il existe des applications  $i : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $t : X \times X \rightarrow [0, 1]$  telles que, pour tout  $f = x_{i_1} \dots x_{i_k} \in XX^*$ , on ait :

$$(6) \quad M(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = i(x_{i_1})t(x_{i_1}, x_{i_2})t(x_{i_2}, x_{i_3}) \dots t(x_{i_{k-1}}, x_{i_k}).$$

On en déduit :

$$\sum_{x \in X} ix = 1.$$

De plus, les  $t(x, x')$  peuvent être choisis de sorte que :

$$\forall_x x : \sum_{x' \in X} t(x, x') = 1.$$

La matrice stochastique  $(t(x_i, x_j)) \in \mathbf{R}_+^{\text{card } X \times \text{card } X}$  est la *matrice de transition* de la chaîne  $M$ .

La proposition suivante, qui n'est qu'une reformulation d'un résultat dû à Heller [13] [14], se déduit immédiatement de la formule (6).

**PROPOSITION 5.3.** — *Un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est une chaîne de Markov finie si et seulement si, pour tout  $x \in X$ , le  $\mathbf{R}$ -espace*

<sup>(11)</sup> En fait, d'après la démonstration du théorème 2.2,  $E = \mathbf{R}^{\bar{N} \times 1}$ .

vectoriel engendré par les lignes de la matrice de Hankel, d'indice appartenant à  $xX^*$ , est de dimension au plus égale à un.

Remarque. — Holland [15] généralise la notion de chaîne de Markov.

#### d) Processus induits par une chaîne de Markov.

Un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est dit *induit par une chaîne de Markov finie* s'il peut être défini de la manière suivante : il existe un ensemble fini non vide  $S$ , une chaîne de Markov  $M : S^* \rightarrow [0, 1]$ , une application  $\varphi : S \rightarrow X$ , que l'on prolonge canoniquement en une application de  $S^*$  dans  $X^*$ , encore notée  $\varphi$ , tels que, pour tout  $f \in X^*$ , on ait :

$$\pi f = \sum \{ M g \mid \varphi g = f \}.$$

Comme  $\tilde{M}$  est posi-rationnelle dans  $\mathbf{R} \langle\langle S \rangle\rangle$ , il en est de même de  $\tilde{\pi}$ . Tout processus induit par une chaîne de Markov finie est donc rationnel. Le résultat suivant, qui caractérise ces processus, est inspiré de Heller [13] [14].

**THÉORÈME 5.4.** — *Un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est induit par une chaîne de Markov finie si et seulement si la série formelle associée est posi-rationnelle dans  $\mathbf{R} \langle\langle X \rangle\rangle$ .*

*Preuve.* — La nécessité venant d'être constatée, montrons la suffisance. Soit  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  un processus auquel est associée la série  $\tilde{\pi} \in \mathbf{R}_+ \langle (X) \rangle$ , définie par  $\rho : X^* \rightarrow \mathbf{R}_+^{N \times N}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}_+^{1 \times N}$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}_+^{N \times 1}$ . Posons  $Z = X \times \{1, \dots, N\}$ . Construisons un  $\mathbf{R} \langle Z \rangle$ -module sériel droit (cf. § II)  $(V, v_0, \mathcal{H})$ , où :

—  $V$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel ayant une base indexée par  $Z$ , dont les éléments sont notés  $[x, i]$ . On dote  $V$  d'une structure de  $\mathbf{R} \langle Z \rangle$ -module droit de la manière suivante :

$$[x', i](x, j) = (\rho x)_{i,j} [x, i].$$

$$— v_0 = \frac{1}{\text{card } X} \sum \{ \lambda_i [x, i] \mid x \in X, i = 1, \dots, N \}.$$

—  $\mathcal{H} : V \rightarrow \mathbf{R}$  est une application  $\mathbf{R}$ -linéaire définie par :

$$\mathcal{H}[x, i] = \gamma_i.$$

L'application  $M : Z^* \rightarrow [0, 1]$  définie, pour tout  $g \in Z^*$ , par  $Mg = \mathcal{H}(v_0 g)$ , est un processus stochastique qui, en vertu de la proposition 5.3, est une chaîne de Markov.  $\pi$  est induit par  $M$  via la fonction  $\varphi : Z \rightarrow X$  telle que  $\varphi(x, i) = x$ . ■

