

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN JACOD

Corrections et compléments à l'article : « Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes »

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 2 (1974), p. 201-209

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_201_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Corrections et compléments à l'article : « Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes »

par

Jean JACOD (*)

Laboratoire de Probabilités,
Université de Rennes

A l'occasion d'un travail sur une version du théorème de renouvellement pour les chaînes semi-markoviennes [2], H. Kesten m'a communiqué un exemple (très simple) de chaîne semi-markovienne qui vérifie les hypothèses de la proposition 8 de [1] sans en vérifier les conclusions... Comme la démonstration du théorème de renouvellement de [1] repose essentiellement sur cette proposition, il est nécessaire de la revoir entièrement.

Ci-dessous nous proposons donc une modification de la démonstration de ce théorème. Nous en profitons pour montrer qu'il reste valide sous des hypothèses un peu plus faibles que celles de [1]. Nous utilisons les notations et la numérotation des propositions de [1].

1. CORRECTIONS

Nous devons modifier les théorèmes 1 et 3, les propositions 8 et 9, et le lemme suivant la proposition 8.

Reprenons en effet la démonstration du théorème 1 (p. 92): (12) n'entraîne pas que $f(\varpi, x, n) = h(\varpi, n)$ pour tous ϖ, x, n , mais seulement que si $A_{\varpi, n} = \{x; f(\varpi, x, n) \neq h(\varpi, n)\}$, alors $\lambda(A_{\varpi, n}) = 0$. Par suite le théorème 1 de [1] est faux, et nous devons modifier son énoncé ainsi :

THÉORÈME 1. — Soit μ une probabilité sur (E, \mathcal{E}) de la forme

$$\mu(d\varpi, dx) = \mu(d\varpi)g(\varpi, x)\lambda(dx).$$

(*) Ce travail a été effectué durant un séjour de l'auteur au Département de Statistiques de l'Université de Princeton.

Sous la condition A et si $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, la $\tilde{\mathbb{P}}_\mu$ - σ -algèbre asymptotique de $(\varpi_n, S_n)_{n \geq 0}$ est identique à la \mathbb{P}_μ - σ -algèbre asymptotique de $(\varpi_n)_{n \geq 0}$.

Démonstration. — Une variable bornée Y est \mathcal{G}_μ^x -mesurable s'il existe une fonction f bornée, harmonique pour l'espace-temps construit sur (ϖ_n, S_n) , telle que

$$Y = \liminf_{(n)} f(\varpi_n, S_n, n), \quad \tilde{\mathbb{P}}_\mu\text{-p. s.}$$

Soit h la fonction bornée harmonique pour l'espace-temps de (ϖ_n) , associée à f (cf. avant l'énoncé). La variable $Z = \liminf_{(n)} h(\varpi_n, n)$ est \mathcal{F}_μ^x -mesurable, et le résultat sera prouvé si on montre que $\tilde{\mathbb{P}}_\mu\{Z \neq Y\} = 0$. Mais $\{Z \neq Y\} \subset \bigcup_{(n)} \{S_n \in A_{\varpi_n, n}\}$, et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_\mu\{S_n \in A_{\varpi_n, n}\} &= \int \mu(d\varpi, dx) \tilde{\mathbb{P}}^{n*}(\varpi; d\varpi', dx') 1_{A_{\varpi', n}}(x + x') \\ &= \int \mu(d\varpi) \tilde{\mathbb{P}}^{n*}(\varpi; d\varpi', dx') \int \lambda(dx) g(\varpi, x) 1_{A_{\varpi', n}}(x + x') = 0. \end{aligned}$$

On doit ensuite modifier toute la fin du paragraphe II-4, à partir de l'énoncé de la proposition 8.

PROPOSITION 8. — Soit μ une probabilité sur (E_+, \mathcal{E}_+) de la forme $\mu(d\varpi, dx) = \mu(d\varpi)h(\varpi, x)\lambda_+(dx)$. Sous la condition A et si $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, la $\tilde{\mathbb{P}}_\mu$ - σ -algèbre asymptotique pour le processus $(Z_t, V_t)_{t \geq 0}$ est triviale.

LEMME. — Si g est une fonction bornée harmonique pour la chaîne $(\varpi'_n, S'_n)_{n \geq 0}$, il existe une constante α telle que pour tout ϖ , on ait $g(\varpi, \cdot) = \alpha$, λ -p. p.

