ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BERNARD ROYNETTE

Théorème central-limite pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 4 (1974), p. 391-398

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_391_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 4, 1974, p. 391-398. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorème central-limite pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$

par

Bernard ROYNETTE

SUMMARY. — We prove here a central limit theorem for the group of d dimensional Euclidean motions, which generalizes a theorem by V. N. Tutubalin.

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit G_d le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$. G_d est un groupe de Lie connexe égal au produit semi-direct de $SO(d) x_\phi R^d$, où $SO(d)$ est la composante connexe du groupe orthogonal de $\mathbb{R}^d$, et où l'homomorphisme ϕ est donné par l'action naturelle de $SO(d)$ sur $\mathbb{R}^d$: $\phi(v)(\lambda) = v.\lambda$ ($v \in SO(d)$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$). Tout élément de G_d sera noté (v, λ) (ou encore $(v(g), \lambda(g))$) avec $v \in SO(d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$. σ désignera la mesure de Haar normalisée de $SO(d)$ et I_d, la matrice identité de dimension d, sera son élément neutre.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité et $(U_1, Y_1), (U_2, Y_2), \dots (U_n, Y_n), \dots$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans G_d, indépendantes et de même loi μ (avec U_i, de loi ν, à valeurs dans $SO(d)$, et Y_i à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). Soit la v. a. Z_n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$Z_n = Y_1 + U_1Y_2 + U_1U_2Y_3 + \dots + U_1U_2 \dots U_{n-1}Y_n.$$

Z_n n'est rien d'autre que la composante sur $\mathbb{R}^d$ de la marche aléatoire de pas (U_i, Y_i) partant de $(I_d, 0)$ à l'instant 0. Nous ferons les deux hypothèses suivantes :

1) la mesure ν est apériodique, c'est-à-dire que le plus petit sous-groupe fermé contenant le support de ν est $SO(d)$ tout entier.

2) La mesure μ admet un moment d'ordre 2, soit :

$$\int_{G_d} |\lambda(g)|^2 d\mu(g) < +\infty$$

Notre but, ici, est de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME. — Pour $d \geqslant 3$, et sous les hypothèses précédentes, la variable aléatoire $X_n = \frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi, quand $n \to \infty$, vers $\mathcal{N}(0, \Theta I_d)$, la loi normale centrée de covariance ΘI_d (où $\Theta \geqslant 0$).

Ce théorème a déjà été prouvé par V. N. Tutubalin dans le cas où $d = 3$ (voir [*4*]). Notre démonstration, différente de celle de Tutubalin, reprend des méthodes déjà utilisées dans [*2*]. Nous avons pourtant choisi de reproduire ici les démonstrations de [*2*], afin que ce papier soit plus lisible. Enfin, dans [*5*], L. G. Gorostiza obtient le même résultat que le nôtre mais par une méthode, nous semble-t-il, plus compliquée.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

LEMME 1. — Soit ν une mesure de probabilité apériodique sur le groupe SO(d), pour $d \geqslant 3$. Alors ν^{*n} converge vers la mesure de Haar σ de SO(d) quand n tend vers l'infini.

Démonstration. — D'après H. S. Collins [*1*], il suffit de prouver que le support de ν n'est inclus dans aucune partie de la forme $g.H$, où $g \in SO(d)$ et où H est un sous-groupe fermé distingué propre de SO(d). Soit so(d) l'algèbre de Lie du groupe SO(d), et so(d, $\mathbb{C}$) sa complexifiée. Nous savons (voir par exemple [*3*], pages II, 6 et 7) que so(d, $\mathbb{C}$) est une algèbre de Lie simple pour $d \geqslant 3$, sauf pour $d = 4$. En conséquence, pour tout $d \geqslant 3, d \neq 4$, l'algèbre de Lie so(d) est simple. Nous allons distinguer deux cas :

1) $d \neq 4$. Supposons que (supp ν) $\subset g.H$, où H est un sous-groupe distingué fermé propre de SO(d). Soit H_0 la composante connexe de H. Puisque H est distingué, la sous-algèbre de Lie de so(d) correspondant à H_0 est un idéal, et puisque H est propre et so(d) simple, cet idéal est nul. H est donc discret, et central. On a donc : (supp ν) $\subset g.Z$, où Z est le centre de SO(d). Dans ces conditions, puisque ν est apériodique, $g.Z$ engendre topologiquement SO(d), ce qui est absurde, puisque SO(d) serait alors abélien.

