ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PAUL DEHEUVELS

Valeurs extrémales d'échantillons croissants d'une variable aléatoire réelle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 1 (1974), p. 89-114
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_1_89_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 1, 1974, p. 89-114. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Valeurs extrémales d'échantillons croissants d'une variable aléatoire réelle

par

Paul DEHEUVELS

INTRODUCTION

Nous développons ici des résultats dont une partie a été exposée dans [*1*] et [*2*], sur l'étude des valeurs extrémales des échantillons de variables réelles et des sommes de minima de variables réelles positives. Nous développons la technique que nous avons introduite dans [*1*], consistant à introduire des variables indépendantes à l'aide de temps d'atteinte des suites $\text{Inf}(X_1, \ldots, X_n)$.

Dans la première partie, nous étudions les extrémas de variables aléatoires uniformément distribuées sur [0, 1], et le comportement des sommes :

$$S_n = X_1 + \text{Inf}(X_1, X_2) + \ldots + \text{Inf}(X_1, \ldots, X_n).$$

Nous obtenons plus particulièrement que :

$$\frac{S_n}{\text{Log}\, n} \to 1 \quad \text{presque sûrement,} \quad \frac{S_n - \text{Log}\, n}{\sqrt{\text{Log}\, n}} \to N(0, 1)$$

en loi ; et des encadrements de $\text{Inf}(X_1, \ldots, X_n)$ presque sûrement par des suites non-aléatoires :

$$\frac{1}{n\,(\text{Log}\, n) \ldots (\text{Log}_p\, n)^{1+R}} \quad \text{et} \quad \frac{\text{Log}_2\, n + \ldots + (1+R)\,\text{Log}_p\, n}{n}, \; R > 0,$$

qui, sont les meilleurs possibles.

Dans la deuxième partie, nous généralisons les résultats de convergence obtenus dans la première aux variables aléatoires quelconques, déduites des variables uniformément distribuées sur [0, 1] par une transformation fonctionnelle.

Dans la troisième partie, nous exposons des applications des résultats précédents à l'estimation du support d'une variable aléatoire, avec, en particulier des intervalles de confiance presque sûrs.

CHAPITRE PREMIER

Soient :

$\{ X_n, n \geqslant 1 \}$, suite de v. a. indépendantes, uniformément distribuées sur [0, 1].

$\{ \varepsilon_n, n \geqslant 1 \}$, suite numérique, strictement décroissante vers 0.

On pose :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \tau_\varepsilon = \operatorname{Inf} \{ n \mid \operatorname{Inf}\{ X_1, \ldots, X_n \} \leqslant \varepsilon \}.$$

$$S_n = X_1 + \operatorname{Inf}(X_1, X_2) + \ldots + \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)$$

1. Loi des accroissements

PROPOSITION 1. — La suite aléatoire $\{ \tau_{\varepsilon_n}, n \geqslant 1 \}$ est définie et croît indéfiniment, presque sûrement.

Preuve. — En effet,

$$P(\exists n \mid \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) = 0) = P(\operatorname{Lim}_{n\infty} \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) > 0) = 0.$$

Dans la suite, on se limitera à l'espace d'événements $\Omega - \Omega_0$, avec

$$\Omega_0 = \{ \exists n \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) = 0 \} \cup \{ \operatorname{Lim}_{n\infty} \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) > 0 \}$$

PROPOSITION 2. $\forall n \geqslant 1$, $\tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}}, \ldots, \tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1}, \tau_{\varepsilon_1}$ sont indépendantes.

Preuve. — Tout d'abord :

$$P(\tau_{\varepsilon_1} = r_0) = P(X > \varepsilon_1)^{r_0 - 1} P(X \leqslant \varepsilon_1), \; r_0 \geqslant 1.$$

$$P(\tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1} = r_1, \tau_{\varepsilon_1} = r_0) = P(X > \varepsilon_1)^{r_0 - 1} \{ P(\varepsilon_2 < X \leqslant \varepsilon_1) P(X > \varepsilon_2)^{r_1 - 1} \}_* P(X \leqslant \varepsilon_2),$$

$\forall r_1 \geqslant 0$, en notant :

$$(1,1,1) \quad \{ P(\varepsilon_n < X \leqslant \varepsilon_{n-1}) P(X > \varepsilon_n)^{r_{n-1} - 1} \}_* = \begin{cases} \text{Sans changement si } r_{n-1} \geqslant 1, \\ 1 \quad \text{si } r_{n-1} = 0. \end{cases}$$

On constate alors que :

$$P(\tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1} = r_1 \mid \tau_{\varepsilon_1} = r_0) = \{ P(\varepsilon_2 < X \leqslant \varepsilon_1)P(X > \varepsilon_2)^{r_1 - 1} \}_* \frac{P(X \leqslant \varepsilon_2)}{P(X \leqslant \varepsilon_1)}$$
$$= P(\tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1} = r_1),$$

et par conséquent l'indépendance de $\tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1}$ et τ_{ε_1}.

Supposons maintenant établi que $\tau_{\varepsilon_{n-1}} - \tau_{\varepsilon_{n-2}}, \ldots, \tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1}, \tau_{\varepsilon_1}$ soient indépendantes, et que, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n - 2$, $\forall r_i \geqslant 0$,

$$P(\tau_{\varepsilon_{i+1}} - \tau_{\varepsilon_i} = r_i) = \{ P(\varepsilon_{i+1} < X \leqslant \varepsilon_i)P(X > \varepsilon_{i+1})^{r_i - 1} \}_* \frac{P(X \leqslant \varepsilon_{i+1})}{P(X \leqslant \varepsilon_i)},$$

alors :

$$P(\tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}} = r_{n-1}, \ldots, \tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1} = r_1, \tau_{\varepsilon_1} = r_0)$$
$$= P(X > \varepsilon_1)^{r_0 - 1} \{ P(\varepsilon_2 < X \leqslant \varepsilon_1)P(X > \varepsilon_2)^{r_1 - 1} \}_* \ldots$$
$$\{ P(\varepsilon_n < X \leqslant \varepsilon_{n-1})P(X > \varepsilon_n)^{r_{n-1} - 1} \}_* P(X \leqslant \varepsilon_n),$$

et

$$P(\tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}} = r_{n-1} \mid \tau_{\varepsilon_{n-1}} - \tau_{\varepsilon_{n-2}} = r_{n-2}, \ldots, \tau_{\varepsilon_2} - \tau_{\varepsilon_1} = r_1, \tau_{\varepsilon_1} = r_0)$$
$$= \{ P(\varepsilon_n < X \leqslant \varepsilon_{n-1})P(X > \varepsilon_n)^{r_{n-1} - 1} \}_* \frac{P(X \leqslant \varepsilon_n)}{P(X \leqslant \varepsilon_{n-1})} = P(\tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}} = r_{n-1}).$$

D'où le résultat. On a obtenu par la même occasion :

PROPOSITION 3. $\forall n \geqslant 1$, compte tenu de la notation (1,1,1), on a :

$$P(\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n} = r_n) = \{ P(\varepsilon_{n+1} < X \leqslant \varepsilon_n)P(X > \varepsilon_{n+1})^{r_n - 1} \}_* \frac{P(X \leqslant \varepsilon_{n+1})}{P(X \leqslant \varepsilon_n)}.$$