Démonstration du lemme. — On reprend celle de [I], en modifiant ainsi la ligne 24 de la page 106 : il existe une fonction h sur Π telle que pour tout ϖ , on ait $g(\varpi, x) = h(\varpi)$ λ -p. p. en x.

Démonstration de la proposition. — Si Y est une variable bornée, mesurable pour $\tilde{\mathbb{P}}_\mu$ - σ -algèbre asymptotique du processus (Z_t, V_t) , il existe une fonction f sur $E_+ \times \mathbb{R}$, bornée, harmonique pour l'espace-temps construit à partir de ce processus, et telle que

$$Y = \liminf_{(n)} f(Z_n, V_n, n), \quad \tilde{\mathbb{P}}_\mu\text{-p. s.}$$

On montre alors comme en [I] qu'il existe une fonction g telle que $f(\varpi, x, t) = g(\varpi, x + t)$ et que $\tilde{\mathbb{H}}_0 * g = g$. D'après le lemme il existe alors une constante α telle que pour tout ϖ , $g(\varpi, \cdot) = \alpha$, λ -p. p. Par suite pour

tout t , $f(\varpi, \cdot, t) = \alpha$, λ -p. p., et on montre comme au théorème 1 que $\tilde{P}_\mu \{ f(Z_n, V_n, n) \neq \alpha \} = 0$. Donc $\tilde{P}_\mu \{ Y \neq \alpha \} = 0$, d'où le résultat.

THÉORÈME 3 (Renouvellement). — Soit une chaîne semi-markovienne vérifiant la condition A et telle que $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times dZ$. Si A est une partie de Π de potentiel borné et si $m < \infty$ (resp. $m = +\infty$ et $\pi(A) < \infty$), les mesures $\underline{U}(\varpi; A, t + \cdot)$ convergent vaguement vers $\frac{1}{m} \pi(A)\lambda(\cdot)$ (resp. 0) quand $t \uparrow \infty$.

(Il est facile de vérifier que si $m < \infty$ et si A est de potentiel borné, alors $\pi(A) < \infty$).

Nous allons distinguer deux cas :

a) Il existe ϖ_0 tel que $\pi(\{\varpi_0\}) > 0$. — Dans ce cas, si v est le premier temps de passage de la chaîne (ϖ_n) dans l'état ϖ_0 , on a $v < \infty$ p. s. Comme A est de potentiel borné, il est facile de voir qu'il existe une suite $t_n \uparrow \infty$ telle que les mesures $\underline{U}(\varpi_0; A, t_n + \cdot)$ convergent vaguement vers une mesure $V^A(\cdot)$. On note $\tau_y f$ la fonction $f(\cdot - y)$. On a :

$$\begin{aligned} \underline{U}(\varpi; A, \tau_{t_n} f) &= \tilde{E}_{\varpi,0} \left\{ 1_{t_n < s_v} \sum_{(p)} 1_A(\varpi_p) f(S_p - t_n) \right\} \\ &+ \tilde{E}_{\varpi,0} \left\{ 1_{s_v \leq t_n} \left[\underline{U}(\varpi_0; A, \tau_{t_n - s_v} f) + \sum_{(p)} 1_A(\varpi_p) f(S_p - t_n) 1_{S_p < s_v} \right] \right\}, \end{aligned}$$

qui d'après le théorème de Lebesgue converge vers

$$W^A(\varpi, f) = \tilde{E}_{\varpi,0} \{ V^A(\tau_{-s_v} f) \}$$

pour toute f continue à support compact (en particulier $V^A(\cdot) = W^A(\varpi_0, \cdot)$).