2) $d = 4$. Soit $S_3 \times S_3 \xrightarrow{\pi} SO(4)$ le revêtement universel de π SO(4) (S_3 est le groupe des quaternions de norme 1). Le noyau de π est formé de deux éléments. Il est clair qu'il existe une mesure de probabilité unique $\tilde{\nu}$ sur

$S_3 \times S_3$ telle que $\pi(\tilde{v}) = v$ et telle que $\tilde{v}(\tilde{0}) = \frac{1}{2}v(0)$ si $\tilde{0}$ est un ouvert de $S_3 \times S_3$ en homéomorphisme par π avec 0. Si on suppose v apériodique et (supp v) $\subset g.H$, avec H distingué, fermé, propre, on voit sans peine que (supp $\tilde{v}$) $\subset \tilde{g}.\tilde{H}$ avec $\tilde{H}$ distingué, fermé, propre, et $\pi(\tilde{g}) = g$. De plus $\tilde{v}$ est apériodique. Il reste donc à prouver que cette assertion est absurde. La composante connexe $\tilde{H}_0$ de $\tilde{H}$ a une algèbre de Lie qui est un idéal. Or l'algèbre de Lie de $S_3 \times S_3$ est so(3) $\oplus$ so(3). Cet idéal est donc (so(3), 0), (0, so(3)) ou (0, 0). Le groupe $\tilde{H}_0$ est donc $S_3 \times e$, $e \times S_3$ ou $e \times e$. Examinons déjà le premier cas. Dans ces conditions, $\tilde{H}$ est de la forme $S_3 \times \Gamma$, où Γ est un sous-groupe distingué discret, et donc central de S_3. On en déduit que supp $\tilde{v} \subset S_3 \times g_1.Z$, où Z est le centre de S_3, et où $g_1 \in S_3$. Puisque $\tilde{v}$ est apériodique, $g_1.Z$ engendre topologiquement S_3, ce qui est absurde (S_3 serait abélien). Les autres cas se traitent de la même façon.

Remarque 1. — Soit $\lambda \in \mathbb{R}^d$, et Y'_i la v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie par $Y'_i = \lambda + Y_i - U_i\lambda$. Définissons Z'_n par :

$$Z'_n = Y'_i + U_1.Y'_2 + U_1U_2Y'_3 + \ldots + U_1U_2 \ldots U_{n-1}Y'_n.$$

Il est clair que l'on a

$$Z'_n = Z_n + \lambda - U_1U_2 \ldots U_n\lambda.$$

Soit :

$$X'_n = \frac{Z'_n}{\sqrt{n}} = \frac{Z_n}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda - U_1 \ldots U_n\lambda}{\sqrt{n}}.$$

La v. a. $\lambda - U_1 \ldots U_n\lambda$ étant uniformément bornée, il est évident que $X_n = \frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \Theta I_d)$ si et seulement si X'_n converge en loi vers la même limite.

Remarque 2. — Il est possible de choisir λ tel que $E(Y'_i) = 0$. En effet, puisque la relation $E(Y'_i) = 0$ s'écrit encore: $(I_d - E(U_i))\lambda = -E(Y_i)$, l'assertion de cette remarque sera prouvée si on montre que $\det(I_d - E(U_i)) \neq 0$. Or, si cette quantité était nulle, 1 serait valeur propre de $E(U_i)$, et il existerait un $\gamma \in \mathbb{R}^d$, de norme 1, tel que $E(U_i).\gamma = E(U_i.\gamma) = \gamma$. Mais $U_i.\gamma$ appartient à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, qui est strictement convexe, et donc $U_i.\gamma = \gamma$ presque sûrement. Cela implique que le support de v est inclus dans le sous-groupe Γ de SO(d) défini par :

$$\Gamma = \{ v \in SO(d) \ ; \ v.\gamma = \gamma \}.$$

Or Γ est isomorphe à SO(d − 1), et cela est absurde, puisque v est apériodique.

