

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

SHIGEYOSHI OGAWA

Processus de Markov en interaction et système semi-linéaire d'équations d'évolution

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 2 (1974), p. 279-299

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_279_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Processus de Markov en interaction et système semi-linéaire d'équations d'évolution

par

Shigeyoshi OGAWA

Laboratoire de Calcul des Probabilités.
Université de Paris-VI,
9, quai Saint-Bernard, Tour 56 F-75, Paris 5^e

RÉSUMÉ. — L'objet de l'article est l'étude probabiliste, dans le cadre de la théorie des processus de Markov, d'un système semi-linéaire d'équations d'évolution de la forme :

$$\frac{d}{dt} u_i = \mathcal{A}^i u_i - F^i(u_j) u_i, \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j,$$

où \mathcal{A}^i ($i = 1, 2$) est un opérateur quelconque, associé à un processus de Markov. Pour ce but, une notion de processus aléatoires en interaction est introduite, modification de celle de « processus de Markov à un mécanisme non-constant » introduite par H. P. McKean [6]. Un théorème sur l'existence et l'unicité de tels processus est établi. L'application au problème de Cauchy pour certains systèmes d'équations est exposée avec quelques exemples.

ABSTRACT. — The aim of this paper is to find a probabilistic meaning, especially in the framework of the theory of Markov processes, of a system of semi-linear evolution equations of the form:

$$\frac{d}{dt} u_i = \mathcal{A}^i u_i - F^i(u_j) u_i, \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j,$$

where \mathcal{A}^i ($i = 1, 2$) is an operator corresponding to a Markov process. For this purpose, a notion of reacted stochastic processes is introduced,

which is a modification of that of « a Markov process with non-constant transition mechanism » introduced by H. P. McKean [6]. A theorem on the existence and the uniqueness of those processes is established. Also the applications to the Cauchy problem of certain systems of equations are presented.

1. INTRODUCTION

Il s'agit d'une étude probabiliste, notamment dans le cadre de la théorie des processus de Markov, d'un système semi-linéaire d'équations d'évolution de la forme :

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} u_i(t, x) = \mathcal{A}^i u_i(t, x) - F^i(u_j(t, x)) u_i(t, x),$$

$$(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j)$$

où $F^i(\cdot)$ ($i = 1, 2$) est une fonction de \mathbb{R}^1 dans \mathbb{R}^1 , et \mathcal{A}^i un opérateur infinitésimal quelconque correspondant à un processus de Markov à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Des problèmes de cette sorte, qui sont bien classiques, ont été étudiés par un grand nombre de mathématiciens; W. Feller a traité, dans son article de 1939 [3], le cas spécial où $\mathcal{A}^i = 0$, en vue de l'interprétation probabiliste de la théorie de Volterra sur un problème de la lutte pour la vie [7]. D'ailleurs, dans un autre cas, c'est-à-dire pour une équation semi-linéaire de la forme (1.1), il est bien connu que l'équation a de profondes relations avec la théorie des processus de ramification (e. g., Ikeda-Watanabe-Nagasawa [4]).

De même qu'en théorie des processus de ramification, on s'intéresse à trouver des mouvements aléatoires associés au phénomène régi par le système d'équations. Or, comme celui-ci concerne deux fonctions inconnues u_1 et u_2 , il est naturel de penser que la question est à traiter comme un problème d'interaction entre les deux processus de Markov correspondants aux opérateurs \mathcal{A}^i ($i = 1, 2$). D'autre part, dans un cas linéaire, on sait que l'équation de la forme suivante

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} u(t, x) = \mathcal{A} u(t, x) - a(t, x) u(t, x), \quad a(t, x) \geq 0$$

correspond à un processus de Markov obtenu par une transformation du processus associé à l'opérateur \mathcal{A} ; ce fait confirme que le processus

aléatoire cherché, que l'on appelle le processus réactionné, devrait être obtenu de la même manière. On utilise le mot « le processus réactionné » car le mécanisme introduit pour le définir ressemble à celui d'une réaction chimique.

Par la suite, au § 2 on va expliquer la notion des processus en interaction sur un exemple simple ; puis on va établir un système d'équations intégrales, la formule de Blanc-Lapierre-Fortet, que les fonctions de transition de processus réactionnés, s'ils existent, doivent satisfaire. Le théorème principal, l'existence et l'unicité de la Markov-solution de ce système, est établi au § 3 où l'on étudie aussi l'existence de la limite des solutions par rapport à un paramètre concernant le mécanisme de la réaction. En outre, on étudie la relation entre la limite, qui est encore la Markov-solution d'un système d'équations, et le système semi-linéaire d'équations d'évolution. Au § 4, on applique les résultats obtenus à quelques exemples pris de la physique.

2. LES PROCESSUS RÉACTIONNÉS ET LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRALES

2.1. Modèle d'interaction des processus aléatoires.

Considérons deux ensembles de particules, T^1 et T^2 , distribués au moment initial s_0 (≥ 0) dans l'espace \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) selon des lois $f_i(x)$ ($i = 1, 2$). On suppose que la trajectoire d'une particule partant d'un point x est représenté par un processus de Markov $\tilde{X}^i = (\tilde{X}_t^i, \mathcal{F}_{s_0, t}^i, \mathcal{F}^i, \Omega^i, \tilde{P}_{s_0, x}^i)$ ($s_0 \leq t$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$) à valeurs dans \mathbb{R}^n , où $\mathcal{F}_{s_0, t}^i$ est la plus petite σ -algèbre engendrée par des ensembles de la forme $\{\omega^i; \tilde{X}_u^i \in A\}$ ($s_0 \leq u \leq t$, A , ensemble borélien dans \mathbb{R}^n) et $\mathcal{F}^i = \bigvee_{t \geq s_0} \mathcal{F}_{s_0, t}^i$. En outre, on suppose toujours que les

processus traités sont progressivement mesurables par rapport aux tribus $\mathcal{B}_{[s_0, t]} \times \mathcal{F}_{s_0, t}^i$ ($\mathcal{B}_{[s_0, t]}$, tribu borélienne sur l'intervalle $[s_0, t]$).

On va introduire une interaction entre des particules et étudier son effet sur les lois probabilistes de leurs comportements. En particulier, on s'intéresse à une interaction qui reflète un mécanisme de la réaction chimique où chaque particule disparaît au cours de la répétition de voyages au voisinage de particules du type différent :

(R.1) A chaque particule est associée une variable aléatoire positive, indépendante des processus \tilde{X}^i ($i = 1, 2$), que l'on appelle le temps de réaction.

(R. 2) Pour chaque particule, on mesure son temps de séjour dans des voisinages de particules de l'autre type.

(R. 3) On laisse une particule disparaître de l'espace dès que son temps de séjour dépasse le temps de réaction.

