ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. B. GRAVEREAUX

J. PELLAUMAIL

Formule de Ito pour des processus non continus à valeurs dans des espaces de Banach

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 4 (1974), p. 399-422

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_399_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 4, 1974, p. 399-422.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Formule de Ito pour des processus non continus à valeurs dans des espaces de Banach

par

J. B. GRAVEREAUX et J. PELLAUMAIL
Laboratoire de Probabilités, Rennes, ERA 250

RÉSUMÉ. — On prouve la formule de Ito pour un processus non continu à valeurs dans un espace de Banach E et de variation quadratique finie en moyenne et pour une fonction également à valeurs dans un espace de Banach G. Dans le cas où E est un espace de Hilbert et où $G = \mathbb{R}$, les hypothèses sont plus générales que celles utilisées en [*3*].

SUMMARY. — An Ito-formula is proved for a non continuous Banach valued process with has a mean finite quadratic variation and for a Banach valued function. Even for Hilbert space, the hypotheses are more general than those of [*3*].

INTRODUCTION

Dans [*2*] et [*4*], une « formule de Ito » est prouvée pour un processus réel non nécessairement à trajectoires continues. Dans [*3*], une formule de Ito est prouvée pour un processus non continu à valeurs dans un espace de Hilbert, la fonction considérée étant à valeurs réelles. Dans [*6*] une « formule de Ito » est prouvée pour un processus continu à valeurs hilbertiennes. Nous donnons ici une démonstration de cette formule pour un processus X à valeurs dans un espace de Banach E et pour une fonction f également à valeurs dans un espace de Banach G. Si E et G sont des espaces de Hilbert et si X est une martingale de carré intégrable, cette formule est prouvée sous la seule condition que la différentielle seconde f'' de f

soit uniformément continue sur les parties bornées de E. Si E est un espace de Banach quelconque, si G est un dual d'espace de Banach séparable et si le processus X étudié admet une variation quadratique finie en moyenne, on prouve une formule de Ito « faible » (cf. théorème D-3-2°) si la différentielle f'' est faiblement uniformément continue sur les parties bornées de E.

Il est à noter qu'on obtient ainsi une formule de Ito dans un cadre non hilbertien contrairement à ce qu'aurait pu laisser supposer [*9*].

Même dans le cas où E est un espace de Hilbert et où $G = \mathbb{R}$, la formule de Ito est prouvée sous des hypothèses plus générales que celles de [*3*] (cf. contre-exemple E-1).

La démonstration proposée est totalement différente de celle utilisée en [*2*] : elle est, pour une part, assez voisine de celle adoptée en [*3*] et [*4*] et généralise celle utilisée en [*7*].

Au paragraphe A, on donne les données et conventions valables pour toute la suite. Au paragraphe B, on donne une définition de l'intégrale stochastique à la fois très élémentaire et très générale et qui suffit pour prouver la formule de Ito. Au paragraphe C, on établit quelques lemmes préliminaires relatifs à un processus dont la variation quadratique est « localement finie en moyenne ». Au paragraphe D, on donne le théorème fondamental sur la formule de Ito et on considère le cas particulier où l'on a des espaces de Hilbert et une martingale de carré intégrable. Au paragraphe E, on donne quelques contre-exemples en liaison avec ce qui précède.

A. DONNÉES ET CONVENTIONS GÉNÉRALES

A-1. Pour toute cette étude, ON SE DONNE

— *un ensemble des temps* $T = [0, 1]$,

— *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$,

— *une famille croissante* $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ *de sous-tribus de* $\mathscr{F}$ *contenant toutes tous les ensembles de mesure nulle de* $\mathscr{F}$,

— *trois espaces de Banach* E, F *et* G *et une application bilinéaire continue de* $F \times E$ *dans* G *qui à* (y, x) *élément de* $F \times E$ *associe* $y.x$ *élément de* G *(en général, on aura* $F = \mathscr{L}(E, G)$*)*.

A-2. PAR CONVENTION

— si V est la partie vide de T, on pose $\inf\{ t : t \in V \} = 1$,

— quand on parlera de processus adapté, prévisible, de temps d'arrêt, etc., ce sera toujours par rapport à la base de processus $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\in T})$,

— pour tous les espaces de Banach considérés, la norme sera notée $\|\,.\,\|$,
— on notera $x^{\otimes 2}$ l'élément $x \otimes x$ de $E \otimes E$,
— $E\otimes E$ sera toujours muni d'une norme telle que $\| x\otimes y \| \leq \| x \| . \| y \|$,
— si f est une fonction deux fois différentiable de E dans F, on notera f' la différentielle première et f'' la différentielle seconde de f : cette différentielle seconde sera considérée comme une application linéaire définie sur $E \otimes E$; si u est un élément de E et v un élément de $E \otimes E$, on notera $f''(u)(v)$ la valeur dans F de la différentielle seconde f'' en u appliquée au vecteur v,
— on notera $L_0^E(\Omega, \mathscr{F}, P)$ l'espace des variables aléatoires $\mathscr{F}$-mesurables, à valeurs dans E, muni de la convergence en probabilité.

B. INTÉGRALE STOCHASTIQUE

B-1. Introduction

On va maintenant donner une définition de l'intégrale stochastique à la fois très élémentaire et très générale et qui nous suffira pour prouver la formule de Ito.

B-2. Définition de $\mathscr{A}$

On désignera par $\mathscr{A}$ l'algèbre de parties de $\Omega \times T$ engendrée par les « intervalles stochastiques » $]\sigma, \sigma']$ où σ et σ' sont deux temps d'arrêt tels que $\sigma < \sigma'$.

B-3. Définition de $\int Y dX$ pour Y $\mathscr{A}$-étagé

Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus fortement cadlag (c'est-à-dire continu à droite et admettant des limites à gauche). Soit x la fonction simplement additive à valeurs dans $L_0^E(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et définie sur $\mathscr{A}$ par $x(]\sigma, \sigma']) = X_{\sigma'} - X_\sigma$ pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt tels que $\sigma < \sigma'$ (on vérifie facilement que ceci définit bien une telle fonction). Soit Y un processus $\mathscr{A}$-étagé, c'est-à-dire que $Y = \sum_{i\in I} a_i . 1_{A(i)}$ avec, pour tout élément i de I, $A(i)$ élément de $\mathscr{A}$ et a_i élément de F. On peut alors poser

$$\int Y dX = \int Y dx = \sum_{i\in I} a_i . x(A_i)$$

(vérification immédiate).

B-4. DÉFINITION DE $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ ET $\mathcal{S}_3$

On dira que X appartient à $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$), si les conditions suivantes sont réalisées :

(i) X est à valeurs dans E et fortement cadlag,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a(\varepsilon) \geqslant 0$ tel que, pour tout processus Y$\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans F (resp. dans E, dans $\mathcal{L}$(E, R)) uniformément borné par 1,

$$P\left[\left\|\int Y dX\right\| \geqslant a(\varepsilon)\right] \leqslant \varepsilon$$

$$\left(\text{resp. } P\left[\left\|\int [Y \otimes dX + dX \otimes Y]\right\| \geqslant a(\varepsilon)\right] \leqslant \varepsilon,\right.$$

$$\left. P\left[\left|\int Y dX\right| \geqslant a(\varepsilon)\right] \leqslant \varepsilon\right)$$

La définition de $\mathcal{S}_2$ dépend donc de la norme que l'on a choisie sur E$\otimes$E.

Dans ce qui suit, on ne considère que le cas où X appartient à $\mathcal{S}_1$ mais on aurait évidemment des résultats analogues pour X élément de $\mathcal{S}_2$ ou de $\mathcal{S}_3$.

