ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. BRUNEL
D. REVUZ

Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 3 (1974), p. 301-337
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_3_301_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 3, 1974, p. 301-337. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité

par

A. BRUNEL (*) et D. REVUZ (*)

Paris VI Paris VII
Laboratoire de Calcul des Probabilités,
9, Quai-Saint-Bernard, tour 56, 75230 Paris Cedex 05

SUMMARY. — In the first chapter we recall some results about quasi-compact operators, the goal being to gather a matter which is scattered in the literature. Then, the emphasis is put on Markov kernels and properties of special functions in the sense of Neveu, mainly characterizing special functions in terms of quasi-compactness. Then we study the case of complex contractions of L^1, satisfyng a Harris condition, investigating the behaviour of the sums $\Sigma Z^n T^n f$, with a charge f and a complex number Z of modulus 1. The last chapter if devoted to convolution kernels.

INTRODUCTION

L'étude des propriétés asymptotiques des chaînes de Markov et, particulièrement, celle des théorèmes ergodiques forts, est intimement liée à la théorie spectrale des opérateurs quasi-compacts. Les travaux de Fortet [*7*] et Yosida [*17*] sont essentiellement basés sur les propriétés spectrales remarquablement simples des noyaux quasi-compacts. L'article récent [*14*] où J. Neveu a édifié la théorie des fonctions spéciales des chaînes récurrentes au sens de Harris a conduit les auteurs du présent article

(*) Équipe de recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 1 « Mathématiques, Informatique » du C. N. R. S.

à appliquer une fois de plus des méthodes et des résultats d'Analyse fonctionnelle qui, malheureusement, sont trop particuliers pour être facilement accessibles dans la littérature où on ne peut les rencontrer que sous une forme éparse. Il nous a donc semblé utile de donner un exposé des propriétés spectrales des opérateurs quasi-compacts en insistant sur celles qui sont liées au calcul des probabilités, et notamment à l'étude des chaînes de Harris. Outre les travaux de S. Horowitz [*10*] dans ce domaine, signalons que les auteurs du présent article ont exploité tout récemment ces méthodes dans la résolution de certains problèmes posés par l'étude des promenades aléatoires sur les groupes localement compacts [*6*].

Le plan du présent article est alors le suivant. Les sections I et II sont en majeure partie des rappels sur la théorie spectrale des opérateurs quasi-compacts et son application aux chaînes de Harris. Les sections III à V sont dévolues à l'étude des fonctions spéciales des chaînes de Harris grâce aux propriétés de quasi-compacité des opérateurs de changement de temps qui leur sont liés. On caractérise notamment les fonctions qui sont spéciales à la fois pour la chaîne étudiée et pour la chaîne duale. Ceci permet d'améliorer des résultats de Neveu [*14*] et se trouve être d'une grande importance pour l'étude des marches de Harris sur les groupes localement compacts. Les sections VI et VII utilisent la notion de quasi-compacité pour l'étude des contractions des espaces L^1 de fonctions complexes. Le résultat principal (théorème VII.1) est une généralisation à ce cas d'un théorème ergodique d'Ornstein-Métivier. Enfin, la dernière section montre des exemples d'opérateurs quasi-compacts liés aux promenades aléatoires de lois étalées et en déduit certains résultats de convergence. Cette section peut se lire indépendamment des sections II à VII.

Nous remercions MM. Élie et Émery qui nous ont permis de simplifier la rédaction des sections III à V.

I. THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS QUASI-COMPACTS

Dans cette section B désignera un espace de Banach sur le corps C des complexes. L'opérateur identique sera noté I.

I.1. DÉFINITION. — *Un opérateur linéaire et continu* V *sur* B *est dit quasi-compact s'il existe un entier n et un opérateur compact* K *tels que*

$$\| V^n - K \| < 1.$$

Cette définition est équivalente à la suivante (cf. [*17*]) : il existe une suite (K_n) d'opérateurs compacts tels que

$$\lim_{n\to\infty} \| V^n - K_n \| = 0,$$

ce qui est une conséquence immédiate de la définition I.1.

Exemples. — Dans les sections suivantes nous rencontrerons des opérateurs quasi-compacts utiles pour les probabilistes. En particulier, puisque son carré est compact, un opérateur faiblement compact de B dans lui-même est quasi-compact. C'est en fait ce dernier exemple qui est à la base de la preuve de la quasi-compacité de certains opérateurs.

Dans toute la suite de cette section nous étudions un opérateur quasi-compact V sur B.

I.2. PROPOSITION. — *L'ensemble des valeurs propres de* V *n'a aucun point d'accumulation de module* $\geqslant$ 1.

Démonstration. — Par hypothèse il existe un entier n et un opérateur compact K tels que

$$\| V^n - K \| < \frac{1}{8}.$$

Il suffit de démontrer le résultat pour $V' = V^n$. Il en résultera évidemment que le résultat est aussi vrai pour V. Supposons qu'il soit faux. Il existe alors une suite (x_i) dans B et une suite de scalaires (λ_i) tels que :

$$(\lambda_i I - V')(x_i) = 0, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j, \qquad \lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda \text{ avec } |\lambda| \geqq 1.$$

Pour tout i, les éléments $x_1, \ldots, x_i$ sont linéairement indépendants et nous noterons R_i le sous-espace qu'ils engendrent ; R_{i-1} est un sous-espace propre de R_i. Par un théorème dû à F. Riesz [*18*], il existe, pour chaque i, $y_i \in R_i$ tel que :

$$\| y_i \| = 1, \ \| y_i - x \| > \frac{1}{2} \text{ pour tout } x \in R_{i-1}.$$

On a aussi pour tout i,

$$y_i - V'(y_i/\lambda_i) \in R_{i-1} \qquad \text{et} \qquad V'(y_j/\lambda_j) \in R_{i-1} \text{ si } j < i,$$

et par suite, en écrivant

$$V'(y_i/\lambda_i) - V'(y_j/\lambda_j) = y_i - ((y_i - V'(y_i/\lambda_i)) - V'(y_j/\lambda_j)),$$

on obtient que

$$i > j \Rightarrow \| V'(y_i/\lambda_i) - V'(y_j/\lambda_j) \| > \frac{1}{2}.$$

Cela entraîne, pour $i > j$,

$$\| K(y_i/\lambda_i) - K(y_j/\lambda_j) \| + \frac{1}{8} \| y_i/\lambda_i - y_j/\lambda_j \| > \frac{1}{2}.$$

Comme $\| y_i \| = 1$ et $\lambda_i \to \lambda$, l'ensemble des nombres $\| K(y_i/\lambda_i) - K(y_j/\lambda_j \|$ pour $i \neq j$ est minoré à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif ce qui est incompatible avec la compacité de K. ■

Remarque. — Si l'une des puissances de V est compacte, le produit de V par un scalaire arbitraire a encore la même propriété. Il résulte alors de la proposition précédente que 0 est le seul point d'accumulation éventuel des valeurs propres de V.

Nous allons montrer maintenant que la partie du spectre de V qui n'est pas constituée de valeurs propres de module $\geqq 1$ est contenue dans un disque centré en 0 de rayon strictement inférieur à 1.

I.3. LEMME. — *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une application holomorphe d'un domaine $\mathcal{D}$ du plan complexe, ne contenant pas 0, dans l'ensemble des opérateurs compacts. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des points λ de $\mathcal{D}$ tels que* $\operatorname{Ker}(I - K(\lambda)) \neq \{ 0 \}$. *Alors, pour $\lambda \in \mathcal{D} - \mathcal{I}$, $I - K(\lambda)$ a un inverse de la forme $I + E(\lambda)$ où $E(\lambda)$ est compact et l'application $\lambda \to E(\lambda)$ est holomorphe.*

Démonstration. — Si $K(\lambda)$ est compact, les seuls points de son spectre sont des valeurs propres et donc si $\lambda \notin \mathcal{I}$, l'opérateur $I - K(\lambda)$ a un inverse continu que l'on peut écrire $I + E(\lambda)$. De la relation $(I - K(\lambda))(I + E(\lambda)) = I$ il résulte que $E(\lambda) = K(\lambda)(I + E(\lambda))$ et donc que $E(\lambda)$ est compact. D'autre part l'application $\lambda \to E(\lambda) = K(\lambda)(I - K(\lambda))^{-1}$ est holomorphe.

I.4. PROPOSITION. — *Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que la résolvante $R(\lambda)$ de V soit méromorphe dans l'ensemble $\{ \lambda : | \lambda | > 1 - \varepsilon \}$. Si λ_0 est une valeur propre de V de module $\geqq 1$, alors dans le développement de $R(\lambda)$ en série de Laurent*

$$R(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n K_n,$$

tous les opérateurs K_n pour $n < 0$ sont compacts.

Démonstration. — Nous supposons d'abord l'existence d'un opérateur compact K tel que $\| V - K \| < 1$. Les valeurs propres de V de module supérieur ou égal à 1 sont au plus en nombre fini et ne sont pas points d'accumulation de valeurs propres. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\operatorname{Ker}(\lambda I - V) = \{ 0 \} \quad \text{pour} \quad | \lambda | > 1 - \eta \text{ et } \lambda \text{ non valeur propre.}$$

Posons $U = V - K$; on a $\| U \| = \delta < 1$ et donc la résolvante $R(\lambda, U) = (\lambda I - U)^{-1}$ existe et est holomorphe pour $| \lambda | > \delta$ et on a

$$R(\lambda, U)(\lambda I - V) = I - R(\lambda, U)K.$$

On peut appliquer le lemme précédent qui prouve que pour

$$|\lambda| > 1 - \varepsilon = \sup(1 - \eta, \delta),$$

$R(\lambda, U)(\lambda I - V)$ a un inverse de la forme $I + E(\lambda)$, où $E(\lambda)$ est compact et $\lambda \to E(\lambda)$ holomorphe, sauf aux valeurs propres de V. L'opérateur $\lambda I - V$ a donc également un inverse continu dans ce domaine donné par

$$R(\lambda) = (I + E(\lambda))R(\lambda, U).$$

La résolvante $R(\lambda)$ est donc méromorphe dans $\{\lambda : |\lambda| > 1 - \varepsilon\}$.

Si maintenant λ_0 est une valeur propre de module $\geqq 1$ de V, pour obtenir la dernière assertion, nous appliquons des résultats bien connus [*18*]. On a notamment

$$K_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c (\lambda - \lambda_0)^{-n-1}R(\lambda)d\lambda,$$

où c est un cercle convenablement choisi.

Comme $R(\lambda, U)$ est holomorphe, la valeur de l'intégrale le long de c de $(\lambda - \lambda_0)^{-n-1}R(\lambda, U)$ est nulle pour $n \leq 0$, et donc

$$K_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c (\lambda - \lambda_0)^{-n-1}E(\lambda)R(\lambda, U)d\lambda$$

ce qui prouve que K_n est compact.

Supposons maintenant que V soit un opérateur quasi-compact quelconque. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que V^n ait les propriétés ci-dessus. Comme pour $|\lambda|^n > 1 - \varepsilon$, $R(\lambda^n, V^n)$ existe et que

$$(\lambda^n I - V^n) = (\lambda I - V)(\lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}V + \dots + V^{n-1}),$$

on voit que $R(\lambda) = (\lambda^{n-1}I + \dots + V^{n-1})R(\lambda^n, V^n)$ existe pour $|\lambda| > 1 - \varepsilon'$ pour un ε' bien choisi et que $R(\lambda)$ a les propriétés voulues.
En résumé :

THÉORÈME. — Un opérateur, V est quasi-compact si et seulement si il est égal à la somme d'un opérateur de rang fini et d'un opérateur de rayon spectral inférieur à 1.

Remarque. — Si une puissance de V est compacte les seuls points du spectre de V sont des valeurs propres.

Avant d'appliquer ce qui précède, rappelons quelques définitions.

I.5. DÉFINITION. — *Un opérateur* V *linéaire et continu sur* B *est dit à indice si son image est fermée et si la dimension du noyau et la co-dimension de l'image sont finies. On appelle alors son indice le nombre*

$$\text{Ind } V = \dim(\text{Ker } V) - \text{codim}(\text{Im } V).$$

I.6. THÉORÈME. — *Si V est quasi-compact, alors pour tout nombre* λ_0, *de module* $\geqq 1$, *l'opérateur* $\lambda_0 I - V$ *est d'indice nul.*

Démonstration. — Si λ_0 n'est pas valeur propre le résultat est évident. Si λ_0 est valeur propre on peut écrire le développement de $R(\lambda)$ en série de Laurent autour de λ_0 comme cela est fait en I.4.

$$R(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n K_n .$$

D'après un résultat de Nagumo (cf. [*17*]) les opérateurs

$$R^-(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\lambda - \lambda_0)^n K_n \quad \text{et} \quad R^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n K_n$$

sont les résolvantes de deux opérateurs A^+ et A^- continus et jouissant des propriétés suivantes,

$$A^+A^- = A^-A^+ = 0,$$

A^- est compact et $R^+(\lambda)$ est holomorphe en λ_0, autrement dit $\lambda_0 I - A^+$ est inversible. Alors l'opérateur $\lambda_0 I - V = \lambda_0 I - A^+ - A^-$ est la somme d'un opérateur inversible et d'un opérateur compact. Il est donc d'indice nul d'après le théorème de l'indice pour les opérateurs compacts.

