ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. HEINICH

Mesures à valeurs dans un espace de Banach complètement réticulé

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 3 (1974), p. 339-344
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_3_339_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 3, 1974, p. 339-344.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Mesures à valeurs dans un espace de Banach complètement réticulé

par

H. HEINICH
Laboratoire du Calcul des Probabilités.
Université Paris 6[e]

RÉSUMÉ. — Après avoir donné quelques propriétés d'un espace de Banach, G, complètement réticulé « bien plongeable » (définition 4) dans un C-espace E (définition 2) on montre le résultat suivant : une mesure, μ, à valeurs dans G à densité dans E est à densité dans G si et seulement si elle est à variation σ-finie (cf. [*1*] auquel ce texte fait suite).

Soit E un espace vectoriel complètement réticulé — c. r. — à tronquature dénombrable i. e. tel qu'il existe une suite $\{ e_n, n \in \mathrm{N} \} \subset \mathrm{E}^+$ croissante telle que $\forall e \in \mathrm{E}^+$ on a $\bigvee_n (e \wedge e_n) = e$ on dit que $e \wedge e_n \to e$.

L'ensemble des mesures positives d'une tribu $\mathscr{A}$ à valeurs dans E est aussi un espace complètement réticulé. On établit aisément la décomposition de Lebesgue d'une telle mesure: si P est une probabilité sur $\mathscr{A}$ alors μ s'écrit d'une manière unique comme $\mu = \mu_1 + \mu_2$ avec $\mu_2 \wedge e_n\mathrm{P} = 0$ tout n et $\mu_1 = \bigvee_n (\mu \wedge e_n\mathrm{P})$.

DÉFINITION 1. — $\mathscr{M}_\mathrm{P}$ désigne l'ensemble des mesures $\mu : \mathscr{A} \to \mathrm{E}^+$ telles que $\mu = \bigvee_n (\mu \wedge e_n\mathrm{P})$.

Citons comme propriétés : $\mathscr{M}_P$ n'est pas fermé ; $\mu \in \mathscr{M}_P \Rightarrow \mu \ll P$; $\mu \in \mathscr{M}_P \Leftrightarrow (\mu - e_n \wedge P)^+$ décroît vers 0.

Posons $B_n = \{0 \leq e \leq e_n\}$ et F_n l'espace vectoriel engendré par B_n.

DÉFINITION 2. — Un espace vectoriel métrisable complet E est un C-espace si :

a) E est c. r. à tronquature dénombrable $\{e_n\}$.

b) Sa distance vérifie $0 \leq e \leq e' \Rightarrow d(e, 0) \leq d(e', 0)$; $d(e, 0) = d(|e|, 0)$ et d est concave sur E^+.

c) Il existe une topologie normée sur F_n compatible avec la structure d'ordre, telle que sa trace sur chaque B_n est équivalente à la trace de la topologie de E et que B_n soit $\sigma(\hat{F}_n, \hat{F}'_n)$ compact $-$ $\hat{F}_n$ Banach complété de F_n.

Sur un tel espace on peut définir un espace L(E) de variables aléatoires X de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dans E, intégrables ; complet pour la distance

$$N(X) = d\left(\int |X|\, dP, 0\right) - (1) - .$$

PROPOSITION 3. — E étant un C-espace alors

$$\mu \in \mathscr{M}_P \Leftrightarrow \exists X \in L(E) \qquad \text{telle que} \qquad \mu(A) = \int_A X dP .$$

Démonstration. — Soit $\mu \in \mathscr{M}_P$ pour chaque n la mesure vectorielle $\mu \wedge e_n P$ qui prend ses valeurs dans $B_n \subset \hat{F}_n$ se prolonge en une application faiblement compacte de L^1_P dans $\hat{F}_n$ donc à densité. On montre que cette densité X_n appartient p. s. à B_n et qu'ainsi $X_n \in L(E)$. Il est clair que $X_{n+1} \wedge e_n = X_n$ p. s. et que les ensembles $A_n = \{X_n = e_n\}$ décroissent vers un ensemble A négligeable car $e_n P(A) \leq \mu(\Omega)$. Donc X_n croît p. s. comme

$$\int X_n dP = (\mu \wedge e_n P)(\Omega)$$

converge vers $\mu(\Omega)$, X_n est de Cauchy dans L(E) et par conséquent $X_n \to X$ p. s. et dans L(E) X est alors la densité de μ.

Réciproquement si $\mu(A) = \int_A X dP$ alors $(\mu \wedge e_n P)(A) = \int_A X \wedge e_n dP$ et comme $X \wedge e_n$ converge vers X dans L(E) on a bien la convergence de $\mu \wedge e_n P$ vers μ.