B-5. LEMME

Soit Y *un processus à valeurs dans* F *fortement cadlag (c'est-à-dire continu à gauche et admettant des limites à droite). Alors il existe une suite croissante* $(\sigma(n))_{n>0}$ *de temps d'arrêt telle que :*

(i) $\lim_{n\to\infty} P[\sigma(n) < 1] = 0$,

(ii) *pour tout* n, $t \leqslant \sigma(n)(\omega)$ *implique* $\| Y_t(\omega) \| \leqslant n$.

Preuve. — Il suffit de considérer la suite de temps d'arrêt définie par :

$$\sigma(n) = \inf. \{ t : \| Y_t \| > n \}.$$

B-6. LEMME

Soit Y *un processus à valeurs dans* F *fortement cadlag. Alors* Y *est limite uniforme (sur* $\Omega \times T$*) d'une suite de processus* $(Y_n)_{n>0}$ *tels que (pour tout n) quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un processus* $\mathcal{A}$*-étagé* Y_n^ε *tel que*

$$P\,[\operatorname{Sup}_t . \| Y_n - Y_n^\varepsilon \| \geqslant \varepsilon] \leqslant \varepsilon$$

Preuve. — Pour tout n, on pose $\sigma(n, 0) = 0$ et, pour tout k,

$$\sigma(n, k+1)(\omega) = \inf . \left\{ t : t > \sigma(n, k)(\omega), \| X_t(\omega) - X_{\sigma(n,k)}(\omega) \| > \frac{1}{n} \right\}$$

et $H(n, k) = Y_{\sigma(n,k)}$. Ensuite, soit :

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} H(n, k) . 1_{]\sigma(n,k),\sigma(n,k+1)]}$$

Enfin, il suffit d'utiliser le fait que, pour tout n, k et $\varepsilon' > 0$, il existe une variable aléatoire $H(n, k, \varepsilon')\mathscr{F}_{\sigma(n,k)}$-étagée telle que

$$P[\| H(n, k, \varepsilon') - H(n, k) \| \geqslant \varepsilon'] \leqslant \varepsilon'.$$

B-7. DÉFINITION DE L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE (PROPOSITION)

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des processus Y à valeurs dans F fortement cadlag. Il existe une application bilinéaire unique, définie sur $\mathscr{I} \times \mathscr{S}_1$, à valeurs dans $L_0^E(\Omega, \mathscr{F}, P)$, qui à (Y, X) associe $\int Y dX$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

(*i*) en restriction aux processus $\mathscr{A}$-étagés, cette application coïncide avec celle définie en B-3 ;

(*ii*) si (Y, X) appartient à $(\mathscr{I} \times \mathscr{S}_1)$, il existe un processus cadlag $Z = (Z_t)_{t \in t}$, unique à l'indistinguabilité près, tel que, pour tout t,

$$Z_t = \int_{]0,t]} Y . dX = \int 1_{]0,t]} . Y . dX.$$

(*iii*) soit $K > 0$; soit $(Y^n)_{n>0}$ une suite de processus fortement cadlag qui converge uniformément vers un processus Y et telle que, pour tout t, ω et n, $\| Y_t^n(\omega) \| \leqslant K$; soit Z (resp. Z^n) le processus cadlag défini par $Z_t = \int_{]0,t]} Y . dX \left(\text{resp. } Z_t^n = \int_{]0,t]} Y^n . dX \right)$. Alors, pour tout t, $(Z_t^n)_{n>0}$ converge en probabilité vers Z_t. De plus, il existe une application croissante g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (une « sous-suite ») telle que la suite de processus $(Z^{g(n)})_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers le processus Z.

Preuve. — Compte-tenu de B-5, il suffit d'étudier le cas où Y est uniformément borné. Si Y est $\mathscr{A}$-étagé, l'existence de Z est évidente. Il en est de même si Y est un processus Y_n du type indiqué au lemme B-6. Prouvons d'abord la propriété (*iii*) pour une suite $(Y^n)_{n>0}$ de processus $\mathscr{A}$-étagés (convergeant uniformément vers Y quelconque). Pour tout $n > 0$, soit $d(n) > 0$ tel que, pour tout processus $V\mathscr{A}$-étagé à valeurs dans F et borné par 1, on ait $P\left[\left\| \int V dX \right\| \geqslant d(n) \right] \leqslant 2^{-n}$ (cf. B-4) ; puis, soit $g(n)$ tel que, pour $k \geqslant g(n)$,

$$\operatorname*{Sup}_{t,\omega} . \| Y_t(\omega) - Y_t^k(\omega) \| \leqslant \frac{1}{2} . 2^{-n} \frac{1}{d(n)}$$

Pour tout k, soit $\sigma(k)$ le temps d'arrêt défini par :

$$\sigma(k) = \inf \{ t : \| Z_t^{g(k)} - Z_t^{g(k+1)} \| \geqslant 2^{-k} \}$$

on a

$$Z_{\sigma(k)}^{g(k)} - Z_{\sigma(k)}^{g(k+1)} = \int_{\Omega \times T} [Y^{g(k)} - Y^{g(k+1)}] . 1_{]0,\sigma(k)]} . dX$$

donc $P[\| Z_{\sigma(k)}^{g(k)} - Z_{\sigma(k)}^{g(k+1)} \| \geqslant 2^{-k}] \leqslant 2^{-k}$.

Autrement dit,

$$P\left[\sup_{t \in T} Z_t^{g(k)} - Z_t^{g(k+1)} \| \geqslant 2^{-k}\right] \leqslant 2^{-k}$$

On déduit de ceci et du lemme de Borel-Cantelli que la suite de processus $(Z_t^{g(n)})_{n>0}$ est, sauf sur un ensemble de mesure nulle, uniformément de Cauchy par trajectoires. Soit (Z_t) le processus limite, défini à l'indistinguabilité près. Ce processus est cadlag. De plus, ce processus est tel que, pour tout temps d'arrêt σ :

$$Z_\sigma = \lim_{n \to \infty} \int_{]0,\sigma]} Y^{g(n)} . dX = \int_{]0,\sigma]} Y dX.$$

On déduit de ce qui précède et du lemme B-6 les propriétés (*i*) et (*ii*) dans le cas général. Enfin, la propriété (*iii*) se prouve dans le cas général en reprenant le raisonnement qui précède.

B-8. Lemme

Soit X *un processus appartenant à* $\mathscr{S}_1$. *Soit* Y *un processus à valeurs dans* F, *fortement caglad. Soit* Z *le processus cadlag défini par*

$$Z_t = \int_{]0,t]} Y . dX.$$

Pour tout temps d'arrêt σ *on a :*

$$Z_\sigma - Z_{\sigma^-} = Y_\sigma . (X_\sigma - X_{\sigma^-})$$

Preuve. — Il suffit de considérer le cas où Y est uniformément borné. La propriété indiquée se vérifie immédiatement pour les processus Y$\mathscr{A}$-étagés. Ensuite, on considère le cas où Y est limite uniforme d'une suite $(Y_n)_{n>0}$ de processus $\mathscr{A}$-étagés; d'après la condition (*iii*) du paragraphe qui précède, on peut trouver une sous-suite $(Y_{g(n)})_{n>0}$ telle que la sous-suite associée $(Z_{g(n)})_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers Z ; on en déduit la propriété annoncée par passage à la limite, compte tenu du lemme B-6.