L'équation de renouvellement s'écrit

$$\underline{U}(\varpi; A, \tau_t f) = f(-t) 1_A(\varpi) + \int \underline{P}(\varpi; d\varpi', dx) \underline{U}(\varpi'; A, \tau_{t-x} f).$$

D'après le théorème de Lebesgue, si $t = t_n \uparrow \infty$ on trouve $W^A = \underline{P} * W^A$. Autrement dit, W^A vérifie les conditions du lemme 2 du paragraphe I-3, et on en conclut que $W^A(\varpi, \cdot) = h^A(\varpi)\lambda(\cdot)$, ou h^A est harmonique pour (ϖ_n) , donc égale à une constante $\theta(A)$. D'autre part d'après (19),

$$\pi(A)\lambda(f) = \int \underline{G}(d\varpi, dx) \underline{U}(\varpi; A, \tau_{-x} f).$$

D'après le lemme de Fatou, si $t = t_n \uparrow \infty$ on obtient (pour f positive) :

$$m\theta(A)\lambda(f) = \int \underline{G}(d\varpi, dx) W^A(\varpi, \tau_{-x} f) \leq \pi(A)\lambda(f).$$

Si $m = +\infty$, on en déduit que $\theta(A) = 0$ et $W^A = 0$; si $m < \infty$, l'inégalité ci-dessus est une égalité (théorème de Lebesgue) et on a $\theta(A) = \frac{1}{m} \pi(A)$.

On en déduit d'abord que pour toute suite $t_n \uparrow \infty$ telle que $\underline{U}(\varpi_0; A, t_n + \cdot)$ converge, la limite est $\frac{1}{m} \pi(A) \lambda_+(\cdot)$ (resp. 0) si $m < \infty$ (resp. $m = +\infty$).

Comme l'ensemble $\{ \underline{U}(\varpi_0; A, t + \cdot); t \geq 0 \}$ est relativement compact (pour la topologie de la convergence vague), on en déduit que $\underline{U}(\varpi_0; A, t + \cdot)$ converge vers la limite ci-dessus quand $t \uparrow \infty$. On en déduit enfin (comme au début de la démonstration) qu'il en est de même de $\underline{U}(\varpi; A, t + \cdot)$ pour tout ϖ .

b) On a $\pi(\{ \varpi \}) = 0$ pour tout ϖ . — C'est ici que nous allons utiliser la proposition 8. Commençons par une série de lemmes qui démarquent des résultats classiques. Nous posons $\mathcal{H}^t = \sigma(Z_s, V_s; s \geq t)$ et \mathcal{P} désigne la classe des probabilités sur (E_+, \mathcal{E}_+) de la forme

$$\underline{\mu}(d\varpi, dx) = \mu(d\varpi)h(\varpi, x)\lambda_+(dx);$$

on peut choisir (ce que nous ferons) h de sorte que

$$\int h(\varpi, x)\lambda_+(dx) = 1$$

pour tout ϖ .

LEMME A. — Soient $\underline{\mu} \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{H}^0$; on a :

$$\limsup_{t \uparrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{H}^0} | \tilde{P}_{\underline{\mu}}(A \cap B) - \tilde{P}_{\underline{\mu}}(A)\tilde{P}_{\underline{\mu}}(B) | = 0.$$

La démonstration est classique (voir par exemple la référence [5] de [I]), car la σ -algèbre des classes d'équivalence de \mathcal{H}^∞ pour la loi $\tilde{P}_{\underline{\mu}}$ est triviale d'après la proposition 8.

LEMME B. — Soient $\underline{\mu}$ et $\underline{\mu}'$ deux éléments de \mathcal{P} vérifiant

$$\int \mu(d\varpi)\mu'(d\varpi')1_{\varpi=\varpi'} = 0.$$

On a alors :

$$\lim_{t \uparrow \infty} \| \underline{\mu}\underline{\Pi}_t - \underline{\mu}'\underline{\Pi}_t \| = 0.$$

Démonstration. — Soient $\underline{\nu}_\varpi(d\varpi', dx) = \delta_\varpi(d\varpi')h(\varpi, x)\lambda_+(dx)$, et $\underline{\nu}'_\varpi$ définie de la même manière à partir de h' . Appliquons le lemme A aux ensembles

$A = \{ (Z_t, V_t) \in \Gamma \}$ et $B = \{ Z_0 = \varpi \}$, avec la probabilité $\frac{1}{2}(\underline{\nu}_\varpi + \underline{\nu}'_\varpi)$. Si $\varpi \neq \varpi'$ on trouve :

$$\limsup_{t \uparrow \infty} \sup_{\Gamma \in \mathcal{E}_+} | \underline{\nu}_\varpi\underline{\Pi}_t(\Gamma) - \underline{\nu}'_\varpi\underline{\Pi}_t(\Gamma) | = 0.$$