En vertu de ces deux remarques, nous supposerons dans tout ce qui suit que Y_i est centrée.

LEMME 2. — La matrice de covariance de la v. a. centrée X_n tend, quand n tend vers l'infini vers $\Theta I_d (\Theta \geqslant 0)$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}_n$ la σ-algèbre engendrée par (U_1, Y_1), $(U_2, Y_2), \dots (U_n, Y_n)$. Nous avons, pour tout n,

$$E(U_1 . U_2, \dots U_n Y_{n+1}) = E(U_1 \dots U_n E^{\mathcal{F}_n} Y_{n+1}) = 0$$

puisque Y_{n+1} est centrée et indépendante de $\mathcal{F}_n$, ce qui prouve que X_n est centrée.

— Soit $\bar{K}_n$ la matrice de covariance de la v. a. $U_1 \dots U_n . Y_{n+1}$, et K_Y celle de la v. a. Y_i. Un calcul simple prouve alors que :

$$\bar{K}_n = \int_{SO(d)} g K_Y g^t d\sigma_n(g), \quad \text{où } \sigma_n \text{ est la loi de } U_1 \dots U_n,$$

i. e. : $\sigma_n = \nu^{*n}$. Le lemme 1 prouve alors que

$$\bar{K}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} K = \int_{SO(d)} g K_Y g^t d\sigma(g).$$

Comme il est clair que, pour tout $v \in SO(d)$, $vKv^{-1} = K$, la matrice K est scalaire et donc de la forme ΘI_d.

Θ est supérieur ou égal à 0, puisque K est limite de matrices de covariance.

. Pour tout $p > 0$, et $1 \leqslant i, j \leqslant d$, on a :

$$\begin{aligned} & E\{(U_1 U_2 . U_n Y_{n+1})_i . (U_1 \dots U_{n+p} Y_{n+p+1})_j\} \\ & \qquad = E\{(U_1 \dots U_n Y_{n+1})_i . (U_1 \dots U_{n+p} E^{\mathcal{F}_{n+p}} Y_{n+p+1})_j\} = 0. \end{aligned}$$

De cela, on déduit, que, si K_n est la matrice de covariance de X_n que :

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{K}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Theta I_d$$

Remarque 3. — Il est clair, vu la forme de K, que Θ est strictement positif si et seulement si $K_Y \neq 0$, c'est-à-dire si la loi de Y n'est pas ponctuelle. En particulier, si μ est apériodique, $\Theta > 0$.

Fixons quelques notations. Si A est une matrice $d \times d$, nous noterons A^* sa transposée et $\| A \| = d . \sup_{1 \leqslant i, j \leqslant d} | A_{ij} |$. Si t est un élément de $\mathbb{R}^d$, $| t |$ désignera sa norme euclidienne ; si t et s sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$, $\langle t, s \rangle$ sera leur produit scalaire usuel. Si $k \in \mathbb{N}$, nous noterons ϕ_k la fonction caractéristique de X_k, soit : $\phi_k(t) = E(\exp i \langle t, X_k \rangle) = E\left(\exp i \left\langle t, \frac{Z_k}{\sqrt{k}} \right\rangle\right)$.

Notre but est donc maintenant de prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \exp - \frac{1}{2}(\Theta \mid t \mid^2)$$

Nous allons maintenant prouver le théorème annoncé en plusieurs étapes:

1) D'après le lemme précédent, on a $\| K_k - \Theta I_d \| \leqslant \varepsilon_k$, où $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. A partir de maintenant, nous fixons k.