2. Moments des accroissements

PROPOSITION 4. $E(\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n}) = \dfrac{1}{P(X \leqslant \varepsilon_{n+1})} - \dfrac{1}{P(X \leqslant \varepsilon_n)}$,

$$V(\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n}) = \left[\frac{1}{P(X \leqslant \varepsilon_{n+1})} - \frac{1}{P(X \leqslant \varepsilon_n)}\right]\left[\frac{1}{P(X \leqslant \varepsilon_{n+1})} + \frac{1}{P(X \leqslant \varepsilon_n)} - 1\right]$$

Preuve. — Il suffit d'appliquer la proposition 3, et les propriétés des séries géométriques. Si on applique l'hypothèse que les v. a. X sont uniformément distribuées sur [0, 1], et si on suppose que $\varepsilon_n \leqslant 1$, ces formules s'écrivent encore plus simplement. Nous raisonnerons dans ce cas. On a :

$$\forall r > 0, \quad P(\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n} = r) = (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} (1 - \varepsilon_{n+1})^{r-1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r(1-u)^{r-1} = \frac{1}{u^2}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} r^2(1-u)^{r-1} = \frac{2-u}{u^3}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} r^3(1-u)^{r-1} = \frac{6-6u+u^2}{u^4} \ldots$$

Un raisonnement simple par récurrence montre aisément que, lorsque $u \to 0, \sum_{r=1}^{\infty} r^p(1-u)^{r-1} \sim \frac{(p)!}{u^{p+1}}$. On en déduit les résultats précédents, et plus généralement :

PROPOSITION 5. $\forall p \geqslant 1, \quad E((\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n})^p) \sim \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \cdot \frac{p\,!}{\varepsilon_{n+1}^p}$

3. Convergence de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$

Nous étudierons la convergence de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$ en l'encadrant par des sommes partielles de séries de v. a. indépendantes, dont on étudiera les propriétés.

PROPOSITION 6. $\forall n \geqslant 1$: $S_{\tau_{\varepsilon_{n+1}-1}} - S_{\tau_{\varepsilon_n - 1}} \geqslant$

(1,3,1) $(\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n})\varepsilon_{n+1}$; $S_{\tau_{\varepsilon_{n+1}}} - S_{\tau_{\varepsilon_n}} \leqslant (\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n})\varepsilon_n$

$$-2 + \sum_{m=1}^{n-1}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_{m+1} \leqslant S_{\tau_{\varepsilon_n}} - S_{\tau_{\varepsilon_1}} \leqslant \sum_{m=1}^{n-1}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_m$$

$\forall m \in [\tau_{\varepsilon_n}, \tau_{\varepsilon_{n+1}}]$,

$$-2 + \sum_{m=1}^{n-1}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_{m+1} \leqslant S_m - S_{\tau_{\varepsilon_1}} \leqslant \sum_{m=1}^{n}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_m.$$

Preuve. — Evidente, compte tenu du caractère monotone des suites utilisées.

Dans la suite, on se limitera aux suites : $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$, $0 < \alpha$.

Posons pour simplifier :

$$U_n = \sum_{m=1}^{n}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_m \quad \text{et} \quad U'_n = \sum_{m=1}^{n}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_{m+1}.$$

PROPOSITION 7. — Si $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$,

$$E(U_n) - \alpha \operatorname{Log} n = 0(1), \qquad E(U'_n) - \alpha \operatorname{Log} n = 0(1)$$
$$V(U_n) - 2\alpha \operatorname{Log} n = 0(1), \qquad V(U'_n) - 2\alpha \operatorname{Log} n = 0(1),$$

de plus,

$$\sum_{m=1}^{n} E((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})^p \varepsilon_m{}^p) \sim \sum_{m=1}^{n} E((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})^p \varepsilon_{m+1}{}^p) \sim p\,! \operatorname{Log} n.$$

Preuve. $E((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_m) - \frac{\alpha}{m} = 0(1/m^2) = ((m+1)^\alpha - m^\alpha)/m^\alpha) - \alpha/m.$
De même, pour U_m, il suffit d'utiliser la définition de la constante d'Euler. De même pour les autres résultats, en appliquant les propositions 4 et 5. Remarquons que :

$$V((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_m) - 2\alpha/m = 0(1/m^{\operatorname{Inf}(1+\alpha,2)}).$$

Par la même occasion, on montre que l'espérance et la variance de :

$$\sum_{m=1}^{n} (\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})(\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1})$$

convergent, ce qui prouve la convergence presque sûre de la série correspondante :

LEMME 1. — $U'_n - U_n$ converge presque sûrement vers une limite finie, ayant des moments finis d'ordre 2.

On en déduit :

PROPOSITION 8. — Si $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$, $\frac{1}{\operatorname{Log} n} S_{\tau_{\varepsilon_n}} \to \alpha$ presque sûrement et en moyenne quadratique.

Preuve. — Par le lemme 1, on peut remplacer $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$ par U_n. La convergence en moyenne quadratique est alors conséquence directe de la proposition 7. En ce qui concerne la convergence presque sûre, il suffit d'appliquer un théorème de loi des grands nombres, par exemple [7], page 405 et de vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} E((\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n})\varepsilon_{n+1}) = \infty, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [V((\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n})\varepsilon_{n+1})/E(U_n)^2] < \infty,$$

et ceci est évident, car pour la première condition, cela revient à Log $n \to \infty$, et pour la seconde, le terme général de la série est équivalent à $1/n\,(\operatorname{Log} n)^2$ Cte, c'est-à-dire un terme général de série de Bertrand convergente.

4. Convergence asymptotiquement normale de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$

PROPOSITION 9. $\frac{1}{\sqrt{2\alpha \operatorname{Log} n}} [S_{\tau_{\varepsilon_n}} - \alpha \operatorname{Log} n] \to N(0, 1)$ en loi.

Preuve. — Par les propositions 4 et 5, il est clair que U_n (respectivement U'_n) vérifie une condition de Liapounov ([7], p. 414). Par exemple pour les moments d'ordre 3, en notant $M_3(X) = E(|X - E(X)|^3)$, il suffit de vérifier que :

$$\left[\sum_{m=1}^{n} M_3((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_{m+1})\right]^{1/3} \left[\sum_{m=1}^{n} V((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_{m+1})\right]^{-1/2} \to 0.$$

Or $M_3((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})\varepsilon_{m+1}) \sim E((\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})^3 \varepsilon_{m+1}{}^3)$, et par la proposition 5, cela revient à dire que $(\text{Log } n)^{1/3} (\text{Log } n)^{-1/2} \to 0$.

D'autre part, par la proposition 6, il est clair que :

$$\operatorname*{Lim\,Inf}_{n\infty} P\left(\frac{U'_n - 2\alpha \text{ Log } n}{\sqrt{2\alpha \text{ Log } n}} \leqslant u\right)$$

$$\leqslant \begin{matrix} \operatorname*{Lim\,Inf}_{n\infty} \\ \operatorname*{Lim\,Sup}_{n\infty} \end{matrix} P\left(\frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}} - 2\alpha \text{ Log } n}{\sqrt{2\alpha \text{ Log } n}} \leqslant u\right) \leqslant \operatorname*{Lim\,Sup}_{n\infty} P\left(\frac{U_n - 2\alpha \text{ Log n}}{\sqrt{2\alpha \text{ Log } n}} \leqslant u\right).$$

On en déduit aisément le résultat.