Remarque. — Si une puissance de V est compacte, le même résultat est valable pour tout nombre λ_0 de module > 0.

II. APPLICATION DE LA QUASI-COMPACITÉ AUX CHAÎNES DE HARRIS

Comme il a été dit dans l'introduction la notion de quasi-compacité permet de donner des conditions nécessaires et suffisantes dans certaines questions de théorie ergodique.

II.1. — Dans la suite de cette section nous appellerons $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable de type dénombrable et P une probabilité de transition sur $(E, \mathscr{E})$. Cette probabilité définit sur l'espace de Banach $b\mathscr{E}$ des fonctions bornées un opérateur linéaire positif de norme inférieur à 1. Si la chaîne de Markov canonique X est récurrente au sens de Harris (on dira aussi que P est de Harris) le théorème d'Orey fournit un théorème de convergence pour les itérés P_n de P (cf. [*15*]). La quasi-compacité conduit au théorème plus fort suivant :

THÉORÈME. — *Il existe un entier d tel que les opérateurs* P_{nd+k} *conver-*

gent, lorsque n tend vers l'infini, pour k fixé, vers un opérateur de rang fini, au sens de la topologie uniforme, si et seulement si P *est quasi-compacte.*

Ce théorème est dû à Yosida et Kakutani [*19*]. La nécessité est évidente. Une démonstration de la suffisance se trouve par exemple dans [*13*].

Pour référence ultérieure nous allons détailler ce résultat. On suppose donc P quasi-compacte et on appelle $\tilde{\mathrm{P}}$ la probabilité de transition sur $\mathrm{E} \times \mathbb{N}$ donnée par

$$\tilde{\mathrm{P}}((x, n), .) = \mathrm{P}(x, .) \otimes \varepsilon_{n+1}(.) .$$

L'espace vectoriel des fonctions P (resp. $\tilde{\mathrm{P}}$)-harmoniques bornées et de dimension finie. Plus précisément il existe un nombre fini $\left(\sum_{\rho=1}^{r} d_\rho\right)$ de fonctions mesurables positives notées $\mathrm{U}_{\rho,\delta}$ où δ est un entier mod. d_ρ et ρ un entier variant de 1 à r, telles que toute fonction $\tilde{\mathrm{P}}$-harmonique g admette une représentation unique

$$g(., n) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} c_{\rho,\delta} \mathrm{U}_{\rho,\delta+n} \; ; \; c_{\rho,\delta} \in \mathbb{R} .$$

Si l'on pose $\mathrm{U}_\rho = \sum_{\delta=1}^{d_\rho} \mathrm{U}_{\rho,\delta}$, toute fonction P-harmonique f admet une représentation unique

$$f = \sum_{\rho=1}^{r} b_\rho \mathrm{U}_\rho .$$

On peut de plus choisir les $\mathrm{U}_{\rho,\delta}$ d'une manière et d'une seule pour que

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} \mathrm{U}_{\rho,\delta} = 1 .$$

Dans la suite nous supposerons les $\mathrm{U}_{\rho,\delta}$ ainsi choisis. Il existe alors des probabilités $m_{\rho,\delta}$ portées par les ensembles $\mathrm{E}_{\rho,\delta} = \{ \mathrm{U}_{\rho,\delta} = 1 \}$ disjoints deux à deux, telles que si d est le p.p.c.m des d_ρ, la convergence

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}_{nd+m} = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} \mathrm{U}_{\rho,\delta-m} \otimes m_{\rho,\delta}$$

ait bien lieu uniformément.

Les ensembles $\mathrm{E}_\rho = \bigcup_\delta \mathrm{E}_{\rho,\delta}$ sont des ensembles absorbants pour la chaîne de Markov canonique X de probabilité de transition P. Sa trace sur chaque E_ρ est une chaîne de Harris de mesure invariante $m_\rho = \sum_\delta m_{\rho,\delta}$.

Les $E_{\rho,\delta}$ sont les classes cycliques et d_ρ la période correspondante.

II.2. — Nous allons maintenant donner quelques propriétés équivalentes à la quasi-compacité.

On appelle moyenne sur $(E, \mathscr{E})$ une forme linéaire et continue sur $b\mathscr{E}$. Toute moyenne est la somme d'une mesure bornée et d'une moyenne étrangère à toutes les mesures bornées, que nous appellerons moyenne pure. Une moyenne ϕ est dite invariante si, pour tout $f \in b\mathscr{E}$, on a

$$\langle \phi, f \rangle = \langle \phi, Pf \rangle .$$

Le résultat suivant est énoncé par Horowitz dans un autre cadre.

II.2. THÉORÈME. — *Si* X *est une chaîne de Harris de mesure invariante m, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est quasi-compact.*

(ii) $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P_k$ *converge uniformément vers un opérateur de rang* 1.

(iii) *Il n'existe pas de moyenne pure positive invariante par* P.

(iv) *La mesure m est bornée et* $(I - P)b\mathscr{E}$ *est égal à l'espace fermé de co-dimension* 1 *des fonctions de m-intégrale nulle.*

(v) *La mesure m est bornée et c'est la seule moyenne invariante.*

La démonstration de ce résultat se trouve dans [*15*]. La démonstration de (*i*) $\Rightarrow$ (*iv*) utilise la théorie spectrale de la section précédente. Le résultat (*iv*) $\Rightarrow$ (*i*) avait été trouvé par A. Brunel en même temps qu'Horowitz. On trouvera dans la section 7 une généralisation de la méthode employée par Brunel et totalement différente de celle d'Horowitz.

Démonstration

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Une démonstration est donnée dans Neveu [*13*]. Le résultat est dû à Yosida et Kakutani (1940).

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Soit ϕ une moyenne pure positive.

L'égalité $\phi \wedge m = 0$ entraîne que si f décrit l'ensemble des éléments de $b\mathscr{E}$ compris entre 0 et 1, on a

$$\inf_{0<f<1} (\phi(f) + m(1 - f)) = 0 ,$$

ce qui implique que

$$\inf_{A \in \mathscr{E}} (\phi(1_A) + m(A^c)) = 0 .$$

Soit alors A_n une suite d'ensembles mesurables tels que

$$\phi(1_{A_n}) + m(A_n^c) < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

ε étant un nombre positif fixé. On a $\phi(1_{\bigcap_n A_n}) \leqq \phi(1_{A_n})$ pour tout n et donc $\phi(1_{\bigcap_n A_n}) = 0$. Puis on peut écrire $m\left(\bigcap_n A_n\right) = 1 - m\left(\bigcup_n A_n^c\right)$, qui donne l'inégalité $m\left(\bigcap_n A_n\right) > 1 - \varepsilon$.

Si ϕ est une moyenne invariante et $\phi(1_{\bigcap_n A_n}) = 0$, on a aussi pour tout n,

$$\left\langle \phi, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_k\left(\cdot, \bigcap_n A_n\right)\right\rangle = 0 .$$

Or l'hypothèse (*ii*) nous dit que les moyennes de Cesaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_k\left(\cdot, \bigcap_n A_n\right)$$

convergent uniformément vers la fonction constante et égale à $m\left(\bigcap_n A_n\right)$, ce qui entraîne une contradiction.

(*i*) $\Rightarrow$ (*iv*). Le fait que m soit bornée résulte de (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Alors, en notant $b_0\mathscr{E}$ le sous-espace formé de $b\mathscr{E}$ formé des fonctions de m-intégrale nulle, on obtient $(I - P)(b\mathscr{E}) \subset b_0\mathscr{E}$. On aura l'égalité cherchée en montrant que $(I - P)(b_0\mathscr{E}) = b_0\mathscr{E}$. Le noyau P est un opérateur linéaire continu de l'espace de Banach $b_0\mathscr{E}$ dans lui-même. Il suffit ainsi de prouver que 1 n'est pas dans le spectre de P et, compte tenu des résultats énoncés dans la partie I, il suffit de vérifier que la restriction de P à $b_0\mathscr{E}$ est encore un opérateur quasi-compact. Or l'hypothèse est qu'il existe une suite Q_n d'opérateurs compacts de $b\mathscr{E}$ dans lui-même telle que $\lim_{n\to\infty} \| P^n - Q_n \| = 0$.

Supposons m normalisée et soit $\pi : b\mathscr{E} \to b_0\mathscr{E}$ défini par $\pi f = f - \int f dm$. L'opérateur linéaire π est un projecteur borné et les opérateurs πQ_n sont compacts. Or l'inégalité $\| P^n - \pi Q_n \|_{b_0\mathscr{E}} \leqq \| \pi P^n - \pi Q_n \|_{b\mathscr{E}}$ montre que

$$\lim_{n\to\infty} \| P^n - \pi Q_n \|_{b_0\mathscr{E}} = 0 .$$

ce qui achève la démonstration.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*v*). Une moyenne v, invariante par P, s'annule sur $(I - P)b\mathscr{E}$, donc aussi sur $b_0\mathscr{E}$. Par conséquent v et m sont deux formes linéaires ayant le même noyau $b_0\mathscr{E}$. Elles sont donc proportionnelles.

(v) $\Rightarrow$ (iii) est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Il s'agit de construire un noyau compact Q et un entier j tels que $P^j = Q + R$ et $\| R \| < 1$. La tribu $\mathcal{E}$ étant séparable il est connu que tout noyau compact est un noyau intégral. Inversement on a le théorème suivant dû à Mokobodzki.

II.3. THÉORÈME. — *Si λ est une mesure positive σ-finie sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{E})$ *de type dénombrable et* N *un noyau intégral de base λ tel que* N(1) *soit finie, alors il existe une suite croissante* A_n *d'éléments de* $\mathcal{E}$ *telle que*

a) $\lambda(A_n) \uparrow \lambda(E)$ *quand* $n \to \infty$.

b) *Les noyaux* $I_{A_n}.N$ *sont compacts.*

La démonstration se trouve dans [*15*].

Maintenant la tribu $\mathcal{E}$ étant séparable on sait que P^n peut s'écrire pour tout n, $P^n = Q_n + R_n$ où Q_n est un noyau intégral de base m et $R_n(x,.)$ est une mesure étrangère à m pour tout $\times$ E.

Puisque la chaîne X est irréductible c'est-à-dire que

$$\forall x \in E \qquad m \ll \sum_{n \geq 1} 2^{-n} P^n(x, .),$$

il existe un entier n_0 tel que $m(\{ R_{n_0}(1) < 1 \}) > 0$. En appliquant le théorème II.3, on obtient pour tout entier k,

$$P^{n_0} = I_{A_k} Q_{n_0} + R \qquad \text{avec} \qquad R = (I - I_{A_k}) Q_{n_0} + R_{n_0},$$

et l'on a aussi

$$m(\{ R(1) < 1 \}) \geqq (\{ R_{n_0}(1) < 1 \} \cap A_k) > 0,$$

à condition de choisir k suffisamment grand. Si l'on tient compte de la compacité de l'opérateur $I_{A_k} Q_{n_0}$ il reste donc à montrer l'existence d'un entier p pour lequel $\| R^p \| < 1$. Dans ce but on va prouver le

II.4. LEMME. — *L'opérateur* R *n'a pas de moyenne non triviale invariante.*

Démonstration. — Soit $\nu = \nu R$ et $\nu = \nu^+ - \nu^-$. L'égalité $\nu^+ R - \nu^- R = \nu^+ - \nu^-$ entraîne que $\nu^+ R \geq \nu^+$ et $\nu^- R \geq \nu^-$.