DÉFINITION 4. — Un espace, G, de Banach, c. r., à tronquature dénombrable $\{x_n\}$ tel que $K_n = \{0 \leq x \leq x_n\}$ soit faiblement compact pour tout n est dit « bien plongeable dans un C-espace E » si : il existe une injection j continue de G dans E telle que $j(x_n) = e_n$; j héréditaire :

$$j(0 \leq x \leq x_0) = \{ 0 \leq e \leq j(x_0) \}$$

et j isomorphisme d'ordre : $j(x) \leq j(y) \Leftrightarrow x \leq y$.

DÉFINITION 5. — Une application f de G dans $\overline{\mathrm{R}}$ est m-continue si elle est continue pour les suites monotones convergentes.

PROPOSITION 6. — Sous les conditions précédentes G est presque solide. Pour tout $u \in \mathrm{G}'$ il existe u^+ application s. c. i., m-continue, de G^+ dans $\overline{\mathrm{R}^+}$ telle que, pour chaque n, sa restriction à K_n soit la partie positive de u et soit continue.

Démonstration. — On remarque d'abord que j est bicontinue pour les topologies faibles de K_n sur B_n, soit j^* son inverse. $v = u \circ j^*$ est une forme linéaire sur B_n et on peut définir v^+ par $v^+(e) = \sup \{ v(e') \text{ pour } 0 \leq e' \leq e, e \in \mathrm{B}_n \}$.

Montrons que v est continue :

Pour $e_i \to 0$ dans $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{E}$ il existe $0 \leq e'_i \leq e_i$ tel que $v^+(e_i) \leq \varepsilon_i + v(e'_i)$ or $d(e_i, 0) \to 0$ donc $d(e'_i, 0) \to 0$ et e'_i converge vers 0 dans $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{F}_n$ et $v(e'_i) \to 0$ c'est bien la continuité de v^+.

$v^+ = (u \circ j^*)^+ = u^+ \circ j^*$ est clair car :

$$\begin{aligned} u^+(j(e)) &= \sup (u(x) ; 0 \leq x \leq j^*(e)) \\ &= \sup (u \circ j(e') ; 0 \leq j^*(e') \leq j^*(e)) \\ &= \sup (v(e') ; 0 \leq e' \leq e) \end{aligned}$$

Montrons que u^+ est continue sur K_n : si $x_i \to 0$ dans K_n alors $j(x_i) \to 0$ dans B et $u^+ j(x_i) \to 0$ c'est-à-dire que $u^+(x_i) \to 0$. Il aurait fallu mettre u_n^+ pour rappeler que l'on se référait à K_n mais il clair que $u_{n+1}^+ \mid \mathrm{K}_n = u_n^+$ et si $\tilde{u}^+$ est définie par $\tilde{u}^+(x) = \text{limite} \nearrow u_n^+(x) = \lim_n u_n^+(x \wedge x_n)$; alors $\tilde{u}^+$ est s. c. i. et on peut, sans ambiguïté $\tilde{u}^+ = u^+$.

Montrons que u^+ est m-continue.

Soit $\{ y_n \}$ croissante vers y dans G^+ :

— Si $u^+(y) < +\infty$ alors $u^+(y) \leq \varepsilon + u(x)$ pour un $x : 0 \leq x \leq y$ or $x \wedge y_n \nearrow x$ et si n grand on a :

$$u^+(y) \leq 2\varepsilon + u^+(y_n \wedge x) \leq 2\varepsilon + u^+(y_n)$$

donc

$$u^+(y_n) \nearrow u^+(y).$$

— Si $u^+(y) = +\infty$ on aurait de même $u(x) \geq M$ et $u(x \wedge y_n) \geq M - \varepsilon$ et $u^+(y_n) \geq M - \varepsilon$.

Remarques. — Le convexe fermé $\bigcap_{\|u\| \leq 1} (u^+ \leqslant 1)$ engendre un sous-espace G_0 solide et dense dans G.

G_0 considéré comme un Banach avec sa norme jauge montre qu'il existe un Banach solide et une injection de ce Banach dans G dont l'image est partout dense.

Si pour tout $x \in G^+$ l'ensemble $\{ 0 \leq y \leq x \}$ est faiblement compact alors G est solide.

COROLLAIRE 7. — Sous les conditions précédentes il existe une application p de $E^+ \to \overline{R^+}$, croissante, s. c. i., m-continue telle que sa restriction à chaque B_n soit continue et pour tout $x \in G$ « on a : »

$$p \circ j(x) = \sup_{\|u\| \leq 1} (u^+(x)) .$$

DÉFINITION 8. — G est m-complet si toute suite monotone $\{ x_n \}$ croissante $\subset G^+$ telle que $\sup_n u^+(x_n) < +\infty$ tout $u \in G^+$ converge faiblement dans G — donc fortement, donc majorée —. Tout espace c. r. faiblement Σ-complet est m-complet, en particulier si G est séquentiellement faiblement complet.