5. **Convergence de S_n**

Nous établirons parallèlement les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. $\dfrac{S_n}{\text{Log } n} \to 1$ presque sûrement.

THÉORÈME 2. — Si $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$, $\dfrac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} \to \alpha$ presque sûrement.

Preuve. — 1) Dans un premier stade, supposant que $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$, montrons que, presque sûrement :

$$(1,5,1) \qquad \alpha - 1 \leqslant \operatorname*{Lim\,Inf}_{n\infty} \frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} \leqslant \operatorname*{Lim\,Sup}_{n\infty} \frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} \leqslant \alpha.$$

Pour cela, considérons, pour $t > \alpha$:

$$P\left[\frac{\text{Log } \tau_{\varepsilon_n}}{\text{Log } n} > t\right] = P(\tau_{\varepsilon_n} > n^t) = (1 - 1/n^\alpha)^{n^t} = [(1 - 1/n^\alpha)^{n^\alpha}]^{n^{t-\alpha}}.$$

Or $(1 - 1/n^\alpha)^{n^\alpha} \to e^{-1}$, et pour n assez grand $(1 - 1/n^\alpha)^{n^\alpha} < a < 1$.

Par conséquent, on a en majorant terme à terme :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P\left[\frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}}{\operatorname{Log} n} > t\right] \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} a^{n^{t-\alpha}}$$

Cette série converge si $t > \alpha$, car, dans ce cas, $a^{n^{t-\alpha}}$ converge vers 0 plus vite que $n^{-k(t-\alpha)}$, $\forall k$. On déduit alors de cette convergence, par le lemme de Borel-Cantelli, que, presque sûrement,

$$\forall t > \alpha, \quad \operatorname{Lim}_{n\infty} \operatorname{Sup} \frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}}{\operatorname{Log} n} \leqslant t.$$

D'où la deuxième inégalité. Considérons maintenant, pour $t < \alpha$:

$$P\left[\frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}}{\operatorname{Log} n} \leqslant t\right] = 1 - P(\tau_{\varepsilon_n} > n^t) = 1 - (1 - 1/n^{\alpha})^{n^t}.$$

Or

$$(1 - 1/n^{\alpha})^{n^t} = \exp\left(n^t \operatorname{Log}\left(1 - 1/n^{\alpha}\right)\right) \geqslant \exp\left(- n^{t-\alpha}\right) \geqslant 1 - n^{t-\alpha}.$$

Donc :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P\left[\frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}}{\operatorname{Log} n} \leqslant t\right] \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{t-\alpha} < \infty, \quad \text{si} \quad t < \alpha - 1.$$

De même que précédemment, d'après Borel-Cantelli, on obtient le membre de droite.

2) Nous allons maintenant obtenir les résultats énoncés en utilisant l'inégalité (1,5,1). Compte tenu de celle-ci, de (1,3,1), et de la proposition 8, on a, presque sûrement, si $\alpha > 1$:

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \leqslant \operatorname{Lim}_{n\infty} \operatorname{Inf} \frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n+1}}} \leqslant \operatorname{Lim}_{n\infty} \operatorname{Sup} \frac{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n+1}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

et

$$1 \leqslant \operatorname{Lim}_{n\infty} \operatorname{Inf} \frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}} \leqslant \operatorname{Lim}_{n\infty} \operatorname{Sup} \frac{S_{\tau_{\varepsilon_{n+1}}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n+1}}} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

D'autre part, si $\tau_{\varepsilon_n} \leqslant m \leqslant \tau_{\varepsilon_{n+1}}$, on a, les suites S_n et τ_{ε_n} étant croissantes :

$$\frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_{n+1}}} \leqslant \frac{S_m}{\operatorname{Log} m} \leqslant \frac{S_{\tau_{\varepsilon_{n+1}}}}{\operatorname{Log} \tau_{\varepsilon_n}}.$$

En combinant les inégalités précédentes, on obtient que, presque sûrement :

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} \leqslant \operatorname*{Lim\,Inf}_{n\infty} \frac{S_n}{\operatorname{Log} n} \leqslant \operatorname*{Lim\,Sup}_{n\infty} \frac{S_n}{\operatorname{Log} n} \leqslant \left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\right]^2 .$$

Il suffit alors de faire croître α indéfiniment pour obtenir le résultat. Il est particulièrement facile de calculer directement l'espérance de S_n :

PROPOSITION 10. $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1}$, et $E(S_n) - \operatorname{Log} n \to L$, limite finie, lorsque n croît indéfiniment.

En effet : $P(\operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) > u) = (1-u)^n$, pour $0 < u < 1$. Donc :

$$E(\operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)) = \int_0^1 nu(1-u)^{n-1}du = \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que :

COROLLAIRE 1. $\frac{S_n}{E(S_n)} \to 1$ presque sûrement.

6. Propriétés complémentaires des τ_u

Il est très utile de préciser d'avantage le comportement de τ_u, $u \to 0$. Le résultat du théorème 2 peut, comme nous allons le voir, être très sensiblement amélioré. Tout d'abord :

PROPOSITION 11. — Si $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$, $\forall p \geqslant 2$, presque sûrement : $\operatorname{Log}_p n$ désignant $\operatorname{Log}(\operatorname{Log}_{p-1} n)$, avec $\operatorname{Log}_2 n = \operatorname{Log}\operatorname{Log} n$,

$$\operatorname*{Lim\,Sup}_{n\infty} [(\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n}) - n^\alpha(\operatorname{Log}_2 n + \operatorname{Log}_3 n + \ldots + \operatorname{Log}_{p-1} n)]n^{-\alpha}(\operatorname{Log}_p n)^{-1} = 1.$$

Preuve. — Posons $R_n = \tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}}$. On a :

$$P(R_n \geqslant r) \sim \frac{\alpha}{n}\left[1 - \frac{1}{n^\alpha}\right]^{r-1}.$$

Posons $r_n = 1 + n^\alpha(\operatorname{Log}_2 n + \operatorname{Log}_3 n + \ldots + \lambda \operatorname{Log}_p n)$. On a :

$$P(R_n \geqslant r_n) \sim \frac{\alpha}{n} \exp n^\alpha (\operatorname{Log}_2 n + \ldots + \lambda \operatorname{Log}_p n)\left(\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)\right),$$

$$P(R_n \geqslant r_n) \sim \frac{\alpha}{n(\operatorname{Log} n)(\operatorname{Log}_2 n)\ldots(\operatorname{Log}_{p-1} n)^\lambda}.$$

On constate donc que : si $\lambda > 1$, $\Sigma P(R_n \geqslant r_n) < \infty$, si $\lambda \leqslant 1$, $\Sigma P(R_n \geqslant r_n) = \infty$.

Il suffit alors d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli, en se servant du fait que les variables aléatoires R_n sont indépendantes.