Soit alors Γ_t l'ensemble de mesure positive dans la décomposition de Jordan-Hahn de $\underline{\mu}\underline{\Pi}_t - \underline{\mu}'\underline{\Pi}_t$. Il vient :

$$\underline{\mu}\underline{\Pi}_t(\Gamma_t) - \underline{\mu}'\underline{\Pi}_t(\Gamma_t) = \int (\underline{\nu}_\varpi \underline{\Pi}_t(\Gamma_t) - \underline{\nu}'_\varpi \underline{\Pi}_t(\Gamma_t)) \mu(d\varpi) \mu'(d\varpi'),$$

qui tend vers 0 d'après ce qui précède et d'après l'hypothèse faite sur μ et μ' . On fait de même pour l'ensemble de mesure négative de la décomposition de Jordan-Hahn, et on en déduit le résultat.

LEMME C. — Supposons que $\pi(\{\varpi\}) = 0$ pour tout ϖ . Si $\underline{\mu} \in \mathcal{P}$ et si f est une fonction mesurable bornée sur E_+ , telle que $\underline{G}(f) < \infty$, alors $\underline{\mu}\underline{\Pi}_t f$ converge vers $\frac{1}{m} \underline{G}(f)$ (resp. 0) lorsque $m < \infty$ (resp. $m = +\infty$), quand $t \uparrow \infty$.

Démonstration. — 1) Supposons $m < \infty$. On a $\frac{1}{m} \underline{G} \in \mathcal{P}$ et comme $\underline{G}(\{\varpi\} \times \mathbb{R}_+) = 0$ pour tout ϖ par hypothèse (cf. proposition 3), les lois $\underline{\mu}$ et $\frac{1}{m} \underline{G}$ vérifient les conditions du lemme B. On applique ce lemme, en remarquant que $\underline{G}\underline{\Pi}_t = \underline{G}$.

b) Supposons $m = +\infty$. Si $\underline{\mu}\underline{\Pi}_t f$ ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, et une suite (t_n) , tels que $\underline{\mu}\underline{\Pi}_{t_n} f \geq \delta(\varepsilon + \underline{G}(f))$ pour tout n . Si $\mu(\{\varpi\}) = 0$, d'après le lemme B on a $g_n(\varpi, x) = \underline{\mu}\underline{\Pi}_{t_n} f - \underline{\Pi}_{t_n} f(\varpi, x) \rightarrow 0$ pour λ -presque tout x . Comme \underline{G} n'admet pas d'atomes on en déduit que g_n tend \underline{G} -p. p. vers 0. Comme $\underline{G}(E_+) = +\infty$, il existe d'après le théorème d'Egoroff un ensemble $B \in \mathcal{E}_+$ tel que $\underline{G}(B) \geq \frac{1}{\delta}$ et que $|g_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \delta$ sur B pour un n assez grand. Mais alors :

$$\begin{aligned} \underline{G}(f) &\geq \int_B \underline{G}(d\varpi, dx) \underline{\Pi}_{t_n} f(\varpi, x) \geq \underline{G}(B) \left(\underline{\mu}\underline{\Pi}_{t_n} f - \frac{\varepsilon}{2} \delta \right) \\ &\geq \underline{G}(B) \left(\delta \underline{G}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \delta \right) \geq \underline{G}(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Fin de la démonstration du théorème 3. — Soit f une fonction continue à support compact dans $]0, \infty[$. La fonction $g(\varpi, x) = \underline{U}(\varpi; A, \tau_{-x} f)$ est bornée, mesurable, et vérifie $\underline{G}(g) = \underline{G} * \underline{U}(A, f) = \pi(A) \lambda(f) < \infty$. D'autre part, $\underline{U}(\varpi; A, \tau_t f) = \underline{H}_t g(\varpi)$. Enfin on remarque que si

$$h(\varepsilon) = \sup (|f(x+h) - f(x)|; x \in \mathbb{R}, |h| \leq \varepsilon)$$

et si K est le support de f , on a :

$$\left| \frac{1}{r} \int_0^r \underline{U}(\varpi; A, \tau_{t-x} f) dx - \underline{U}(\varpi; A, \tau_t f) \right| \leq h(r) \underline{U}(\varpi; A, K \oplus [t-r, t]);$$

comme $h(r) \downarrow 0$ si $r \downarrow 0$ et comme A est de potentiel borné, l'expression précédente tend vers 0 quand $r \downarrow 0$, uniformément en t . Par suite si on montre que pour tout $r > 0$,

$$\frac{1}{r} \int_0^r \underline{U}(\varpi; A, \tau_{t-x} f) dx$$

converge vers $\frac{1}{m} \pi(A) \lambda(f)$ quand $t \uparrow \infty$, on en déduit que $\underline{U}(\varpi; A, \tau_t f)$ admet la même limite.