2) *Prouvons que, pour $|t|$ assez petit,*

$$\sup_{v\in SO(d)} |\phi_k(t) - \phi_k(vt)| \leqslant C_1 \varepsilon_k |t|^2$$

La v. a. X_k étant centrée et de matrice de covariance K_k, on a :

$$\phi_k(t) = 1 - \frac{1}{2} t^* K_k t + o(|t|^2) \qquad \text{(A)}$$

De même

$$\phi_k(vt) = 1 - \frac{1}{2} t^* v^* K_k vt + o(|t|^2).$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\phi_k(t) - \phi_k(vt)| &= \left| \frac{1}{2} t^* v^* (K_k - \Theta I_d) vt - \frac{1}{2} t^* (K_k - \Theta I_d) t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Theta t^* v^* I_d vt - \frac{1}{2} \Theta t^* I_d t + o(|t|^2) \right| \\ &\leqslant C'_1 \varepsilon_k |t|^2 + o(|t|^2) \qquad \text{puisque } \| K_k - I_d \| \leqslant \varepsilon_k \\ &\leqslant 2C'_1 \varepsilon_k |t|^2, \qquad \text{pour } |t| \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

(Remarquons que la constante C_1, ainsi que les constantes C_2 et C_3 qui vont suivre, ne dépendent pas de k).

3) *Prouvons que, pour $|t|$ assez petit, et pour tout n :*

$$\left| E\left(\exp i \left\langle t, \frac{Z_{nk}}{\sqrt{k}} \right\rangle\right) - \{ \phi_k(t) \}^n \right| \leqslant C_1 n \varepsilon_k |t|^2$$

Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} &E\left(\exp i \left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}} Z_{(n+1)k} \right\rangle\right) \\ &= E\left(\exp i \left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}} Z_{nk} \right\rangle . \exp i \left\langle t, U_1 U_2 \dots U_{nk} . \frac{1}{\sqrt{k}} (Y_{nk+1} + U_{nk+1} Y_{nk+2} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \dots + U_{nk+1} \dots U_{(n+1)k-1} . Y_{(n+1)k}) \right\rangle\right) \\ &= E\left(\exp i \left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}} Z_{nk} \right\rangle . E^{\mathscr{F}_{nk}} (\exp i \left\langle t, U_1 U_2 \dots U_{nk} . \frac{1}{\sqrt{k}} (Y_{nk+1} + U_{nk+1} Y_{nk+2} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \dots + U_{nk+1} \dots U_{(n+1)k-1} Y_{(n+1)k}) \right\rangle\right). \end{aligned}$$

La v. a. $\frac{1}{\sqrt{k}}(Y_{nk+1}+U_{nk+1}Y_{nk+2}+\ldots+U_{nk+1}U_{nk+2}\ldots U_{(n+1)k-1}Y_{(n+1)k})$ étant indépendante de $\mathscr{F}_{nk}$ et de même loi que X_k, on a :

$$E\left(\exp i\left\langle t,\frac{1}{\sqrt{k}}Z_{(n+1)k}\right\rangle\right)=E\left(\exp i\left\langle t,\frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle.\ \phi_k(U_1U_2\ldots U_{nk}^*.t)\right)$$

D'où :

$$\left|E\left(\exp i\left\langle t,\frac{1}{\sqrt{k}}Z_{(n+1)k}\right\rangle\right)-E\left(\exp i\left\langle t,\frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle\phi_k(t)\right|$$
$$\leqslant E\{\,|\phi_k(U_1U_2\ldots U_{nk}^*.t)-\phi_k(t)|\,\}\leqslant C_1\varepsilon_k|t|^2,$$

d'après le point 2. La majoration du point 3 s'en déduit alors de manière immédiate par récurrence sur n.