B-9. REMARQUES

a) Dans ce qui précède, on n'a pas supposé que l'application $A \rightsquigarrow \int_A dX$ est σ-additive, ni, *a fortiori*, qu'elle admet un prolongement σ-additif à la tribu des prévisibles ; pour une étude dans ce cas, cf., par exemple, [*5*] ou [*8*].

b) Soit X un processus à valeurs dans E fortement cadlag ; alors X appartient à $\mathscr{S}_1$ si X est tel que la « semi-variation » de la « mesure stochastique » (cf. [*8*]) associée est finie, c'est-à-dire si :

$$\text{Sup. } E\left(\left\| \int YdX \right\|\right) < +\infty$$

cette borne supérieure étant prise pour tous les processus Y, $\mathscr{A}$-étagés, à valeurs dans F et uniformément bornés par 1.

c) Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to\infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$ et X un processus tel que, pour tout n, $(X_{t\wedge\sigma(n)})_{t\in T}$ soit un processus qui appartienne à $\mathscr{S}_1$; alors X appartient à $\mathscr{S}_1$.

C. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES SUR LA VARIATION QUADRATIQUE

C-1. DÉFINITION

Soit X un processus à valeurs dans E. On dira que X admet localement une variation quadratique finie en moyenne s'il existe une suite croissante $(\sigma(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt satisfaisant aux conditions suivantes :

(*i*) $\lim_{n\to\infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$,

(*ii*) pour tout $n > 0$, si X^n désigne le processus arrêté à $\sigma(n)$, on a, pour toute famille finie croissante $(\sigma'(k))_{1\leq k\leq j}$ de temps d'arrêt,

$$\sum_{k=1}^{j-1} E(\| X^n_{\sigma'(k+1)} - X^n_{\sigma'(k)} \|^2) \leq n$$

C-2. LEMME

L'ensemble des processus à valeurs dans E *qui admettent localement une variation quadratique finie en moyenne constitue un espace vectoriel.*

Preuve. — Compte tenu de la définition qui précède, il suffit de noter que, pour deux variables aléatoires f et g à valeurs dans E, on a

$$E(\| f + g \|^2) \leq 2[E(\| f \|^2) + E(\| g \|^2)]$$

C-3. Lemme

Soit X *un processus cadlag à valeurs dans* E *admettant localement une variation quadratique finie en moyenne ; pour P-presque toute trajectoire la famille* $\{ \| X_t - X_{t^-} \|^2 \}_{t \in T}$ *est sommable donc on peut définir, par trajectoires, un processus* U *continu à droite (à variation bornée par trajectoires) en posant :*

$$U(t) = \sum_{s \leqslant t} (X_s - X_{s^-})^{\otimes 2}$$

Par ailleurs, soit X *un processus cadlag à valeurs dans* E *tel que, pour presque toute trajectoire, la famille* $\{ \| X_t - X_{t^-} \|^2 \}_{t \in T}$ *est sommable ; soit* f *une fonction définie sur* E, *à valeurs dans* F, *deux fois continûment différentiable et dont la différentielle seconde est bornée sur les parties bornées de* E *; alors, pour P-presque toute trajectoire* ω, *la famille*

$$\{ \| f(X_t) - f(X_{t^-}) - f'(X_{t^-})(X_t - X_{t^-}) \| \}_{t \in T}$$

est sommable donc on peut définir, par trajectoires, un processus $Q(t)$ *continu à droite à variation forte bornée, par trajectoires, en posant :*

$$Q(t) = \sum_{s \leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})(X_s - X_{s^-})]$$

Enfin, les processus U *et* Q *sont adaptés aux tribus* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Preuve. — Par localisation, on peut se ramener au cas où X est borné par a et où la variation quadratique de X est bornée, en moyenne, par b, ce que nous supposons désormais. Pour tout n, soit

$$H_n = \sum_{k=0}^{2^n - 1} \| X_{(k+1).2^{-n}} - X_{k.2^{-n}} \|^2$$

Par hypothèse, $E(H_n) \leqslant b$.

Soit $H = \lim\limits_{n \to \infty} \inf. H_n$. On a $\sum\limits_{t \in T} \| X_t - X_{t^-} \|^2 \leqslant H$ ce qui prouve la première partie du lemme, la continuité à droite de U étant évidente.

De plus, d'après la formule de Taylor, pour tout t et tout ω, on a :

$$\begin{aligned} &f(X_t) - f(X_{t^-}) - f'(X_{t^-}).(X_t - X_{t^-}) \\ &\qquad = \left\{ \int_0^1 \frac{1-u}{2} f''[X_{t^-} + u(X_t - X_{t^-})]du \right\} (X_t - X_{t^-})^{\otimes 2} \end{aligned}$$

Puisque f'' est bornée sur le domaine $\|x\| \leqslant a$, il existe une constante c telle que $\|x\| \leqslant a$ implique $\|f''(x)\| \leqslant c$; les membres de l'égalité ci-dessus sont donc majorés en norme par $\frac{1}{2} c . \|X_t - X_{t^-}\|^2$ d'où la deuxième partie du lemme.

Il reste à prouver que U et Q sont adaptés. Nous ferons la démonstration pour U, celle pour Q étant analogue. Comme précédemment, on se ramène au cas où X est borné et admet une variation quadratique bornée en moyenne. Pour tout $n > 0$, soit $(\sigma(n, k))_{k>0}$ la suite croissante suivante :

$$\sigma(n, 1) = 0$$

$$\sigma(n, k+1) = \inf.\left\{ s : s \leqslant t,\, s \geqslant \sigma(n, k),\, \|X_s - X_{\sigma(n,k)}\| > \frac{1}{n} \right\}$$

(si l'ensemble ci-dessus est vide, on pose $\sigma(n, k+1) = t$). Puisque le processus X est cadlag, pour tout n, $\lim\limits_{k\to\infty} P[\sigma(n, k) < 1] = 0$.

Pour tout n, soit Z_n la variable aléatoire définie par

$$Z_n = \sum_{k>0} (X_{\sigma(n,k)} - X_{\sigma(n,k)^-})^{\otimes 2}$$

variable aléatoire bien définie d'après ce qui précède.

De plus, ce qui précède montre que la suite $(Z_n)_{n>0}$ converge P. p. s. vers une variable aléatoire Z (telle que $\|Z\| \leqslant H$) ; ceci montre que Z est un élément de $L_0^{E\otimes E}(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$. Or $Z = U(t)$ P. p. s. donc U est un processus adapté. Notons aussi que U est défini à l'indistinguabilité près puisque continu à droite.

C-4. Proposition et définition

Soit X un processus à valeurs dans l'espace de Banach E. Soit h une application bilinéaire continue de E dans l'espace de Banach G. On pose $\hat{h}(u) = h(u, u)$.

On suppose que X appartient à $\mathscr{S}_1$ avec $F = \mathscr{L}(E, G)$. On peut alors considérer le processus V^h défini, à l'indistinguabilité près, par :

$$V_t^h = h(X_t, X_t) - h(X_0, X_0) - \int_{]0,t]} [h(X_{u^-}, dX_u) + h(dX_u, X_{u^-})]$$

l'intégrale $\int_{]0,t]} h(X_{u^-}, dX_u)$ étant définie comme l'intégrale stochastique, par rapport au processus X, du processus $h(X_{u^-}, .)$, processus continu à gauche, localement borné et à valeurs dans $F = \mathscr{L}(E, G)$. On notera $\langle h(X_t, X_t) \rangle$ ce processus V_t^h. Soit $(X^n)_{n>0}$ une suite de processus qui approche uniformément le processus X comme indiqué au lemme B-6 avec

$$X^n = \sum_{k>0} X_{\sigma(n,k)} \cdot 1_{]\sigma(n,k),\sigma(n,k+1)]}$$

Soit $(V^n)_{n>0}$ la suite de processus définie par

$$V^n = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{h}(X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})$$

sur l'intervalle $]\sigma(n, k), \sigma(n, k + 1)]$. Alors, la suite $(V^n)_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers le processus V^h.