On peut écrire $\nu^+ \leqq \nu^+ R \leqq \nu^+ P^{n_0}$ et

$$\langle \nu^+, 1 \rangle = \langle \nu^+, P^{n_0} 1 \rangle = \langle \nu^+ P^{n_0}, 1 \rangle \geqq \langle \nu^+, 1 \rangle .$$

D'où l'on tire $\nu^+ = \nu^+ P^{n_0} = \nu^+ R$ et les mêmes égalités pour ν^-. Soit maintenant $\nu^+ = \nu_1 + \nu_2$ la décomposition de ν^+ en moyenne pure positive ν_1 et en mesure positive bornée ν_2. L'égalité

$$\nu_1 P^{n_0} + \nu_2 P^{n_0} = \nu_1 + \nu_2,$$

montre que $\nu_2 P^{n_0} \leqq \nu_2$ qui entraîne à son tour $\nu_2 P^{n_0} = \nu_2$ et donc aussi $\nu_1 P^{n_0} = \nu_1$. On a alors, en posant $\phi = \sum_{j=0}^{n_0-1} \nu_1 P^j$, l'égalité $\phi = \phi P$. L'hypothèse (*iii*) entraîne que ϕ n'est pas une moyenne pure et donc pour un j au moins, $0 \leqq j < n_0$, $\nu_1 P^j$ n'est pas une moyenne pure, soit $\nu_1 P^j = \lambda + \mu$ où λ est une mesure bornée > 0 et μ une moyenne pure. Cela donne

$$\nu_1 = \nu_1 P^{n_0} = (\lambda + \mu) P^{n_0 - j} \geqq \lambda P^{n_0 - j}.$$

On doit donc avoir $\nu_1 = 0$.

D'autre part $\nu_2 = \nu_2 P^{n_0}$ entraîne que la mesure bornée $\sum_{j=0}^{n_0-1} \nu_2 P^j$ est invariante par P et donc qu'il existe $c \in \mathrm{R}_+$ tel que $\sum_{j=0}^{n_0-1} \nu_2 P^j = c.m.$ Donc si m est infinie, $c = 0$ et $\nu_2 = 0$. Si m est bornée, le théorème d'Orey donne

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\nu_2(E)} \nu_2 P^n - \frac{1}{m(E)} m P^n \right\| = 0,$$

et puisque $mP = m$, on en déduit que ν_2 est proportionnelle à m. Finalement $\nu^+ R = \nu^+ = \nu_2 R = \nu_2$ et $\nu_2(\{ R1 < 1 \}) > 0$. Or

$$0 = \langle \nu_2 R - \nu_2, 1 \rangle = \langle \nu_2, R1 - 1 \rangle < 0$$

montre que ν_2 aussi doit être nulle.

Revenons à la démonstration de (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*). Nous savons maintenant que R n'a pas de moyenne invariante autre que 0. Le théorème de Hahn-Banach montre que $\overline{(I - R) b\mathscr{E}} = b\mathscr{E}$, ce qui prouve l'existence sur tout $\varepsilon > 0$ d'un élément $g \in b\mathscr{E}$ tel que

$$\| g - Rg - 1 \| \leqq \varepsilon.$$

On a donc

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R^j(1) \right\| \leqq \varepsilon + 2\frac{\|g\|}{n},$$

et puisque $R(1) \leqq 1$, on en déduit $R^n(1) \leqq \varepsilon + 2\frac{\|g\|}{n}$ et donc l'existence d'un entier p tel que $\| R^p \| < 1$.

On a ainsi prouvé les implications

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (ii) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
(i) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (iii) \arrow[ll, Rightarrow] & \\
 & (iv) \arrow[r, Rightarrow] & (v) \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

qui achèvent la démonstration du théorème.

III. CARACTÉRISATION DES FONCTIONS SPÉCIALES

III.1. Rappels sur les fonctions spéciales au sens de Neveu [*14*].

Soit P le noyau de transition d'une chaîne de Harris sur un espace d'états $(E, \mathscr{E})$, m, la mesure invariante de cette chaîne. A toute fonction borélienne h à valeurs dans $[0, 1]$, on associe l'opérateur

$$U_h = \sum_{n \geq 0} (PI_{1-h})^n P = \sum_{n \geq 0} P(I_{1-h}P)^n,$$

où I_{1-h} est l'opérateur de multiplication par $1 - h$.

Pour deux fonctions h et k telles que $0 \leqq h \leqq k \leqq 1$, les opérateurs associés U_h et U_k vérifient les équations résolvantes

$$\begin{aligned} U_h &= \sum_{n \geq 0} (U_k I_{k-h})^n U_k = \sum_{n \geq 0} U_k (I_{k-h} U_k)^n \\ &= U_k + U_h I_{k-h} U_k = U_k + U_k I_{k-h} U_h \,. \end{aligned}$$

La condition de récurrence au sens de Harris peut s'écrire, en posant $U_A = U_{1_A}$ si $h = 1_A$,

$$\forall A \in \mathscr{E} \qquad m(A) > 0 \Rightarrow U_A(1_A) = 1\,.$$

Les équations résolvantes permettent de montrer que pour tout f, $0 \leqq f \leqq 1$ et $m(f) > 0$, le noyau $U_f I_f$ est la probabilité de transition d'une chaîne de Harris de mesure invariante f. m.

III.1. DÉFINITION. — *Une fonction* $f \in b\mathscr{E}$ *est dite spéciale si* $U_h(f)$ *est une fonction bornée dès que* $m(h) > 0$.

Propriétés. — Les fonctions spéciales forment un cône $\mathscr{S}$ stable par les opérateurs $I_h U_h$ et donc en particulier par P.

— Toute fonction strictement positive h_0, $0 \leqq h_0 < 1$, telle que $U_{h_0} \geqq 1 \otimes m_0$, pour une mesure positive $m_0 \neq 0$, est spéciale. Une autre fonction f est spéciale si, et seulement si, $U_{h_0}(f)$ est bornée.

— Soit f une fonction spéciale et bornée. Pour tout réel θ, $0 < \theta < \frac{1}{\|f\|}$, il existe une mesure positive m_θ, équivalente à m, telle que $U_{\theta f} \geqq 1 \otimes m_\theta$.

Ces points étant rappelés on a les résultats suivants :

III.2. THÉORÈME. — *Pour une chaîne de Harris de noyau* P *les deux conditions qui suivent sont équivalentes.*

(i) P *est un opérateur quasi-compact.*

(ii) *Les fonctions positives bornées sont spéciales.*

Démonstration. — (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). On sait qu'il y a au moins une fonction spéciale, soit f, $m(f) > 0$. D'autre part (*i*) entraîne que les moyennes de Cesaro $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k f$ convergent uniformément vers $m(f)$. Il existe donc un entier n_0 qui satisfait à la condition $\frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n} P^k f \geqq \frac{m(f)}{2}$, donc les fonctions constantes sont spéciales.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). Supposons la fonction 1 spéciale. Alors pour tout c, $0 < c < 1$, il existe une mesure $m_c \sim m$, telle que $U_c \geqq 1 \otimes m_c$ et cela implique que $m_c(E)$ soit fini. Toute moyenne positive invariante v par cU_c est minorée par $c.v(1).m_c$ et donc n'est pas pure. Si maintenant ϕ est une moyenne invariante par P, l'équation $U_c = P + (1 - c)U_cP$ montre que $\phi = cU_c(\phi)$ et donc ϕ n'est pas pure. Il suffit donc d'appliquer le théorème II.2.

Remarque. — Pour une résolvante de noyaux récurrente au sens de Harris, Brancovan [*4*] a montré que les fonctions spéciales sont les mêmes pour toutes les chaînes de probabilités de transition αV_α. Il en résulte que si un des opérateurs αV_α est quasi-compact tous le sont, ce qui est un cas particulier d'un résultat de Basterfield [*3*].

III.3. THÉORÈME DE CARACTÉRISATION DES FONCTIONS SPÉCIALES. — *Une fonction borélienne* f, *comprise entre* 0 *et* 1, $m(f) > 0$, *est spéciale si, et seulement si, le noyau* $U_f I_f$ *est quasi-compact.*

Observons d'abord que pour toute fonction $h \in b\mathscr{E}$, $0 \leqq h \leqq 1$, le noyau $\mathscr{U}_h$, construit à partir du noyau $U_f I_f$ et de la fonction h, est

$$\mathscr{U}_h \doteq \sum_{n \geq 0} (U_f I_f I_{1-h})^n U_f I_f = U_{hf} I_f .$$

Le théorème précédent montre que $U_f I_f$ est quasi-compact si pour toute $h \in b\mathscr{E}$, $0 \leqq h \leqq 1$, telle que $(f.m)(h) = m(hf) > 0$, $\mathscr{U}_h(1) = \mathscr{U}_{hf}(f)$ est une fonction bornée. Or ceci a bien lieu si $f \in \mathscr{S}$ puisque $m(hf) > 0$

et $0 \leqq hf \leqq 1$. Réciproquement si $U_f I_f$ est quasi-compact et $h_0 \in b\mathscr{E}$, telle que $0 < h_0 \leqq 1$ et $\mathscr{U}_{h_0} \geqq 1 \otimes m$, on a $U_{h_0}(f) \leqq U_{h_0 f}(f) = \mathscr{U}_h(1)$ qui est bornée et donc f est spéciale.

Dans la section suivante nous nous proposerons d'étudier les propriétés de quasi-compacité des noyaux de transition de deux chaînes de Harris en dualité.

IV. CHAÎNES DE HARRIS EN DUALITÉ

Soit $(E, \mathscr{E}, m)$ un espace mesuré, m étant σ-finie. Pour deux fonctions mesurables u et v nous noterons $\langle u, v \rangle$ l'intégrale $\int uv\,dm$ chaque fois que cette intégrale a un sens (éventuellement $+\infty$ si u et v sont $\geqq 0$ et uv non négligeable). Nous supposerons encore $\mathscr{E}$ séparable.

IV.1. Définition. — *Deux noyaux positifs* P *et* $\hat{P}$ *seront dits en dualité si pour tout couple de fonctions boréliennes positives* f, g *sur* $(E, \mathscr{E})$, *on a* $\langle Pf, g \rangle = \langle f, \hat{P}g \rangle$.

Si P est donnée il n'est pas vrai dans le cas général qu'il existe toujours un noyau P en dualité avec P, mais on a le résultat d' « unicité » suivant.

IV.2. Lemme. — *Si les deux noyaux* $\hat{P}$ et $\hat{P}'$ *sont en dualité avec* P, *il existe un ensemble m-négligeable* N *tel que, pour tout* $x \notin N$, *les mesures* $\varepsilon_x \hat{P}$ *et* $\varepsilon_x \hat{P}'$ *soient égales.*

Démonstration. — Soit $A \in \mathscr{E}$. Les fonctions $x \to \hat{P}(x, A)$ et $x \to \hat{P}'(x, A)$ sont égales m-p. p. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre dénombrable qui engendre $\mathscr{E}$. Il existe N, $m(N) = 0$, tel que

$$\forall x \in N^c \quad \forall A \in \mathscr{A} \qquad \varepsilon_x \hat{P}(A) = \varepsilon_x \hat{P}'(A).$$

Le théorème d'égalité de deux mesures σ-finies permet alors de conclure.

Appelant modification de $\hat{P}$ tout noyau $\hat{P}'$ en dualité avec P, le lemme précédent montre que tout noyau P admet au plus un noyau dual $\hat{P}$ à une modification près.

Ajoutons la remarque suivante : si $(P, \hat{P})$ et $(Q, \hat{Q})$ sont deux couples de noyaux en dualité et si $P \leqq Q$, alors il existe une modification $\hat{Q}'$ de $\hat{Q}$ telle que l'on ait $\hat{P} \leqq \hat{Q}'$. Cela résulte du fait que si deux mesures σ-finies μ et μ' sur $(E, \mathscr{E})$ satisfont à la relation $\mu(A) \leqq \mu'(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, alors $\mu \leqq \mu'$.

Ces préliminaires nous conduisent au théorème

IV.3. Théorème. — *Soient* P *et* $\hat{P}$ *deux noyaux de transition en dualité.*

Si P *est récurrent au sens de Harris relativement à m, alors* $\hat{P}$ *l'est aussi à une modification près et m est la mesure invariante pour* P *et* $\hat{P}$.

Démonstration. — Les égalités $mP = m$ et $m\hat{P} = m$ s'obtiennent par dualité compte-tenu des relations $P1 = \hat{P}1 = 1$. L'hypothèse entraîne l'existence d'une fonction $h \in b\mathscr{E}$, $0 \leqq h \leqq 1$ telle que

$$U_h(h) = 1 \qquad \text{et} \qquad U_h \geqq 1 \otimes m.$$

Posant $\hat{U}_h = \sum_{n \geq 0} (\hat{P}I_{1-h})^n \hat{P}$, on voit aussitôt que U_h et $\hat{U}_h$ sont en dualité (relativement à m) et les relations

$$(h.m)U_h = m \qquad \text{et} \qquad U_h \geqq 1 \otimes m$$

donnent respectivement

$$\hat{U}_h(h) = 1m\text{-p. p.} \qquad \text{et} \qquad \hat{U}_h \leqq 1 \otimes m\text{-p. p.}$$

Il existe donc N_0, m-négligeable, tel que

$$\forall x \notin N_0 \qquad \hat{U}_h(h)(x) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_x \hat{U} \geqq m.$$

Définissons alors la suite d'ensembles $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $N_{k+1} = \{ \hat{P}1_{N_k} > 0 \}$. Ces ensembles jouissent des propriétés suivantes :

a) $\forall k \in \mathbb{N} \quad m(N_k) = 0$,

b) $\bigcap_k N_k^c$ est un ensemble absorbant.