Pour la description complète d'un tel mécanisme, il faut préciser les formes mathématiques des quantités : temps de réaction, voisinage d'une particule, temps de séjour. Pour raison de simplicité, on va se borner au cas où le problème peut être traité entièrement dans le cadre de la théorie des processus de Markov. Autrement dit, on veut que les processus aléatoires obtenus de ce procédé, appelés par la suite des processus réactionnés, soient aussi de Markov en un certain sens.

Comme le mécanisme décrit plus haut règle seulement la disparition des particules, il s'agit donc de la transformation des processus de Markov par des fonctionnelles multiplicatives. Par conséquent, la contrainte nous oblige à faire quelques précisions sur le mécanisme, pour lesquelles on n'est plus certain si elles décrivent un phénomène physique d'une réaction chimique.

2.2. Description d'un mécanisme et les processus réactionnés.

Soient $P_{f_j}(s_0, x, t, A)$ ($j = 1, 2, s_0 \leq t, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) les probabilités conditionnelles associées aux processus réactionnés

$$X^i = (X_t^i, \mathcal{F}_{s_0, t}^i, \mathcal{F}^i, P_{f_j})$$

qui restent à déterminer :

$$(2.1) \quad P_{f_j}(s_0, x, t, A) = \text{Probabilité de } \{ X_t^i(\omega^i) \in A \} \\ \text{étant donnée la condition } X_{s_0}^i(\omega^i) = x \} \quad (i, j = 1, 2 \ i \neq j).$$

L'emploi de telles notations P_{f_j} vient de la considération que la loi probabiliste du comportement d'une particule du type T^i doit dépendre de la configuration initiale f_j des particules du T^j ($i \neq j$).

Maintenant on précise les formes mathématiques des quantités (R. 1)-(R. 3) :

HYPOTHÈSE SUR LE MÉCANISME. — (H. 1) le temps de réaction $r(\bar{\omega})$ est une variable aléatoire positive, définie sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{P})$ et exponentiellement distribuée : $\bar{P}(r(\bar{\omega}) \leq a) = 1 - \exp(-a)$ ($0 < a < +\infty$).

(H. 2) le voisinage d'une particule est une boule fermée V_ε de rayon $\varepsilon (> 0)$, centrée à la position de la particule.

(H.3) le temps de séjour d'une particule de T^i jusqu'à $t (\geq s_0)$ est donné comme suit

$$S_t(\omega^i) = E^j\text{-moyen de } \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{s_0}^t I_\varepsilon(\tilde{X}_t^i(\omega^i), X_t^j(\omega^j)) dv$$

où « E^j -moyen » signifie l'espérance mathématique par rapport à la mesure P_{f_j} , $L_\varepsilon = L(V_\varepsilon)$ et $L(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, et où $I_\varepsilon(x, y)$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$) est la fonction telle que $I_\varepsilon(x, y) = 1$ si $|x - y| \leq \varepsilon$, $= 0$ sinon.

Interprétons les trois propriétés (R.1)-(R.3) à l'aide de notre hypothèse; on obtient alors la relation suivante :

$$\begin{aligned} P_{f_j}(s_0, x, t, A) &= \text{Proba} \{ X_t^i(\omega^i) \in A \mid X_{s_0}^i(\omega^i) = x \} \\ &= \text{Proba} \{ \tilde{X}_t^i(\omega^i) \in A, S_t^i(\omega^i) < r(\bar{\omega}) \mid \tilde{X}_{s_0}^i(\omega^i) = x \} \\ &= \bar{E} \times \tilde{E}_{s_0, x}^i \{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \cdot I_{[S_t, \infty)}(r(\bar{\omega})) \} \\ &= \tilde{E}_{s_0, x}^i \{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \cdot \bar{E} I_{[S_t, \infty)}(r(\bar{\omega})) \} \\ &= \tilde{E}_{s_0, x}^i \{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \cdot \exp(-S_t(\omega^i)) \} \end{aligned}$$

où $I_\cdot(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$ ou $\in \mathbb{R}^1$) est la fonction indicatrice et où $\tilde{E}_{s_0, x}^i$, \bar{E} sont des espérances par rapport à la mesure $\tilde{P}_{s_0, x}^i$ et à la \bar{P} respectivement.

D'autre part, de la définition de P_{f_j} résulte que :

$$\begin{aligned} S_t(\omega^i) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_j(dx) \cdot E^j\text{-moyen} \left\{ \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{s_0}^t I_\varepsilon(\tilde{X}_t^i(\omega^i), X_t^j(\omega^j)) dv \mid X_{s_0}^j = x \right\} \\ &= \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(dx) \int_{s_0}^t P_{f_i}(s_0, x, v, V_\varepsilon(\tilde{X}_t^i(\omega^i))) dv \\ &\quad (V_\varepsilon(x) \text{ est la boule de centre } x); \end{aligned}$$

d'où la relation suivante :

$$(2.2) \quad P_{f_j}(s_0, x, t, A) = \tilde{E}_{s_0, x}^i \left\{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \times \exp \left(- \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{s_0}^t P^{f_j}(s_0; v, V_\varepsilon(\tilde{X}_t^i(\omega^i))) dv \right) \right\}$$

où

$$P^{f_j}(s_0; v, A) = \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_i}(s_0, x, v, A) f_j(dx), \quad (i, j = 1, 2 \quad i \neq j).$$

Il est facile de voir que de tels noyaux P_{f_j} , s'ils existent, vérifient les conditions ;

(M.1) $x \rightarrow P_{f_j}(s_0, x, t, A)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mesurable en x , quels que soient $s_0 \leq t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(M.2) $A \rightarrow P_{f_j}(s_0, x, t, A)$ est une mesure sous-stochastique, c'est-à-dire $0 \leq P_{f_j}(s_0, x, t, A) \leq \tilde{P}^i(s_0, x, t, A)$.

(M.3) normalité : $\lim_{t \rightarrow s_0} P_{f_j}(s_0, x, t, A) = \delta_A(x)$.

Il est possible de définir des noyaux $P_{f_j}(s, x, t, A)$ ($s_0 \leq s \leq t$) en remplaçant s_0 par s dans l'équation (2.2). Mais la famille de noyaux $\{P_{f_j}(s, x, t, A), s \geq s_0\}$ ($j = 1, 2$) ne satisfait pas à l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Posons

$$(2.3) \quad P_{u_j(v, \cdot)}(v, x, t, A) = \tilde{E}_{v, x}^i \left\{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \cdot \exp \left(-\frac{1}{L_e} \cdot \int_v^t P^{f_j}(s_0; s, V_e(\tilde{X}_s^i(\omega^i))) ds \right) \right\},$$

$$u_j(v, \cdot) = P^{f_j}(s_0; v, \cdot), \quad (s_0 \leq v \leq t, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)).$$

En vertu de (M.3), cette définition est cohérente avec celle de P_{f_j} en (2.2). De plus, il n'est pas difficile de montrer que les noyaux ainsi définis, s'ils existent, vérifient

$$(M.4) \quad P_{f_j}(s_0, x, t, A) = \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_j}(s_0, x, v, dy) P_{u_j(v, \cdot)}(v, y, t, A)$$

$$(j = 1, 2).$$

Par conséquent, l'équation (2.3) peut s'écrire sous la forme suivante

$$(2.3)' \quad P_{u_j(v, \cdot)}(v, x, t, A) = \tilde{E}_{v, x}^i \left\{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \cdot \exp \left(-\frac{1}{L_e} \cdot \int_v^t P^{u_j}(v; s, V_e(\tilde{X}_s^i(\omega^i))) ds \right) \right\}$$

où

$$P^{u_j}(v; s, A) = \int_{\mathbb{R}^n} P_{u_i(v, \cdot)}(v, x, s, A) u_j(v, dx).$$

Cette relation nous indique que l'interprétation intuitive des noyaux P_{f_j} s'applique aussi aux P_{u_j} , c'est-à-dire que les notations sont bien cohérentes.