On suppose, de plus, que X admet une variation quadratique finie en moyenne. Le processus (V^h) est alors à variation forte bornée en moyenne ; si la norme de h est inférieure à 1, l'espérance de cette variation totale est bornée par l'espérance de la variation quadratique de X. De plus, soit U^h le processus défini par :

$$U_t^h = \sum_{s \leqslant t} \hat{h}(X_s - X_{s^-}).$$

Le processus $S^h = V^h - U^h$ est alors à trajectoires continues (et admet une variation forte bornée en moyenne). Les processus V^h, U^h et S^h sont cadlag et adaptés. On notera $\langle h(X, X) \rangle^c$ le processus S^h.

Preuve. — La preuve est tout à fait analogue à celle indiquée aux paragraphes *e*), *f*) et *m*) de la preuve du théorème D-1 ci-après.

C-5. PROPOSITION

Soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus à valeurs dans un espace de Banach et dont la variation quadratique est finie en moyenne. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des partitions finies de $\Omega \times T$ constituées d'intervalles stochastiques $]\sigma, \sigma']$.

Pour tout élément p de $\mathscr{P}$ et tout élément A de $\mathscr{A}$, soit $a_p(A)$ la borne supérieure de l'espérance de la variation quadratique de X quand on se restreint à A et aux partitions plus fines que p. Soit $a(A) = \inf_{p\in\mathscr{P}} a_p(A)$. La fonction $a(.)$ est alors une fonction positive définie et σ-additive sur $\mathscr{A}$. On peut lui associer un processus croissant « naturel » A qu'on appellera processus naturel associé à la variation quadratique de X.

Preuve. — Pour tout élément p de $\mathscr{P}$, la fonction $a_p(.)$ satisfait à la condition suivante :

$$A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{A},\ A\cap B = \varnothing \quad \text{implique} \quad a_p(A\cup B) \geqslant a_p(A) + a_p(B)$$

et il y a égalité si p est plus fine que la partition $\{ A, B \}$. De plus, si p est plus fine que p', $a_p(.) \leqslant a_{p'}(.)$.

Soit $\alpha = \inf_{p \in \mathscr{P}} a_p(\Omega \times T)$; soit $(p(n))_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}$, suite de partitions de plus en plus fines, telle que $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{p(n)}(\Omega \times T)$. Soit, pour tout élément A de $\mathscr{A}$:

$$a(A) = \lim_{n\to\infty} a_{p(n)}(A).$$

On a aussi :

$$a(A) = \inf_{p\in\mathscr{P}} a_p(A).$$

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$ et, pour tout n, la partition $p'(n)$ plus fine que $p(n)$ et que la partition $\{ A, B \}$. On a $a(.) = \lim_{n\to\infty} a_{p'(n)}(.)$ donc $a(A \cup B) = a(A) + a(B)$ (par passage à la limite). Il est clair que a ne charge pas les processus évanescents. Il reste à prouver que a satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme I-D-2, p. 20 de [8] ; il suffit de prouver ces propriétés pour l'une des fonctions $a_{p'}$ par exemple celle qui correspond à la partition triviale $\{ \emptyset, \Omega \times T \}$ et qu'on notera $\bar{a}$.

Prouvons d'abord la condition (i) par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $s \in T$ tel que $\lim_{t\downarrow s} . \bar{a}(\Omega \times]s, t]) = \varepsilon > 0$. Soit $u > s$ tel que $\bar{a}(\Omega \times]s, u]) \leqslant \frac{4}{3}\varepsilon$; on a aussi $\bar{a}(\Omega \times]s, u]) \geqslant \varepsilon$ ce qui implique qu'il existe une famille finie croissante $(\sigma(i))_{1\leqslant i\leqslant k}$ de temps d'arrêt compris entre s et u telle que

$$E\left[\sum_{i=1}^{k-1} \| X_{\sigma(i+1)} - X_{\sigma(i)} \|^2\right] \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon \text{①};$$

il existe alors v avec $s < v < u$ tel que, si X^v désigne le processus arrêté à v, on ait :

$$E\left[\sum_{i=1}^{k=1} \| X^v_{\sigma(i+1)} - X^v_{\sigma(i)} \|^2\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

ceci et ① impliquent $\bar{a}(]v, u]) \geqslant \varepsilon/2$; or $\bar{a}(]s, v]) \geqslant \varepsilon$ donc $\bar{a}(]s, u]) \geqslant \frac{3}{2}\varepsilon$ d'où la contradiction.

Prouvons maintenant la condition (ii). On raisonne également par l'absurde. On suppose donc qu'il existe une suite $(\sigma(n))_{n>0}$ croissante de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to\infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$ et telle que

$$\lim_{n\to\infty} . [\bar{a}(]\sigma(n), 1])] = \varepsilon > 0.$$

On construit une application croissante f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (une « sous suite ») par récurrence de la façon suivante : $f(1) = 1$, puis, $f(n)$ étant déterminé, puisque $\bar{a}(]\sigma(f(n)), 1]) \geqslant \varepsilon$ il existe une famille finie croissante $(\sigma'(i))_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de temps d'arrêt compris entre $\sigma(f(n))$ et 1 telle que

$$E\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \| X_{\sigma'(i+1)} - X_{\sigma'(i)} \|^2\right\} \geqslant \frac{2\varepsilon}{3}$$

puisque $\lim_{n\to\infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$, il existe $f(n+1) > f(n)$ tel que, si $\bar{X}$ désigne le processus X arrêté à $\sigma(f(n+1))$, on ait :

$$E\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \| \bar{X}_{\sigma'(i+1)} - \bar{X}_{\sigma'(i)} \|^2\right\} \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui implique $\bar{a}(]\sigma(f(n)), \sigma(f(n+1))]) \geqslant \varepsilon/3$. Mais ceci implique $\bar{a}(]0, \sigma(f(n))]) \geqslant n\varepsilon/3$ ce qui contredit le fait que $\bar{a}$ est bornée.

L'existence du processus A est classique (cf. [*1*]).

D. FORMULE DE ITO

D-1. Théorème

1) *On considère les données indiquées en* A *avec* $F = \mathscr{L}(E, G)$. *De plus, soit* X *un processus qui appartient à* $\mathscr{S}_2$ *(cf.* B-4*) et qui admet localement une variation quadratique finie en moyenne (cf.* C-1*). Soit* f *une fonction deux fois différentiable, définie sur* E *et à valeurs dans* G, *dont la différentielle seconde* f'' *est bornée sur les parties bornées de* E.

Soient U, Q, V *et* S *les processus définis par :*

$$U(t) = \sum_{s \leqslant t} (X_s - X_{s^-})^{\otimes 2}$$

$$Q(t) = \sum_{s \leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})(X_s - X_{s^-})]$$

$$V(t) = X_t^{\otimes 2} - X_0^{\otimes 2} - \int_{]0,t]} (X_{u^-} \otimes dX_u + dX_u \otimes X_{u^-})$$

$$S(t) = V(t) - U(t)$$

Alors les processus U, Q, V *et* S *sont des processus à variation forte bornée par trajectoires et* S *est à trajectoires continues : dans ces égalités, les sommations sont définies par trajectoires et l'intégrale*

$$\int_{]0,t]} (X_{u^-} \otimes dX_u + dX_u \otimes X_{u^-})$$

est une intégrale stochastique au sens indiqué en B-7.