L'égalité $\langle 1_{N_k}, P1_{N_{k+1}} \rangle = \langle \hat{P}1_{N_k}, 1_{N_{k+1}} \rangle$ montre que N_{k+1} est négligeable si N_k l'est. Posant $N' = \bigcup_{k \geq 0} N_k$ on voit que tout x pour lequel $\hat{P}(x, N') > 0$ satisfait à l'inégalité $\hat{P}(x, N_k) > 0$, pour un $k \in \mathbb{N}$, et cette inégalité qui s'écrit aussi $\hat{P}1_{N_k}(x) > 0$ entraîne que $x \in N_{k+1}$, donc que $x \in N'$.

On construit alors une modification de $\hat{P}$ en choisissant arbitrairement un y dans $(N')^c$ et en posant

$$\varepsilon_x \hat{P}' = \begin{cases} \varepsilon_x \hat{P} & \text{si} \quad x \in (N')^c \\ \varepsilon_y \hat{P} & \text{si} \quad x \in N'. \end{cases}$$

Il est clair que l'opérateur potentiel $\hat{U}'_h$ construit à partir de $\hat{P}'$ vérifie les relations

$$\hat{U}'_h(h) = 1 \qquad \text{et} \qquad \hat{U}'_h \geqq 1 \otimes m.$$

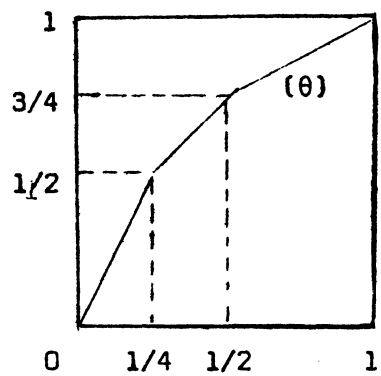
La considération de chaînes de Harris X et $\hat{X}$ en dualité et les résultats obtenus dans les sections précédentes conduisent naturellement à se poser les questions suivantes :

1. Les fonctions cospéciales, c'est-à-dire les fonctions spéciales rela-

tivement à la chaîne $\hat{X}$, sont-elles les fonctions spéciales relativement à X ?

2. Si P est quasi-compact, $\hat{P}$ l'est-il aussi?

Ces deux questions n'en font en réalité qu'une seule d'après la caractérisation des fonctions spéciales en termes de quasi-compacité. Nous allons maintenant construire un contre-exemple montrant que la réponse est négative. Plus précisément nous allons construire deux noyaux P et $\hat{P}$ en dualité tels que P soit quasi-compact sans que $\hat{P}$, ni aucune modification de $\hat{P}$, le soient. Soit E l'intervalle [0, 1] muni de sa tribu borélienne $\mathscr{E}$, et m la mesure de Lebesgue. Soit θ : E $\rightarrow$ E l'application définie par le graphe ci-dessous



On désignera par ϕ la fonction continue à gauche, égale à $\frac{d\theta}{dx}$ là où cette dérivée a un sens. On définit deux noyaux S et $\hat{S}$ sur (E, $\mathscr{E}$) par les formules

$$Sf = (f0\theta^{-1}), \qquad \hat{S}f = (f0\theta)x\phi.$$

Ces noyaux sont en dualité relativement à m car, pour tout autre élément $g \in b\mathscr{E}$ on a :

$$\langle Sf, g \rangle = \int_0^1 f(\theta^{-1}x)g(x)dx = \int_0^1 f(y)g(\theta y)\phi(y)dy = \langle f, \hat{S}g \rangle .$$

Posons ensuite $P = \frac{1}{2}S + 1 \otimes \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)m$, $\hat{P} = \frac{1}{2}\hat{S} + \left(1 - \frac{\phi}{2}\right) \otimes m$. Il est clair que P et $\hat{P}$ sont aussi en dualité et que ce sont des noyaux de transition puisque $P1 = \hat{P}1 = 1$. Soient θ_n les itérées successives de la transformation ponctuelle θ ; $\theta_{n+1} = \theta_n \circ \theta$. Pour chaque n, désignons par ϕ_n la fonction continue à gauche et égale à $\frac{d\theta_n}{dx}$ aux points où cette dérivée est continue. Il est aisé de vérifier que les valeurs de ϕ_n sont de la forme 2^k ; $-n \leqq k \leqq n$, k entier et que l'on a $\| \phi_n \| = \sup_{x \in E} \phi_n(x) = 2^n$, le sup étant atteint sur l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. On vérifie aussi aisément par récurrence que pour tout n, entier $\geqq 1$, on a

$$\mathrm{P}^n = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{S}^n + 1 \otimes \left(1 - \frac{\phi_n}{2^n}\right).m\,,$$

$$\hat{\mathrm{P}}^n = \frac{1}{2^n}\,\hat{\mathrm{S}}^n + \left(1 - \frac{\phi_n}{2^n}\right) \otimes m\,,$$

en utilisant le fait que $\phi_{n+1} = (\phi \circ \theta^n) \times \phi_n$.

Observons ensuite que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la suite $\theta_n(x)$ est croissante et que si $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \theta_n(x) = 1$. De là il résulte que pour $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$. En effet si $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \phi(\theta_n x) = \frac{1}{2}$ et par conséquent $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}(x)}{\phi_n(x)} = \frac{1}{2}$. Ce résultat montre que $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\phi_n(x)}{2^n}\right) = 1$ si $x \neq 0$, mais observons que pour chaque n la fonction $1 - \frac{\phi_n}{2^n}$ est nulle sur l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Maintenant si $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, $m(\mathrm{A}) > 0$, on peut écrire

$$\mathrm{P}^n(x, \mathrm{A}) \geqq \int_{\mathrm{A}} \left(1 - \frac{\phi_n}{2^n}\right) dm \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m(\mathrm{A})\,.$$

Ceci prouve que si $m(\mathrm{A}) > 0$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}^n(x, \mathrm{A})$ est divergente et donc la chaîne de noyau P est récurrente au sens de Harris. En outre P est quasi-compact puisque

$$\|\mathrm{P}^n - 1 \otimes m\| = \left\| \frac{1}{2^n}\,\mathrm{S}^n - 1 \otimes \frac{\phi_n}{2^n}\,m \right\| \leqq \frac{1}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Cependant $\hat{\mathrm{P}}$ n'est pas quasi-compact. En effet soit $f \in b\mathscr{E}$ et calculons $(\hat{\mathrm{P}}^n - 1 \otimes m)(f)(x)$.

$$\begin{aligned}(\hat{\mathrm{P}}^n - 1 \otimes m)(f)(x) &= \frac{\phi_n(x)}{2^n} f(\theta_n x) - \frac{\phi_n(x)}{2^n} m(f) \\ &= \frac{\phi_n(x)}{2^n} (f(\theta_n x) - m(f))\,.\end{aligned}$$

Posons $\mathrm{A}_n = \left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et $f_n = 1_{\mathrm{A}_n}$. On a donc $\|f_n\| = 1$ et si $x \in \mathrm{A}_{2_n}$ on a aussi $\theta_n(x) \in \mathrm{A}_n$, ce qui donne pour un tel x,

$$(\hat{\mathrm{P}}^n - 1 \otimes m) f(x) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\,,$$

soit $\| \hat{\mathrm{P}}^n - 1 \otimes m \| \geqq 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, prouvant que $\hat{\mathrm{P}}$ n'est pas quasi-compact d'après les résultats de la section II. Ce contre-exemple peut servir à une autre fin. Dans le cas d'une marche de Harris avec une mesure invariante m bornée on sait que P_n tend vers $1 \otimes m$ pour la topologie forte des opérateurs dans $\mathrm{L}^1(m)$ (cf. [*15*], chap. 6, § 2). On pourrait penser que dans le cas où P est quasi-compact cette convergence est en fait uniforme. Le contre-exemple précédent montre qu'il n'en est rien, car cela exigerait par un raisonnement utilisant la dualité entre L^1 et L^∞ que $\hat{\mathrm{P}}$ soit quasi-compact.

V. FONCTIONS SPÉCIALES ET COSPÉCIALES

Le contre-exemple qui vient d'être étudié amène à se poser la question : à quelles conditions une fonction est-elle à la fois spéciale et cospéciale ?

On suppose toujours que P et $\hat{\mathrm{P}}$ sont les noyaux de transition de deux chaînes de Harris en dualité sur $(\mathrm{E}, \mathscr{E}, m)$, m étant la mesure σ-finie invariante commune.

V.1. THÉORÈME. — *Une fonction $h \in b\mathscr{E}_+$ telle que $m(h) > 0$, est spéciale et cospéciale si, et seulement si, il existe $c > 0$ tel que*

$$\mathrm{U}_{ch} \geqq 1 \otimes m \qquad \text{et} \qquad \hat{\mathrm{U}}_{ch} \geqq 1 \otimes m.$$

Démonstration. — Soit $h \in \mathscr{S} \cap \hat{\mathscr{S}}$, $m(h) > 0$. Pour un réel $c_1 > 0$ assez petit on a les inégalités

$$\mathrm{U}_{c_1 h} \geqq 1 \otimes (\phi . m) \qquad \text{et} \qquad \hat{\mathrm{U}}_{c_1 h} \geqq 1 \otimes (\psi . m),$$

$\phi . m$ et $\psi . m$ étant deux mesures positives et équivalentes à m. Par dualité et en remplaçant au besoin ψ par une fonction équivalente on obtient

$$\mathrm{U}_{c_1 h} \geqq 1 \otimes \phi . m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_{c_1 h} \geqq \psi \otimes m .$$

Choisissant $c_2 (0 < c_2 < c_1)$ on a

$$\mathrm{U}_{c_2 h} \geqq (c_1 - c_2) \mathrm{U}_{c_1 h} \mathrm{I}_h \mathrm{U}_{c_1 h} \geqq (c_1 - c_2)(1 \otimes \phi m) \mathrm{I}_h (\psi \otimes m) = k(1 \otimes m),$$

avec $k = (c_1 - c_2) m(\phi \psi h) > 0$. Posant alors $g = c_2 h$, *on a pour tout* $\theta \in]0, 1[$,

$$\mathrm{U}_{\theta g} = \sum_{n \geq 0} (1 - \theta)^n (\mathrm{U}_g \mathrm{I}_g)^n \mathrm{U}_g .$$

et, compte tenu de $(1 \otimes m) \mathrm{I}_g \mathrm{U}_g = (1 \otimes (gm)) \mathrm{U}_g = 1 \otimes m$, on voit par récurrence que $(\mathrm{U}_g \mathrm{I}_g)^n \mathrm{I}_g \geqq k(1 \otimes m)$, qui donne

$$\mathrm{U}_{\theta c_2 h} = \mathrm{U}_{\theta g} \geqq \frac{k}{\theta} (1 \otimes m) .$$

Prenant par exemple $c = \inf(c_2, kc_2)$, on a bien

$$U_{ch} \geqq 1 \otimes m.$$

De façon analogue pour la chaîne duale on peut trouver $\hat{c} > 0$ tel que $\hat{U}_{\hat{c}h} \geqq 1 \otimes m$ et le nombre positif $\inf(c, \hat{c})$ satisfait bien aux conditions du théorème. La condition suffisante est évidente.

V.2. Corollaire. — *Soit h bornée et spéciale pour* P. *Il existe une modification de $\hat{P}$ pour laquelle h est cospéciale si, et seulement si, il existe $c > 0$ tel que $U_{ch} \geqq 1 \otimes m$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la construction d'une modification de P, développée dans la démonstration du théorème IV.3, pour obtenir l'inégalité $\hat{U}_{ch} \geqq 1 \otimes m$ par dualité.