On montre par la même méthode :

THÉORÈME 3. $\forall p > 3$, presque sûrement :

$$\operatorname*{Lim\,Sup}_{u \to 0} \left[\tau_u - \frac{1}{u}(\mathrm{Log}_2 (1/u) + \mathrm{Log}_3 (1/u) + \mathrm{Log}_4 (1/u) + \dots + \mathrm{Log}_{p-1} (1/u)) \right] (\mathrm{Log}_p (1/u))^{-1} u^{-1} \leqslant 1).$$

Ceci s'écrit encore, en posant $u = \varepsilon_n = 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$, $\forall A > 0$,

$$\tau_{\varepsilon_n} \leqslant n^\alpha (\mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \dots + (1 + A)\, \mathrm{Log}_p\, n)$$

pour n assez grand, presque sûrement.

Preuve. — Dans un premier stade, montrons le résultat pour $u = \varepsilon_n = 1/n$.

1) Considérons

$$P_n = P(\tau_{\varepsilon_n} > nu_1, \tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n} > nu_2) = \left[1 - \frac{1}{n}\right]^{nu_1} \frac{1}{n+1} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right]^{nu_2}.$$

Si $u_1, u_2 = 0(n)$ et $u_1 + u_2 \to \infty$, on en déduit que $P_n \sim \frac{1}{n} \exp(-u_1 - u_2)$.

a) Posons

$$u_1 = \mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \dots + \left(1 + \frac{A}{2}\right) \mathrm{Log}_p\, n, \quad u_2 = 1/n, \quad A > 0.$$

On en déduit que $\Sigma P_n < \infty$, et par Borel-Cantelli, si $\tau_{\varepsilon_n} > nu_1$, $\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n} = 0$, presque sûrement au delà d'un certain rang.

b) Posons $u_1 = \mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \dots + \mathrm{Log}_p\, n u_2 = \frac{A}{2} \mathrm{Log}_p\, n$. De même, d'après Borel-Cantelli, presque sûrement, au delà d'un certain rang, si $\tau_{\varepsilon_n} > nu_1$, $\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n} \leqslant nu_2$.

En combinant ces deux résultats, on obtient que, $\forall A > 0$, presque sûrement,

$$\exists n_0, \quad n > n_0 \Rightarrow \text{si } \tau_{\varepsilon_n} > n\, (\mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \dots + \mathrm{Log}_p\, n)$$

alors $\tau_{\varepsilon_{n+i}}$ reste constant jusqu'au moment où il devient inférieur à

$$(n + i)\, (\mathrm{Log}_2 (n + i) + \mathrm{Log}_3 (n + i) + \dots + (1 + A)\, \mathrm{Log}\, (n + i)).$$

A partir de ce moment, soit $\tau_{\varepsilon_{n+j}}$ reste compris entre

$$(n+j)(\mathrm{Log}_2(n+j) + \ldots + \mathrm{Log}_p(n+j))$$

et $$(n+j)(\mathrm{Log}_2(n+j) + \ldots + (1+\mathrm{A})\,\mathrm{Log}_p(n+j)),$$

soit il devient à un moment inférieur à

$$(n+j)(\mathrm{Log}_2(n+j) + \ldots + \mathrm{Log}_p(n+j)).$$

2) Considérons maintenant $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}(\tau_{\varepsilon_n} \leqslant s_1, \tau_{\varepsilon_{n+1}} > s_2)$.

$$\mathrm{Q}_n = \sum_{s \leqslant s_1} \mathrm{P}(\tau_{\varepsilon_n} = s)\mathrm{P}(\tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n} > s_2 - s)$$
$$= \sum_{s \leqslant s_1} \frac{1}{n}\left[1 - \frac{1}{n}\right]^{s_1 - 1} \frac{1}{n+1}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]^{s_2 - s}.$$

Si $s_1 < s_2 = 0(n^2)$, et $s_2/n \to \infty$, $\mathrm{Q}_n \sim \frac{s_1}{n^2}\exp\left(-\frac{s_2}{n}\right)$.

Posons maintenant

$$n_i = \frac{\mathrm{A}}{2}\Sigma i\,(\mathrm{Log}_p\, i)/\,\mathrm{Log}_2\, i$$
$$s_1 = n\,[\mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \ldots + \mathrm{Log}_p\, n]$$
$$s_2 = n\,[\mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \mathrm{Log}_4\, n + \ldots + (1+\mathrm{A})\,\mathrm{Log}_p\, n].$$

Il est clair que $\Sigma \mathrm{Q}_{n_i} < \infty$. D'après Borel-Cantelli, on constate que, presque sûrement, au delà d'un certain rang, si $\tau_{\varepsilon_n} \leqslant s_1$, $\tau_{\varepsilon_{n+1}} \leqslant s_2$.

3) Il suffit alors de combiner 1) et 2) pour obtenir que, $\forall \mathrm{A} > 0$, presque sûrement au delà d'un certain rang :

$$\tau_{\varepsilon_n} \leqslant n\,(\mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \mathrm{Log}_4\, n + \ldots + (1+\mathrm{A})\,\mathrm{Log}_p\, n).$$

Montrons maintenant le résultat dans le cas général. Il suffit de constater que

$$\tau_{\frac{1}{\left[\frac{1}{u}\right]}} \leqslant \tau_u \leqslant \tau_{\frac{1}{\left[\frac{1}{u}\right]+1}}$$

De plus, $n\mathrm{A}\,\mathrm{Log}_p\, n$ croît plus vite que

$$(n+1)(\mathrm{Log}_2(n+1) + \ldots) - n\,(\mathrm{Log}_2\, n + \ldots).$$

On constate donc que, pour n assez grand, par exemple :

$$n\,(\mathrm{Log}_2\, n + \mathrm{Log}_3\, n + \ldots + (1+\mathrm{A})\,\mathrm{Log}_p\, n)$$
$$> (n+1)\left(\mathrm{Log}_2(n+1) + \mathrm{Log}_2(n+1) + \ldots + \left(1 + \frac{\mathrm{A}}{2}\right)\mathrm{Log}_p(n+1)\right).$$

D'où le résultat.

On a aisément le corollaire :

COROLLAIRE 2. Lim Sup $u\tau_u\,(\mathrm{Log}_2\,(1/u))^{-1} = 1$ presque sûrement.

Preuve. — C'est la conséquence du théorème 4, de la proposition 11, et du fait que $\tau_{\varepsilon_n} \geqslant \tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}}$.

On obtient par des méthodes plus détournées une minoration presque sûre de τ_u :

THÉORÈME 4.

$$\operatorname*{Lim\,Inf}_{u\to 0}\, u\tau_u\,(\mathrm{Log}\,(1/u))\,(\mathrm{Log}_2\,(1/u))\,\ldots\,(\mathrm{Log}_p\,(1/u))^{1+\mathrm{A}} = \infty,$$

presque sûrement, $\forall \mathrm{A} > 0$.