Pour achever, il nous reste alors à appliquer le lemme C à la mesure $\underline{\mu}$ définie par $\underline{\mu}(d\varpi', dx) = \delta_{\varpi}(d\varpi') \frac{1}{r} 1_{0 < x \leq r} \lambda(dx)$, et à la fonction g définie ci-dessus, en remarquant que $\underline{\Pi}_t g(\varpi, x) = \underline{H}_{t-x} g(\varpi)$.

PROPOSITION 9. — Soit une chaîne semi-markovienne vérifiant la condition A et telle que $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times dZ$. Soit A une partie de Π telle que $\underline{G}(A \times \mathbb{R}_+) < \infty$. Les mesures $\underline{V}(\varpi; A, t + \cdot)$ convergent vaguement vers $\frac{1}{m} \underline{G}(A \times \mathbb{R}_+) \lambda(\cdot)$ (resp. 0) si $m < \infty$ (resp. $m = +\infty$), quand $t \uparrow \infty$.

Démonstration. — Comme dans le théorème 3, on distingue deux cas :

a) Il existe ϖ_0 tel que $\pi(\{\varpi_0\}) > 0$. — On suit pas à pas le théorème 3. On montre d'abord que si $\underline{V}(\varpi_0; A, t_n + \cdot)$ converge vaguement (quand $t_n \uparrow \infty$), alors $\underline{V}(\varpi; A, t_n + \cdot)$ converge vaguement vers une limite $W^\wedge(\varpi, \cdot)$ pour tout ϖ , et il suffira de montrer que $W^\wedge(\varpi, f) = \frac{1}{m} \underline{G}(A \times \mathbb{R}_+)$ ou 0 selon que $m < \infty$ ou $m = +\infty$.

On a l'équation de renouvellement :

$$\begin{aligned} \underline{V}(\varpi; A, \tau_t f) = \tilde{E}_{\varpi, 0} \left\{ 1_{t < s_1} \int 1_A(Z_s) f(s-t) ds \right\} \\ + \int \underline{P}(\varpi; d\varpi', dx) \underline{V}(\varpi'; A, \tau_{t-x} f) 1_{x \leq t}, \end{aligned}$$

qui entraîne $\underline{P} * W^\wedge = W^\wedge$. Par suite il existe une constante $\theta(A)$ telle

que $W^A(\varpi, \cdot) = \theta(A)\lambda(\cdot)$. D'autre part un calcul élémentaire, utilisant la relation du haut de la page 105, montre que pour toute fonction positive f ,

$$(i) \quad \int \underline{G}(d\varpi, dx)\underline{V}(\varpi; A, \tau_{-x}f) + \int \underline{G}(A \times]x, \infty[)\lambda_+(dx)f(x) = \underline{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda_+(f).$$

Si g est continue à support compact, on applique (i) à $f = \tau_{t_n}g$ et le lemme de Fatou entraîne

$$m\theta(A)\lambda(g) = \int \underline{G}(d\varpi, dx)W^A(\varpi, \tau_{-x}g) \leq \underline{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(g).$$

Donc si $m = +\infty$, on a $\theta(A) = 0$ et le résultat est prouvé. Si $m < \infty$, on obtient :

$$(ii) \quad m\theta(A)\lambda(g) + \lim_{(n)} \int \underline{G}(A \times]x, \infty[)\lambda_+(dx)g(x - t_n) = \underline{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(g).$$