4) *Prouvons que* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\phi_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}\Theta|t|^2}|\leqslant C_2\varepsilon_k|t|^2$, *pour* t *dans un compact*. En raison de (A), on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n=e^{-\frac{1}{2}t^*K_kt}$$

D'après le point 3, on a donc, pour t dans un compact :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|E\exp i\left\langle\frac{t}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle-\left\{\phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n\right|\leqslant C_1n\varepsilon_k\frac{|t|^2}{n}\leqslant C_1\varepsilon_k|t|^2$$

D'où :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\phi_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^*K_kt}\right|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|E\left\{\exp i\left\langle\frac{t}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle\right\}-e^{-\frac{1}{2}t^*K_kt}\right|$$
$$\leqslant C_1\varepsilon_k|t|^2$$

Puisque $\|K_k-\Theta I_d\|\leqslant\varepsilon_k$, il est alors clair que :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\phi_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}\Theta|t|^2}|\leqslant C_2\varepsilon_k|t|^2\qquad\text{pour } t \text{ dans un compact.}$$

5) *Prouvons que, pour* t *dans un compact,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{0\leqslant p<k}|\phi_{nk+p}(t)-\phi_{nk}(t)|\leqslant C_3\varepsilon_k|t|^2$$

Soit p un entier plus petit que k. On a :

$$\phi_{nk+p}(t)-\phi_{nk}(t)=E\left\{\exp i\left\langle\frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}},\frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk+p}\right\rangle\right\}$$

$$- \mathrm{E}\left\{ \exp i \left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\}$$

$$= \mathrm{E}\left\{ \exp i \left\langle \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}}, \frac{1}{\sqrt{k}} . \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \psi_p\left(\mathrm{U}_1 \dots \mathrm{U}_{nk}^* . \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) \right\} - \mathrm{E}\left\{ \exp i \left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\}$$

où ψ_p est la fonction caractéristique de la v. a.

$$\frac{1}{\sqrt{k}}(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{U}_1\mathrm{Y}_2 + \dots + \mathrm{U}_1 \dots \mathrm{U}_{p-1}\mathrm{Y}_p),$$

d'après un calcul analogue à celui du point 3. D'où :

$$| \phi_{nk+p}(t) - \phi_{nk}(t) | \leqslant \mathrm{E}\left| \psi_p\left(\mathrm{U}_1 \dots \mathrm{U}_{nk}^* . \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) - 1 \right|$$

$$+ \left| \mathrm{E}\left\{ \exp i \left\langle \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\} - \mathrm{E}\left\{ \exp i \left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\} \right|$$

Il est clair que :

$$\sup_{1 \leqslant p < k} \mathrm{E}\left| \psi_p\left(\mathrm{U}_1 \dots \mathrm{U}_{nk}^* . \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) - 1 \right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(pour } t \text{ dans un compact)}$$

D'autre part :

$$\left| \mathrm{E}\left\{ \exp i \left\langle \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\} - \mathrm{E} \exp\left\{ i \left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right| \right.$$

$$\leqslant \left| \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) \right\}^n - \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n \right| + 2\mathrm{C}_1\varepsilon_k |t|^2$$

d'après le point 3.

$$\text{Or, } \lim_{n \to \infty} \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) \right\}^n = \lim_{n \to \infty} \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n = e^{-\frac{1}{2} t^* \mathrm{K}_k t}$$

D'où :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{1 \leqslant p \leqslant k} | \phi_{nk+p}(t) - \phi_{nk}(t) | \leqslant 2C_1\varepsilon_k | t |^2 \qquad \text{pour } t \text{ dans un compact.}$$

6) *Des points* 4 *et* 5, *on déduit alors* :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} | \phi_n(t) - e^{-\frac{1}{2}\Theta|t|^2} | \leqslant (2C_1 + C_2)\varepsilon_k | t |^2$$

Le théorème s'ensuit alors, en faisant tendre k vers l'infini. Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] H. S. Collins, Convergence of convolutions iterates of measures. *Duke Math. Journal*, 1962, p. 259-264.

[*2*] B. Roynette, Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de R^d, *à paraître.*

[*3*] J. P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes.* W. A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1966.

[*4*] V. N. Tutubalin, The central limit theorem for random motions of a euclidian space. *Selected Transl. in Math. Statist. and Probability*, Vol. **12**, 1973, p. 47 à 57.

[*5*] L. G. Gorostiza, The central limit theorem for randoms motions of d dimensional Euclidean space. *The Annals of Probability*, Vol. **1**, 1973, n° 4, p. 603-612.

(Manuscrit reçu le 6 décembre 1974)