ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

TÔN-THÂN-LONG

Propriétés analytiques des valeurs et vecteurs propres des opérateurs de l'espace de Hilbert

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 2 (1974), p. 167-183

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_167_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 2, 1974, p. 167-183.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Propriétés analytiques des valeurs et vecteurs propres des opérateurs de l'espace de Hilbert

par

TÔN-THÂT LONG (*)

Laboratoire de Calcul de Probabilités
Université de Paris VI, Tour 56,
4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Soit T un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Dans ce travail, on donne des conditions qui assurent l'existence de fonctions analytiques A, à valeurs vectorielles, définies dans des ouverts non vides Ω du plan complexe, telles que :

$$T^*A(z) = zA(z), \qquad A(z) \neq 0 \qquad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

(Pour tout $z \in \Omega$, A(z) est donc un vecteur propre non nul de l'opérateur T* et qui dépend analytiquement de la valeur propre $z \in \Omega$).

On étudie alors certaines propriétés de ces fonctions A et, en particulier, leurs comportements à la frontière de Ω. On examine aussi si, en dehors de la propriété $T^*A(z) = zA(z)$, la fonction A vérifie en même temps la relation :

$$TA(z) = \bar{z}A(z)$$

ce qui nous permet de dire si A(z) est ou n'est pas un vecteur propre de T.

L'outil essentiel pour l'existence des fonctions analytiques A est l'étude des prolongements des opérateurs. A ce propos, on obtient une généralisation des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ des contractions.

(*) Équipe de recherche n° 1 « Processus stochastiques et Applications » associée au C. N. R. S.

SUMMARY. — For a bounded linear operator T in a Hilbert space $\mathscr{H}$, we give some conditions for existence of analytic functions A with value in $\mathscr{H}$ and defined in a open set Ω of the complexe number such that:

$$T^*A(z) = zA(z), \qquad A(z) \neq 0 \qquad \text{for all } z \in \Omega .$$

(A(z) is then a non nul proper vector of T* depending analytically of the proper value $z \in \Omega$).

Certain properties of the functions A are obtained here, in particular, their behavior on the boundary of Ω. We examine also, if beside the property $T^*A(z) = zA(z)$, the function A verifies also the relation $TA(z) = \bar{z}A(z)$ and this permits us to know if A(z) is a proper vector of T.

The essential method of our result is the extension theory of operators.

INTRODUCTION

Dans le récent travail [8] sur l'étude spectrale des contractions de l'espace de Hilbert, on a démontré en particulier le résultat suivant :

THÉORÈME I. — *Pour toute contraction* T *dans un espace de Hilbert* $\mathscr{H}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Tout point du disque ouvert* $D = \{ z : |z| < 1 \}$ *est une valeur propre de* T* *et, pour chacune de ces valeurs propres,* T* *admet des vecteurs propres non nuls appartenant à la variété* $A_i^{1/2}\mathscr{H}$, A_i *étant l'opérateur autoadjoint* $\lim\limits_{n\to\infty} T^{*n}T^n$.

(2) a' *étant un point fixé du disque* D, *alors* a' *est une valeur propre de* T* *et, pour cette valeur propre,* T* *admet des vecteurs propres non nuls appartenant à la variété* $A_i^{1/2}\mathscr{H}$.

(3) T *vérifie la condition* $\overline{A_i^{1/2}T\mathscr{H}} \neq \overline{A_i^{1/2}\mathscr{H}}$.

Dans ces conditions, pour tout $a, b \in D$, *il existe une transformation linéaire, inversible* $\tau_{a,b}$ *de l'ensemble* $\mathscr{H}^a$ *des vecteurs propres de* T* *appartenant à la variété* $A_i^{1/2}\mathscr{H}$ *et correspondant à la valeur propre* a *sur l'ensemble* $\mathscr{H}^b$ *correspondant à la valeur propre* b *de telle sorte que la famille* $\tau_{a,b}$ $a, b \in D$ *forme un groupoïde de transformations et que, pour chaque élément non nul* h^a *de* $\mathscr{H}^a$, *la fonction* A *définie sur* D *par :*

$$A(z) = \tau_{a,z}(h^a) \qquad \textit{pour tout } z \in D$$

soit une fonction analytique à valeurs vectorielles et vérifiant la relation :

$$T^*A(z) = zA(z), \qquad A(z) \neq 0 \qquad \textit{pour tout } z \in D.$$

Dans ce travail, on améliore ce résultat suivant les deux directions suivantes : on obtient d'abord certaines propriétés des fonctions A, par exemple, des propriétés portant sur les prolongements analytiques et sur les comportements de ces fonctions (ainsi que ceux de leurs dérivées) à la frontière de D. On montre aussi que, pour tout $z \in \mathrm{D}$, A(z) n'est pas un vecteur propre de T, ce qui est aussi équivalent à dire que, pour tout $z \in \mathrm{D}$, la relation $\mathrm{TA}(z) = \bar{z}\mathrm{A}(z)$ est impossible. On cherche, d'autre part, à améliorer tous ces résultats en donnant d'autres conditions qui assurent l'existence d'autres fonctions analytiques définies sur d'autres domaines non vides du plan complexe et qui possèdent des propriétés analogues.

L'outil utilisé pour aborder ce dernier problème est un résultat sur les prolongements des opérateurs qui généralise les prolongements de type $\mathrm{C}_{0.} \oplus i$ des contractions étudiés dans [*6*] et [*8*]. Ce résultat sur les prolongements des opérateurs constitue aussi une généralisation du développement spectral des opérateurs normaux compacts suivant leurs valeurs et vecteurs propres.