Or, à l'aide du théorème de Kolmogorov-Daniell, un couple des noyaux (P_{f_j}, P_{u_j}) ($j = 1, 2$) vérifiant les conditions (M.1)-(M.4) nous permet de construire un processus aléatoire, notamment le processus réactionné, sur un espace de probabilité. Cela signifie que notre formulation mathématique est bien adoptée et que le problème se réduit à trouver la Markov-solution des équations (2.2)-(2.3)';

DÉFINITION. — On appelle un couple des noyaux (P_{f_j}, P_{u_j}) ($j = 1, 2$) la Markov-solution des équations (2.2)-(2.3)' si chaque élément satisfait à

l'équation (2.2) (ou (2.3)' respectivement) ainsi que les conditions (M.1) à (M.3) et si les deux vérifient la condition (M.4).

Remarque 1. — Quand on dit simplement « une solution de (2.2) ou bien de (2.3)' », cela signifie un noyau satisfaisant aux conditions (M.1) à (M.3) et à l'équation correspondante.

Il faudrait remarquer que la notion de processus réactionnés est une modification de celle de « processus de Markov à un mécanisme non-constant » introduite par H. P. McKean [6]. En effet, les deux coïncident dans le cas où $f_1 = f_2$ et $\tilde{P}^1 = \tilde{P}^2$.

2.3. Système des équations intégrales.

Par généralisation de ce qui précède, nous allons dorénavant étudier, au lieu de (2.2) et (2.3)', les équations suivantes :

$$(2.4) \quad P_{f_j}(s_0, x, t, A) = \tilde{E}_{s_0, x}^i \left\{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \cdot \exp \left(- \int_{s_0}^t F_{s_0}^i(v, \tilde{X}_v^i(\omega^i); f_j) dv \right) \right\}$$

et

$$(2.5) \quad P_{u_j(v, \cdot)}(v, x, t, A) = \tilde{E}_{v, x}^i \left\{ I_A(\tilde{X}_t^i(\omega^i)) \cdot \exp \left(- \int_v^t F_v^i(s, \tilde{X}_s^i(\omega^i); u_j(v, \cdot)) ds \right) \right\}$$

$$(s_0 \leq v \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), i, j = 1, 2 \quad i \neq j)$$

où

$$F_v^i(s, z; f) = F^i \left[\frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} P_{u_i(v, \cdot)}(v, x, s, V_\varepsilon(z)) f(dx) \right]$$

avec la convention

$$P^{f_j}(s_0; s_0, \cdot) = u_j(s_0, \cdot) = \int f_j(dx),$$

et où $F^i(b)$ ($b \in \mathbb{R}^1, i = 1, 2$) sont des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^1 .

Remarque 2. — (i) Si les fonctions F^i sont non-négatives, cette généralisation ne change pas la situation : s'il existe un et un seul couple de noyaux vérifiant (2.4) et (2.5), alors ils doivent satisfaire aux conditions (M.1) à (M.4). La signification intuitive de F^i sera expliquée au § 4 par des exemples.

(ii) Rigoureusement, nous devrions employer les notations $P_{f_j}^\varepsilon$ afin de mettre en évidence le rôle du nombre ε (> 0). Mais on ne les utilisera qu'à la section 3.2 où on étudie la limite de $P_{f_j}^\varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Comme il est difficile de traiter directement les équations (2.4) et (2.5), on a besoin maintenant d'expressions plus analytiques ; elles sont fournies par la formule de Blanc-Lapierre-Fortet [1], sur la transformation des processus de Markov par des fonctionnelles multiplicatives.

Par la même méthode qui conduit à cette formule (e. g., Dynkin [2]), on peut aisément obtenir les équations suivantes auxquelles les noyaux dans (2.4) et (2.5), s'ils existent, doivent satisfaire :

$$(2.6) \quad P_{f_j}(s_0, x, t, A) = \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_j}(s_0, x, v, dy) \\ \times F_{s_0}^i(v, y; f_j) \tilde{P}^i(v, y, t, A)$$

$$(2.7) \quad P_{u_j(v, \cdot)}(v, x, t, A) = \tilde{P}^i(v, x, t, A) - \int_v^t ds \int_{\mathbb{R}^n} P_{u_j(v, \cdot)}(v, x, s, dy) \\ \times F_v^i(s, y; u_j(v, \cdot)) \tilde{P}^i(s, y, t, A).$$

Par contre, il n'est pas difficile de vérifier que la Markov-solution de (2.6)-(2.7), si elle existe et est unique, satisfait aussi aux équations (2.4) et (2.5) ; c'est-à-dire qu'elle doit être la solution cherchée. Donc on va se borner à étudier les équations (2.6) et (2.7).

3. L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE LA MARKOV-SOLUTION

On fixe un nombre $\varepsilon (> 0)$ arbitrairement et on le supprime des notations de noyaux $P_{f_j}^\varepsilon$ ($j = 1, 2$) jusqu'à la section 3.2. Quand on utilise des notations $|R(A)|$, $\int \cdot |R(dx)|$ pour une mesure $R(\cdot)$, on entend par la première la valeur absolue de $R(A)$ et par la deuxième l'intégrale par rapport à la valeur absolue de $R(\cdot)$. Des signes s_0, v, s, t, x, y, z, A , etc. sont utilisés pour des variables telles que $s_0 \leq v \leq s \leq t$, $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, etc. sauf mentions contraires.

3.1. Markov-solutions.

Soit $\mathcal{L}_a^i(s_0)$ ($0 \leq a < +\infty$) l'ensemble des fonctions non-négatives telles que

$$(3.1) \quad \sup_{t \geq s_0} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) f(x) dx \leq aL(A) \quad \text{quel que soit } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Soient $F^1(b)$ et $F^2(b)$ ($b \in \mathbb{R}^1$) des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^1 , satisfaisant à la condition suivante

$$(3.2) \quad F^i(b) \in C^1, \quad \text{non-négatives sur un intervalle } [0, C_i] \quad (i = 1, 2).$$

Étant donné deux fonctions $f_1 \in \mathcal{L}_{C_2}^1(s_0)$ et $f_2 \in \mathcal{L}_{C_1}^2(s_0)$, on va d'abord étudier l'unicité de la Markov-solution de (2.6)-(2.7). Quant à cette question, on a :

PROPOSITION 1. — S'il existe une solution (P_{f_2}, P_{f_1}) de l'équation (2.6), alors elle est unique parmi les noyaux satisfaisant aux conditions (M.1)-(M.3) et à l'équation (d'où, *a fortiori*, l'unicité de la Markov-solution).