On a aussi le corrollaire immédiat

V.3. Corollaire. — *Un noyau de transition quasi-compact admet un conoyau quasi-compact si, et seulement si, il existe $c > 0$ tel que $U_c \geqq 1 \otimes m$.*

Pour terminer cette section nous observerons que la modification de $\hat{P}$ dont le corollaire V.2 affirme l'existence peut dépendre de la fonction h. Nous allons donner une condition pour qu'il existe une modification « universelle » valable pour toute fonction spéciale, remplissant les conditions du corollaire. Pour cela nous désignerons pour tout noyau Q par $Q^{(0)}$ et $Q^{(1)}$ les parties absolument continue et singulière de Q relativement à m; soit

$$\forall x \in E \qquad \varepsilon_x Q = \varepsilon_x Q^{(0)} + \varepsilon_x Q^{(1)},$$

avec

$$\varepsilon_x Q^{(0)} \ll m \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x Q^{(1)} \perp m.$$

Dans ces conditions on peut énoncer le

V.4. Théorème. — *Si $\lim_{n\to\infty} \| P_n^{(1)}(1) \| = 0$, alors pour toute fonction h bornée et spéciale pour* P,

$$\exists c > 0 \quad U_{ch} \geqq 1 \otimes m \Leftrightarrow h \text{ est cospéciale.}$$

Démonstration. — Soit $\| h \| = a < 1$ et $U_h \geqq 1 \otimes m$. Par dualité $\hat{U}_h \geqq 1 \otimes m$, m-p. p. Si $c \in]a, 1[$, écrivant $\hat{U}_c = \sum_{n \geq 0} (1 - c)^n \hat{P}_{n+1} = \hat{U}_c^{(0)} + \hat{U}_c^{(1)}$, l'hypothèse sur $\hat{P}$ entraîne que $\hat{U}_c^{(0)}(1) \geqq \alpha > 0$. Puis en appliquant l'équation résolvante

$$\hat{U}_h \geqq \hat{U}_c I_{c-h} \hat{U}_h \geqq \hat{U}_c^{(0)}(c - a)\hat{U}_h,$$

et pour tout $f \in b\mathscr{E}_+$, on a

$$\hat{U}_h(f) \geqq (c - a)\hat{U}_c^{(0)}\hat{U}_h(f) \geqq \alpha(c - a)m(f).$$

On a prouvé que

$$\hat{\mathrm{U}}_h \geqq k(1 \otimes m) \quad \text{pour un } k > 0 .$$

On a vu que ceci entraîne l'inégalité $\hat{\mathrm{U}}_{\theta h} \geqq 1 \otimes m$, pour $0 < \theta \leqq \inf(k, 1)$.

Remarquons que la condition du théorème V.4 sur $\hat{\mathrm{P}}$ est remplie dans les cas suivants,

— $\forall x \ \varepsilon_x \hat{\mathrm{P}} \ll m$

— Promenades de Harris sur les groupes et les espaces homogènes.

— Quasi-compacité.

VI. OPÉRATEURS QUASI-COMPACTS EN THÉORIE ERGODIQUE

En théorie ergodique on s'intéresse plutôt à des opérateurs T qui sont des contractions positives d'un espace $\mathbb{L}^1(\mathrm{E}, \mathscr{E}, m)$ (1), où m est une probabilité. On peut d'ailleurs supposer que la tribu $\mathscr{E}$ n'est plus nécessairement séparable. Les notions d'ensembles A bornés, c'est-à-dire dans le cadre de la théorie de Neveu d'indicatrices spéciales, ont été d'abord données dans cette situation « abstraite » [5]. Nous supposerons dans ce qui va suivre que T est conservative et ergodique [13]. On sait alors que E lui-même est un ensemble borné si $\mathrm{I} - \mathrm{T}$ est un automorphisme de l'espace de Banach L_0^1, sous-espace de $\mathbb{L}^1$ formé par les éléments d'intégrale nulle, en supposant que m est une probabilité, invariante sous T, c'est-à-dire $\mathrm{T}1 = \mathrm{T}^*1 = 1$. Suivant l'usage en théorie ergodique, T* désigne l'opérateur transposé de T agissant sur $\mathbb{L}^\infty$.

Nous nous proposons d'établir directement que si $\mathrm{I} - \mathrm{T}$ est un automorphisme de L_0^1, alors T est un opérateur quasi-compact. Nous commencerons par étudier les valeurs propres de T ; nous ne supposerons pas que m est une probabilité invariante mais seulement une mesure invariante. Rappelons d'abord que T et T* peuvent se prolonger au cône des classes, modulo m, de fonctions positives et $\mathscr{E}$-mesurables de telle sorte que, ϕ_1 et ϕ_2 désignant deux éléments quelconques de ce cône, l'on ait :

$$\langle \mathrm{T}\phi_1 , \phi_2 \rangle = \int \mathrm{T}\phi_1 . \phi_2 dm = \int \phi_1 . \mathrm{T}^*\phi_2 dm = \langle \phi_1 , \mathrm{T}^*\phi_2 \rangle ,$$

la valeur commune de ces termes pouvant être $+\infty$. En particulier si la mesure m est finie ou σ-finie et si l'on suppose que $\mathrm{T}1 = \mathrm{T}^*1 = 1$, alors T et T* jouent des rôles symétriques ; la restriction de T* à $\mathbb{L}^1$ est aussi

(1) Il s'agit de l'espace $\mathbb{L}^1$ des classes de fonctions m-intégrables à valeur réelle ou complexe.

une contraction positive de $\mathbb{L}^1$ et la restriction de T à $\mathbb{L}^\infty$ est une contraction positive de $\mathbb{L}^\infty$. De plus si T est conservative et ergodique il en est de même de T*. Nous renvoyons pour la démonstration de ces assertions au chapitre 4, paragraphe 3 de [*15*].

VI.1. PROPOSITION. — *Soit* $T1 = T^*1 = 1$, T *et* T* *étant conservatives et ergodiques. Les opérateurs* T *et* T*, *considérés comme des contractions de* $\mathbb{L}^\infty$, *jouissent des propriétés suivantes :*

1) *Si* z, $|z| = 1$ *est valeur propre de* T *et si* $F \in I^\infty$, $\|F\|_\infty = 1$, *est solution de l'équation* $TF = zF$, *alors pour tout* n *entier*, z^n *est valeur propre de* T *et* T* *et l'on a*

$$T(F^n) = z^n F^n \qquad et \qquad T^*(\bar{F}^n) = z^n \bar{F}^n .$$

2) *Quel que soit* $f \in \mathbb{L}^\infty$, *on a les relations*

$$\bar{z}^n T(f) = F^n . T(\bar{F}^n . f) \qquad et \qquad \bar{z}^n T^*(f) = \bar{F}^n . T^*(F^n . f) .$$

Démonstration. — Elle repose sur un résultat d'Akcoglu et Brunel [*1*], relatif à une contraction complexe U d'un espace $\mathbb{L}^1$, dont le module linéaire $|U|$ est ici supposé conservatif. On sait alors qu'il existe une partition de E, soit $E = \Delta \cup \Gamma$, et une fonction mesurable s, de module 1, sur Γ, tels que

(*i*) Δ et Γ sont invariants pour $|U|^*$.
(*ii*) $(I - U)\mathbb{L}^1(\Delta)$ est dense dans $\mathbb{L}^1(\Delta)$.
(*iii*) $\forall \phi \in \mathbb{L}^1(\Gamma)$, $\quad U\phi = \bar{s} . |U|(s\phi)$.

Prenons $U = \bar{z}T$. Il est clair que $|U| = T$ qui est ergodique et conservatif donc Δ ou Γ est négligeable. La relation

$$\phi \in \mathbb{L}^1, \quad 0 = \langle F - \bar{z}TF, \phi \rangle = \langle F, (I - \bar{z}T^*)\phi \rangle ,$$

montre que $(I - U)\mathbb{L}^1$ n'est pas dense dans $\mathbb{L}^1$, puisque F n'est pas nul. C'est donc Δ qui est négligeable et $\Gamma = E$. La fonction s, de module 1, est solution de l'équation $\bar{z}.Ts = s$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$T(F - \lambda s) = z(F - \lambda s) \Rightarrow T(|F - \lambda s|) \geqq |F - \lambda s| ,$$

et cette dernière inégalité entraîne que $|F - \lambda s| = $ cte. Posons

$$\frac{F}{s} = u + iv, \quad \lambda = \alpha + i\beta .$$

On a montré que, quels que soient les réels α et β, $(u - \alpha)^2 + (v - \beta)^2 = $ cte, ce qui implique aisément que u et v sont constants et donc que F est proportionnelle à s. On pourra donc supposer $F = s$. Dans le travail cité plus haut d'Akoglu et Brunel, il est aussi montré que

$$\forall h \in \mathbb{L}^\infty, \qquad U^*h = \bar{s}\,|U|^*(sh) ,$$

soit, dans notre situation,

$$\forall h \in \mathbb{L}^\infty \qquad \bar{z}T^*(h) = \bar{s}T^*(sh) = \bar{F}.T^*(F.h).$$

En remplaçant h par $F.h$ on obtient

$$\bar{z}T^*(Fh) = \bar{F}T^*(F^2h), \qquad \bar{z}^2T^*(h) = \bar{F}^2T^*(F^2h),$$

qui s'étend par récurrence à la deuxième formule indiquée dans (2).

L'autre formule s'établit pareillement. Les assertions de (1) en sont des conséquences immédiates.

Ajoutons la remarque suivante : s'il existe $f \in \mathbb{L}^1$ satisfaisant à $Tf = zf$, pour un z de module 1, alors $T(|f|) \geqq |f|$ qui entraîne à son tour $T(|f|) = |f|$ puisque T est une contraction dans $\mathbb{L}^1$. L'ergodicité de T montre alors que $|f| = $ cte, donc que $f \in \mathbb{L}^\infty$.

Revenons au cas où m est une probabilité. Nous utiliserons un lemme de compacité dans $\mathbb{L}^1$ sous la forme suivante :

VI.2. LEMME. — *Si (f_n) est une suite bornée dans $\mathbb{L}^1$, telle que*

$$\lim_{n,p\to\infty}\left(|f_n - f_p| - \int |f_n - f_p|\,dm\right) = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^1,$$

alors (f_n) contient une suite de Cauchy.

Démonstration. — La suite double $U_{n,p} = \int |f_n - f_p|\,dm$ est bornée, donc par une application du théorème de Ramsey on peut trouver une suite croissante $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, telle que

$$\lim \int |f_{n_j} - f_{n_k}|\,dm = \alpha \qquad \text{si} \qquad j \text{ et } k \to \infty \text{ avec } j < k.$$

Posons $f_{n_j} = g_j$, il résulte alors de l'hypothèse et du choix de (n_j) que pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout quadruplet d'entiers distincts suffisamment grands $(j_1, j_2, j_3, j_4) j_1/j_2 . j_3/j_4$.

$$\int ||g_{j_1} - g_{j_2}| - |g_{j_3} - g_{j_4}||\,dm \leqq \varepsilon^2.$$

Si les entiers j_k sont assez grands, il existe au moins un point $x \in E$, tel que les quantités $|g_{j_k}(x) - g_{j_l}(x)|$ soient $> \frac{\alpha}{2}$ et que leurs différences deux à deux soient $< \varepsilon$. Si α est strictement positif et ε choisi suffisamment petit, il est impossible d'avoir quatre nombres complexes, les $g_{j_k}(x)$, ayant ces propriétés. Il en résulte que $\alpha = 0$ et le lemme est démontré.

VI.3. PROPOSITION. — *Si* $\mathrm{I} - \mathrm{T}$ *est un automorphisme de* L_0^1 *et* z *un nombre complexe de module* 1 *qui n'est pas une valeur propre de* T, *alors toute suite bornée* (f_n) *dans* L^1, *vérifiant la relation* $\lim_{n,p\to\infty} (z\mathrm{I}-\mathrm{T})(f_n - f_p) = 0$ *dans* $\mathbb{L}^1$, *est une suite de Cauchy.*

Démonstration. — Posons $\phi_{n,p} = |f_n - f_p| - |\mathrm{T}(f_n - f_p)|$; on a $\mathrm{T}(|f_n - f_p|) - |f_n - f_p| + \phi_{n,p} \geqq 0$ et l'intégrale du premier membre de cette inégalité est égale à $\int \phi_{n,p} dm$. Or on a

$$|\phi_{n,p}| \leqq |(z\mathrm{I} - \mathrm{T})(f_n - f_p)|,$$

donc, d'après l'hypothèse, $\lim_{n,p\to\infty} \int |\phi_{n,p}| \, dm = 0$. Il en résulte que $\lim_{n,p\to\infty} (\mathrm{T}(|f_n - f_p|) - |f_n - f_p|) = 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Comme $\mathrm{T}1 = 1$, on déduit immédiatement de là que

$$\lim_{n,p\to\infty} (\mathrm{I} - \mathrm{T})\left(|f_n - f_p| - \int |f_n - f_p| \, dm \right) = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^1.$$

Comme par hypothèse $\mathrm{I} - \mathrm{T}$ est un automorphisme de L_0^1, il en résulte que $|f_n - f_p| - \int |f_n - f_p| \, dm \xrightarrow{\mathbb{L}^1} 0$. D'après le lemme VI.2 on peut extraire de toute sous-suite de (f_n), une sous-suite convergente. Si (f_n) n'est pas de Cauchy on peut donc extraire deux sous-suites convergeant respectivement vers des éléments h et h' différents. Mais l'hypothèse entraîne alors que $(z\mathrm{I} - \mathrm{T})(h - h') = 0$. Comme z n'est pas valeur propre nous avons une contradiction.

On va déduire de là des propriétés du spectre de T.