I. ESPACE DE FONCTIONS ANALYTIQUES A VALEURS VECTEURS PROPRES ASSOCIÉ AU PROLONGEMENT MINIMAL DE TYPE $\mathrm{C}_0.\oplus i$ DES CONTRACTIONS

Rappelons d'abord le résultat suivant sur les prolongements de type $\mathrm{C}_{0.} \oplus i$ des contractions qui nous sera utile dans toute la suite :

I.1. THÉORÈME. — *Toute contraction* T *dans un espace de Hilbert* $\mathscr{H}$ *admet un et un seul prolongement minimal de type* $\mathrm{C}_{0.} \oplus i$. *De façon plus précise, il existe une et une seule contraction* T_0 *de classe* $\mathrm{C}_{0.}$ *(c'est-à-dire telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{T}_0^n = 0$ *fortement) dans un espace de Hilbert* $\mathscr{H}_0$ *et une seule isométrie* T_i *sur un espace* $\mathscr{H}_i$ *de telle sorte que* $\mathrm{T}_0 \oplus \mathrm{T}_i$ *soit un prolongement de* T *vérifiant les relations :*

$$\overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_0}(\mathscr{H})} = \mathscr{H}_0 \qquad \overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_i}(\mathscr{H})} = \mathscr{H}_i\,.$$

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que les conditions citées dans le théorème I sont vérifiées. On note aussi que ces conditions sont équivalentes à la condition suivante :

(4) T_i *n'est pas unitaire.*

Une expression explicite de $\tau_{a,b}$ a été donnée dans [*8*]. On a en effet :

$$\tau_{a,b} = \sigma^*(\mathrm{I}_i - b\mathrm{T}_i)^{-1}(\mathrm{I}_i - a\mathrm{T}_i)\sigma^{*-1}$$

où I_i est la transformation identique dans $\mathscr{H}_i$ et σ est la transformation canonique de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}_i$: $\sigma(h) = \mathscr{P}_{\mathscr{H}_i}(h)$.

La fonction A donnée par le théorème I est donc de la forme :

$$A(z) = \tau_{a,z}(h^a) = \sigma^*(I_i - zT_i)^{-1}(I_i - aT_i)\sigma^{*-1}h^a.$$

On peut noter ici que, comme $\sigma^{*-1}h^a$ est un vecteur propre de T_i^* correspondant à la valeur propre a (voir la démonstration du théorème 1.4 de [8]), le vecteur $(I_i - aT_i)\sigma^{*-1}h^a$ sera un vecteur propre de T_i^* correspondant à la valeur propre $z = 0$. Il est donc de la forme $\sigma^{*-1}h^0$ avec $h^0 \neq 0$ et $h^0 \in \mathscr{H}^0$ (d'après le théorème 1.4 de [8]). La fonction A peut donc s'écrire sous la forme plus simple suivante :

$$A(z) = \sigma^*(I_i - zT_i)^{-1}h_i^0 = \sigma^*(I_i - zT_i)^{-1}\sigma^{*-1}h^0$$

avec

$$h^0 \neq 0, \quad h^0 \in \mathscr{H}^0 \qquad \text{et} \qquad T_i^*h_i^0 = 0.$$

Si on ajoute la fonction nulle sur D (c'est-à-dire la fonction A_0 définie par $A_0(z) = 0$ pour tout $z \in D$) à l'ensemble des fonctions analytiques données par le théorème I, on peut remarquer aussi que la famille $\mathscr{A}$ ainsi obtenue forme un espace vectoriel sur le corps des complexes.

Dans l'étude classique, l'existence des valeurs et vecteurs propres des opérateurs est liée, en général, à la notion de compacité et aussi à la notion de normalité. Nos résultats n'ont, par contre, aucune liaison avec ces notions. En effet, l'existence des valeurs et vecteurs propres donnée par le théorème I est liée essentiellement à celle de l'isométrie « non unitaire » T_i qui n'est, en aucun cas, un opérateur compact ou normal. On note aussi que les valeurs propres des opérateurs compacts forment un ensemble de points isolés (sauf peut être le point $z = 0$), deux vecteurs propres quelconques correspondant à deux valeurs propres distinctes des opérateurs normaux sont toujours orthogonaux et cela n'est pas le cas pour nos résultats. Les propositions suivantes vont encore plus loin avec les caractères non normaux des vecteurs A(z).

1.2. PROPOSITION. — *Pour tout* $z \in D$, *l'égalité :*

$$TA(z) = \bar{z}A(z)$$

est impossible. De façon équivalente, A(z) *n'est, en aucun cas, un vecteur propre de l'opérateur* T.

Démonstration. — Si A(z) est un vecteur propre de T, la valeur propre correspondante sera nécessairement égale à $\bar{z}$ d'après la première proposition de [10]. Il en résulte que $TA(z) = \bar{z}A(z)$ et on a :

$$\lim_{n\to\infty} T^n A(z) = \lim_{n\to\infty} (\bar{z}^n A(z)) = (\lim_{n\to\infty} \bar{z}^n) A(z) = 0$$

ce qui est équivalent à la propriété $A_i^{1/2}A(z) = 0$.

D'autre part, comme $A(z) \in A_i^{1/2}\mathscr{H}$, on peut écrire $A(z) = A_i^{1/2}h$ et alors :

$$\| A(z) \|^2 = \langle A(z), A(z) \rangle = \langle A(z), A_i^{1/2}h \rangle = \langle A_i^{1/2}A(z), h \rangle = \langle 0, h \rangle = 0$$

ce qui est incompatible avec la propriété $A(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$.

I.3. COROLLAIRE. — *Pour tout* $z \in D$, *on a :*

$$\{ h \in \mathscr{H} : Th = \bar{z}h \} \neq \{ k \in \mathscr{H} : T^*k = zk \}.$$

La proposition I.2 montre aussi que $A(z)$ n'appartient pas à la partie normale $\mathscr{H}_n$ (c'est-à-dire le plus grand sous-espace de $\mathscr{H}$ qui réduit T à un opérateur normal) de T (voir aussi [10]). En fait, on a même la proposition plus précise suivante :

I.4. PROPOSITION. — *Pour tout* $z \in D$, *le vecteur* $A(z)$ *appartient à la partie complètement non normale* $\mathscr{H}_n'$ *de* T. *Il est donc orthogonal à la partie normale* $\mathscr{H}_n$ *de* T.

Démonstration. — Rappelons qu'un opérateur T est dit complètement non normal s'il n'est pas normal ni dans $\mathscr{H}$ ni dans aucun sous-espace non nul réduisant T. D'autre part, si T est un opérateur donné, alors $\mathscr{H}_n = \{ h \in \mathscr{H} : T^pT^{*q}h = T^{*q}T^ph$ pour tout $p, q \in N \}$ réduit T à un opérateur normal T_n et $\mathscr{H}_n' = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_n$ réduit T à un opérateur complètement non normal T_n', $T = T_n \oplus T_n'$ est appelé la décomposition de T en sa partie normale et sa partie complètement non normale. On note que cette décomposition est aussi unique.