Preuve. — Soit Q_{f_j} ($j = 1, 2$) une autre solution, c'est-à-dire

$$(3.3) \quad Q_{f_j}(s_0, x, t, A) = \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} Q_{f_j}(s_0, x, v, dy) \\ \times G_{s_0}^i(v, y; f_j) \tilde{P}^i(v, y, t, A)$$

où

$$G_{s_0}^i(v, y; f_j) = F^i\left(\frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} Q_{f_i}(s_0, x, v, V_\varepsilon(y)) f_j(x) dx\right).$$

Posons :

$$R_{f_j}(s_0, x, t, A) = P_{f_j}(s_0, x, t, A) - Q_{f_j}(s_0, x, t, A).$$

Alors, on obtient la relation suivante :

$$R_{f_j}(s_0, x, t, A) = - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} R_{f_j}(s_0, x, v, dy) F_{s_0}^i(v, y; f_j) \tilde{P}^i(v, y, t, A) \\ - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} Q_{f_j}(s_0, x, v, dy) [(F_{s_0}^i - G_{s_0}^i)(v, y; f_j)] \tilde{P}^i(v, y, t, A).$$

D'autre part, on a

$$|(F_{s_0}^i - G_{s_0}^i)(v, y; f_j)| \leq |\bar{F}^i(v, y; f_j)| \left(\frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |R_{f_j}(s_0, x, v, V_\varepsilon(y))| f_j(x) dx\right)$$

où $\bar{F}^i(b) = \frac{d}{db} F^i(b)$ et

$$\bar{F}_{s_0}^i(v, y; f_j) = \bar{F}^i\left(\frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_i}(s_0, x, v, V_\varepsilon(y)) f_j(x) dx \right. \\ \left. + \frac{\theta}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} R_{f_i}(s_0, x, v, V_\varepsilon(y)) f_j(x) dx\right) \quad (0 \leq \theta = \theta(v, y) \leq 1).$$

Compte tenu du fait que $0 \leq P_{f_j}, Q_{f_j} \leq \tilde{P}^i$, on arrive à l'inégalité suivante :

$$(3.4) \quad |R_{f_j}(s_0, x, t, A)| \leq M^i \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} |R_{f_j}(s_0, x, v, dy)| \tilde{P}^i(v, y, t, A) \\ + M_1^i \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^i(s_0, x, v, dy) \tilde{P}^i(v, y, t, A) \\ \times \left(\frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |R_{f_i}(s_0, x, v, V_\varepsilon(y))| f_j(x) dx \right),$$

où

$$M^i = \sup_{v, y} |F_{s_0}^i(v, y; f_j)|, \quad M_1^i = \sup_{v, y} |\bar{F}_{s_0}^i(v, y; f_j)|$$

et celles-ci sont finies d'après la continuité de F^i , \bar{F}^i et d'après l'hypothèse (3.1).

Avec l'estimation *a priori*, $|R_{f_j}| \leq \tilde{P}^i$, (3.4) implique l'inégalité :

$$|R_{f_j}(s_0, x, t, A)| \leq (M^i + C_i M_1^i)(t - s_0) \tilde{P}^i(s_0, x, t, A)$$

qui avec (3.4) implique encore

$$|R_{f_j}(s_0, x, t, A)| \leq \bar{M}^2 (t - s_0)^2 \frac{1}{2!} \tilde{P}^i(s_0, x, t, A),$$

où $\bar{M} = \max_i (M^i + C_i M_1^i)$. De cette manière, on trouve

$$|R_{f_j}(s_0, x, t, A)| \leq \frac{1}{n!} \bar{M}^n (t - s_0)^n \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

d'où on conclut $|R_{f_j}(s_0, x, t, A)| = 0$. ■

Puisque la solution de (2.6) est unique, la question de l'unicité de solution de (2.7) est bien posée.

COROLLAIRE. — On a le même résultat sur la solution de (2.7).

Preuve. — On remarque l'inégalité :

$$0 \leq u_j(v, A) = \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_i}(s_0, x, v, A) f_j(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^j(s_0, x, v, A) f_j(x) dx.$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^j(v, y, t, A) u_j(v, dy) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^j(s_0, x, v, dy) \tilde{P}^j(v, y, t, A) \\ = \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \tilde{P}^j(s_0, x, t, A) dx \leq C_i L(A),$$

c'est-à-dire $u_j(v, \cdot) \in \mathcal{L}_{C_i}^i(v)$, et donc la discussion précédente s'applique dans ce cas. ■

Pour étudier l'existence d'une Markov-solution, on va construire une suite de noyaux $\{(P_{f_j}^m, P_{f_i}^m)\}_m$ de la façon suivante :

$$(3.5) \quad P_{f_j}^0(s_0, x, t, A) = \tilde{P}^i(s_0, x, t, A),$$

$$P_{f_j}^m(s_0, x, t, A) = \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_j}^{m-1}(s_0, x, v, dy) \\ \times F_{s_0}^{i, m-1}(v, y; f_j) \tilde{P}^i(v, y, t, A),$$

où

$$F_{s_0}^{i, m}(v, y; f_j) = F^i\left(\frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_i}^m(s_0, x, v, V_\varepsilon(y)) f_j(x) dx\right).$$

Il est facile de voir que chaque terme $P_{f_j}^m$ ($j = 1, 2$) ainsi construit satisfait aux conditions (M.1)-(M.3) sur un intervalle fini $[s_0, t_0]$. En effet, la condition (M.2) est satisfaite pour $m = 0$. Supposons qu'elle le soit pour $m = k$. Dans ce cas, on remarque pour $s_0 \leq v$

$$0 \leq \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} P_{f_i}^k(s_0, x, v, V_\varepsilon(y)) f_j(x) dx \leq \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^i(s_0, x, v, V_\varepsilon(y)) f_j(x) dx \leq C_i,$$

donc $F_{s_0}^{i, k}(v, y; f_j) \geq 0$. Par conséquent $\tilde{P}^i \geq P_{f_j}^{k+1}$. D'autre part, on a :

$$P_{f_j}^{k+1}(s_0, x, t, A) \geq \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^i(s_0, x, v, dy) F_{s_0}^{i, k}(v, y; f_j) \\ \times \tilde{P}^i(v, y, t, A) \\ \geq \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) [1 - M^i(t - s_0)].$$