Soit A *le processus naturel associé à la variation quadratique de* X *comme indiqué en* C-5. *Soit* B *le processus défini par* $B_t = \sum_{s \leqslant t} \| X_s - X_{s^-} \|^2$. *Pour tout couple de temps d'arrêt* (σ, σ') *avec* $\sigma < \sigma'$ *on a*

$$\| U_{\sigma'} - U_\sigma \| \leqslant \| B_{\sigma'} - B_\sigma \| \quad \text{P-p. s.}$$

et

$$\| S_{\sigma'} - S_\sigma \| \leqslant \| A_{\sigma'} - A_\sigma \| \quad \text{P-p. s.}$$

2) *Sous les hypothèses du* 1), *si* X *appartient à* $\mathcal{S}_1$ (*cf.* B-4) *et si* f'' *est uniformément continue sur les parties bornées de* E, *on a :*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) = Q(t) + \int_{]0,t]} f'(X_{u^-}).dX_u - \frac{1}{2}\sum_{s \leqslant t} f''(X_{s^-})(X_s - X_{s^-})^{\otimes 2} \\ + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_{u^-}).dV_u = Q(t) + \int_{]0,t]} f'(X_{u^-}).dX_u \\ + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_u).dS_u \end{aligned}$$

Dans ces formules :

— *les sommations sont définies par trajectoires,*

— *l'intégrale* $\int_{]0,t]} f'(X_{u^-}).dX_u$ *est une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7,

— *les intégrales* $\int_{]0,t]} f''(X_{u^-}).dV_u$ *et* $\int_{]0,t]} f''(X_{u^-}).dS_u$ *peuvent être déterminées par trajectoires,*

— *l'égalité est une égalité de processus définis à l'indistinguabilité près.*

3) *Sous les hypothèses du* 1), *si* X *appartient à* $\mathcal{S}_3$, *et si* f'' *est faiblement uniformément continue sur les parties bornées de* E, *soit* L(*t*) *le processus cadlag défini, à l'indistinguabilité près, par :*

$$\begin{aligned} L(t) = f(X_t) - f(X_0) - Q(t) \\ - \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_{u^-}).dS_u = f(X_t) - f(X_0) - Q(t) \\ - \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_{u^-})dV_u + \frac{1}{2}\sum_{s \leqslant t} f''(X_{s^-}).(X_s - X_{s^-})^{\otimes 2} \end{aligned}$$

les intégrales et les sommations considérées pouvant être déterminées par trajectoires.

Alors, pour tout élément x' *du dual* G' *de* G, $\langle L(t), x' \rangle$ *est indistinguable* *du processus* $\int_{]0,t]} \langle f'(X_{u^-}), x' \rangle . dX_u$, *ce processus étant lui-même une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7 *avec* $G = \mathbb{R}$ *: dans ce cas, le symbole* $\int_{]0,t]} f'(X_{u^-}).dX_u$ *correspond donc à une intégrale stochastique « faible ».*

Preuve. — Pour alléger la présentation, nous allons prouver simultanément le 1) et le 2) et donc nous placer sous les hypothèses du 2).

a) Les processus U et Q sont bien définis d'après le lemme C-3. Il en est de même de V, et donc de S, puisque X appartient à $\mathcal{S}_2$. De plus, tous ces processus sont continus à droite ; de même, toutes les intégrales considérées définissent des processus continus à droite : il suffit donc de prouver la formule pour $t = 1$.

b) Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ la suite croissante de temps d'arrêt définis par $\sigma(n) = \inf. \{ t : \| X_t \| > n \}$; puisque X est cadlag, $\lim_{n\to\infty} P[\sigma(n) < 1] = 0$. Il suffit donc de prouver la formule annoncée pour chaque processus $(X_{t\wedge\sigma(n)})_{t\in T}$. Compte tenu du lemme B-8, il suffit donc de prouver la formule annoncée pour les processus de la forme

$$X_{t\wedge\sigma(n)^-} = X_t . 1_{[0,\sigma(n)[} + X_{\sigma(n)^-} . 1_{[\sigma(n),1]}$$

c'est-à-dire pour des processus uniformément bornés.

On suppose donc, désormais, que X est uniformément borné par a. De même, on suppose que X admet une variation quadratique finie en moyenne.

c) Soit $b = \operatorname{Sup.}_{\|x\|\leqslant a} \| f''(x) \|$. Puisque X appartient à $\mathcal{S}_1$, pour tout $n>0$, il existe $c(n)$ tel que, pour tout processus Y$\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans la boule unité de F, on ait :

$$P\left[\left\| \int_{]0,1]} Y.dX \right\| \geqslant c(n) \right] \leqslant 2^{-n}$$

De même, puisque X appartient à $\mathcal{S}_2$, pour tout $n > 0$, il existe $e(n)$ tel que, pour tout processus Y$\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans la boule unité de E, on ait :

$$P\left[\left\| \int_{]0,1]} (Y \otimes dX + dX \otimes Y) \right\| \geqslant e(n) \right] \leqslant 2^{-n}$$

Pour tout $n > 0$, soit :

$$d(n) = \inf. \left\{ \frac{2^{-n}}{b.c(n)}, \frac{1}{2n^3}, \frac{2^{-n}}{e(n)} \right\}$$

d) Pour tout $n > 0$, soit $(\sigma(n, k))_{k>0}$ la suite croissante de temps d'arrêt définie par récurrence par $\sigma(n, 0) = 0$ et

$$\sigma(n, k+1) = \inf. \{ t : t > \sigma(n, k) \quad \text{et} \quad \| X_t - X_{\sigma(n,k)} \| > d(n) \}$$

Pour tout n, $\lim\limits_{k \to \infty} P([\sigma(n, k) < 1]) = 0$ puisque X n'admet pas de discontinuité oscillatoire.

e) Pour tout $n > 0$, soit V^n le processus défini, pour tout couple (t, ω) appartenant à $[\sigma(n, k), \sigma(n, k + 1)[$, par :

$$V^n(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})^{\otimes 2}$$

et par

$$V^n(1) = \sum_{j=0}^{\infty} (X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})^{\otimes 2}$$

Nous allons d'abord montrer que la suite de processus $(V^n)_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers le processus V.

On a :

$$\begin{aligned} V^n(1) = & \sum_{k=0}^{\infty} (X^{\otimes 2}_{\sigma(n,k+1)} - X^{\otimes 2}_{\sigma(n,k)}) \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) \otimes X_{\sigma(n,k)} \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} X_{\sigma(n,k)} \otimes (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) \end{aligned}$$

(la première somme étant évidemment égale à $X_1^{\otimes 2} - X_0^{\otimes 2}$).

Soit $Z^n(t)$ le processus prévisible défini, pour tout couple (t, ω) appartenant à $]\sigma(n, k), \sigma(n, k + 1)]$, par $Z^n(t) = X_{\sigma(n,k)}$.

Posons :

$$\bar{V}^n(t) = X_t^{\otimes 2} - X_0^{\otimes 2} - \int_{]0,t]} [Z^n(u) \otimes dX_u + dX_u \otimes Z^n(u)]$$

On a $V^n(1) = \bar{V}^n(1)$ et, si $t \in [\sigma(n, k), \sigma(n, k + 1)[$,

$$V^n(t) = \bar{V}^n(t) - (X_t - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2}$$

Par construction, pour tout t et tout ω, $\| Z_t^n(\omega) - X_t(\omega) \| \leqslant d(n)$.