VI.4. PROPOSITION. — *Les seuls points du spectre de* T *sur le cercle unité sont des valeurs propres.*

Démonstration. — Supposons que $|z| = 1$ et que z ne soit pas valeur propre de T. Nous montrons d'abord que l'image de $(z\mathrm{I} - \mathrm{T})$ est fermée. Soit $((z\mathrm{I} - \mathrm{T})f_n)$ une suite convergente d'éléments de cette image. S'il existait une sous-suite (n_j) telle que $\|f_{n_j}\|_1 \to +\infty$, on aurait $(z\mathrm{I} - \mathrm{T})(f_{n_j}\|_1 \to 0$, donc d'après la proposition VI.3, $f_{n_j}/\|f_{n_j}\| \to h$, avec $\|h\|_1 = 1$. On aurait donc $(z\mathrm{I} - \mathrm{T})h = 0$ qui contredirait le fait que z n'est pas valeur propre. Donc (f_n) est bornée et la proposition VI.3 montre que cette suite converge vers une élément h ; par suite $(z\mathrm{I} - \mathrm{T})f_n$ converge vers $(z\mathrm{I} - \mathrm{T})h$ et l'image de $(z\mathrm{I} - \mathrm{T})$ est bien fermée.

Nous allons montrer que cette image est l'espace tout entier. Si ce n'était pas le cas il existerait un élément $u \in \mathbb{L}^\infty$, tel que pour tout $f \in \mathbb{L}^1$,

$$\langle (zI - T)f, u \rangle = 0,$$

où ce qui est équivalent, $T^*u = z.u$, prouvant que z est une valeur propre de T^*. La proposition VI.1 entraîne que z est valeur propre de T, ce qui est absurde. On a ainsi montré que $(zI - T)\mathbb{L}^1 = \mathbb{L}^1$, et le théorème de Banach implique que z est dans l'ensemble résolvant.

VI.5. Théorème. — *L'opérateur* T *est quasi-compact.*

Démonstration. — Nous commençons par montrer que 1 est une valeur propre isolée sur le cercle unité. Supposons que z soit une valeur propre de module 1 et que $Th = zh$ pour $h \in \mathbb{L}^1$. Comme m est invariante, on a $\int hdm = \int Th.dm = z \int hdm$, d'où il résulte que $\int hdm = 0$ si $z \neq 1$, autrement dit $h \in L_0^1$. Mais sur L_0^1, $I - T$ est un automorphisme, donc 1 appartient à l'ensemble résolvant de T considéré comme opérateur sur L_0^1, et par suite possède un voisinage dans lequel il n'y a pas de point du spectre.

La proposition VI.1 montre que si z est valeur propre de T, z^n l'est aussi pour tout entier n. Comme 1 est valeur propre isolée, z est racine de l'unité et la fonction propre correspondante, soit s jouit de la propriété suivante : $|s| = 1$ et s^n et la fonction propre correspondant à la valeur propre z^n pour tout entier n.

Supposons maintenant que T n'admette que la valeur propre 1. Appelons Q l'opérateur sur $\mathbb{L}^1$ qui, à f, fait correspondre $\int fdm$. Sur L_0^1, on a $T - Q = T$. Comme $I - T$ est un automorphisme de L_0^1, le point 1 est à l'extérieur du spectre de T considéré comme opérateur sur L_0^1 et son rayon spectral $r(T)$ est donc < 1. Par suite on a $\lim_n \| (T - Q)^n \| = 0$, si la norme est prise sur L_0^1. Mais d'autre part tout élément f de L^1 peut s'écrire $f_0 + k$ avec $f_0 \in L_0^1$ et $k \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$(T - Q)f = (T - Q)f_0 = Tf_0 + k - \int f_0 dm - k = Tf_0 .$$

L'image de $\mathbb{L}^1$ par $(T - Q)^n$ est donc la même que cette date de L_0^1 et l'image de la boule unité de $\mathbb{L}^1$ est contenue dans l'image d'une boule fixe de L_0^1 par $(T - Q)^n$. Il en résulte que

$$\lim_n \| (T - Q)^n \| = \lim_n \| T^n - Q \| = 0,$$

la norme étant celle des opérateurs sur $\mathbb{L}^1$. Donc T est quasi-compact dans ce cas.

Dans le cas général si T a des valeurs propres différentes de 1, nous avons vu qu'elles sont de la forme $\exp(2ni\pi/q)$, $n = 0, 1, \ldots, q-1$, et les fonctions propres correspondantes sont de la forme s^n avec $|s| = 1$. On a $s^q = 1$, ce qui montre que

$$s = \sum_{m=0}^{q-1} \exp(2im\pi/q) . 1_{A_m} \text{ avec } A_m .$$

De $Ts = \exp(2i\pi/q).s$ on tire l'égalité

$$\sum_{m=0}^{q-1} \exp(2mi\pi/q)(T1_{A_m}) = \sum_{m=0}^{q-1} \exp(2(m+1)i\pi/q) . 1_{A_m} .$$

Il en résulte immédiatement que $T1_{A_m} = 1_{A_{m-1}}$ si $1 \leqq m \leqq q-1$ et $T1_{A_0} = 1_{A_{q-1}}$. L'opérateur T^q laisse donc $\mathbb{L}^1(A_0)$ invariant ; on appellera S la restriction de T^q à cet espace et nous allons montrer que $I - S$ est un automorphisme de $\mathbb{L}_0^1(A_0)$.

On vérifie les points suivants : 1) l'opérateur S est ergodique. En effet si $f \in \mathbb{L}_+^1(A_0)$ l'élément $F = \sum_0^\infty S^n f$ est nul hors de A_0 et $\sum_0^{q-1} T^k F = \sum_0^\infty T^k f = +\infty$ presque-partout. Comme sur A_0 cette somme sur A_0 cette somme est égale à F on a bien la propriété cherchée. 2) L'ergodicité de S entraîne que $I - S$ est injectif et d'image dense sur $\mathbb{L}_0^1(A_0)$. Montrons que $I - S$ est d'image fermée. Soit f_p une suite bornée dans $\mathbb{L}_0^1(A_0)$ telle que $\lim_p \|f_p - Sf_p\| = 0$. Posons $g_p = \sum_{k=0}^{q-1} T^k f_p$; la suite g_p est bornée dans $\mathbb{L}^1$ car $\|g_p\| \leqq q\|f_p\|$ et les g_p sont d'intégrale nulle. Enfin

$$(I - T)g_p = (I - S)f_p ;$$

Comme $(I - T)$ est un automorphisme de $\mathbb{L}_0^1$ il en résulte que g_p tend vers 0 dans $\mathbb{L}^1$ et donc sa rectriction f_p à A_0 tend vers 0 dans $\mathbb{L}^1(A_0)$. On termine la démonstration comme la proposition VI.4.

Il en résulte que S est quasi-compact et l'on en déduit facilement que T est quasi-compact.

VII. UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME ERGODIQUE D'ORNSTEIN

Nous nous proposons maintenant de perfectionner les résultats établis dans [5] pour les chaînes « abstraites » de Harris. Nous supposons donc m σ-finie, T conservative et ergodique, $T1 = T^*1 = 1$, mais $m(E)$ peut être $+\infty$. A tout ensemble $A \in \mathscr{E}$, non négligeable, nous associons l'opérateur $U_A = \sum_{n \geq 0} (TI_{A^c})^n T$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ nous définissons les opérateurs $U_A^z = \sum_{n \geq 0} z^{n+1}(TI_{A^c})^n T$, qui s'obtiennent à partir des précédents en remplaçant T par zT. Observons que l'on a

$$U_A(1_A) = 1 \qquad \text{et} \qquad U_A^*(1_A) = 1\,,$$

et d'autre part les inégalités suivantes

$$\forall f \in \mathbb{L}^1(A) \quad \text{ou} \quad \mathbb{L}^\infty(A) \qquad \begin{array}{l} |U_A^z(f)| \leqq U_A(|f|) \\ |(U_A^z)^*(f)| \leqq U_A^*(|f|)\,, \end{array}$$

où les seconds membres de ces inégalités sont des fonctions finies, en notant $\mathbb{L}^1(A)$ l'espace des fonctions intégrables, nulles hors de A, De plus $I_A U_A^z$ est une contraction de $\mathbb{L}^1(A)$. La condition de Harris au sens abstrait peut alors s'énoncer de la façon suivante :

DÉFINITION 1. — *L'opérateur* T, *satisfaisant aux conditions énoncées au début de cette section, vérifie la condition de Harris au sens abstrait, s'il existe au moins un ensemble* $A \in \mathscr{E}$, *tel que l'opérateur* $I_A U_A$ *sur* $\mathbb{L}^1(A)$, *soit quasi-compact.*

Les résultats de la section VI montrent que T vérifie la définition précédente si $I - I_A U_A$ est un automorphisme de $L_0^1(A)$. La mesure mI_A est invariante sous $I_A U_A$ et est finie. Nous pourrons supposer dans ce qui suit que $m(A) = 1$.

DÉFINITION. 2. — *L'opérateur* T, *considéré comme contraction sur* $\mathbb{L}^\infty$, *est dit apériodique si la seule racine de l'unité qui soit valeur propre de* T *est* 1.

Le résultat essentiel que nous voulons établir s'énonce alors comme suit.

VII.1. THÉORÈME. — *Si l'opérateur* T, *vérifiant la condition de Harris* *relativement à l'ensemble* $A \in \mathscr{E}$, *est apériodique, il existe un nombre* C_A, *tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,\quad \forall h \in \mathbb{L}_0^\infty(A),\quad \forall n \in \mathbb{N},\qquad \left| \sum_{k=0}^{n} z^k T^{*k} h \right| \leqq C_A \| h \|_\infty .$$

Ce résultat généralise, le théorème ergodique d'Ornstein-Métivier, énoncé dans [5].

Nous commencerons par étendre la proposition VI.3 au cas des contractions complexes U_A^z.

VII.2. LEMME. — *Soit z un nombre complexe de module* 1.

(i) *Si* $F \in \mathbb{L}^\infty$, *est un élément du noyau de* $zI - T$, *alors* $f = 1_A F$ *appartient au noyau de* $I - I_A U_A^z$, *dans* $\mathbb{L}^\infty(A)$.

(ii) *Si* $f \in \mathbb{L}^\infty(A)$, *est un élément du noyau de* $I - I_A U_A^{\bar{z}}$, *alors* $F = U_A^{\bar{z}}(f)$ *appartient au noyau de* $zI - T$, *dans* $\mathbb{L}^\infty$.

On a des propriétés analogues pour les opérateurs T^* *et* $I_A(U_A^z)^*$.

Démonstration. — Posons $V = \bar{z}T$. De $F = VF$, on tire

$$F = VI_A F + VI_{A^c}F = \sum_{j=0}^{n-1} (VI_{A^c})^j V(1_A F) + (VI_{A^c})^n F .$$

Mais $|(VI_{A^c})^n F| \leqq ((TI_{A^c})^n(1)) \| F \|_\infty$ et cette dernière suite tend vers 0. On a donc bien

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} (VI_{A^c})^j V(1_A F) = U_A^z(1_A F) \qquad \text{et} \qquad 1_A F = I_A U_A^z(1_A F) .$$

Soit maintenant $f \in \mathbb{L}^\infty(A)$ et supposons que $f = I_A U_A^{\bar{z}}(f)$. En posant $F = U_A^{\bar{z}}(f)$ nous savons que $F \in \mathbb{L}^\infty$ et l'on a

$$F = V(1_A F) + VI_{A^c}(F) = VF = \bar{z}TF .$$

VII.3. LEMME. — *Soit z un nombre complexe de module* 1 *qui n'est pas valeur propre de* T. *Si* (f_n) *est une suite bornée dans* $\mathbb{L}^1(A)$, *satisfaisant à la condition*

$$\lim_{n,p \to \infty} (f_n - f_p - (I_A U_A^z)(f_n - f_p)) = 0 \ \textit{dans}\ \mathbb{L}^1(A) ,$$

alors (f_n) *est une suite de Cauchy.*

Démonstration. — Il suffit d'écrire les inégalités

$$I_A U_A(|f_n - f_p|) - |f_n - f_p| \geqq |I_A U_A^z(f_n - f_p)| - |f_n - f_p| = -\phi_{n,p} ,$$
$$|\phi_{n,p}| \leqq |I_A U_A^z(f_n - f_p) - (f_n - f_p)| .$$

On en déduit que

$$\mathrm{I_A U_A}(|f_n - f_p|) - |f_n - f_p| \xrightarrow[n,p\to\infty]{\mathbb{L}^1(\mathrm{A})} 0,$$

et l'on est ramené à la situation de la proposition VI.3. La démonstration s'achève en observant que si $h \in \mathbb{L}^1(\mathrm{A})$ est solution de $h = \mathrm{I_A U_A^z}(h)$ et $\int |h|\, dm > 0$, alors z est valeur propre de T par le lemme VII.2 et la proposition VI.1 montre que $\bar{z}$ est aussi valeur propre de T, ce qui est contradictoire avec les hypothèses faites.