Preuve. — Montrons tout d'abord que la propriété est vraie pour $\varepsilon_n = 1/a^n$, $a > 1$. Soit

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{P}(\tau_{\varepsilon_n} \leqslant r) = 1 - \left(1 - \frac{1}{a^n}\right)^r.$$

Posons

$$r_n = \frac{a^n}{n\,(\mathrm{Log}\,n)\,(\mathrm{Log}_2\,n)\,\ldots\,(\mathrm{Log}_p\,n)^{1+\mathrm{A}}}.$$

Il est clair que $\Sigma \mathrm{R}_n < \infty$. D'après Borel-Cantelli, on en déduit que, presque sûrement, au-delà d'un certain rang,

$$\tau_{\varepsilon_n} > \frac{a^n}{n\,(\mathrm{Log}\,n)\,(\mathrm{Log}_2\,n)\,\ldots\,(\mathrm{Log}_p\,n)^{1+\mathrm{A}}}$$

Maintenant, $n = (\mathrm{Log}\,(1/\varepsilon_n))/\,\mathrm{Log}\,a$, $\mathrm{Log}\,n \sim \mathrm{Log}_2\,(1/\varepsilon_n)$, etc. De plus,

$$\tau_{\varepsilon_{\left[\frac{\mathrm{Log}\,(1/u)}{\mathrm{Log}\,a}\right]}} \leqslant \tau_u \leqslant \tau_{\varepsilon_{\left[\frac{\mathrm{Log}\,(1/u)}{\mathrm{Log}\,a}\right]}}$$

On constate alors que, presque sûrement, pour u assez petit :

$$\tau_u \geqslant \frac{u\,\mathrm{Log}\,a}{a\,\mathrm{Log}\,(1/u)\,\mathrm{Log}_2\,(1/u)\,\ldots\,(\mathrm{Log}_p\,(1/u))^{1+\mathrm{A}}(1 + \mathrm{Cte})}$$

Le choix de $\mathrm{A} > 0$ étant arbitraire, on obtient le résultat.

Le corollaire suivant nous sera utile :

COROLLAIRE 2. $\forall \mathrm{A} > 0$, presque sûrement pour u assez petit :

$$\mathrm{Log}\,(1/u) - (1 + \mathrm{A})\,\mathrm{Log}_2\,(1/u) \leqslant \mathrm{Log}\,\tau_u \leqslant \mathrm{Log}\,(1/u) + (1 + \mathrm{A})\,\mathrm{Log}_3\,(1/u).$$

On peut encore préciser la loi limite asymptotique de τ_u :

PROPOSITION 12. $u\tau_u$ converge en loi, quand $u \to 0$, vers une loi exponentielle de moyenne 1.

Preuve. — On a $P(u\tau_u > v) \sim (1-u)^{v/u} \to e^{-v}$.

Nous verrons plus loin d'autres applications de ces résultats.

7. Convergence asymptotiquement normale de S_n

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer :

THÉORÈME 5. $\dfrac{S_n - \operatorname{Log} n}{\sqrt{2 \operatorname{Log} n}} \to N(0, 1)$ en loi.

Preuve. — Par le corollaire 2, pour $\varepsilon_n = 1/n$,

$$P\left[\frac{S_n - \operatorname{Log} n}{\sqrt{2 \operatorname{Log} n}} \leqslant u\right] \sim P\left[\frac{S_n - \operatorname{Log} n}{\sqrt{2 \operatorname{Log} n}} \leqslant u \,\middle|\, \tau_{\varepsilon_{\left[\frac{n}{(\operatorname{Log}_2 n)^{1+A}}\right]}} \leqslant n \leqslant \tau_{\varepsilon_{[n(\operatorname{Log} n)^{1+A}]}}\right]$$

Par conséquent, comme :

$$P\left[\frac{S_{\tau_{\varepsilon_{[n/(\operatorname{Log}_2 n)^{1+A}]}}} - \operatorname{Log} n}{\sqrt{2 \operatorname{Log} n}} \leqslant u\right] \sim P\left[\frac{S_{\tau_{\varepsilon_{[n(\operatorname{Log} n)^{1+A}]}}} - \operatorname{Log} n}{\sqrt{2 \operatorname{Log} n}} \leqslant u\right]$$

En utilisant la proposition 9, on aboutit au résultat.

8. Moments de S_n

On obtient des résultats très précis par la remarque suivante. Si $\varepsilon_n = 1/n$.

1) Si $\tau_{\varepsilon_n} \geqslant n$, $S_n \leqslant S_{\tau_{\varepsilon_n}}$.

2) Si $\tau_{\varepsilon_n} < n$, $S_n = S_{\tau_{\varepsilon_n}} + \displaystyle\sum_{m=\tau_{\varepsilon_n}+1}^{n} \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_m)$.

Dans ce dernier cas, $S_n \leqslant S_{\tau_{\varepsilon_n}} + n\varepsilon_n$.

On a donc toujours : $S_n \leqslant S_{\tau_{\varepsilon_n}} + 1$.

D'autre part :

1) Si $\tau_{\varepsilon_n} \leqslant n$ $S_n \geqslant S_{\tau_{\varepsilon_n}}$.

2) Si $\tau_{\varepsilon_n} > n$, $S_n = S_{\tau_{\varepsilon_n}} - \displaystyle\sum_{m=n+1}^{\tau_{\varepsilon_n}} \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_m)$.

Remarquons de plus que, dans ce dernier cas, $\text{Inf}(X_1, \ldots, X_m)$ suit la même loi que $(1 - \varepsilon_n)\,\text{Inf}(Z_1, \ldots, Z_m) + \varepsilon_n$, $\{ Z_n, n \geqslant 1 \}$ étant une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniformément distribuées sur $[0, 1]$.

On en déduit :

THÉORÈME 6. $E((S_n - S_{\tau_{\varepsilon_n}})^p) = 0(1)$, $\forall p \geqslant 1$.

Preuve. — Tout d'abord, considérons $\sum_{m=n+1}^{N} \text{Inf}(X_1, \ldots, X_m) = S_N$. On montre aisément comme M. Grenander [3], que

$$E(S_N{}^p) = 0\,[\text{Log}\, N - \text{Log}\,(n + 1)].$$

D'autre part

$$E\,(\text{Log}\, \tau_{\varepsilon_n} - \text{Log}\, n \mid \tau_{\varepsilon_n} > n) \leqslant E((\tau_{\varepsilon_n} - n)/n \mid \tau_{\varepsilon_n} > n)$$

cette dernière expression étant bornée, on obtient le résultat, compte tenu des majorations et minorations précédentes.

Nous pouvons maintenant écrire :

COROLLAIRE 3. $V(S_n) - 2\,\text{Log}\, n = 0(1)$.

En effet, il suffit de constater que pour $\varepsilon_n = 1/n$,

$$V(S_{\tau_{\varepsilon_n}}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i + 1} = 0(1).$$

et c'est une conséquence directe des propositions 7 et du lemme 1.

CHAPITRE II

Soient $\{ Y_n, n \geqslant 1 \}$, suite de v. a. indépendantes, positives, de même loi définie par sa fonction de répartition F. On supposera que, $\forall \varepsilon > 0$, $P(Y < \varepsilon) > 0$.

On pose $G(t) = \text{Inf}\, \{ x \geqslant 0 \mid F(x) \geqslant t \}$. Il est clair que G est une fonction monotone non décroissante, et que si $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ est une suite de v. a. indépendantes uniformément distribuées sur $[0, 1]$, $\{ G(X_n), n \geqslant 1 \}$ est identique en loi à $\{ Y_n, n \geqslant 1 \}$.