Par construction de $d(n)$, on a donc, pour tout temps d'arrêt σ :

$$P[\| \bar{V}_\sigma^n - V_\sigma \| \geqslant 2^{-n}] \leqslant 2^{-n}$$

ceci étant notamment satisfait pour le temps d'arrêt σ défini par :

$$\sigma = \inf \{ t : \| \bar{V}_t^n - V_t \| > 2^{-n} \}$$

On en déduit :

$$P \left[(\operatorname{Sup.}_{t \in T} \| \bar{V}_t^n - V_t \|) \geqslant 2^{-n} \right] \leqslant 2^{-n}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli ceci montre la convergence uniforme par trajectoires des processus $\bar{V}^n$ vers le processus V sauf sur un ensemble H de mesure nulle, d'où le même résultat pour les V^n.

f) On se propose, maintenant, de prouver que V est P. p. s. à variation forte bornée par trajectoires. D'après ce qui précède, il existe H(n) élément de $\mathscr{F}$ tel que $P[H(n)] \leqslant 2^{-n+1}$ et tel que, si $\omega \notin H(n)$, pour tout t et tout $k \geqslant n$, $\| V_t^k(\omega) - V_t(\omega) \| \leqslant 2^{-n}$. Il suffit de prouver que, en restriction à $\Omega \backslash H(n)$, V est à variation forte bornée en moyenne (ce qui impliquera que V est aussi à variation forte bornée par trajectoires).

Soit $\{ t(j) \}_{1 \leqslant j \leqslant k}$ une famille finie croissante d'éléments de T ; on a, pour $i \geqslant n$:

$$E\left(\sum_{j=1}^{k-1} \| V_{t(j+1)} - V_{t(j)} \| . 1_{\Omega \backslash H(n)} \right)$$

$$\leqslant 2k.2^{-i} + E\left(\sum_{j=1}^{k-1} \| V_{t(j+1)}^i - V_{t(j)}^i \| \right)$$

$\leqslant 2k.2^{-i}$ + espérance de la variation quadratique de X d'où le résultat escompté.

g) Pour tout n et k, soit :

$$A(n, k) = \left\{ \omega : \| X_{\sigma(n,k)} - X_{\sigma(n,k)^-} \| > \frac{1}{n} \right\}$$

$$B(n, k) = \Omega \backslash A(n, k)$$

$$Z_{n,k} = X_{\sigma(n,k)} . 1_{B(n,k)} + X_{\sigma(n,k)^-} . 1_{A(n,k)}$$

De plus, pour tout $n > 0$, soit $U^n(t)$ (resp. $W^n(t)$) le processus défini sur $[\sigma(n, k), \sigma(n, k + 1)[$, par

$$U^n(t) = \sum_{j=1}^{k} (X_{\sigma(n,j)} - Z_{n,j})^{\otimes 2} = \sum_{j=1}^{k} (X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)^-})^{\otimes 2} . 1_{A(n,j)}$$

$$W^n(t) = \sum_{j=1}^{k} [X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j-1)}]^{\otimes 2} . 1_{A(n,j)}$$

Si $\omega \in A(n, k)$ et si $t = \sigma(n, k)(\omega)$, il existe un entier k' tel que $\omega \in A(n+1, k')$ et $t = \sigma(n+1, k')(\omega)$ donc $U^n(t)$ converge vers $U(t)$ et la variation totale de $[U(t) - U^n(t)]$ décroît vers 0 par trajectoires.

De plus, sur $A(n, j)$,

$$\| X_{\sigma(n,j-1)} - X_{\sigma(n,j)^-} \| < \frac{1}{2n^3}$$

et

$$\| X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)^-} \| > \frac{1}{n}$$

donc

$$\| W^n(t) - U^n(t) \| < \frac{2}{n} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{k} \| X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)^-} \|^2 \cdot 1_{A(n,j)} \right\}$$

ce qui montre que la suite de processus $(W^n(t))_{n>0}$ converge vers le processus $U(t)$ quand n tend vers l'infini, uniformément par trajectoires.

Soit $S^n(t)$ le processus défini sur $[\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)[$ par

$$S^n(t) = \sum_{j=1}^{k} [X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j-1)}]^{\otimes 2} \cdot 1_{B(n,j)} = V^n(t) - W^n(t)$$

Ce qui précède et le f) montre que, sauf sur H, la suite S^n converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers $V(t) - U(t) = S(t)$.

h) Pour tout n, on a :

$$f(X_1) - f(X_0) = \sum_{k>0} [f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)})](1_{A(n,k+1)} + 1_{B(n,k+1)})$$

D'après la formule de Taylor, pour tout n, k et ω, il existe $R_{n,k}(\omega)$, $R_{n,k}(\omega)$ pouvant être majoré comme indiqué au j) ci-après et étant tel que

$$f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)}) = f'(X_{\sigma(n,k)})[X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}] + \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)})(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2} + R_{n,k}(\omega)$$

(en fait, l'identité qui précède ne sera utilisée que sur $B(n, k+1)$).

On a donc :

$$f(X_1) - f(X_0) = \sum_{k>0} \left\{ \sum_{i=1}^{4} a_{n,k}^i \right\}$$

avec

$$a_{n,k}^1 = f'(X_{\sigma(n,k)})(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})$$

$$a_{n,k}^2 = \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)}) \cdot (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2} \cdot 1_{B(n,k+1)}$$

$$a_{n,k}^3 = R_{n,k} \cdot 1_{B(n,k+1)}$$

$$a_{n,k}^4 = [-f'(X_{\sigma(n,k)})(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) + f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)})] \cdot 1_{A(n,k+1)}$$

On se propose, maintenant, de montrer que $\sum_k a_{n,k}^i$ converge P. p. s. pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, quand n tend vers l'infini.

i) On a

$$\sum_{k \geqslant 0} a_{n,k}^1 = \int_{]0,1]} f'[Z^n(t)]dX_t$$

où Z^n est le processus défini au *e*).

On a, par définition de $d(n)$ (cf. *c*)) :

$$P\left[\left\| \int_{]0,1]} [f'(Z_t^n) - f'(X_t-)] . dX_t \right\| \geqslant 2^{-n} \right] \leqslant 2^{-n}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, ceci montre la convergence P. p. s. de $\sum_{k \leqslant 0} a_{n,k}^1$ vers $\int_{]0,1]} f'(X_t-).dX_t$.

j) Puisque f'' est uniformément continue sur les parties bornées de E, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour n assez grand, on a, si $\omega \in B(n, k+1)$:

$$\| a_{n,k}^3 \| \leqslant \varepsilon . \| X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)} \|^2$$

Le fait que X admette une variation quadratique finie en moyenne montre que $\sum_{k \geqslant 0} a_{n,k}^3$ converge dans L_1 vers 0 quand n tend vers l'infini.

k) On a : $a_{n,k}^2 = a_{n,k}^5 - a_{n,k}^6$ avec

$$a_{n,k}^5 = \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)}).(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2}$$

$$a_{n,k}^6 = \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)}).(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2} . 1_{A(n,k+1)}$$

D'une part, $\sum_{k \geqslant 0} a_{n,k}^6$ converge vers $\int_{]0,1]} f''(X_t-).dU_t$ d'après le *g*) et le fait que la suite $(K_n)_{n>0}$ de parties de $\Omega \times T$ est croissante et épuise les sauts de X, en posant :

$$K_n = \bigcup_{k>0} \{ (t, \omega) : \omega \in A(n, k) \text{ et } t = \sigma(n, k)(\omega) \} .$$