VII. 4. Lemme. — *Si* (f_n) *est une suite bornée dans* $\mathbb{L}^1(\mathrm{A})$, *et* (z_n) *une suite de nombres complexes de module* 1, *dont la limite* z *n'est pas une valeur propre de* T, *alors la condition* $\lim_n (f_n - \mathrm{I_A U_A^{z_n}}(f_n)) = 0$ *dans* $\mathbb{L}^1(\mathrm{A})$, *entraîne que* $\lim_n \|f_n\|_1 = 0$.

Démonstration. — La méthode, utilisée dans les preuves de la proposition VI.3 et du lemme VII.3, s'applique dans les mêmes conditions et donne

$$\lim_n (\mathrm{I} - \mathrm{I_A U_A})\left(|f_n| - 1_\mathrm{A} \int |f_n|\, dm \right) = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^1(\mathrm{A}),$$

ce qui implique $\lim_n \left(|f_n| - 1_\mathrm{A} \int |f_n|\, dm \right) = 0$ dans $\mathbb{L}_0^1(\mathrm{A})$, puisque $\mathrm{I} - \mathrm{I_A U_A}$ est un automorphisme de $\mathbb{L}_0^1(\mathrm{A})$. Extrayons une suite (n_j) de telle sorte que la suite bornée $\int |f_{n_j}|\, dm$ converge vers un nombre β. Alors on a aussi $\lim_j \int ||f_{n_j}| - \beta 1_\mathrm{A}|\, dm = 0$. Par extraction d'une autre suite (n'_j) *de* (n_j), on peut obtenir la convergence dans $\mathbb{L}^1(\mathrm{A})$ de la série $\sum_j ||f_{n'_j}| - \beta 1_\mathrm{A}|$, ce qui entraîne que $\phi = \sup_j |f_{n_j}|$ soit aussi élément de $\mathbb{L}^1(\mathrm{A})$. Pour simplifier les notations nous supposerons que la suite (f_n) elle-même a ces propriétés. Ceci étant, nous affirmons que

$$\lim_n (\mathrm{I_A U_A^{z_n}}(f_n) - \mathrm{I_A U_A^z}(f_n)) = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^1(\mathrm{A}).$$

En effet, pour tout entier $p > 0$, on peut écrire

$$\mathrm{I_A U_A^{z_n}}(f_n) - \mathrm{I_A U_A^z}(f_n) = \mathrm{I_A}\left(\sum_{j=0}^{p} + \sum_{j>p}\right)(z_n^{j+1} - z^{j+1})(\mathrm{T} - \mathrm{I_{A^c}})^j \mathrm{T}(f_n)$$

Pour p fixé, la première somme tend vers 0 dans $\mathbb{L}^1(A)$. La seconde somme peut être majorée en module par

$$2I_A \sum_{j>p} (TI_{A^c})^j T\phi ,$$

dont l'intégrale s'écrit $2 \int \phi \Big(\sum_{j>p} \Big) T^*(I_{A^c}T^*)^j(1_A) dm$.

Puisque $\sum_{j>0} T^*(I_{A^c}T^*)^j(1_A) = 1$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que cette dernière intégrale tend vers 0, quand $p \to \infty$.

Nous avons ainsi prouvé que toute suite, extraite de la suite (f_n) donnée, contient une sous-suite $(f_{n'})$ qui a la propriété

$$\lim_{n'} (I_A U_A^{z^{n'}}(f_{n'}) - I_A U_A^z(f_{n'})) = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^1(A),$$

et donc vérifie aussi, grâce à l'hypothèse,

$$\lim_{n'} (f_{n'} - I_A U_A^z(f_{n'})) = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^1(A).$$

Le lemme VII.3 montre alors que $(f_{n'})$ converge dans $\mathbb{L}^1(A)$, $\lim_{n'} (f_{n'})$ étant un point fixé de $I_A U_A^z$. Puisque z n'est pas valeur propre de T, $\lim_{n'} (f_{n'}) = 0$. Donc toute suite extraite de la suite bornée (f_n) contient une sous-suite convergeant fortement vers 0, ce qui montre que $\lim_n \| f_n \|_1 = 0$.

VII.5. COROLLAIRE. — *Si* T *est apériodique,* 1 *est la seule valeur propre de* T.

Démonstration. — Soit z une valeur propre de T, qui ne soit pas racine de l'unité et $F \in \mathbb{L}^\infty$, $|F| = 1$, telle que $TF = zF$. La proposition VI.1 nous dit que, pour tout n entier $TF^n = z^n F^n$, et en posant $f_n = 1_A F^n$, on a aussi $f_n = U_A^{\bar{z}^n}(f_n)$. Choisissons une suite extraite de z^n, soit z^{n_j}, convergeant vers une racine de l'unité ζ, différente de 1. Par application du lemme VII.4, on a $\lim_n \int_A | F |^{n_j} dm - m(A) = 0$ qui contredit l'hypothèse faite sur A. La définition d'apériodicité montre alors que 1 est la seule valeur propre de T.

VII.6. COROLLAIRE. — *Supposons* T *apériodique. Soient* (f_n) *une suite bornée dans* $\mathbb{L}_0^1(A)$ *et* (z_n) *une suite de nombres complexes de module* 1. *Si* $\lim_n (f_n - U_A^{z_n}(f_n)) = 0$ *dans* $\mathbb{L}^1(A)$ *alors* $\lim_n \| f_n \|_1 = 0$.

Démonstration. — En combinant les résultats précédents on voit qu'il existe une sous-suite (n_j) telle que $z_{n_j} \to z$ et $f_{n_j} \to f$ dans $\mathbb{L}^1_0(A)$. On doit avoir $f = U^z_A(f)$ ce qui entraîne $f = 0$. Autrement dit toute suite extraite de la suite donnée contient une sous-suite convergeant fortement vers 0. La suite (f_n) elle-même converge donc fortement vers 0.

VII.7. PROPOSITION. — *Supposons* T *apériodique. L'image du sous-espace* $L^1_0(A)$ *par l'opérateur* $I - I_A U^z_A$ *est fermée dans* $\mathbb{L}^1(A)$. *Soit* Λ_z *cette image. L'opérateur* $I - I_A U^z_A$ *est un isomorphisme de* $L^1_0(A)$ *sur* Λ_z *et les isomorphismes réciproques ont des normes uniformément bornées quand* z *décrit le cercle unité.*

Démonstration. — Soit $(g_n - I_A U^z_A g_n)$ une suite convergente dans Λ_z. S'il existait une suite extraite (g_{n_j}) telle que $\lim_j \| g_{n_j} \|_1 = +\infty$, on en déduirait $\lim_j (g_{n_j} - I_A U^z_A g_{n_j})/\| g_{n_j} \|_1 = 0$, et le lemme VII.4 nous donnerait que $\lim_j (g_{n_j}/\| g_{n_j} \|_1) = 0$ dans $\mathbb{L}^1(A)$, ce qui est absurde. La suite (g_n) est donc bornée dans $\mathbb{L}^1_0(A)$ et le lemme VII.3 montre que cette suite converge fortement vers $h \in L^1_0(A)$. Il est aussi clair que $g_n - I_A U^z_A g_n$ converge vers $h - I_A U^z_A h$, ce qui montre que A_z est fermé (le cas où $z = 1$ a été étudié dans la section VI). Le théorème de Banach prouve que $I - I_A U^z_A$ est un isomorphisme de L^1_0 sur Λ_z. Pour établir le dernier point, supposons l'existence d'une suite de nombres complexes z_n, de module 1, telle que $\lim_n \| (I - I_A U^{z_n}_A)^{-1} \| = +\infty$. Il existe alors aussi une suite $g_n \in \Lambda_{z_n}$, $\| g_n \|_1 = 1$, telle que l'on ait $\lim_n \| (I - I_A U^{z_n}_A)^{-1} g_n \|_1 = +\infty$. Posons $f_n = (I - I_A U^{z_n}_A(g_n)$, soit $g_n = f_n = f_n - I_A U^{z_n}_A(f_n)$. On a alors $\lim_n | f_n - I_A U^{z_n}_A(f_n))/\| f_n \|_1 = 0$ dans $\mathbb{L}^1(A)$ ce qui est en contradiction avec le corollaire VII.6.

On a bien montré que si T est apériodique, il existe un nombre c'_A tel que l'on ait :

$$(1) \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad | z | = 1 \; \| (I - I_A U^z_A)^{-1} \|_{\Lambda_z} \leqq c'_A .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal VII.1. Puisque I_A est l'opérateur identique sur $\mathbb{L}^1(A)$, on peut écrire $I - I_A U^z_A = I - I_A U^z_A I_A$ dont l'opérateur transposé est $I - I_A (U^z_A)^* I_A$. Ce dernier opérateur est un isomorphisme de Λ^*_z sur $L^\infty_0(A)$, qui peut s'identifier au dual de $L^1_0(A)$. Maintenant tout élément Φ de Λ^*_z est une forme linéaire continue sur Λ_z qui se prolonge en une forme linéaire continue avec la même norme sur $\mathbb{L}^1(A)$. Cette dernière forme linéaire est donnée par un élément ϕ de $L^\infty(A)$ ayant la même norme et on peut écrire le diagramme suivant où χ désigne l'application identique de Λ_z dans $\mathbb{L}^1(A)$,

$$\begin{array}{ccccc} L_0^1(A) & \xrightarrow{I - I_A U_A^z I} & \Lambda_z & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{L}^1(A) \\ L_0^\infty(A) & \xleftarrow[I - I_A(U_A^z)^* I_A]{} & \Lambda_z^* & \xleftarrow[\chi^*]{} & \mathbb{L}^\infty(A) \end{array}$$

avec de plus $\chi^*(\phi) = \Phi$.

Soit donc $h \in \mathbb{L}_0^\infty(A)$. Il existe $\phi \in \mathbb{L}^\infty(A)$, tel que l'on ait

$$\phi - I_A(U_A^z)^*\phi = h, \qquad \|\phi\|_\infty \leqq c'_A \|h\|_\infty .$$

Cela donne aussi, en posant $\psi = (U_A^z)^*\phi$,

$$(I - zI^*)\psi = h \qquad \text{et} \qquad |\psi| \leqq \|\phi\|_\infty \sum_{j \geq 0} (I_{A^c}T^*)^j(1_A) = \|\phi\|_\infty .$$

Il en résulte que pour tout entier n positif on a

$$\perp \sum_{j=0}^{n} z^j T^{*j} h \,| \leqq 1 c'_A \|h\|_\infty ,$$

qui achève la démonstration du théorème.

VIII.8. Corollaire. — *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème* VII.1, *la somme de la série* $\sum_{n \geq 0} |T^{*n}h|^2$ *est majorée presque partout par la constante* $c_A^2 \|h\|_\infty^2$.

Démonstration. — Soit g un élément de $\mathbb{L}_+^1$ et supposons que $m(g) = 1$. Considérons l'intégrale

$$\int g(x)dm(x) \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} e^{ni\theta} T^{*n}h(x) \right) \left(\sum_{n=0}^{N} e^{-ni\theta} T^{*n}\bar{h}(x) \right) d\theta ,$$

qui, en vertu du théorème VII.1, est majorée par $2\pi c_A^2 \|h\|_\infty^2$. Cette intégrale est aussi égale à

$$2\pi \int g(x) \left(\sum_{n=0}^{N} |T^{*n}h(x)|^2 \right) dm(x) ,$$

d'où le résultat annoncé s'obtient immédiatement.

VIII. APPLICATIONS AUX PROMENADES ALÉATOIRES

Dans [*16*], pour montrer le Théorème central limite pour les groupes SL(n, R), Tutubalin doit montrer la compacité d'une famille d'opérateurs liés à la marche aléatoire étudiée. Sa démonstration fait appel à la structure particulière de ces groupes. Nous voulons montrer ici qu'il s'agit en fait d'une propriété générale des promenades induites sur les espaces homogènes compacts par des probabilités étalées. On peut alors appliquer les résultats des sections précédentes, ce qui d'une part fournit dans certains cas des théorèmes limites intéressants et d'autre part peut éclairer certains résultats de [*2*], aussi bien que le problème traité par Tutubalin. La théorie spectrale de la section I permet notamment d'étendre le résultat de Tutubalin à une plus grande classe de probabilités.