L'étude du comportement de

$$S_n = Y_1 + \text{Inf}\,(Y_1, Y_2) + \ldots + \text{Inf}\,(Y_1, \ldots, Y_n)$$

est équivalente à celle de

$$S_n = G(X_1) + G(\mathrm{Inf}(X_1, X_2)) + \dots + G(\mathrm{Inf}(X_1, \dots, X_n)).$$

Le but de ce qui suit est d'appliquer à ces sommes les méthodes et les résultats du chapitre précédent, afin d'en déduire le comportement de S_n en fonction de G.

Dans toute la suite, nous poserons : $\varepsilon_n = 1/n$, $G \leqslant 1$,

$$S_n = G(X_1) + G(\mathrm{Inf}(X_1, X_2)) + \dots + G(\mathrm{Inf}(X_1, \dots, X_n))$$

$$V_n = \sum_{m=1}^{n} (\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})G(\varepsilon_{m+1}), \qquad V'_n = \sum_{m=1}^{n} (\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})G(\varepsilon_m)$$

Toutes les autres notations sont celles du chapitre précédent.

1. Convergence de V_n et V'_n

PROPOSITION 12.

$$\begin{aligned} &\forall n \geqslant 1, && -2 + V_{n-1} \leqslant S_{\tau_{\varepsilon_n}} - S_{\tau_{\varepsilon_1}} \leqslant V'_{n-1} \\ &\forall m \in [\tau_{\varepsilon_n}, \tau_{\varepsilon_{n+1}}], && -2 + V_{n-1} \leqslant S_m - S_{\tau_{\varepsilon_1}} \leqslant V'_n. \end{aligned}$$

Preuve. — Identique à celle de la proposition 6.

PROPOSITION 13.

$$M_n = E(V_n) = \sum_{m=1}^{n} G\left(\frac{1}{m+1}\right), \qquad M'_n = E(V'_n) = \sum_{m=1}^{n} G\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$D_n^2 = V(V_n) = \sum_{m=1}^{n} 2mG^2\left(\frac{1}{m+1}\right), \qquad D_n'^2 = V(V'_n) = \sum_{m=1}^{n} 2mG^2\left(\frac{1}{m}\right).$$

Preuve. — C'est une conséquence directe de la proposition 4.

Comme $G(x)$ décroît (au sens large) vers 0, lorsque x décroît vers 0, étant donné que $V'_n - V_n$ est la somme de n v. a. positives, et que la suite $M'_n - M_n$ est alors bornée, on en déduit que :

PROPOSITION 14. $V'_n - V_n$ converge presque sûrement vers une v. a. finie, d'espérance finie.

Preuve. — Il est clair que $M'_n - M_n = G(1) - G\left(\frac{1}{n+1}\right)$, d'où le résultat.

Considérons maintenant $M_n = \sum_{m=1}^{n} G(1/m)$. G étant décroissante au sens large vers 0, on obtient aisément que $M_n - \int_1^n G(1/x)dx = 0(1)$. Posons $h(u) = \frac{G(e^{-u})}{e^{-u}}$, on obtient aisément par des changements de variable, que si $H(u) = \int_0^u h(u)du$,

$$M_n - H\,(\text{Log}\,n) = 0(1), \qquad \text{et} \qquad M'_n - H\,(\text{Log}\,n) = 0(1).$$

On en déduit aisément le lemme :

LEMME 2. — Si $\underset{n\infty}{\text{Lim}}\, H(n) = \infty$. Pour que $S_{\tau_{\varepsilon_n}}/E(S_{\tau_{\varepsilon_n}}) \to 1$, presque sûrement, respectivement en probabilité, il faut et il suffit que $V_n/E(V_n)$ ou $V'_n/E(V'_n) \to 1$, presque sûrement, respectivement en probabilité. De plus, $E(S_{\tau_{\varepsilon_n}}) - H\,(\text{Log}\,n) = 0(1)$.

Preuve. — C'est une conséquence directe de la proposition 14, et de l'inégalité :

$$\frac{-2 + V_n}{E(V'_n)} \leqslant \frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{E(S_{\tau_{\varepsilon_n}})} \leqslant \frac{V'_n}{E(V_n) - 2}$$

La condition $H(n) \to \infty$, équivaut à $E(S_n) \to \infty$.

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir des conditions de convergence de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$.

2. Convergence de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$

THÉORÈME 7. — 1) Si $\underset{u\infty}{\text{Lim}}\, H(u) < \infty$, S_n croît presque sûrement vers une limite finie d'espérance finie.

2) Si $\underset{u\infty}{\text{Lim}}\, H(u) = \infty$,

a) Si

$$(2,2,1) \quad \underset{n\infty}{\text{Lim}} \frac{\sum_{m=1}^{n} mG(1/m)^2}{\left[\sum_{m=1}^{n} G(1/m)\right]^2} = 0, \quad \text{alors} \quad \frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{H\,(\text{Log}\,n)} \to 1 \text{ en probabilité.}$$

b) Si

$$(2,2,2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mG(1/m)^2}{\left[\sum_{i=1}^{m} G(1/i)\right]^2}, \quad \text{alors} \quad \frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{H\,(\text{Log}\,n)} \to 1 \text{ presque sûrement.}$$

Preuve. — 1) Si H(n) est borné, E(S_n) l'est aussi. Comme S_n est monotone, le résultat s'en déduit.

2) On applique à V_n, en *a*) l'inégalité de Tchébicheff, en *b*) un critère de Kolmogoroff (par exemple [7], p. 405). Il suffit alors d'utiliser le lemme 2, compte tenu de la proposition 4.

Ce critère sur des séries se traduit aisément sur des intégrales. En effet, on a déjà approché $\sum_{m=1}^{n} G(1/m)$ par H (Log n). Le même changement de variable peut s'utiliser pour comparer $\sum_{m=1}^{n} mG(1/m)^2$ à $\int_0^{\mathrm{Log}\, n} h^2(u)du$. La fonction $mG(1/m)$ n'étant cependant pas nécessairement monotone, on ne peut faire directement la comparaison. On obtient cependant que :

$$\left| \int_0^{\mathrm{Log}\, n} h^2(u)du - \sum_{m=1}^{n} mG(1/m)^2 \right| \leqslant \mathrm{Cte} + \sum_{m=1}^{n} G(1/m)^2.$$

De même :

$$\int_0^{\mathrm{Log}\, n} h^p(u)du - \sum_{m=1}^{n} m^{p-1}G(1/m)^p = 0\left[\sum_{m=1}^{n} m^{p-2}G(1/m)^p\right].$$

On en déduit, en posant pour $p > 1$, $H_p(u) = \int_0^u h^p(u)du$:

THÉORÈME 7 *bis*. — *a*) (2,2,1) $\Leftrightarrow$ $H_2(u)/H^2(u) \to 0$.

b) (2,2,2) $\Rightarrow$ $\int_0^{\infty} h^2(u)/H^2(u)du < \infty$.