D'autre part, $\sum_{k \geqslant 0} a_{n,k}^5 = \int_{]0,1]} f''(X_t-).dV_t^n$

On a donc (cf. le *e*)) :

$$\sum_{k \geqslant 0} a^5_{n,k} - \int_{]0,1]} f''(X_{t^-}).dV_t$$
$$= \int_{]0,1]} f''(X_{t^-})[(Z^n(t) - X(t^-)) \otimes dX_t + dX_t \otimes (Z^n(t) - X(t^-))]$$

Or $\sup_{t,\omega} \| Z^n_t(\omega) - X_{t^-}(\omega) \| \leqslant d(n) \leqslant \dfrac{2^{-n}}{b.c(n)}$ (cf. C)) donc

$$P\left[\left\| \sum_{k \geqslant 0} a^5_{n,k} - \int_{]0,1]} f''(X_{t^-}).dV_t \right\| \geqslant 2^{-n} \right] \leqslant 2^{-n}$$

ceci et le lemme de Borel-Cantelli montre que $\sum_{k \geqslant 0} a^5_{n,k}$ converge P. p. s. vers $\int_{]0,1]} f''(X_{t^-}).dV_t$.

l) En considérant une sous suite, on voit que $\sum_{k > 0} a^4_{n,k}$ converge P. p. s. vers Q(1) d'après le lemme C-3, les propriétés de la suite $(K_n)_{n>0}$ (cf. le début de *k*) et la définition de A(*n*, *k*) (cf. le milieu de *g*)).

En considérant à nouveau, une sous-suite, on peut déduire de la convergence dans L_1 de $\sum_{k \geqslant 0} a^3_{n,k}$ une convergence P. p. s. ce qui établit la formule de Ito annoncée.

m) Soit σ un temps d'arrêt, le lemme B-8 et la définition de S(*t*) montrent que $S_\sigma = S_{\sigma^-}$. On en déduit que S(*t*) est à trajectoires continues ce qui achève la démonstration des 1) et 2) ; en effet, la mesure définie sur la tribu des prévisibles et associée à la variation totale de S est majorée par la mesure *a* associée à la variation quadratique de X comme indiqué en C-5 ; puisque S est prévisible, on en déduit que, pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt avec $\sigma < \sigma'$, on a $\| S_{\sigma'} - S_\sigma \| \leqslant \| A_{\sigma'} - A_\sigma \|$ P. p. s.

n) Il reste à prouver le 3). Or L(*t*) est bien défini d'après le 1). De plus, pour tout élément x' du dual G' de G on a $(\langle f, x' \rangle)' = \langle f', x' \rangle$ et $(\langle f, x' \rangle)'' = \langle f'', x' \rangle$: le 3) se déduit alors du 2) en prenant $G = \mathbb{R}$.

D-2. Remarques

1) Si X_1 et X_2 sont deux processus qui satisfont aux hypothèses du théorème qui précède, il en est de même de $X_1 + \lambda X_2$ quel que soit λ réel.

2) Si X est à variation forte bornée en moyenne, X appartient à $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$.

3) Si E est un espace de Hilbert, si on munit $E \otimes E$ de la norme de Hilbert-Schmidt, et si X est une martingale de carré intégrable, X appartient à $\mathcal{S}_2$ et admet une variation quadratique finie en moyenne ; en effet, pour tout processus Y$\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans E et borné par 1 on a :

$$E\left[\left\| \int Y \otimes dX \right\|^2\right] \leqslant E[\| X_1 - X_0 \|^2].$$

4) Si X est une martingale de carré intégrable et si G est un espace de Hilbert, X appartient à $\mathcal{S}_1$; en effet, pour tout processus Y$\mathcal{A}$-étagé à valeurs dans $F = \mathcal{L}(E, G)$ et borné par 1 on a :

$$E\left[\left\| \int Y dX \right\|^2\right] \leqslant E[\| X_1 - X_0 \|^2].$$

D-3. THÉORÈME

1) *On considère les données indiquées en* A *avec* $F = \mathcal{L}(E, G)$. *De plus, soit* X *un processus qui appartient à* $\mathcal{S}_1$ (*cf.* B-4) *et qui admet localement une variation quadratique finie en moyenne* (*cf.* C-1).

Soit f *une fonction deux fois différentiable, définie sur* E, *à valeurs dans* G, *et dont la différentielle seconde* f'' *est uniformément continue sur les parties bornées de* E.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) = \sum_{s \leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})(X_s - X_{s^-})] \\ + \int_{]0,t]} f'(X_{u^-}).dX_u - \frac{1}{2}\sum_{s \leqslant t} f''(X_{s^-})(X_s - X_{s^-})^{\otimes 2} \\ + \frac{1}{2}\langle f''(X_{t^-})(X_t \otimes X_t) \rangle \end{aligned}$$

Dans cette formule :

— *les sommations sont définies par trajectoires ;*

— *la première intégrale est une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7 ;

— *la somme des deux derniers termes définit un processus continu ;*

— *le processus* $W_t = \langle f''(X_{t^-})(X_t \otimes X_t) \rangle$ *est un processus cadlag à variation forte bornée par trajectoires qu'on peut construire de la façon suivante :*

Soit $(\sigma(n, k))$ *une famille de temps d'arrêt telle que, pour tout* n,

$$\operatorname*{Sup.}_{t,\omega} \| X^n - X \| \leqslant 2^{-n}$$

si

$$X^n = \sum_{k>0} X_{\sigma(n,k)} \cdot 1_{]\sigma(n,k),\sigma(n,k+1)]}$$

(*cf.* B-6). *Pour tout* n, *soit* W^n *le processus défini, sur* $]\sigma(n, k), \sigma(n, k + 1)]$ *par*

$$W^n = \sum_{j=0}^{k-1} f''(X_{\sigma(n,j)})[(X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})^{\otimes 2}]$$

Alors la suite $(W^n)_{n>0}$ *converge* P. p. s. *uniformément par trajectoires vers le processus* W.

2) *On considère toujours les données indiquées en* A. *On suppose, de plus, que* X *appartient à* $\mathscr{S}_3$ (*cf.* B-4) *et admet localement une variation quadratique finie en moyenne* (*cf.* C-1). *On suppose que* G *est un dual d'espace de Banach séparable. Soit* f *une fonction définie sur* E, *deux fois différentiable, à valeurs dans* G, *dont la différentielle seconde* f'' *est faiblement uniformément continue sur les parties bornées de* E. *On peut encore donner un sens à* $\langle f''(X_{t^-})(X_t \otimes X_t) \rangle = W_t$; *le processus* (W_t) *est un processus à valeurs dans* G, *cadlag, dont la variation forte est bornée par trajectoires ; si* f'' *est uniformément bornée par* K, *si* B *est le processus cadlag défini par* $B_t = \sum_{s \leq t} \| X_s - X_{s^-} \|^2$ *et si* A *est le processus naturel associé à la variation quadratique de* X (*cf.* C-5), *la variation totale de* W *est majorée, par trajectoires, par celle de* K(A + B).

Le processus W *est le processus cadlag unique à l'indistinguabilité près tel que, pour tout élément* x' *de* J, *si* G *est le dual* J' *de* J, *on ait*

$$x' \circ W = \langle [x' \circ f''(X_{t^-})](X_t \otimes X_t) \rangle$$

pour tout x', *le processus du membre de droite de cette égalité ayant le sens indiqué au* 1) *qui précède* (*avec* $G = \mathbb{R}$).

Soit alors L(t) *le processus cadlag défini par*

$$L(t) = f(X_t) - f(X_0) - \sum_{s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})(X_s - X_{s^-})] + \frac{1}{2} \sum_{s \leq t} f''(X_s)(X_s - X_{s^-})^{\otimes 2} - \frac{1}{2} \langle f''(X_{t^-})(X_t \otimes X_t) \rangle$$

les sommations étant déterminées par trajectoires.