**COROLLAIRE 1.** — *Pour qu'un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  soit induit par une chaîne de Markov finie, il faut et il suffit qu'il existe un entier  $N \geq 1$ , une représentation  $\rho : X^* \rightarrow \mathbf{R}_+^{N \times N}$ , des matrices ligne  $\lambda \in \mathbf{R}_+^{1 \times N}$  et colonne  $\gamma \in \mathbf{R}_+^{N \times 1}$  tels que, pour tout  $f \in X^*$ , on ait :*

$$\pi f = \lambda \rho f \gamma .$$

**COROLLAIRE 2** (cf. Heller [13] [14]). — *Pour qu'un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  soit induit par une chaîne de Markov finie, il faut et il suffit que les lignes ou les colonnes de la matrice de Hankel soient contenues dans un cône convexe positif polyédral stable.*

*Remarques.* — (i) Le théorème 5.4 est à rapprocher d'un résultat classique dû à Medvedev, sur les langages rationnels (cf. Eilenberg [6]) et de sa généralisation aux séries (cf. [11]). Sa démonstration est, d'ailleurs, identique. Rappelons l'énoncé du théorème de Medvedev. Un langage rationnel sur l'alphabet  $Y$  est dit *local* ou *standard* s'il est de la forme  $IY^*F \setminus Y^*TY^*$  où  $I, F \subseteq Y, T \subseteq Y^2$ . Un homomorphisme  $\varphi : Y^* \rightarrow X^*$  est dit *strictement alphabétique* ssi  $\varphi Y \subseteq X$ .

**THÉORÈME 5.5** (dû à Medvedev). — *Pour qu'un langage  $K \subseteq X^*$  soit rationnel, il faut et il suffit qu'il existe un alphabet fini non vide  $Y$ , un homomorphisme strictement alphabétique  $\varphi : Y^* \rightarrow X^*$ , un langage rationnel local  $S \subseteq Y^*$  tels que  $K = \varphi S$ .*

(ii) Kingman [18] suggère quelques généralisations des méthodes de Heller.

### e) Processus rationnels échangeables.

Soient  $X^+$  le monoïde commutatif libre engendré par  $X$  et  $\alpha : X^* \rightarrow X^+$  l'épimorphisme canonique. Pour tout  $f \in X^*$ ,  $\alpha f$  est l'image commutative de  $f$ . Une série  $s \in A \langle\langle X \rangle\rangle$  est dite *échangeable* ssi deux mots ayant même image commutative ont même coefficient. Ces séries ont été étudiées en [9] [10].

Un processus stochastique  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est dit *échangeable* ssi la série associée  $\tilde{\pi}$  l'est, c'est-à-dire si :

$$\forall_{X^*} f, f' : \alpha f = \alpha f' \Rightarrow \pi f = \pi f' .$$

La proposition suivante a été démontrée par Dharmadhikari [5] selon une méthode différente.

**PROPOSITION 5.5.** — *Tout processus stochastique échangeable rationnel  $\pi : X^* \rightarrow [0, 1]$  est induit par une chaîne de Markov finie et est simpliciel<sup>(12)</sup>.*

<sup>(12)</sup> Un processus induit par une chaîne de Markov finie est dit simpliciel ssi la série associée l'est (cf. § III).

*Preuve.* — D'après un résultat dû à de Finetti [8], tout processus échangeable est somme pondérée, finie ou non, de processus où les variables aléatoires sont indépendantes et distribuées identiquement, c'est-à-dire de processus auxquels sont associées des séries de la forme :

$$\left(1 - \sum_{x \in X} a_x x\right)^{-1} \quad \left(\alpha_x \geq 0, \sum_{x \in X} \alpha_x = 1\right).$$

Le rang du processus  $\pi$  considéré étant fini, il en est nécessairement de même de la somme. Comme chaque processus élémentaire est de rang un, il est simpliciel, ainsi donc que  $\pi$ . ■