Donc, en prenant $t_0 = s_0 + \frac{1}{M}$ (où $M = \max_i M^i$), il se confirme que

$$0 \leq P_{f_j}^m(s_0, x, v, A) \leq \tilde{P}^i(s_0, x, v, A) \text{ pour } m \text{ quelconque et } s_0 \leq v \leq t_0.$$

On fixe $t(s_0 \leq t \leq t_0)$ et on considère la série :

$$\sum_{m=1}^{\infty} |(P_{f_j}^m - P_{f_j}^{m-1})(s_0, x, t, A)|.$$

De la définition (3.5), on déduit :

$$|(P_{f_j}^1 - P_{f_j}^0)(s_0, x, t, A)| \leq \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^i(s_0, x, v, dy) F_{s_0}^{i, 0}(v, y; f_j) \tilde{P}^i(v, y, t, A) \\ \leq M^i(t - s_0) \tilde{P}^i(s_0, x, t, A).$$

Ensuite, par une démonstration analogue à celle de la proposition 1; on obtient l'inégalité :

$$|(\mathbf{P}_{f_j}^m - \mathbf{P}_{f_j}^{m-1})(s_0, x, t, A)| \leq \frac{M}{m!} \bar{M}^{m-1} (t - s_0)^m \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, A).$$

Par conséquent, la série converge et cela signifie que la suite $\{(\mathbf{P}_{f_2}^m, \mathbf{P}_{f_1}^m)\}_m$ converge vers une limite, $(\mathbf{P}_{f_2}, \mathbf{P}_{f_1})$, qui nécessairement satisfait à l'équation (2.6) et aux conditions (M.1)-(M.3).

Compte tenu de l'argumentation dans la preuve du corollaire, on arrive à :

PROPOSITION 2. — Sur l'intervalle fini $\left[v, v + \frac{1}{M} \right]$ $\left(s_0 \leq v \leq s_0 + \frac{1}{M} \right)$, l'équation (2.7) (ou (2.6) pour le cas $v = s_0$) possède une solution $(\mathbf{P}_{u_2(v, \cdot)}, \mathbf{P}_{u_1(v, \cdot)})$ satisfaisant aux conditions (M.1)-(M.3); donc d'après la proposition 1, elle est l'unique solution dans la classe.

Avec ces solutions, on définit un nouveau couple de noyaux $(\bar{\mathbf{P}}_{f_2}, \bar{\mathbf{P}}_{f_1})$ de la façon suivante :

$$(3.6) \quad \bar{\mathbf{P}}_{f_j}(s_0, x, t, A) = \mathbf{P}_{f_j}(s_0, x, t, A) \quad \text{si} \quad t \leq t_0 = s_0 + \frac{1}{M} \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}_{f_j}(s_0, x, t_0, dy) \mathbf{P}_{u_j(t_0, \cdot)}(t_0, y, t, A) \quad \text{sinon.}$$

Alors, il est évident que ces nouveaux noyaux vérifient les conditions (M.1)-(M.3). En outre, on peut montrer qu'ils satisfont à l'équation (2.6). C'est-à-dire qu'on a réussi à prolonger l'intervalle d'existence de la solution jusqu'à $\left[s_0, s_0 + \frac{2}{M} \right]$. Le même raisonnement s'applique pour la solution de (2.7) et donc on arrive à la

PROPOSITION 3. — La proposition 2 est encore valide pour un intervalle fini quelconque.

Ce qui reste à montrer, c'est que ce couple de solutions $(\mathbf{P}_{f_j}, \mathbf{P}_{u_j})$ ($j=1, 2$) ainsi construit est la Markov-solution de (2.6)-(2.7). Mais c'est presque évident d'après la discussion précédente. En effet : fixons $v_0 (\geq s_0)$ arbitrairement et définissons

$$(3.6)' \quad \bar{\mathbf{P}}_{f_j}^{v_0}(s_0, x, t, A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}_{f_j}(s_0, x, v_0, dy) \mathbf{P}_{u_j(t_0, \cdot)}(v_0, y, t, A).$$

On peut montrer alors que le couple $(\bar{\mathbf{P}}_{f_2}^{v_0}, \bar{\mathbf{P}}_{f_1}^{v_0})$ est une solution de l'équation (2.6) et celle-ci ne dépend pas de v_0 . Donc, en vertu de la proposition 1,

le couple doit coïncider avec (P_{f_2}, P_{f_1}) et cela implique la conclusion. En résumé :

THÉORÈME 1. — Soient F^1 et F^2 des fonctions satisfaisant à la condition (3.2). Etant donné deux fonctions non-négatives f_1 et f_2 qui sont de la classe $\mathcal{L}_{C_2}^1(s_0)$ et $\mathcal{L}_{C_1}^2(s_0)$ respectivement, il existe alors une et une seule Markov-solution de (2.6)-(2.7).

3.2. Le problème du passage à la limite.

On a établi l'existence et l'unicité de la Markov-solution de (2.6)-(2.7); cette solution nous permet, à l'aide du théorème de Kolmogorov-Daniell, de construire un couple de processus aléatoires, notamment le processus réactionné.

Or, on sait que le processus réactionné ainsi construit admet l'interprétation intuitive exprimée dans (R.1)-(R.3) avec des hypothèses (H.1)-(H.3). Donc s'il existe une limite $(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{f_j}^\varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{u_j}^\varepsilon)$ ($j = 1, 2$), et si celle-ci vérifie les conditions (M.1)-(M.4), alors le processus aléatoire déterminé par ce couple de noyaux pourrait correspondre à tels phénomènes : le voisinage de chaque particule est infiniment petit et l'intensité de potentiel, notamment la valeur $1/L_\varepsilon$, est infiniment grande. Autrement dit la réaction a lieu au cours de la répétition de leurs rencontres.

On va étudier les équations suivantes :

$$(3.7) \quad K_{f_j}(s_0, x, t, A) = \tilde{P}^i(s_0, x, t, A) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} K_{f_j}(s_0, x, v, dy) \times F^i(w_j(v, y)) \tilde{P}^i(v, y, t, A),$$

$$(3.7)' \quad K_{w_j(v, \cdot)}(v, x, t, A) = \tilde{P}^i(v, x, t, A) - \int_v^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K_{w_j(v, \cdot)}(v, x, s, dy) \times F^i(k^{w_j}(s, y)) \tilde{P}^i(s, y, t, A),$$

où $w_j(v, y)$ et $k^{w_j}(s, y)$ sont les densités des mesures

$$W_j(v, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{f_j}(s_0, x, v, \cdot) f_j(x) dx,$$

$$K^{w_j}(s, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{w_j(v, \cdot)}(v, x, s, \cdot) W_j(v, dx),$$

respectivement.

Quant à ce système d'équations, on a le

THÉORÈME 2. — Sous la même condition que dans le théorème 1, les équations (3.7)-(3.7)' possèdent uné et une seule Markov-solution.

Preuve. — Il suffit de montrer l'unicité de la solution de (3.7) et l'existence d'une solution locale de l'équation.