Pour tout élément x' *de* J, $L(t) \circ x'$ *est indistinguable du processus*

$\int_{]0,t]} [f'(X_u-)\circ x'].dX_u$, *ce processus étant lui-même une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7 *avec* $G = \mathbb{R}$: *dans ce cas le symbole* $\int_{]0,t]} f'(X_u-).dX_u$ *correspond donc encore à une intégrale stochastique « faible ».*

Preuve. — 1) Pour l'essentiel, la preuve est la même que celle du théorème D-1 : la seule différence réside dans l'étude de la convergence de $\sum_{k\geqslant 0} a^5_{n,k}$ c'est-à-dire dans l'étude de la convergence des processus W^n indiqués ci-dessus. On peut supposer que l'espérance de la variation quadratique de X est bornée par K.

Soit $(\bar{X}^n)_{n>0}$ une suite de processus σ-$\mathscr{A}$-étagés telle que, pour tout n,

$$\mathrm{Sup}\ \| \bar{X}^n_t - X_t \| \leqslant 2^{-n}$$

(on procède comme en B-6 et on utilise le fait que toute variable aléatoire est limite uniforme de variables aléatoires σ-étagées).

Pour tout n, soit $\bar{X}^n = \sum_{i\in I} \bar{X}^n_i$ chaque processus $\bar{X}^n_i$ étant de la forme $\bar{X}^n_i = a^n_i . 1_{A(n,i)}$, les $(A(n, i))_{i\in I}$ étant deux à deux disjoints et appartenant à $\mathscr{A}$ et les a^n_i étant des éléments de E. On pose $\tilde{X}^n_i = X . 1_{A(n,i)}$. Pour tout n, soit $\overline{W}^n$ le processus défini par $\overline{W}^n = \sum_{i\in I} \langle f''(a^n_i)(\tilde{X}^n_i, \tilde{X}^n_i) \rangle$ (cf. C-4).

Alors la suite $(\overline{W}^n)_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers un processus $\overline{W} = \langle f''(X_t-)(X_t, X_t) \rangle$: en effet,

$$P\,[\mathrm{Sup.}\,(\| \overline{W}^n - \overline{W}^{n+k} \|) \geqslant (\sqrt{2})^{-n}] \leqslant K(\sqrt{2})^{-n}$$

puisque l'espérance de la variation totale de $\overline{W}^n - \overline{W}^{n+k}$ est inférieure à $2^{-n}.K$ (cf. C-4). Ensuite, n étant fixé, il existe $k \geqslant n$ tel que

$$P\,[\mathrm{Sup.}\, \| \overline{W}^k - \overline{\overline{W}}^k \| \geqslant 2^{-n}] \leqslant 2^{-n}$$

où $\overline{\overline{W}}^k$ est le processus défini par

$$\overline{\overline{W}}^k = \sum_{i\in I} \left\{ \sum_{j=0}^{h-1} f''(a^n_i) \right\} [(\tilde{X}^n_i(\sigma(k, j+1)) - \tilde{X}^n_i(\sigma(k,j))^{\otimes 2})]$$

sur $]\sigma(k, h), \sigma(k, h+1)]$ (on utilise la construction indiquée en C-4 et le fait que X appartient à $\mathscr{S}_1$).

Enfin, la variation totale de $\overline{\overline{W}}^k - W^k$ est inférieure à $2^{-n}.K$ ce qui donne le résultat escompté (et $\overline{W} = W$).

2) Notons d'abord que les hypothèses sur f'' impliquent que f'' est bornée sur les parties bornées de E. Par ailleurs, ce 2) est évidemment l'analogue du 3) du théorème D-1. Le problème est, qu'ici, il faut d'abord construire le processus W_t.

On peut supposer que l'espérance de la variation quadratique de X est finie et que f'' est uniformément bornée par K.

Ensuite, on considère une suite $(x'_n)_{n>0}$ dense dans la boule unité de J ; pour tout n, on peut définir le processus $(W_t \circ x'_n)$; ceci permet de construire (W_t) par trajectoires sauf sur un ensemble de trajectoires de mesure P-nulle parce que, pour tout n, le processus $(W_t \circ x'_n)$ a une variation totale majorée, par trajectoires, par celle du processus K(A + B) (ceci se prouve comme dans le théorème D-1).

La fin se prouve comme au théorème D-1.

E. CONTRE-EXEMPLES

E-1. Processus déterministe non a variation bornée

Le but du contre-exemple qui suit est de montrer qu'on peut avoir un processus déterministe, à valeurs dans un espace de Hilbert séparable, dont la variation quadratique est finie, continu et de répartition en moyenne d'ordre deux (cf. [*8*]) mais dont la variation totale n'est pas finie. Ceci montre que, même si E est un espace de Hilbert et si G = R, les hypothèses du théorème D-1 sont plus générales que celles indiquées en [*3*].

On pose $E = L^2([0, 1], \mathscr{B}_{[0,1]}, m)$ où m est la mesure de Lebesgue. Soit X le processus à valeurs dans E défini par, quels que soient t et ω, $X_t(\omega) = 1_{[0,t]}$, ($1_{[0,t]}$ étant donc considéré comme un élément de E). On vérifie facilement que ce processus X satisfait aux propriétés indiquées (la mesure stochastique associée à X est dominée par $m \otimes P$ si P est la probabilité donnée sur l'espace de base).

E-2. Martingale dont la variation quadratique est infinie

Le but du contre-exemple qui suit est de donner un exemple de martingale $(M_t)_{t\in\bar{\mathbb{N}}}$ à valeurs dans un espace de Banach réflexif E, telle que $E[\|M_\infty - M_0\|^2] < +\infty$ et dont la variation quadratique n'est pas localement finie en moyenne.

On pose $E = l^4$ = sous-ensemble des suites $(a_n)_{n>0}$ de réels muni de la norme $\left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^4\right)^{1/4} < +\infty$. On considère une martingale discrète $(M_n)_{n>0}$ à valeurs dans E et telle que, pour tout $n > 0$

$$(M_{n+1} - M_n) = (1_{A(n)} - 1_{B(n)}).u_n.\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}$$

où u_n est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $n^{\text{ième}}$ qui est égal à 1 et où $A(n)$ et $B(n)$ sont tels que

$$P[A(n)] = P[B(n)] = \frac{1}{2} \text{ et } B(n) = \Omega \backslash A(n).$$

On vérifie facilement que la martingale M satisfait aux propriétés indiquées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Doleans, Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D). *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, t. **9**, 1968, p. 309-314.

[2] C. Doleans et P. A. Meyer, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaires de probabilité. IV. *Lecture notes in mathematics*, 124, Springer Verlag.

[3] H. Kunita, Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert space. *Nagoya Math. J.*, vol. **38**, 1970, p. 41-52.

[4] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales. *Nagoya Math. J.*, vol. **30**, 1967, p. 209-245.

[5] M. Métivier, Stochastic integral and vector valued measures. *Séminaires de Probabilité de Rennes*, 1972.

[6] M. Métivier, Mesure stochastique locale associée à une martingale locale, à valeurs dans un espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **277**, 1973, série A, p. 809-812.

[7] J. Pellaumail, Formule de Ito dans le cas réel non continu. *Séminaire de Probabilité de Rennes*, 1973.

[8] J. Pellaumail, Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer. *Astérisque*, n° 9, 1973.

[9] M. Yor, Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **277**, 1973, série A, p. 467.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1974)