COROLLAIRE 9. — Si de plus G est m-complet alors $p(e) < +\infty \Leftrightarrow e \in j(G_0)$.

Démonstrations. — Corollaire 7. — Pour $u \in G'$ posons $p_u^n(e) = u^+(j^*(e \wedge e_n))$. p_u^n est une fonction continue croissante en $e \in E^+$ et sa restriction à B_n est linéaire. La fonction $p_u(e) = \lim_n p_u^n(e)$ est croissante sur E^+, s. c. i., et sa restriction à chaque B_n est encore continue, de plus on a $p_u(j(x)) = u^+(x)$ pour tout $x \in G$. Montrons que p_u est m-continue : soit e'_i croissant vers e dans E^+, si $p_n(e) < +\infty$ pour n assez grand il vient $p_u(e) \leq \varepsilon + p_u^n(e)$ et $p_u(e) \leq 2\varepsilon + p_u^n(e'_i)$ donc $p_u(e) \leq 2\varepsilon + p_u(e_i)$ c'est bien que $p_u(e'_i) \nearrow p_u(e)$, preuve analogue si $p_u(e) = +\infty$. Soit J partie finie de la boule unité de G' posons $p_J(e) = \sup_{u \in J} p_u(e)$ et $p = \lim_J p_J$ l'application p de $E^+ \to \overline{R^+}$ vérifie les conditions du corollaire.

Corollaire 9. — Pour une suite croissante $\{ g_n \} \subset G^+$ non convergente il existe $u \in G'$ tel que $\sup_n u^+(g_n) = +\infty$ donc $\lim_n p(j(g_n)) = +\infty$ et si $e \in j(G_0)$ la suite $g_n = j^*(e \wedge e_n)$ n'est pas convergente donc $p_u(e) = +\infty$ et $p(e) = +\infty$.

DÉFINITION 10. — La variation $v(\mu)$ d'une mesure μ positive à valeurs dans G est la mesure $v(\mu) = \bigvee_{\substack{u \in G' \\ \|u\| \leq 1}} u^{+} \circ \mu$.

PROPOSITION 11. — Soit μ une mesure positive à valeurs dans G espace de Banach bien plongeable dans un C-espace E et admettant une densité X, dans E, par rapport à une probabilité P alors

$$v(\mu)(A) = \int_A p \circ X dP .$$

Démonstration. — Si φ est une v. a. étagée de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dans B_n alors

$$\int p_u \circ \varphi dP = p_u\left(\int \varphi dP \right);$$

par conséquent si $X_n \in L(E)$ et $X_n \subset B_n$ p. s. on a encore

$$p_u\left(\int X dP \right) = \int p_u(X) dP .$$

En particulier si X_n est la densité de $j(\mu) \wedge e_n P$, on a vu que $X_n \nearrow X$ dans L(E) donc $p_u\left(\int X_n dP \right)$ croît vers $p_u\left(\int X dP \right)$ pour tout u et

$$p\left(\int X dP \right) = \lim_n p\left(\int X_n dP \right)$$

de même $p_u X_n$ croît vers $p_u X$ donc $\int p_u(X_n)$ croît vers $\int p_u(X)$ et

$$p_u\left(\int_A X dP \right) = \int_A p(X) dP = u^{+} \circ \mu(A)$$

d'où :

$$\left(\bigvee_{u \in J} u^{+} \circ \mu \right)(A) = \int_A p_J \circ X dP$$

et comme $P_X = P \circ X^{-1}$ est une mesure de Radon sur $\overline{X(\Omega)} \subset E$ on obtient

$$v(\mu)(A) = \int_A p \circ X dP .$$

COROLLAIRE 12. — Si μ est à variation σ-finie et G m-complet alors μ est à densité dans G_0.

En effet $X_n = X \wedge e_n$ est mesurable dans $B_n \subset F_n$ d'où: X_n est faiblement mesurable dans $K_n \subset G$ — en écrivant encore X_n pour $j^* \circ X_n$ — donc fortement mesurable — G Banach — et par conséquent il en est de même de X qui prend p. s. ses valeurs dans G_0 car $p \circ X < +\infty$ p. p. corollaire 9.

Remarque. — Les résultats s'étendent au cas d'un espace complètement réticulé muni d'une topologie localement convexe séparée et bien plongeable — proposition 11 — En particulier le corollaire 12 demeure pour un espace de Fréchet solide.

Exemple. — Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité complet et $\{ A_n \}$ une suite croissante $\subset \mathscr{A}$ telle que $\Omega = \cup A_n$. L'espace $G = L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{A}; P; (A_n))$ est bien plongeable dans le C-espace $E = L^0(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] H. HEINICH, Intégration dans certains espaces de Riesz à distance concave. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. X, n° 2, 1974.

(Manuscrit reçu le 5 février 1974)