3. Convergence asymptotique de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$

La proposition 14 nous permet aisément, compte tenu des équivalents de la proposition 5, d'appliquer à $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$ la méthode que nous avons utilisée pour la démonstration de la proposition 9. Il suffira d'y remplacer la proposition 6 par la proposition 14. On obtient :

THÉORÈME 8. — Si $\exists p > 2$, tel que

$$(2,3,1)\quad \operatorname*{Lim}_{n\infty} \frac{\left[\sum_{m=1}^{n} m^{p-1}G(1/m)^p\right]^{1/p}}{\left[\sum_{m=1}^{n} m \quad G(1/m)^2\right]^{1/2}} = 0, \qquad \frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}} - H\,(\mathrm{Log}\, n)}{\sqrt{2H_2\,(\mathrm{Log}\, n)}} \to N(0,\, 1)$$

en loi.

On remarquera ici que H_2 (Log $(n + 1)$) $\sim$ H_2 (Log n), ou, ce qui est équivalent :

$$\frac{mG(1/m)^2}{\sum_{i=1}^{m} iG(1/i)^2} \to 0,$$

car on peut le majorer par

$$\frac{m}{\sum_{i=1}^{m} i} \to 0.$$

D'autre part, de même que pour le théorème 7 *bis*, on obtient aisément :

THÉORÈME 8 *bis*. $(2,3,1) \Leftrightarrow \exists p > 2, \lim_{u\infty} \frac{H_p(u)}{H(u)^p} = 0.$

4. Convergence dégénérée de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$

En ce qui concerne les moments de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$, par les encadrements de la proposition 12, et la proposition 13, on obtient aisément que :

PROPOSITION 15. $E(S_{\tau_{\varepsilon_n}}) - H$ (Log n) $= 0(1)$,

$$V(S_{\tau_{\varepsilon_n}}) - 2H_2 \text{ (Log } n) = 0\left[\sum_{m=1}^{n} G\left(\frac{1}{n}\right)^2\right].$$

Le but de ce paragraphe est l'étude du comportement en loi de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}/E(S_{\tau_{\varepsilon_n}})$ ou, ce qui revient au même, de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}/H$ (Log n). Pour montrer l'existence d'une limite, on est amené à faire l'hypothèse que nous supposerons vérifiée ici :

(2,4,1) $$\lim_{u\infty} \frac{k\,!\, H_k(u)}{H(u)^k} = A_k$$

existe et $A_k > 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, H(u) \to \infty$.

Considérons alors $W_n = (\tau_{\varepsilon_n} - \tau_{\varepsilon_{n-1}})G(\varepsilon_{n-1})$, et développons, utilisant l'indépendance des W, $E(V_n^p)$:

$$E(V_n^p) = \sum_{r_1 + \ldots + r_i = p} \sum_{m_j \text{distincts}} \frac{p\,!}{r_1\,! \ldots r_i\,! \, S(r_1, \ldots, r_j)} E(W_{m_1}^{r_1}) \ldots E(W_{m_j}^{r_j}),$$

$S(r_1, \ldots, r_j)$ désignant le nombre de permutations laissant $r_1, \ldots, r_j$

invariant. Or, par la proposition 5, $E(W_m^r) \sim r\,!\, m^{r-1} G(1/m)^r$. On en déduit que :

$$\sum_{m_j \neq m_k} E(W_{m_j}^{r_j}) E(W_{m_k}^{r_k})$$

$$\sim \left[\sum_{m_j} E(W_{m_j}^{r_j})\right]\left[\sum_{m_k} E(W_{m_k}^{r_k})\right] \sim r_j\,!\, r_k\,!\, H_{r_j}(\mathrm{Log}\, n)\, H_{rk}(\mathrm{Log}\, n),$$

car :

$$\sum_m E(W_m^{r_j}) E(W_m^{r_k}) \sim r_j\,!\, r_k\,! \sum_m m^{r_j + r_k - 2} G(1/m)^{r_j + r_k} = 0\left[\sum_m E(W_m^{r_j + r_k})\right].$$

On utilise alors l'hypothèse (2,4,1). De même :

$$\sum_{m_i \text{distincts}} E(W_{m_1}^{r_1}) \ldots E(W_{m_i}^{r_i}) \sim r_1\,! \ldots r_i\,!\, H_{r_1}(\mathrm{Log}\, n) \ldots H_{r_i}(\mathrm{Log}\, n).$$

On en déduit en posant $\forall p = 1, 2, \ldots$

$$(2,4,2) \quad B_p = \sum_{r_1 + \ldots + r_i = p} \frac{p\,!}{r_1\,! \ldots r_i\,!\, S(r_1, \ldots, r_i)} A_{r_1} \ldots A_{r_i} = (A + A)^{\{p\}}$$

avec une notation de puissance symbolique.

THÉORÈME 9. — (2,4,1) étant réalisé, il existe une loi L ayant des moments d'ordre p égaux à B_p, et définis par (2,4,2), $p = 1, 2, \ldots$, et telle que :

$$\frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{H(\mathrm{Log}\, n)} \to L \quad \text{en loi.}$$

Preuve. — On applique le théorème de convergence des moments de Fréchet et Shohat ([6], p. 185). En remplaçant $G(\varepsilon_n)$ par $G(\varepsilon_{n+1})$ dans ce qui précède, on obtient le même résultat, et les encadrements de la proposition 12 montrent bien que :

$$\lim_{n\infty} E\left\{\left[\frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{H(\mathrm{Log}\, n)}\right]^p\right\}$$

$$= \lim_{n\infty} E\left\{\left[\frac{V_n}{H(\mathrm{Log}\, n)}\right]^p\right\} = \lim_{n\infty} E\left\{\left[\frac{V'_n}{H(\mathrm{Log}\, n)}\right]^p\right\} = B_p.$$

On obtient par exemple :

$$A_1 = 1, \quad B_1 = A_1, \quad B_2 = A_1^2 + A_2, \quad B_3 = A_1^3 + 3A_1A_2 + A_3, \text{ etc.}$$

On remarque que si $A_n = 0$, $n \geqslant 2$, on a bien $B_n = 1$ (convergence en probabilité).

En toutes circonstances on a la propriété suivante :

THÉORÈME 10. $\underset{n\infty}{\text{Lim}}\,\text{Inf}\,[V(S_{\tau_{\varepsilon_n}})/E(S_{\tau_{\varepsilon_n}})^2]\,\text{Log}\,n \geqslant 2$, si $\underset{u\infty}{\text{Lim}}\,H(u) = \infty$.

Preuve. — Il suffit de constater que $[H_2(\text{Log}\,n)/H(\text{Log}\,n)^2\,\text{Log}\,n \geqslant 1$ par une majoration de Schwarz. On applique ensuite la proposition 15.