Définissons la suite $\{(\mathbf{K}_{f_2}^m, \mathbf{K}_{f_1}^m)\}_m$ de la façon suivante :

$$(3.5)' \quad \mathbf{K}_{f_j}^0(s_0, x, t, \mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, \mathbf{A})$$

$$\mathbf{K}_{f_j}^m(s_0, x, t, \mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, \mathbf{A}) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{K}_{f_j}^{m-1}(s_0, x, v, dy) \times \mathbf{F}^i(w_j^{m-1}(v, y)) \tilde{\mathbf{P}}^i(v, y, t, \mathbf{A}),$$

où $w_j^m(v, y)$ est la densité de la mesure

$$\mathbf{W}_j^m(v, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{K}_{f_i}^m(s_0, x, v, \cdot) f_j(x) dx.$$

Pour $m = 0$, en vertu de la condition (3.1), on sait que la densité $w_j^0(v, y)$ existe et est majorée par C_i sauf sur un ensemble de mesure zéro, quel que soit v . Donc $\mathbf{K}_{f_j}^1$ est bien défini et satisfait à l'inégalité

$$0 \leq \mathbf{K}_{f_j}^1(s_0, x, t, \mathbf{A}) \leq \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, \mathbf{A}) \quad (\text{pour } s_0 \leq t \leq t_0)$$

qui implique l'existence de $w_j^1(t, y)$. De ceci résulte que la formule (3.5)' est bien définie pour tout m , et que l'on a l'inégalité $0 \leq \mathbf{K}_{f_j}^m \leq \tilde{\mathbf{P}}^i$ sur l'intervalle. De plus, on peut montrer que :

$$\frac{\mathbf{M}}{\bar{\mathbf{M}}} \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, \mathbf{A}) + \sum_{m=1}^{\infty} |(\mathbf{K}_{f_j}^m - \mathbf{K}_{f_j}^{m-1})(s_0, x, t, \mathbf{A})| \leq \frac{\mathbf{M}}{\bar{\mathbf{M}}} \exp(\bar{\mathbf{M}}(t - s_0)) \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, \mathbf{A});$$

celle-ci nous assure l'existence d'une limite de la suite $\lim_m \mathbf{K}_{f_j}^m = \mathbf{K}_{f_j} \leq \tilde{\mathbf{P}}^i$. D'autre part, on a

$$\lim_m \left| \int_A (w_j(t, y) - w_j^m(t, y)) dy \right| = \lim_m \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{K}_{f_i} - \mathbf{K}_{f_i}^m)(s_0, x, t, \mathbf{A}) f_j(x) dx \right| \leq \lim_m \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathbf{K}_{f_i} - \mathbf{K}_{f_i}^m)(s_0, x, t, \mathbf{A})| f_j(x) dx = 0;$$

c'est-à-dire, $\lim_m w_j^m(t, y) = w_j(t, y)$ presque partout en y pour chaque $t \leq t_0$. Par conséquent, compte tenu de la continuité de \mathbf{F}^i , il se confirme que la limite $(\mathbf{K}_{f_2}, \mathbf{K}_{f_1})$ est une solution de (3.7).

Quant à l'unicité de la solution, la démonstration est presque la même

que celle de la proposition 1. Pour les deux solutions K_{f_j} et Q_{f_j} , on pose $R_{f_j} = K_{f_j} - Q_{f_j}$. Alors, on a

$$(3.4)' \quad |R_{f_j}(s_0, x, t, A)| \leq M^i \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} |R_{f_j}(s_0, x, v, dy)| \tilde{P}^i(v, y, t, A) \\ + M_1^i \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^i(s_0, x, v, dy) |r_j(v, y)| \tilde{P}^i(v, y, t, A)$$

où $r_j(v, y) = w_j(v, y) - q_j(v, y)$ et $q_j(v, y)$ est la densité de la mesure

$$Q_j(v, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} Q_{f_i}(s_0, x, v, \cdot) f_j(x) dx.$$

D'après l'estimation *a priori* $|R_{f_j}| \leq \tilde{P}^i$, on obtient

$$\int_A |r_j(t, y)| dy = \int_A |(w_j - q_j)(t, y)| dy = \int_{A \cap E} (w_j - q_j) dy + \int_{A \cap \bar{E}} (q_j - w_j) dy \\ = \int_{\mathbb{R}^n} (R_{f_i}(s_0, x, t, A \cap E) - R_{f_i}(s_0, x, t, A \cap \bar{E})) f_j(x) dx \\ \leq \tilde{u}_j(t, A \cap E) + \tilde{u}_j(t, A \cap \bar{E}) = \tilde{u}_j(t, A),$$

où

$$\tilde{u}_j(t, A) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}^j(s_0, x, t, A) f_j(x) dx,$$

A ensemble borélien quelconque, et où $E = \{y \in \mathbb{R}^n; w_j(t, y) \geq q_j(t, y)\}$ (t ; fixé), \bar{E} complémentaire de E .

Donc, $|r_j(t, y)| \leq C_i$ presque partout en y , pour chaque t fixé; par conséquent $|R_{f_j}(s_0, x, t, A)| \leq \bar{M}(t - s_0) \tilde{P}^i(s_0, x, t, A)$. En répétant ce procédé, on conclut à l'unicité. ■

Pour voir l'existence de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{f_j}^\varepsilon$ et de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{u_j}^\varepsilon$, il semble nécessaire de supposer que les fonctions $w_j(t, y)$ ($j = 1, 2$) possèdent une certaine continuité en y :

(3.8) Il existe des constantes \bar{K} , ε_0 , $\alpha (> 0)$ telles que

$$|w_j(t, y) - w_j(t, x)| \leq \bar{K} |x - y|^\alpha,$$

quels que soient $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in V_{\varepsilon_0}(y)$ et t compact.

THÉORÈME 3. — Sous la condition (3.8), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{f_j}^\varepsilon$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{u_j}^\varepsilon$ existent et égalent à $K_{f_j}(s_0, x, t, A)$ et à $K_{w_j(v, \cdot)}(v, x, t, A)$ quels que soient $s_0 \leq v \leq t$, x et A .