Soient $(T_n)_0 \oplus (T_n)_i$ et $(T_n')_0 \oplus (T_n')_i$ (définis respectivement sur les espaces $(\mathscr{H}_n)_0 \oplus (\mathscr{H}_n)_i$ et $(\mathscr{H}_n')_0 \oplus (\mathscr{H}_n')_i$) les prolongements minimum de type $C_0. \oplus i$ de T_n et de T_n', on peut montrer que $T_i = (T_n)_i \oplus (T_n')_i$ et $(T_n)_i$ est unitaire.

D'après la démonstration du théorème 1.4 de [9], le vecteur $A(z)$ est de la forme $A(z) = \sigma^* h_i^{\bar{z}}$ avec $T_i^* h_i^{\bar{z}} = z h_i^{\bar{z}}$. Comme $|z| < 1$, $h_i^{\bar{z}}$ appartient alors à la partie unilatérale $\mathscr{H}_{tu}$ de T_i.

Cela étant, pour tout $k \in \mathscr{H}_n$, soit $k_i = \sigma k$ la projection de k sur $\mathscr{H}_i$ alors $k_i \in (\mathscr{H}_n)_i$. En particulier, k_i appartient à la partie unitaire $\mathscr{H}_u$ de T_i. Comme $\mathscr{H}_{tu}$ et $\mathscr{H}_u$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathscr{H}_i$, on obtient :

$$\langle A(z), k \rangle = \langle \sigma^* h_i^{\bar{z}}, k \rangle = \langle h_i^{\bar{z}}, \sigma k \rangle = \langle h_i^{\bar{z}}, k_i \rangle = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathscr{H}_n.$$

La proposition est donc démontrée.

La suite de ce paragraphe concerne le comportement de la fonction A à la frontière de D. D'abord, d'après la relation :

$$A(z) = \sigma^*(I_i - zT_i)^{-1}h_i^0 = \sum_0^\infty (\sigma^* T_i^n h_i^0) z^n$$

la fonction A admet la majoration suivante :

$$\| A(z) \| \leqslant \| \sigma^* \| \left(\sum_0^\infty | z |^n \| T_i^n h_i^0 \| \right)$$

$$= \| \sigma^* \| . \| h_i^0 \| \left(\sum_0^\infty | z |^n \right) = \| \sigma^* \| . \| h_i^0 \| (1 - | z |)^{-1}$$

De même, en utilisant la dérivation terme à terme, on obtient :

$$\left\| \frac{d^n}{dz^n} A(z) \right\| \leqslant \| \sigma^* \| . \| h_i^0 \| . n!(1 - | z |)^{-n-1} \qquad \text{pour tout } n \in \mathrm{N}.$$

La proposition suivante donne encore une majoration plus précise de A :

I.5. PROPOSITION. — *La fonction* A *et ses dérivées* $A^{(n)}$, $n \in \mathrm{N}$, *possèdent des majorations de la forme :*

$$\| A(z) \| \leqslant C(1 - | z |^2)^{-1/2}$$

et

$$\| A^{(n)}(z) \| \leqslant C.n!(1 - | z |^2)^{-(n+1)/2} \qquad \textit{pour tout } z \in D$$

où C *étant un scalaire positif fixe.*

Démonstration. — Rappelons d'abord que, comme T_i est une isométrie,

$$\mathscr{L}_i = \mathscr{H}_i \ominus T_i \mathscr{H}_i = \{ h_i \in \mathscr{H}_i : T_i^* h_i = 0 \}$$

est un sous-espace ambulant pour T_i c'est-à-dire que les sous-espaces $T_i^n \mathscr{L}_i$, $n \in \mathrm{N}$, sont deux à deux orthogonaux. Comme :

$$(I_i - zT_i)^{-1} h_i^0 = \sum_0^\infty z^n T_i^n h_i^0 \qquad \text{avec} \qquad T_i^* h_i^0 = 0$$

on obtient alors :

$$\| (I_i - zT_i)^{-1} h_i^0 \| = \left(\sum_0^\infty | z^n |^2 \| T_i^n h_i^0 \|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_0^\infty | z |^{2n} \right)^{1/2} \| h_i^0 \| = \| h_i^0 \| (1 - | z |^2)^{-1/2}$$

Il en résulte que :

$$\|A(z)\| = \|\sigma^*(I_i - zT_i)^{-1}h_i^0\| \leqslant \|\sigma^*\| \cdot \|(I_i - zT_i)^{-1}h_i^0\|$$
$$= \|\sigma^*\| \cdot \|h_i^0\|(1 - |z|^2)^{-1/2}.$$

Le reste de la proposition se démontre de façon analogue en utilisant la dérivation terme à terme de la série

$$A(z) = \sum_0^\infty (\sigma^* T_i^n h_i^0) z^n .$$

La proposition suivante donne un cas particulier où la fonction A admet une minoration de même type.

I.6. PROPOSITION. — *Si σ est inversible au sens strict (c'est-à-dire si* T *est similaire à* T_i*), il existe alors des scalaires positifs* C *et* C′ *tels que :*

$$C'(1 - |z|^2)^{-1/2} \leqslant \|A(z)\| \leqslant C(1 - |z|^2)^{-1/2}$$

et

$$n!\,C'(1 - |z|^2)^{-(n+1)/2} \leqslant \|A^{(n)}(z)\| \leqslant n!\,C(1 - |z|^2)^{-(n+1)/2}$$

En particulier $\lim\limits_{|z|\to 1} \|A(z)\| = \lim\limits_{|z|\to 1} \|A^{(n)}(z)\| = \infty.$

Démonstration. — La première partie résulte des inégalités :

$$\|\sigma^{*-1}\|^{-1}\|(I_i - zT_i)^{-1}h_i^0\| \leqslant \|A(z)\| \leqslant \|\sigma^*\| \cdot \|(I_i - zT_i)^{-1}h_i^0\|$$

et de l'égalité :

$$\|(I_i - zT_i)^{-1}h_i^0\| = \|h_i^0\|(1 - |z|^2)^{-1/2}$$

Comme $\lim\limits_{|z|\to 1}(1 - |z|^2)^{-1/2} = \infty$ on obtient aussi $\lim\limits_{|z|\to 1}\|A(z)\| = \infty.$

La proposition suivante donne aussi quelque indication sur le comportement des fonctions analytiques A.