*Remarque.* — Pour d'autres considérations sur les processus échangeables, voir Tackacs [23].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BERSTEL, Sur les pôles et le quotient de Hadamard de séries N-rationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 272, série A, 1971, p. 1079-1081.
- [2] M. N. BLEICHER et H. SCHNEIDER, The decomposition of cones in modules over ordered rings. *J. Algebra*, t. 1, 1964, p. 233-258.
- [3] P. CARTIER, Fonctions harmoniques sur un arbre, *Symposia Mathematica* (Istituto Nazionale di Alta Matematica, éd.), Vol. IX, p. 203-270. London, Academic Press, 1972. Voir aussi : Séminaire Bourbaki, exposé 407. Berlin, Springer-Verlag, 1973. *Lect. Notes Math.*, n° 317, p. 123-140.
- [4] V. CLAUS, *Stochastische Automaten*. Stuttgart, Teubner, 1971.
- [5] S. W. DHARMADHIKARI, A note on exchangeable processes with states of finite rank. *Ann. Math. Statistics*, t. 40, 1969, p. 2207-2208.
- [6] S. EILENBERG, *Automata, languages and machines*, vol. A. New York, Academic Press, 1974.
- [7] S. EILENBERG et M. P. SCHÜTZENBERGER, Rational sets in commutative monoids. *J. Algebra*, t. 13, 1969, p. 173-191.
- [8] B. DE FINETTI, La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 7, 1937, p. 1-68. Traduction anglaise : Foresight: its logical laws, its subjective sources, in *Studies in subjective probability* (H. E. Kyburg et H. E. Smokler, éd.), p. 93-158. New York, Wiley, 1964.
- [9] M. FLIESS, Sur certaines familles de séries formelles. *Thèse Sc. Math.*, Université Paris VII, Paris, 1972.
- [10] M. FLIESS, Matrices de Hankel. *J. Math. Pures Appl.*, t. 53, 1974, p. 197-222 (erratum à paraître).
- [11] M. FLIESS, Transductions de séries formelles. *Discrete Math.*, t. 10, 1974, p. 57-74.
- [12] F. R. GANTMACHER, *Théorie des matrices* (traduit du russe), t. 2. Paris, Dunod, 1966.
- [13] A. HELLER, On stochastic processes derived from Markov chains. *Ann. Math. Statistics*, t. 36, 1965, p. 1286-1291.
- [14] A. HELLER, Probabilistic automata and stochastic transformations. *Math. Systems Theory*, t. 1, 1967, p. 197-208.
- [15] P. W. HOLLAND, Some properties of an algebraic representation of stochastic processes. *Ann. Math. Statistics*, t. 39, 1968, p. 164-170.
- [16] G. JACOB, *Thèse Sc. Math.*, Université Paris VII, Paris, 1975.

- [17] J. G. KEMENY, J. L. SNELL et A. W. KNAPP, *Denumerable Markov chains*. Princeton, N. J., Van Nostrand, 1966.
- [18] J. F. C. KINGMAN, Some algebraic results in the theory of stochastic processes with a discrete time parameter, in *Stochastic analysis* (D. G. Kendall et E. F. Harding, éd.), p. 315-330. London and New York, Wiley, 1973.
- [19] A. PAZ, *Introduction to probabilistic automata*, New York, Academic Press, 1971.
- [20] A. PAZ et A. SALOMAA, Integral sequential word functions and growth equivalence of Lindemayer systems. *Information and Control*, t. 23, 1973, p. 313-343.
- [21] J. B. ROBERTSON, The mixing properties of certain processes related to Markov chains. *Math. Systems Theory*, t. 7, 1973, p. 39-43.
- [22] M. P. SCHÜTZENBERGER, On probabilistic push-down storages, in *Self-organizing syst. proc. conf. Chicago*, p. 205-213. Washington, Spartan Books, 1962.
- [23] L. TAKACS, *Combinatorial methods in the theory of stochastic processes*. New York, Wiley, 1967.
- [24] R. D. TRAUB, An ergodic source which is not function of any finite Markov process. *J. Res. Nat. Bur. Stand., Sect. B*, t. 75, 1971, p. 133-140.

(Manuscrit reçu le 2 décembre 1974)

---