Preuve. — Posons :

$$\mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, t, \mathbf{A}) = (\mathbf{P}_{f_j}^\varepsilon - \mathbf{K}_{f_j})(s_0, x, t, \mathbf{A}) ;$$

Alors on trouve :

$$(3.9) \quad \mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, t, \mathbf{A}) = - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, v, dy) \mathbf{F}^i \left(\frac{1}{L_\varepsilon} u_j(v, \mathbf{V}_\varepsilon(y)) \right) \\ \times \tilde{\mathbf{P}}^i(v, y, t, \mathbf{A}) \\ - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, v, dy) \left[\mathbf{F}^i \left(\frac{1}{L_\varepsilon} u_j(v, \mathbf{V}_\varepsilon(y)) \right) \right. \\ \left. - \mathbf{F}^i(w_j(v, y)) \right] \tilde{\mathbf{P}}^i(v, y, t, \mathbf{A})$$

où

$$u_j(v, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}_{f_i}^\varepsilon(s_0, x, v, \cdot) f_j(x) dx .$$

D'autre part :

$$\frac{1}{L_\varepsilon} u_j(v, \mathbf{V}_\varepsilon(y)) - w_j(v, y) \\ = \frac{1}{L_\varepsilon} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{R}_{f_i}^\varepsilon(s_0, x, v, \mathbf{V}_\varepsilon(y)) f_j(x) dx + \int_{\mathbf{V}_\varepsilon(y)} [w_j(v, z) - w_j(v, y)] dz \right\} .$$

Donc, en prenant ε plus petit que ε_0 , on déduit de (3.9) l'estimation suivante :

$$(3.10) \quad |\mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, t, \mathbf{A})| \leq \mathbf{M}^i \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, v, dy)| \tilde{\mathbf{P}}^i(v, y, t, \mathbf{A}) \\ + \mathbf{M}_1^i \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, v, dy) \tilde{\mathbf{P}}^i(v, y, t, \mathbf{A}) \\ \times \left\{ \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{R}_{f_i}^\varepsilon(s_0, x, v, \mathbf{V}_\varepsilon(y))| f_j(x) dx + \bar{\mathbf{K}} \varepsilon^\alpha \right\} .$$

En utilisant cette estimation, on arrive à :

$$|\mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, t, \mathbf{A})| \leq \left\{ \frac{1}{m!} \bar{\mathbf{M}}^m (t - s_0)^m + \bar{\mathbf{K}} \varepsilon^\alpha \left(\sum_{k=0}^{m-1} (t - s_0)^k \frac{\bar{\mathbf{M}}^k}{k!} \right) \right\} \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, \mathbf{A})$$

quel que soit m , et cela implique :

$$|\mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, t, \mathbf{A})| \leq \bar{\mathbf{K}} \varepsilon^\alpha \exp(\bar{\mathbf{M}}(t - s_0)) \tilde{\mathbf{P}}^i(s_0, x, t, \mathbf{A}) ;$$

d'où on conclut :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\mathbf{R}_{f_j}^\varepsilon(s_0, x, t, \mathbf{A})| = 0 .$$

Pour la démonstration du fait que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_{u_j(v, \cdot)}^\varepsilon = \mathbf{K}_{w_j(v, \cdot)}$, il suffit de

remarquer que, d'après le théorème 2, l'équation (3.7)' peut s'écrire de la façon suivante :

$$(3.7)'' \quad K_{w_j(t, \cdot)}(v, x, t, A) = \tilde{P}^i(v, x, t, A) - \int_v^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K_{w_j(t, \cdot)}(v, x, s, dy) \times F^i(w_j(s, y)) \tilde{P}^i(s, y, t, A). \quad \blacksquare$$

3.3. Système semi-linéaire d'équations d'évolution.

D'après notre interprétation intuitive pour les noyaux K_{f_j} , la mesure

$$W_j(t, A) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{f_j}(s_0, x, t, A) f_j(x) dx$$

peut s'interpréter comme le nombre moyen de particules du type T^j trouvées dans un ensemble A , à l'époque t . On voit tout de suite par l'équation (3.7) que (W_2, W_1) est une solution de l'équation suivante :

$$(3.11) \quad W_i(t, A) = \tilde{u}_i(t, A) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} W_i(v, dy) F^i(w_j(v, y)) \tilde{P}^i(v, y, t, A),$$

($i, j = 1, 2 \quad i \neq j$).

De plus, il est évident que le couple est la solution unique de (3.11) dans la classe des fonctions satisfaisant à :

$$(3.12) \quad (i) \quad 0 \leq W_i(t, A) \leq \tilde{u}_i(t, A) \quad (ii) \quad \lim_{t \rightarrow s_0} W_i(t, A) = \int_A f_i(x) dx.$$

Or, de l'équation (3.11), on peut déduire un système d'équations d'évolution concernant les $w_i(t, y)$, densités dont on connaît l'existence. Afin de l'expliquer, on suppose que les noyaux \tilde{P}^i possèdent des densités \tilde{p}^i , et que celles-ci soient continues en y . Alors (w_2, w_1) est une solution de l'équation suivante :

$$(3.13) \quad w_i(t, y) = \tilde{u}_i(t, y) - \int_{s_0}^t dv \int_{\mathbb{R}^n} w_i(v, x) F^i(w_j(v, x)) \tilde{p}^i(v, x, t, y) dx.$$

Choisissons bien les fonctions f_i, F^i pour que les opérateurs infinitésimaux \mathcal{A}^i des fonctions \tilde{p}^i et l'intégration soient commutatifs. Dans ce cas, on peut obtenir

$$(3.14) \quad \frac{d}{dt} w_i(t, y) = \mathcal{A}^i w_i(t, y) - w_i(t, y) F^i(w_j(t, y)).$$

Autrement dit, les fonctions $w_i(t, y)$ nous donnent un couple de solutions de (3.14) avec les conditions initiales :

$$(3.15) \quad w_i(s_0, y) = f_i(y).$$

Il serait important de déterminer quelles conditions légitiment ce procédé et impliquent l'unicité de la solution du problème (3.14)-(3.15). Mais nous n'aborderons pas ce problème ; en revanche, nous exposons dans le paragraphe suivant quelques applications de nos résultats à des cas spéciaux et déduisons les systèmes d'équations correspondants.

4. EXEMPLES

On a remarqué que les fonctions $w_i(t, y)$ pourraient être une solution du problème de Cauchy du système semi-linéaire d'équations d'évolution (3.14)-(3.15). Selon des choix de processus initiaux \tilde{P}^i et de fonctions F^i , le système (3.14) peut produire beaucoup de variétés en forme qui sont intéressantes au point de vue de mathématiques appliquées. Nous allons l'étudier en détail, en nous bornant au cas de mouvements Browniens.

Considérons le cas :

$$(4.1) \quad \tilde{p}^i(s_0, x, t, y) = (2\pi(t - s_0)d_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ - (y - x)^2 / 2d_i(t - s_0) \right\} \\ (x, y \in \mathbb{R}^1, d_i > 0, i = 1, 2).$$

Prenons les $f_i(x)$ ($i = 1, 2$) de sorte que :

$$(4.2) \quad f_i \in C^1(\mathbb{R}^1) \quad \text{et} \quad \sup_x f_i(x) \leq C_j \quad (i, j = 1, 2).$$

Dans ce cas, il est facile de voir que les fonctions f_i appartiennent à la classe $\mathcal{L}_{C_j}^1(s_0)$ ($i, j = 1, 2$), et que nos théorèmes 1 et 2 s'appliquent. De plus, comme la solution (w_2, w_1) de (3.13) admet une continuité de Hölder en (t, y) , notre théorème 3 s'applique. En même temps, cela nous assure la différentiabilité de la formule (3.13) et on obtient :

$$(4.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} w_i(t, y) = \frac{d_i}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_i(t, y) - F^i(w_j(t, y))w_i(t, y).$$

Or il est possible de donner aux processus aléatoires associés à (4.3) des interprétations intuitives selon le choix de fonctions $F^i(x)$.