I.7. PROPOSITION. — *Lorsque la variable z converge vers un point du cercle unité tout en restant dans le disque ouvert* D, *alors* A(z) *ne converge dans* $\mathcal{H}$ *vers aucune limite non nulle.*

Démonstration. — Soit $T = T_1 \oplus T_2$ (définie sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$) la décomposition de T en sa partie unitaire T_1 et sa partie complètement non unitaire T_2. Soit $A(z) = h_1 \oplus h_2$ la décomposition de A(z) dans la somme directe $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, alors :

$$T_1^* h_1 + T_2^* h_2 = T^*(h_1 + h_2) = T^*A(z) = zA(z) = zh_1 + zh_2$$

Comme $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont invariants par T*, cette relation donne $T_1^* h_1 = z h_1$ ce qui n'est possible que si $h_1 = 0$ (car T_1^* est unitaire et $|z| < 1$). Ainsi $A(z) \in \mathscr{H}_2$.

Si $A(z)$ converge vers une limite non nulle h lorsque z converge vers z_0, avec $|z_0| = 1$, alors la relation $T^*A(z) = zA(z)$ donne à la limite :

$$T^*h = z_0 h$$

et h est un vecteur propre non nul correspondant à une valeur propre de module égal à 1. Cette propriété implique donc que $h \in \mathscr{H}_1$.

D'autre part, on a aussi $h = \lim\limits_{z \to z_0} A(z) \in \mathscr{H}_2$. Comme $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{ 0 \}$ on obtient alors $h = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $h \neq 0$ et la proposition est démontrée.

Comme conséquence de la proposition précédente, on note que la fonction A ne peut pas avoir des prolongements analytiques (ou même continus) sur et au delà du cercle unité. Le rayon de convergence de la série de Mac Laurin associée est donc égal à 1.

Notons aussi que, d'après la démonstration de la proposition I.5, si T est une isométrie (cas $T = T_i$), les majorations obtenues sont, en réalité, des identités :

$$\| A(z) \| = \| h_i^0 \| (1 - |z|^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \| A^{(n)}(z) \| = n! \, \| h_i^0 \| (1 - |z|^2)^{-(n+1)/2}$$

Cette remarque montre qu'on ne peut pas, en général, améliorer la proposition I.5 ni la proposition I.6.

II. UN RÉSULTAT SUR LES PROLONGEMENTS DES OPÉRATEURS

Notons que si T est une contraction non nulle de classe C_0 alors la contraction $\| T \|^{-1} T$ n'est pas nécessairement de la même classe. Cela nous suggère de poser la définition suivante :

II.1. DÉFINITION. — Un opérateur T est dit canoniquement de classe $C_{0.}$ si toute contraction de la forme λT, λ scalaire, est de classe C_0. De façon équivalente, cela veut dire que ou bien $T = 0$ ou bien $\| T \|^{-1} T$ est une contraction de classe $C_{0.}$.

Le résultat suivant généralise la notion de prolongement de type $C_{0.} \oplus i$ des contractions :

II.2. THÉORÈME. — *Tout opérateur linéaire borné* T *dans un espace de Hilbert* $\mathscr{H}$ *admet un et un seul prolongement de la forme*

$$\left(\bigoplus_{\alpha \leqslant \alpha_T} \lambda_\alpha T_{i,\alpha}\right) \oplus \lambda_{\alpha_T} T_{0,\alpha_T}$$

sur un espace de la forme

$$\left(\bigoplus_{\alpha \leqslant \alpha_T} \mathscr{H}_{i,\alpha}\right) \oplus \mathscr{H}_{0,\alpha_T}$$

où α_T *est un nombre ordinal (unique) de première ou de seconde classe (c'est-à-dire au plus dénombrable) et vérifiant les conditions suivantes :*

(1) T_{0,α_T} *est une contraction canoniquement de classe* $C_{0.}$ *et* $T_{i,\alpha}$ *est, pour tout* $\alpha \leqslant \alpha_T$, *une isométrie non nulle sauf, peut être, si* $\alpha = \alpha_T = 1$ *ou si* α *est un ordinal de seconde espèce (c'est-à-dire un point limite). Dans le dernier cas, on suppose que* $T_{i,\alpha_T} = 0$ *si* $\lambda_{\alpha_T} = 0$.

(2) *La famille* $(\lambda_\alpha)_{\alpha \leqslant \alpha_T}$ *est strictement décroissante,* $\lambda_{\alpha_T} \geqslant 0$ *et :*

$$\left\| \left(\bigoplus_{\alpha \leqslant \alpha_T} \lambda_\alpha T_{i,\alpha}\right) \oplus \lambda_{\alpha_T} T_{0,\alpha_T} \right\| = \lambda_1 = \| T \|$$

$\lambda_\alpha = \lim\limits_{\beta \uparrow \alpha} \lambda_\beta$ *si* α *est un ordinal de second espèce,* $\alpha \leqslant \alpha_T$.

(3) $\overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_{0,\alpha_T}}(\mathscr{H})} = \mathscr{H}_{0,\alpha_T}$ *et* $\overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_{i,\alpha}}(\mathscr{H})} = \mathscr{H}_{i,\alpha}$ *pour tout* $\alpha \leqslant \alpha_T$.

Le théorème est immédiat si $T = 0$. La condition (3) est appelée la condition de minimalité du prolongement considéré.

Pour la démonstration du théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

II.3. LEMME. — *Soit* $T_1 \oplus T_2$ *(défini sur* $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$*) un prolongement de* T *et soit* $T_3 \oplus T_4$ *(défini sur* $\mathscr{H}_3 \oplus \mathscr{H}_4$*) un prolongement de* T_2. *On considère les trois conditions suivantes :*

(1) $\overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_2}(\mathscr{H})} = \mathscr{H}_2$ (2) $\overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_3}(\mathscr{H}_2)} = \mathscr{H}_3$ (3) $\overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_3}(\mathscr{H})} = \mathscr{H}_3$

alors (1) *et* (2) *impliquent* (3). *Aussi* (1) *et* (3) *impliquent* (3).

Démonstration. — Si $h = h_1 \oplus h_2$ est la décomposition de $h \in \mathscr{H}$ dans la somme directe $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ et $h_2 = h_3 \oplus h_4$ est la décomposition de h_2 dans $\mathscr{H}_3 \oplus \mathscr{H}_4$ alors la décomposition de h dans $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_3 \oplus \mathscr{H}_4$ sera $h = h_1 \oplus h_3 \oplus h_4$. Il en résulte que :

$$\mathscr{P}_{\mathscr{H}_3}(h) = h_3 = \mathscr{P}_{\mathscr{H}_3}(h_2) = \mathscr{P}_{\mathscr{H}_3}(\mathscr{P}_{\mathscr{H}_2}(h)).$$

Si (1) et (2) sont vérifiées, on obtient alors :

$$\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\mathcal{H})} = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\mathcal{P}_{\mathcal{H}_2}(\mathcal{H}))} = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_2}(\mathcal{H})})} = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\mathcal{H}_2)} = \mathcal{H}_3 .$$

De même, les conditions (1) et (3) donnent :

$$\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\mathcal{H}_2)} = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_2}(\mathcal{H})})} = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\mathcal{P}_{\mathcal{H}_2}(\mathcal{H}))} = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_3}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_3$$

et le lemme est démontré.