VIII.1. — Soit G un groupe localement compact métrisable et H un sous-groupe fermé de G. Nous appellerons M l'espace homogène G/H sur lequel G opère à gauche et σ l'application canonique continue et ouverte de G sur M. L'image par l'élément $g \in G$ du point $x \in M$ sera notée gx. On notera encore $\mathcal{G}$, $\mathcal{M}$ les tribus boréliennes de G et M et $b\mathcal{G}$ et $b\mathcal{M}$ les espaces de Banach des fonctions boréliennes et bornées sur G et M.

VIII.2. — Dans toute la suite nous considérons une probabilité μ sur G pour laquelle nous supposons que :

1) le support de μ engendre topologiquement G,

2) la probabilité μ est *étalée*, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que la $p^{\text{ième}}$ puissance de convolution μ^p de μ ne soit pas singulière par rapport à une mesure de Haar sur G.

Si G est connexe 2) entraîne 1).

On peut associer à μ une probabilité de transition P sur $(M, \mathcal{M})$, en posant $P(x,.) = \mu \times \varepsilon_x$. On définit ainsi une contraction positive de $b\mathcal{M}$, que nous noterons encore P, soit

$$Pf(x) = \int_G f(gx)\mu(dg), \quad x \in E, \quad f \in b\mathcal{M} ;$$

et l'on a pour les itérés de P,

$$P^n f(x) = \int_G f(gx)\mu^n(dg).$$

VIII.3. PROPOSITION. — *Si* M *est compact, l'opérateur* P *est quasi-compact.*

Démonstration. — Soit $\phi \in L^1(G)$ et posons $\alpha = \phi . m_G$ où m_G est une mesure de Haar à droite sur G. Soit Q l'opérateur associé à α comme P est associé à μ, soit pour $f \in b\mathcal{M}$

$$Qf(x) = \int_G f(gx)\phi(g)m_G(dg)$$

on pose pour $f \in b\mathcal{M}$, $\tilde{f} = f \circ \sigma$; comme $g'\sigma(g) = \sigma(g'g)$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{Q}f(g) &= \int_G f(g'\sigma(g))\phi(g')m_G(dg') \\ &\int_G \tilde{f}(g'g)\phi(g')m_G(dg') \\ &\int_G \tilde{f}(g')\phi(g'g^{-1})m_G(dg') ;\end{aligned}$$

comme la convolée d'une fonction bornée par une fonction intégrable est continue, la fonction $\tilde{Q}f$ est continue et par définition de la topologie de M, la fonction Qf est continue quel que soit $f \in b\mathcal{M}$.

Il résulte alors du théorème de Mokobodsky (cf. [*12*]) que l'application $x \to Q^2(x,.)$ est continue pour la norme des mesures. Il en résulte facilement que l'image par Q^2 de la boule unité de $b\mathcal{M}$ est un ensemble uniformément équi-continu sur tout compact. Si M est compact le théorème d'Ascoli entraîne donc que Q^2 est compact de $b\mathcal{M}$ dans l'espace C(M) des fonctions continues sur K.

Il existe maintenant un entier p tel que $\mu^p = \alpha + \sigma$ avec $\alpha \ll m_G$ et non nulle. On a donc encore $\mu^{2p} = \alpha^2 + \sigma'$ avec $\|\sigma'\| < 1$ et comme

$$\| P^{2p} - Q^2 \| = \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_G f(gx)d\sigma'(g) \right| \leqq \|\sigma'\| < 1 ,$$

l'opérateur P est quasi-compact.

Remarque. — On peut remplacer $b\mathcal{M}$ par les fonctions boréliennes complexes.

VIII.4. — L'utilisation du théorème de Mokobodsky qui oblige à passer par les puissances paires de P, fait que l'on ne retrouve pas par cette méthode la compacité de l'opérateur Q qui est utilisée par Tutubalin. Nous allons avec une petite hypothèse sur M retrouver ce résultat.

PROPOSITION. — *Si* G *est compactement engendré ou si* H *contient les sous-groupes arbitrairement petits de* G, *et si* μ *est absolument continue par rapport à* m_G, *l'opérateur* P *transforme la boule unité de* $b\mathcal{M}$ *en un ensemble de fonctions continues relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. — Avec les notations précédentes, si g_1 et g_2 sont deux points de G tels que $\sigma(g_1) = x_1$ et $\sigma(g_2) = x_2$ on a

$$| Qf(x_1) - Qf(x_2) | \leqq \|f\|_\infty \| \phi(.g_1^{-1}) - \phi(.g_2^{-1}) \|_1 .$$

Or la fonction $g \to \phi(.g^{-1})$ *est continue de* G *dans* $L^1(G)$. D'autre part les hypothèses faites sur G et H entraînent, d'après [*11*], l'existence d'une section de σ localement continue et donc pour tout compact $\tilde{K}$ de M d'un compact $\tilde{K}$ de G tel que $K = \sigma(\tilde{K})$. En prenant g_1 et g_2 dans $\tilde{K}$ on voit alors que l'ensemble des fonctions Qf, pour $\|f\| \leqq 1$, est équi-continu sur K, ce qui entraîne le résultat.

COROLLAIRE. — *Si* M *est compact et* μ *absolument continue, l'opérateur* P *est compact.*

C'est le théorème de Tutubalin dans le cas où $G = SL(n, \mathbb{R})$ et où M est la frontière maximale de G. En fait Tutubalin a besoin de ce résultat pour des opérateurs plus généraux que nous allons introduire ci-dessous.

VIII.5. — Nous supposerons que G est maintenant de Lie, semi-simple, connexe à centre fini. Soit K le groupe compact maximal dans une décomposition d'Iwasawa $G = K.S$ de G. Soit M l'espace de Poisson de μ. On appelle cocycle une fonction continue ρ de module 1 sur $G \times M$ telle que

$$\rho(g_1, g_2, x) = \rho(g_1, g_2, x).\rho(g_2, x)$$

pour g_1, g_2 G, $\times$ M et $\rho(k, x) = 1$ pour $k \in K$.

On associe à μ et ρ l'opérateur $T\rho$ défini sur les fonctions complexes par

$$T_\rho f(x) = \int \rho(g, x) f(gx) \mu(dg).$$

PROPOSITION. — *Les opérateurs* T_ρ *sont quasi-compacts.*

Démonstration. — Comme M est l'image de K par σ, on peut dans ce cas prendre pour g_1 et g_2 de la démonstration précédente des éléments k_1 et k_2 de K. On aura alors si $\mu = \phi.m_G$

$$\begin{aligned} Qf(x_1) &= \int_G \tilde{f}(gk_1)\rho(g, x_1)\phi(g)m_G(dg) \\ &= \int_G \tilde{f}(g)\rho(gk_1^{-1}, x_1)\phi(gk_1^{-1})m_G(dg) \end{aligned}$$

mais $\rho(gk_1^{-1}, x_1) = \rho(g, k_1^{-1}\sigma(k_1))\rho(k_1^{-1}, x_1) = \rho(g, \sigma(e))$ où e est l'élément neutre de G. On a donc encore

$$|Qf(x_1) - Qf(x_2)| \leqq \|f\| \, \|\phi(.k_1^{-1}) - \phi(.k_2^{-1})\|_1$$

et l'on peut terminer comme précédemment. Le cas où μ est étalée se traitant facilement à partir du cas $\mu = \phi . m_G$.

Nous allons donc maintenant pouvoir appliquer aux espaces homogènes compacts les résultats des sections I et II.

La première remarque ne suppose pas M compact.

VIII.6. PROPOSITION. — *Les fonctions* P-*harmoniques bornées sont continues.*

Démonstration. — Si f est P-harmonique bornée, $f \circ \sigma$ est μ-harmonique et donc continue (cf. [2], p. 23).

Supposons maintenant M compact. Comme P est quasi-compact nous employons les résultats et les notations de la section II et énonçons.

COROLLAIRE. — *Les ensembles* $E_{\rho,\delta}$ *et* E_ρ *sont fermés.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de ce que U_ρ et $U_{\rho,\delta}$ sont P et $P^{d\rho}$-harmoniques. ■

D'autre part dire que les m_ρ sont P-invariants est équivalent à dire que $\mu * m_\rho = m_\rho$. Si m est une mesure μ-invariante sur M, de l'égalité $\mu^n * m = m$ et du théorème de convergence énoncé dans la section II on déduit que

$$m = \sum_\rho < m, U_\rho > m_\rho .$$

La proposition suivante améliore certains points de [2] (p. 53).

VIII.7. PROPOSITION. — *Le convexe compact des probabilités* μ-*invariantes n'a qu'un nombre fini de points extrémaux.*

Démonstration. — Les m_ρ sont extrémales puisque la restriction de X à E_ρ est de Harris et d'après ce qui précède toute mesure invariante en est une combinaison convexe.

VIII.8. — Il peut exister effectivement plusieurs classes E_ρ sur M. C'est par exemple le cas lorsque $G = SL(2, \mathbb{R})$, $M = S^1$ et que μ et toutes ses puissances sont portées par le semi-groupe des matrices à coefficients positifs (cf. [8]). De plus M n'est pas la réunion des E_ρ. Cette situation est liée au fait que G est semi-simple. Si G a la propriété de « Choquet-Deny » la situation se simplifie et on peut obtenir un théorème de convergence fort, améliorant à certains égards des résultats de Guivarc'h [9].

THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe, extension compacte d'un groupe de Lie de type rigide, et* M *un espace homogène compact de* G. *Les opérateurs* P_n *sur* $b\mathcal{M}$, *associés aux puissances d'une mesure étalée* μ

sur G *convergent en norme vers* 1 $\otimes$ *m où m est l'unique probabilité sur* $\mathcal{M}$ *invariante par* G.

Démonstration. — Le groupe G a la propriété de point fixe, donc il existe une probabilité m invariante par G et on sait qu'il en existe au plus une.

D'après Azencott [2] les fonctions harmoniques bornées sur G et M sont constantes et par suite il existe une seule classe absorbante E_ρ qui porte m et qui est fermée et qui donc est égale à M (puisqu'un ouvert de m-mesure nulle est vide).

D'autre part, puisque G est connexe, M l'est aussi et d'après le corollaire VIII.6 il n'y a pas de classes cycliques. Le théorème de convergence de la section II s'écrit donc dans ce cas :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f\in b\mathcal{M}}} \sup_{x\in M} \| \mu * f(x) - \langle m, f \rangle \| = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. ACKOGLU et A. BRUNEL, Contractions ou L^1-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **155**, 1971, p. 315-325.

[2] R. AZENCOTT, Espaces de Poisson des groupes localement compacts. *Lectures notes in Mathematics*, 148. Springer-Verlag, 1970.

[3] I. G. BASTERFIELD, On quasi-compact pseudo-resolvents. *Proceedings of the fifth Berkeley Symposium*, vol. **2**, part 2, p. 193-195. Berkeley, University of California Press, 1967.

[4] M. BRANCOVAN, Quelques propriétés des résolvantes récurrentes au sens de Harris. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **9**, 1973, p. 1-18.

[5] A. BRUNEL, Chaînes abstraites de Markow vérifiant une condition de Orey. Extension à ce cas d'un théorème ergodique de M. Métivier. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1971, p. 323-329.

[6] A. BRUNEL et D. REVUZ, Marches de Harris sur les groupes localement compacts I, *à paraître*.

[7] R. FORTET, Sur l'itération des substitutions linéaires algébriques d'une infinité de variables et ses applications au problème des probabilités en chaîne, thèse de Doctorat, Paris, 1938.

[8] H. FURSTENBERG, A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Maths* (2), t. **77**, 1963, p. 335-386.

[9] Y. GUIVARC'H, Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques, *à paraître*.

[10] S. HOROWITZ, Transition probabilities and contractions of L^∞. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **24**, 1972, p. 263-274.

[11] KARUBE, On the local cross sections in locally compact groups. *J. Math. Soc. Japan*, t. **10**, 1958, p. 343-347.

[12] P. A. MEYER, Les résolvantes fortement felleriennes d'après Mokobodsky. Séminaires de Calcul des Probabilités II. *Lectures notes in Mathematics*, 1968, p. 51.

[13] J. NEVEU, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, 1964.

[14] J. NEVEU, Potentiels markoviens récurrents des chaînes de Harris. *Ann. Inst. Fourier*, t. **22**, 2, 1972, p. 85-130.

[15] D. REVUZ, Markov chains. *A paraître* (North Holland, Edit.).

[*16*] TUTUBALIN, Limit theorems for the product of random matrices. *Teoriya. Prob. and Appl.*, t. **X**, 1965, p. 1.
[*17*] K. YOSIDA, Quasi-completely continuous linear functional operators. *Jap. J. Math.*, t. **25**, 1939, p. 297-301.
[*18*] K. YOSIDA, *Functional Analysis*. Springer-Verlag.
[*19*] K. YOSIDA et S. KAKUTANI, Operator theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorems. *Ann. of Math.*, t. **42**, 1941, p. 188-228.

(Manuscrit reçu le 15 juillet 1974)