(1.i) Réaction simple. — Le phénomène introduit au § 2 correspond au cas $F^1(x) = F^2(x) = x$. L'équation associée peut être pensée comme un modèle mathématique pour un phénomène de réaction chimique qui se déroule selon le schéma :

$$(4.4) \quad t^1 + t^2 \rightarrow (t^1, t^2) \quad \text{le produit chimique de particules} \quad t^i \in T^i \quad (i = 1, 2).$$

(1.ii) Réaction d'antigène-anticorps. — Imaginons trois ensembles de particules, disons A, B et C, disposés sur \mathbb{R}^1 : les deux premiers sont des

ensembles de Browniens particules dont on désigne par \tilde{X}^1 et \tilde{X}^2 les processus aléatoires, et le dernier est un ensemble de particules immobiles, distribués uniformément avec la densité \bar{C} . Considérons la réaction suivante :

$$(4.5) \quad b + c \rightarrow (b, c), \quad a + b + c \rightarrow (a, c) + b, \quad (a \in A, b \in B, c \in C).$$

On pourrait l'interpréter comme la réaction d'antigène-anticorps ; A-anticorps, B-antigène, C-corps ; une particule d'antigène a tendance à réagir avec une particule de corps, tandis que l'existence de particules d'anticorps dans son voisinage l'en empêche. Par contre, une particule d'anticorps réagit avec des corps uniquement en présence des particules d'antigènes. D'après notre idée, cette situation correspond au cas suivant :

$$(4.6) \quad B_t = E^1\text{-moyen de } \frac{1}{L_\varepsilon} \int_{s_0}^t \{ \bar{C}L(V_\varepsilon) - I_{V_\varepsilon(\tilde{x}_t^1)}(X_t^1) \} dv,$$

$$A_t = E^2\text{-moyen de } \frac{\bar{C}}{L_\varepsilon} \int_{s_0}^t I_{V_\varepsilon(\tilde{x}_t^2)}(X_t^2) dv$$

où A_t et B_t sont les temps de séjour des particules de A et B. C'est-à-dire,

$$(4.7) \quad F^1(x) = \bar{C} \cdot x, \quad F^2(x) = \bar{C} - x.$$

Dans ce cas, tout va bien si l'on prend f_i de sorte que :

$$(4.8) \quad \sup_x f_1 \leq \bar{C}, \quad \sup_x f_2 < +\infty \quad \text{et} \quad f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^1).$$

Le système d'équations associées devient :

$$(4.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} w_1(t, y) = \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_1(t, y) - \bar{C} \cdot w_1(t, y) w_2(t, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_2(t, y) = \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_2(t, y) - w_2(t, y)(\bar{C} - w_1(t, y)).$$

Remarque 3. — Le système d'équations (4.9) a été étudié par M. Yamaguti *et al.* (communication privée) en vue de l'analyse du phénomène ci-dessus défini. Il a établi des systèmes d'équations, de la même forme mais plus générale que celle-ci, en raisonnant par analogie directe avec des équations de réaction chimique (e. g. [8]).

(2.i) Auto-réaction. — Prenons $f_1 = f_2 = f$, $F^1 = F^2 = F$ et $\bar{p}^1 = \bar{p}^2$, alors par raison de symétrie, le système (4.3) devient une simple équation :

$$(4.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} w(t, y) = \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(t, y) - w(t, y)F(w(t, y)), \quad (D = d_1 = d_2).$$

Comme on a déjà remarqué, la notion de processus réactionnés coïncide

dans ce cas avec celle de processus de Markov à un mécanisme non-constant.

D'autre part, la forme de l'équation (4.10) nous suggère l'existence de certaines relations entre les processus auto-réactionnés et les processus de ramification. Considérons, par exemple, le cas où $F(x) = 1 - x$. Le processus correspondant peut s'interpréter, selon notre description, comme un mouvement Brownien qui a tendance à disparaître s'il n'y en a pas d'autres autour de lui. Cependant dans l'autre théorie, c'est un mouvement Brownien qui a tendance à disparaître, mais qui va se partager en deux parties lors de sa ramification. Nous n'allons pas étudier cette relation en détail.

Comme autre cas intéressant concernant un processus auto-réactionné, on va faire mention de :

(2.ii) Equation de Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov. — Prenons comme $F(x)$ dans (4.10) une fonction continue telle que

$$(4.11) \quad F(1) = 0, \quad F(x) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1$$

et

$$F'(1) = a < 0, \quad F'(x) \geq a \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1.$$

Pour la nouvelle fonction $v(t, y) = 1 - w(t, y)$, l'équation peut s'écrire comme suit :

$$(4.10)' \quad \frac{\partial}{\partial t} v(t, y) = \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v(t, y) + G(v(t, y)),$$

où $G(x) = (1 - x)F(1 - x)$ possède les propriétés :

$$(4.11)' \quad G(0) = G(1) = 0, \quad G(x) > 0 \quad (0 < x < 1)$$

et

$$G'(0) = b > 0, \quad G'(x) \leq b \quad (0 < x < 1).$$

Pour l'équation (4.10), on connaît déjà l'existence du processus associé. D'autre part, quant à l'équation (4.10)' avec (4.11)' il est bien connu qu'elle est une équation étudiée par Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov comme un modèle mathématique pour un phénomène d'accroissement de la population [5].

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie vivement M. R. FORTET, Professeur à l'Université de Paris VI, de ses conseils très utiles et de ses amabilités d'avoir examiné cet article.

Il remercie aussi M. M. YAMAGUTI, Professeur à l'Université de Kyoto, qui lui a donné son ouvrage très intéressant.

RÉFÉRENCES

- [1] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris, 1953.
- [2] E. B. DYNKIN, *Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse*. Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [3] W. FELLER, Die Grundlagen des Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeits-theoretischer Behandlung. *Acta Biotheoretica*, vol. 5, 1939.
- [4] IKEDA, WATANABE et NAGASAWA, Théorie des Processus de Ramification (en japonais). *Seminar on Probability*, vol. 23 (I), (II).
- [5] KOLMOGOROV, PETROVSKY et PISCOUNOV, Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de manière et son application à un problème biologique. *Bull. Univ. État Moscou, Sér. Int. Sect. A, Math. Mécan.*, t. 1, fasc. 6, 1937.
- [6] H. P. MCKEAN, A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, t. 56, 1966, p. 1907-1911.
- [7] V. VOLTERRA, *Leçon sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (Cahiers Scientifiques, VII), Paris, Gauthier-Villars, 1931.
- [8] M. YAMAGUTI, *Traitement mathématique des phénomènes non-linéaires* (en japonais). Tokyo. Asakura-Shoten, 1972.

(Manuscrit reçu le 5 avril 1974)