II.4. EXISTENCE. — La première partie du lemme précédent dit, en particulier, que si deux prolongements successifs vérifient les conditions de minimalité alors le prolongement composé vérifie aussi les conditions de minimalité. Comme dans les constructions qui suivent, on ne considère que des prolongements successifs minimaux, les prolongements composés ainsi obtenus de T seront alors minimaux. On ne parlera plus de cette propriété dans la suite de cette démonstration.

Cela étant, soit $T_{0,1} \oplus T_{i,1}$ (défini sur $\mathcal{H}_{0,1} \oplus \mathcal{H}_{i,1}$) le prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de la contraction $\| T \|^{-1} T$. Si $T_{0,1}$ n'est pas canoniquement de classe $C_{0.}$, on continue la construction en considérant le prolongement $T_{0,2} \oplus T_{i,2}$ (défini sur $\mathcal{H}_{0,2} \oplus \mathcal{H}_{i,2}$) minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de la contraction $\| T_{0,1} \|^{-1} T_{0,1}$. On pose aussi $\lambda_1 = \| T \|$ et $\lambda_2 = \lambda_1 \| T_{0,1} \|$.

Si $T_{0,2}$ n'est pas canoniquement de classe $C_{0.}$, on continue la même construction avec $T_{0,2}$ à la place de $T_{0,1}$ et ainsi de suite... Ou bien cette construction est terminée avec un nombre fini d'opérations et l'existence du prolongement considéré est obtenue ou bien, pour tout entier fini positif n, on obtient un prolongement de T vérifiant toutes les conditions du théorème II.2 sauf le fait que $T_{0,n}$ n'est pas canoniquement de classe $C_{0.}$. La famille de prolongements ainsi obtenus de T est alors strictement croissante (dans le sens que $T_{0,n} \neq T_{0,n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Soit alors ω le premier ordinal infini dénombrable. On montre que l'espace quotient $\mathcal{H}/R_\omega$ de $\mathcal{H}$ par la relation d'équivalence R_ω définie par :

$$h R_\omega h' \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{n \to \omega} \| \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{0,n}}(h - h') \| = 0$$

est pré-hilbertien pour la norme :

$$\| h_\omega \| = \lim_{n \to \omega} \| \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{0,n}}(h) \| \qquad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}$$

h_ω étant la classe d'équivalence associée à $h \in \mathcal{H}$.

On montre d'autre part que la correspondance $h_\omega \to (Th)_\omega$ (définie pour tout $h \in \mathcal{H}$) se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire T_ω

borné par $\lim\limits_{n \to \omega} \lambda_n$ sur le complété $\mathscr{H}_\omega$ de $\mathscr{H}/\mathrm{R}_\omega$. De façon naturelle, on voit que $({}_n\oplus \lambda_n \mathrm{T}_{i,n}) \oplus \mathrm{T}_\omega$ est un prolongement de T. Ce prolongement est aussi minimal car :

$$\overline{\mathscr{P}_{\mathscr{H}_\omega}(\mathscr{H})} = \overline{\mathscr{H}/\mathrm{R}_\omega} = \mathscr{H}_\omega .$$

Si $\lambda_\omega = \lim\limits_{n \to \omega} \lambda_n = 0$ on pose $\mathrm{T}_{i,\omega} = 0$, $\mathrm{T}_{0,\omega} = \mathrm{T}_\omega$ et l'existence du prolongement considéré est obtenue. Dans le cas contraire, on continue la construction en considérant le prolongement minimal $\mathrm{T}_{0,\omega} \oplus \mathrm{T}_{i,\omega}$ de type $\mathrm{C}_{0.} \oplus i$ de la contraction $\lambda_\omega^{-1}\mathrm{T}_\omega$. Si $\mathrm{T}_{0,\omega}$ n'est pas canoniquement de classe $\mathrm{C}_{0.}$, on continue la construction en considérant le prolongement minimal de type $\mathrm{C}_{0.} \oplus i$ de la contraction $\| \mathrm{T}_{0,\omega} \|^{-1}\mathrm{T}_{0,\omega}$ et ainsi de suite transfiniment...

De cette façon, ou bien la construction est terminée si un opérateur de la forme $\mathrm{T}_{0,\alpha}$ est canoniquement de classe $\mathrm{C}_{0.}$ (et on pose alors $\alpha_\mathrm{T} = \alpha$) et l'existence du prolongement considéré est obtenue, ou bien, pour tout ordinal α, on obtient un prolongement de T vérifiant toutes les conditions du théorème II.2 sauf le fait que $\mathrm{T}_{0,\alpha}$ n'est pas canoniquement de classe $\mathrm{C}_{0.}$. Ce dernier cas n'est pas possible car la classe (λ_α) lorsque α varie dans la classe des ordinaux sera strictement décroissante et son cardinal sera plus grand que n'importe quel nombre ordinal, ce qui est contraire au fait que la famille (λ_α) est un sous-ensemble des nombres réels.

On peut noter enfin que l'ordinal α_T obtenu par le théorème II.2 est au plus dénombrable. Cela résulte du fait que, pour tout $\alpha \leqslant \alpha_\mathrm{T}$, $t_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1} > 0$ et que

$$\sum_{\alpha \leqslant \alpha_\mathrm{T}} t_\alpha = \sum_{\alpha \leqslant \alpha_\mathrm{T}} (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) = \lambda_1 - \lambda_{\alpha_\mathrm{T}} \leqslant \| \mathrm{T} \| < \infty .$$