D'après la proposition 7 (avec $B = \Pi$) et le théorème de Lebesgue, on voit que $\frac{1}{t} \int \underline{G}(d\varpi, dx)\underline{V}(\varpi; A,]0, t - x])$ tend vers $\underline{G}(A \times \mathbb{R}_+)$ si $t \uparrow \infty$. En utilisant (i) avec $f = \frac{1}{t}1_{]0, t]}$, on en déduit que $\frac{1}{t} \int \underline{G}(A \times]x, \infty[)1_{0 < x \leq t} dx$ tend vers 0. Par suite, comme $\underline{G}(A \times]x, \infty[)$ décroît quand x croît, pour tout compact K , $\int \underline{G}(A \times]x, \infty[)1_{K+t}(x) dx$ décroît vers 0. Comme g est à support compact, (ii) devient $m\theta(A)\lambda(g) = \underline{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(g)$, ce qui achève la démonstration du cas a).

b) On a $\pi(\{\varpi\}) = 0$ pour tout ϖ . — Soit f une fonction à support compact K , de module de continuité h . La fonction

$$g(\varpi, x) = 1_A(\varpi) \int_0^x f(s)ds + \underline{V}(\varpi; A, \tau_{-x}f)$$

est bornée par $\lambda(f)$, mesurable, et en utilisant la fonctionnelle A'_s introduite page 104, on voit que $g(\varpi, x) = \tilde{E}_{\varpi, x} \left\{ \int f(s)dA'_s \right\}$. Par suite

$$\underline{G}(g) = \tilde{E}_{\underline{G}} \left\{ \int f(s)dA'_s \right\} = \nu_A \cdot \lambda(f) = \underline{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(f) < \infty.$$

D'autre part $\underline{V}(\varpi; A, \tau_t f) = \underline{H}_t g(\varpi)$. On termine alors comme au théorème 3, en utilisant le fait que

$$\left| \frac{1}{r} \int_0^r \underline{V}(\varpi; A, \tau_{t-x} f) dx - \underline{V}(\varpi; A, \tau_t f) \right| \leq h(r)\lambda(K).$$

2. COMPLÉMENTS

Si on regarde de près la démonstration du lemme suivant la proposition 8, on voit qu'on ne fait usage de (12) que pour une famille (Q_n) de transitions indépendante de n . Cela va nous permettre d'affaiblir les hypothèses du théorème 3.

Pour tout $A \in \mathcal{E}$ on pose

$$L(\varpi, A) = \tilde{P}_{\varpi, 0} \left\{ \bigcup_{n \geq 1} \{ (\varpi_n, S_n) \in A \} \right\}.$$

On note Σ' l'ensemble des points a de \mathbb{R} tels que pour tout $\delta > 0$ il existe une partie $D \in \mathcal{N}$ de π -mesure positive et un nombre $\theta > 0$ tels que

$$\forall A \subset D, \quad \forall \varpi \in D, \quad L(\varpi, A \times \delta(a)) \geq \theta \pi(A).$$

On remarque que $\Sigma \subset \Sigma' \times d\mathbb{Z}$, et on note $\sigma(\Sigma')$ le sous-groupe fermé de \mathbb{R} engendré par Σ' .

LEMME 1'. — *Sous la condition A, si f est une fonction sur E bornée harmonique pour la chaîne $(\varpi_n, S_n)_{n \geq 0}$ et telle que la famille $\{ f(\varpi, \cdot); \varpi \in \Pi \}$ de fonctions sur \mathbb{R} soit uniformément équi-continue, pour tout point $a \in \sigma(\Sigma')$ on a :*

$$f(\varpi, x) = f(\varpi, x + a) \quad \forall (\varpi, x) \in E.$$

La démonstration est une transcription de celle du lemme 1. La même démonstration qu'au lemme 2 permet alors de montrer le :

LEMME 2'. — *Sous la condition A, soit Q une mesure de transition positive de (Π, \mathcal{N}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ vérifiant pour tout compact K de \mathbb{R} :*

$$\sup \{ Q(\varpi; x + K); x \in \mathbb{R}, \varpi \in \Pi \} = \alpha(K) < \infty.$$

*Si on a $\underline{P} * Q = Q$, alors pour tout $a \in \sigma(\Sigma')$ on a $Q(\varpi, \cdot) = Q(\varpi, a + \cdot)$.*

Par conséquent le théorème de renouvellement (théorème 3) reste valide lorsque la chaîne semi-markovienne vérifie la condition A et $\sigma(\Sigma') = \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. JACOD, Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. VII, n° 2, p. 83-129, 1971.
 - [2] H. KESTEN, Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space, *à paraître* (1973).
-