II.5. Unicité. — Nous conservons encore les notations utilisées dans la démonstration de l'existence. Soit d'autre part $\left(\bigoplus\limits_{\alpha \leqslant \alpha'} \lambda'_\alpha \mathrm{T}'_{i,\alpha}\right) \oplus \lambda'_{\alpha'}\mathrm{T}'_{0,\alpha'}$ $\left(\text{défini sur } \left(\bigoplus\limits_{\alpha \leqslant \alpha'} \mathscr{H}'_{i,\alpha}\right) \oplus \mathscr{H}'_{0,\alpha'}\right)$ un autre prolongement de T vérifiant toutes les conditions du théorème II.2. A part la contraction $\mathrm{T}'_{0,\alpha'}$ on considère aussi, pour tout $\alpha \leqslant \alpha'$, la restriction $\mathrm{T}'_{0,\alpha}$ de

$$\lambda'^{-1}_\alpha\left(\left(\bigoplus_{\alpha < \beta \leqslant \alpha'} \lambda'_\beta \mathrm{T}'_{i,\beta}\right) \oplus \lambda'_{\alpha'}\mathrm{T}'_{0,\alpha'}\right)$$

sur l'espace :

$$\mathscr{H}'_{0,\alpha} = \overline{\mathscr{P}_{\left(\bigoplus\limits_{\alpha < \beta \leqslant \alpha'} \mathscr{H}'_{i,\beta}\right) \oplus \mathscr{H}'_{0,\alpha'}}(\mathscr{H})} .$$

Comme $\lambda'_\alpha > \lambda'_{\alpha+1} \geqslant \lambda'_\beta$ si $\alpha < \beta \leqslant \alpha'$, $T'_{0,\alpha}$ est de norme strictement inférieure à l'unité et par suite de classe $C_{0.}$. D'autre part, on a aussi :

$$\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}'_{0,\alpha}}(\mathcal{H})} = \overline{\mathcal{P}_{\left(\bigoplus\limits_{\alpha<\beta\leqslant\alpha'} \mathcal{H}'_{i,\beta}\right)\oplus\mathcal{H}'_{0,\alpha'}}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}'_{0,\alpha}$$

$\left(\bigoplus\limits_{\beta\leqslant\alpha} \lambda'_\beta T'_{i,\beta}\right) \oplus \lambda'_\alpha T'_{0,\alpha}$ est un prolongement de T vérifiant toutes les conditions du théorème II.2, sauf le fait que $T'_{0,\alpha}$ n'est pas canoniquement de classe $C_{0.}$.

On remarque aussi que, d'après la deuxième partie du lemme II.3, l'opérateur $\left(\bigoplus\limits_{\alpha<\beta} \lambda'_\beta T'_{i,\beta}\right) \oplus \lambda'_{\alpha'} T'_{0,\alpha'}$ est aussi un prolongement de $\lambda'_\alpha T'_{0,\alpha}$ vérifiant toutes les conditions du théorème II.2.

Ces remarques étant faites, on voit que $T'_{0,1} \oplus T'_{i,1}$ est le prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de la contraction $\lambda_1'^{-1}T$. Comme $\lambda'_1 = \| T \| = \lambda_1$ on obtient, d'après l'unicité des prolongements minimaux de type $C_{0.} \oplus i$ des contractions, $T'_{0,1} = T_{0,1}$ et $T'_{i,1} = T_{i,1}$. Comme

$$\left(\bigoplus_{1<\alpha\leqslant\alpha'} \lambda'_\alpha T'_{i,\alpha}\right) \oplus \lambda'_{\alpha'} T'_{0,\alpha'}$$

est un prolongement de $\lambda'_1 T'_{0,1}$ vérifiant toutes les conditions du théorème II.2, le même raisonnement donne

$$\lambda'_2 = \lambda'_1 \| T'_{0,1} \| = \lambda_1 \| T_{0,1} \| = \lambda_2,\ T'_{0,2} = T_{0,2}$$

et $T'_{i,2} = T_{i,2}$ et ainsi de suite. De cette façon, l'unicité du prolongement considéré sera obtenue si α_T ou α' est un entier fini.

Dans le cas contraire, pour tout $n \in \mathrm{N}$, le même raisonnement donne $\lambda'_n = \lambda_n$, $T'_{0,n} = T_{0,n}$, $T'_{i,n} = T_{i,n}$ et aussi $\lambda'_\omega = \lim\limits_{n\to\omega} \lambda'_n = \lim\limits_{n\to\omega} \lambda_n = \lambda_\omega$. De façon canonique, on peut identifier d'autre part $\mathcal{H}/R_\omega = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_\omega}(\mathcal{H})$ à

$$\mathcal{P}_{\left(\bigoplus\limits_{\omega\leqslant\alpha\leqslant\alpha'} \mathcal{H}'_{i,\alpha}\right)\oplus\mathcal{H}'_{0,\alpha'}}(\mathcal{H})$$

et par suite T_ω à la restriction T'_ω de

$$\left(\bigoplus_{\omega\leqslant\alpha\leqslant\alpha'} \lambda'_\alpha T'_{i,\alpha}\right) \oplus \lambda'_{\alpha'} T'_{0,\alpha'}$$

à l'espace :

$$\mathcal{H}'_\omega = \overline{\mathcal{P}_{\left(\bigoplus\limits_{\omega\leqslant\alpha\leqslant\alpha'} \mathcal{H}'_{i,\alpha}\right)\oplus\mathcal{H}'_{0,\alpha'}}(\mathcal{H})}\,.$$

Si $\lambda'_\omega = \lambda_\omega = 0$ alors $\alpha' = \omega$ car $(\lambda'_\alpha)_{\alpha \leqslant \alpha'}$ est une famille de réels positifs ou nuls strictement décroissante. Dans ce cas on a aussi $T'_{i,\alpha'} = 0$ d'après la condition (1) et l'unicité du prolongement considéré en résulte. Dans le cas contraire, il est immédiat de remarquer que $T'_{0,\omega} \oplus T'_{i,\omega}$ est le prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de la contraction $\lambda'^{-1}_\omega T'_\omega$ donc de la contraction $\lambda_\omega^{-1} T_\omega$. Il en résulte que $T'_{0,\omega} = T_{0,\omega}$ et $T'_{i,\omega} = T_{i,\omega}$ et ainsi de suite transfiniment. Le théorème II.2 est donc démontré.

II.6. Remarque. — Si T est une contraction normale et $A_i = \lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n$, on montre que :

$$A_i^2 = \lim_{n\to\infty} T^{*2n}T^{2n} = A_i\,;$$
$$TA_i = T \lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n = (\lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n)T = A_iT \quad \text{et} \quad A_iT^* = T^*A_i$$

A_i est donc une projection orthogonale sur un sous-espace $\mathcal{H}_i$ réduisant T.

Soient maintenant T_i et T_0 les restrictions de T à $\mathcal{H}_i$ et à $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_i$ respectivement, on a évidemment $T = T_0 \oplus T_i$ Si $h \in \mathcal{H}_0$ on a $A_ih = 0$ et par suite :

$$\lim_{n\to\infty} \|T^nh\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle T^nh, T^nh \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} T^{*n}T^nh, h \rangle = \langle A_ih, h \rangle = 0$$

et T_0 est de classe $C_{0.}$. Si $h \in \mathcal{H}_i$ on a $A_ih = h$ et on obtient :

$$\|Th\|^2 = \langle Th, Th \rangle = \langle TA_ih, Th \rangle = \langle A_iTh, Th \rangle$$
$$= \langle T^*A_iTh, h \rangle = \langle A_ih, h \rangle = \langle h, h \rangle = \|h\|^2$$

et T_i est une isométrie (ou même unitaire car T est normal). Ainsi $T_0 \oplus T_i$, qui est une décomposition directe de T, est aussi le prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de T.

Plus généralement, pour tout opérateur normal T, le prolongement donné par le théorème II.2 représente, en réalité, une décomposition directe de T et chaque $T_{i,\alpha}$ est unitaire.

Si, de plus, T est compact on montre aussi que $\mathcal{H}_{i,\alpha}$ est de dimension finie, α_T est au plus égal au plus petit ordinal dénombrable ω et $T_{0,\omega} = 0$. La décomposition considérée de T coïncide donc avec le développement spectral classique de T suivant ses valeurs et vecteurs propres.

II.7. Remarque. — Si $T_0 \oplus T_i$ est le prolongement minimal d'une contraction T, il est facile de noter que $T_0 = T$ et

$$\left(\bigoplus_{\alpha \leqslant \alpha_T} \lambda_\alpha T_{i,\alpha}\right) \oplus \lambda_{\alpha_T} T_{0,\alpha_T}$$

est un prolongement de T_0 si $\| T \| < 1$. Dans le cas $\| T \| = 1$, on montre que $T_{i,1} = T_i$ et

$$\left(\bigoplus_{1 < \alpha \leqslant \alpha_T} \lambda_\alpha T_{i,\alpha} \right) \oplus \lambda_{\alpha_T} T_{0,\alpha_T}$$

est le prolongement de T_0 suivant le théorème II.2.

Le théorème II.2 ainsi que les résultats obtenus dans la suite donnent donc aussi une étude des propriétés spectrales de T provenant du terme T_0 et complètent en quelque sorte l'étude des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ des contractions entreprise dans [8].

III. ESPACES DE FONCTIONS ANALYTIQUES A VALEURS VECTEURS PROPRES ASSOCIÉS AU PROLONGEMENT

$$\left(\bigoplus_{\alpha \leqslant \alpha_T} \lambda_\alpha T_{i,\alpha} \right) \oplus \lambda_{\alpha_T} T_{0,\alpha_T}$$

Nous commençons par établir des correspondances entre les valeurs et vecteurs propres de T^* et ceux des opérateurs $T^*_{i,\alpha}$, $\alpha \leqslant \alpha_T$. Pour cela, soient $\sigma_{i,\alpha}$ la transformation canonique de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}_{i,\alpha}$ et $A_{i,\alpha}$ la transformation auto-adjointe sur $\mathscr{H}$ définies respectivement par :

$$\sigma_{i,\alpha}(h) = \mathscr{P}_{\mathscr{H}_{i,\alpha}}(h) \quad \text{et} \quad \langle A_{i,\alpha} h, k \rangle = \langle \sigma_{i,\alpha}(h), \sigma_{i,\alpha}(k) \rangle \quad \text{pour tout } h, k \in \mathscr{H}$$

on obtient alors :

III.1. Proposition. — *Si a est une valeur propre de* $T^*_{i,\alpha}$ *alors* $\lambda_\alpha a$ *est une valeur propre de* T^* *et la correspondance* $h_{i,\alpha} \mapsto \sigma^*_{i,\alpha} h_{i,\alpha}$ *établit une transformation linéaire, contractive, inversible (au sens large) de l'ensemble des vecteurs propres de* $T^*_{i,\alpha}$ *associés à la valeur propre a sur l'ensemble des vecteurs propres de* T^* *associés à la valeur propre* λ_α *a et appartenant à la variété* $A^{1/2}_{i,\alpha}\mathscr{H}$.

Réciproquement, si l'ensemble $\{ h \in \mathscr{H} : T^*h = ah, \ h \in A^{1/2}_{i,\alpha}\mathscr{H} \}$ *ne se réduit pas à l'espace trivial* $\{ 0 \}$ *alors* $\lambda_\alpha^{-1} a$ *est une valeur propre de* $T^*_{i,\alpha}$.

La démonstration du théorème 1.4 de [8] sur une correspondance analogue entre les valeurs et vecteurs propres d'une contraction T^* et ceux de l'opérateur T^*_i obtenu à partir du prolongement de type $C_{0.} \oplus i$ de T est basée sur la relation :

$$T_i \sigma = \sigma T \quad \text{ou, plus exactement la relation} \quad \sigma^* T^*_i = T^* \sigma^*.$$

Ici, le théorème II.2 donne immédiatement :

$$\lambda_\alpha T_{i,\alpha}\sigma_{i,\alpha} = \sigma_{i,\alpha}T \quad \text{et par suite} \quad \lambda_\alpha\sigma^*_{i,\alpha}T^*_{i,\alpha} = T^*\sigma^*_{i,\alpha}$$

et la proposition III.1 se démontre de façon analogue.

En utilisant la proposition III.1 et une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 1.3 de [*8*], on obtient le résultat suivant :

III.2. THÉORÈME. — *Pour tout ordinal* $\alpha \leqslant \alpha_T$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $T_{i,\alpha}$ *n'est pas unitaire.*

(2) *Tout point du disque* $D_\alpha = \{ z : |z| < \lambda_\alpha \}$ *est une valeur propre de* T^* *et pour chacune de ces valeurs propres,* T^* *admet des vecteurs propres non nuls appartenant à la variété* $A^{1/2}_{i,\alpha}\mathscr{H}$.

(3) a' *étant un point fixé du disque* D_α, *alors* a' *est une valeur propre de* T^* *et, pour cette valeur propre,* T^* *admet des vecteurs propres non nuls appartenant à la variété* $A^{1/2}_{i,\alpha}\mathscr{H}$.

(4) T *vérifie la condition* $\overline{A^{1/2}_{i,\alpha}\mathscr{H}} \neq \overline{A^{1/2}_{i,\alpha}T\mathscr{H}}$.

Dans ces conditions, pour tout $h^0_\alpha \neq 0$, $T^*h^0_\alpha = 0$ *et* $h^0_\alpha \in A^{1/2}_{i,\alpha}\mathscr{H}$, *la fonction* A *définie par :*

$$A(z) = \sigma^*_{i,\alpha}(I_{i,\alpha} - \lambda_\alpha^{-1}zT_{i,\alpha})^{-1}\sigma^{*-1}_{i,\alpha}h^0_\alpha \qquad \textit{pour tout } z \in D_\alpha$$

est analytique dans D_α *et vérifie les propriétés suivantes :*

$$T^*A(z) = zA(z) \quad \textit{et} \quad A(z) \neq 0 \qquad \textit{pour tout } z \in D_\alpha.$$

III.3. Dans ce paragraphe, on fixe un ordinal $\alpha \leqslant \alpha_T$ et on suppose que les conditions citées dans le théorème III.2 sont vérifiées. Alors, avec des modifications convenables, une méthode analogue à celle utilisée dans la première partie nous donne les résultats suivants :

(1) *Pour tout* $z \in D_\alpha$, $A(z)$ *n'est pas un vecteur propre de* T. *De façon équivalente, une relation de la forme* $TA(z) = \bar{z}A(z)$ *est impossible.*

(2) *Pour tout* $z \in D_\alpha$, *on a* $\{ h \in \mathscr{H} : Th = \bar{z}h \} \neq \{ k \in \mathscr{H} : T^*k = zk \}$.

(3) *Pour tout* $z \in D_\alpha$, *le vecteur* $A(z)$ *appartient à la partie complètement non normale de* T.

(4) *Pour chaque fonction* A *donnée par le théorème* III.2, *il existe un scalaire fixe* C *tel que :*

$$\begin{aligned} &\|A(z)\| \leqslant C\lambda_\alpha^{-1}(1 - |\lambda_\alpha^{-1}z|^2)^{-1/2} \\ &\|A^{(n)}(z)\| \leqslant C.n!\lambda_\alpha^{-n}(1 - |\lambda_\alpha^{-1}z|^2)^{-(n+1)/2} \qquad \textit{pour tout } n \in N \textit{ et } z \in D_\alpha. \end{aligned}$$

(5) *Si $\sigma_{i,\alpha}$ est inversible au sens strict, il existe* C *et* C′ *tels que :*

$$C'\lambda_\alpha^{-1}(1 - |\lambda_\alpha^{-1}z|^2)^{-1/2} \leqslant \|A(z)\| \leqslant C\lambda_\alpha^{-1}(1 - |\lambda_\alpha^{-1}z|^2)^{-1/2}$$
$$C'.n!\lambda_\alpha^{-n}(1 - |\lambda_\alpha^{-1}z|^2)^{-(n+1)/2} \leqslant \|A^{(n)}(z)\| \leqslant C.n!\lambda_\alpha^{-n}(1 - |\lambda_\alpha^{-1}z|^2)^{-(n+1)/2}$$

En particulier $\lim_{|z|\to\lambda_\alpha} \|A(z)\| = \lim_{|z|\to\lambda_\alpha} \|A^{(n)}(z)\| = \infty.$

Nous terminons avec la proposition suivante qui donne une relation entre les valeurs et vecteurs propres de T et ceux de T*.

III.4. PROPOSITION. — *Avec les notations du théorème III.2, pour tout scalaire a tel que $|a| \geqslant \lambda_{\alpha_T}$, on a :*

$$\{ h \in \mathscr{H} : Th = ah \} \subseteq \{ k \in \mathscr{H} : T^*k = \bar{a}k \}.$$

Démonstration. — On peut toujours supposer que a est une valeur propre de T. Soit alors h un vecteur propre de T correspondant à cette valeur propre. D'après le théorème II.2, ou bien $\lambda_{\alpha_T} \neq 0$ et il existe alors un ordinal α tel que $\lambda_\alpha = |a|$, h est un vecteur propre de $T_{i,\alpha}$ ou bien $\lambda_{\alpha_T} = a = 0$ et h est un vecteur propre de l'opérateur (nul) $\lambda_{\alpha_T}T_{0,\alpha_T}$.

Dans le premier cas, h est aussi un vecteur propre $T^*_{i,\alpha}$ (car $T_{i,\alpha}$ est isométrique) et la proposition III.1 implique que h est un vecteur propre de T*.

Dans le second cas, la relation $T^*h = T^*\sigma^*_{0,\alpha_T}h = \lambda_{\alpha_T}\sigma^*_{0,\alpha_T}T^*_{0,\alpha_T}h = 0$ (où σ_{0,α_T} est la transformation canonique de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}_{0,\alpha_T}$) montre encore que h est un vecteur propre de T*. La proposition est donc démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] B. SZ.-NAGY, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sc. Math. Szeged*, t. **25**, 1953, p. 87-92.

[*2*] B. SZ.-NAGY, Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace. Appendice du livre *Leçons d'analyse fonctionnelle* de F. RIESZ et B. SZ.-NAGY [*6*].

[*3*] B. SZ.-NAGY et C. FOIAS, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*. Paris, Masson; Budapest, Akadémiai Kiado, 1967.

[*4*] B. SZ.-NAGY et C. FOIAS, Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint. *Acta Sci. Math. Szeged*, t. **20**, 1959, p. 91-96.

[*5*] F. RIESZ et B. SZ.-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Paris, Masson ; Budapest, Akadémiai Kiado, 3e édition, 1955 et 4e édition, 1965.

[*6*] TÔN-THÂT LONG, Prolongements des contractions de l'espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **270**, série A, 1970, p. 1371-1374.

[*7*] TÔN-THÂT LONG, Utilisation des nombres ordinaux dans l'étude spectrale des opérateurs linéaires bornés de l'espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **272**, 1971, p. 1304-1307.

[*8*] TÔN-THÂT LONG, Contribution à l'étude spectrale des contractions de l'espace de Hilbert. *A paraître* dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

[*9*] TÔN-THÂT LONG, Semi-groupes de contractions de classe C_0. *A paraître* dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

[*10*] TÔN-THÂT LONG, Sur quelques relations entre les valeurs et vecteurs propres d'un opérateur et de l'opérateur adjoint. *En préparation*.

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1974)