5. Encadrements de $S_{\tau_{\varepsilon_n}}$

Considérons une suite croissante positive $\{ a_n, n \geqslant 1 \}$. On a :

$$\frac{V'_n}{a_n} = \frac{1}{a_n}\sum_{m=1}^{n}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})G(1/m) \leqslant \sum_{m=1}^{n}(\tau_{\varepsilon_{m+1}} - \tau_{\varepsilon_m})G(1/m)/a_m.$$

L'espérance de cette dernière somme est $\sum_{m=1}^{n} G(1/m)/a_m$. Posons maintenant : $a_m = mG(1/m)(\text{Log}\,m)(\text{Log}_2\,m)\ldots(\text{Log}_p\,m)^{1+A}$, $A > 0$, et faisons l'hypothèse que $mG(1/m)$ est une suite croissante (donc *à fortiori* a_n). On obtient que $\sum_{m=1}^{n} G(1/m)/a_m$ est fini, donc que presque sûrement $\frac{V'_n}{a_n}$ est borné supérieurement.

D'autre part, on a toujours $S_{\tau_{\varepsilon_n}} \geqslant (\tau_{\varepsilon_n} - 1)G(1/n)$. Par le théorème 4, on en déduit que, compte tenu des encadrements de la proposition 12 :

THÉORÈME 11. — Si $mG(1/m)$ est une suite croissante, $\forall A > 0$, presque sûrement pour n assez grand, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{(\text{Log}\,n)(\text{Log}_2\,n)\ldots(\text{Log}_p\,n)^{1+A}} \leqslant \frac{S_{\tau_{\varepsilon_n}}}{nG(1/n)} \leqslant (\text{Log}\,n)(\text{Log}_2\,n)\ldots(\text{Log}_p\,n)^{1+A}$$

Remarquons que les hypothèses utilisées ici peuvent être facilement généralisées, en particulier au cas où :

(2,5,1) $\qquad \exists K > 0, \quad \forall n, \quad \forall m \leqslant n, \quad mG(1/m) \leqslant KnG(1/n)$

sans modification de démonstration. Cette condition peut encore s'exprimer sur F ou h :

(2,5,1) *bis* $\quad \exists K > 0, \quad \forall t_0, \quad \forall t \geqslant t_0, \quad \dfrac{F(t)}{t} \geqslant K \dfrac{F(t_0)}{t_0}$

(2,5,1) *ter* $\quad \exists K > 0, \quad \forall u_0, \quad \forall u \leqslant u_0, \quad u \geqslant 0, \quad h(u) \leqslant K h(u_0)$

6. Convergence de S_n

Nous déduirons la convergence de S_n des résultats du théorème 7 et du corollaire 2 :

COROLLAIRE 4. — 1) Si $\operatorname*{Lim}_{u \infty} \dfrac{H(u + \operatorname{Log} u)}{H(u)} = 1$, et si (2,2,2) est vérifié, alors :

$$S_n/H(\operatorname{Log} n) \to 1 \qquad \text{presque sûrement.}$$

2) S'il existe une suite croissant vers l'infini $\{ u_n \}$, telle que :

$$\operatorname*{Lim}_{n \infty} \frac{H(\operatorname{Log} n + u_n)}{H(\operatorname{Log} n)} = 1,$$

et si (2,2,1) est vrai, alors :

$$S_n/H(\operatorname{Log} n) \to 1 \qquad \text{en probabilité.}$$

Preuve. — Il suffit d'appliquer le théorème 7 et le corollaire 2, en encadrant presque sûrement S_n par $S_{\tau_{\varepsilon n/(\operatorname{Log}_2 n)(1+A)}}$ et $S_{\tau_{\varepsilon n(\operatorname{Log} n)^{1+A}}}$. Le résultat s'en déduit par équivalents.

En ce qui concerne la convergence en probabilité, il suffit d'appliquer la même propriété en utilisant le fait que $\tau_{\varepsilon_n} u_n \to \infty$, et $\tau_{\varepsilon_n}/u_n \to 0$ en probabilité.

7. Convergence asymptotiquement normale de S_n

Nous déduisons ici le résultat du théorème 8 et du corollaire 2 :

COROLLAIRE 5. — S'il existe une suite croissant vers l'infini $\{ u_n \}$, telle que :

$$\operatorname*{Lim}_{n \infty} \frac{H_2(\operatorname{Log} n + u_n)}{H_2(\operatorname{Log} n)} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname*{Lim}_{n \infty} \frac{H(u_n + \operatorname{Log} n) - H(\operatorname{Log} n)}{\sqrt{H_2(\operatorname{Log} n)}} = 0,$$

alors, si (2,3,1) est vrai :

$$\frac{S_n - H(\text{Log } n)}{\sqrt{2H_2(\text{Log } n)}} \to N(0, 1) \quad \text{en loi.}$$

Preuve. — Identique à celle du corollaire 4, par encadrements.

8. Encadrements de S_n

Il suffit d'appliquer les théorèmes 4, 3 et 11 pour obtenir des encadrements de S_n. On a :

COROLLAIRE 6. — Si (2,5,1) est vrai, presque sûrement au-delà d'un certain rang :

$$nG(1/n\,(\text{Log } n) \ldots (\text{Log}_p\, n)^{1+A}) \leqslant S_n \leqslant \frac{n\,(\text{Log } n) \ldots (\text{Log}_p\, n)^{1+A}G\,((\text{Log}_2\, n)/n)}{\text{Log}_2\, n}$$

9. Cas particuliers :

1) $F(t) \sim f_0 t^a$, $0 < a$. Dans ce cas, $G(u) \sim f_0^{-1/a}u^{1/a}$, $h(u) \sim f_0^{-1/a}e^{(1-1/a)u}$, $H_p(u) \sim f_0^{-p/a}\dfrac{e^{p(1-1/a)u}}{p(1-1/a)}$ si $a > 1$, $H_p(u) \sim f_0^{-p}u$ si $a = 1$, $H_p(u) = 0(1)$ si $a < 1$.

On en déduit que :

a) Si $a < 1$, S_n croît presque sûrement vers une limite finie.

b) Si $a = 1$, $\dfrac{S_n}{\text{Log } n} \to \dfrac{1}{f_0}$ p. s. et $\dfrac{S_n - H(\text{Log } n)}{\sqrt{2\,\text{Log } n}}\, f_0 \to N(0, 1)$ en loi.

c) Si $a > 1$, le théorème 9 s'applique : $S_{\tau_{\varepsilon_n}} \Big/ \dfrac{n^{1-1/a}}{1 - 1/a} \to L$ en loi. De plus, par le théorème 11 : presque sûrement, au-delà d'un certain rang :

$$n^{1-1/a}(\text{Log } n) \ldots (\text{Log}_p\, n)^{1+A-1/a} \leqslant S_n \leqslant n^{1-1/a}(\text{Log } n)(\text{Log}_2\, n)^{1/a} \ldots (\text{Log}_p\, n)^{1+A}.$$

2) Si $0 < A \leqslant \text{Lim Inf}\,(F(t)/t)) \leqslant \text{Lim Sup}\,(F(t)/t)) \leqslant B < \infty$.

$$\frac{S_n}{H(\text{Log } n)} \to 1 \text{ p. s.} \quad \text{et} \quad \frac{S_n - H(\text{Log } n)}{\sqrt{2H_2(\text{Log } n)}} \to N(0, 1) \text{ en loi.}$$

3) Si $F(t) \sim f\,t\,(\text{Log}\,(1/t))^a$, $G(u) \sim \dfrac{u}{f}(\text{Log}\,(1/u))^{-a}$, $h(u) \sim u^a/f$.

a) Si $a < -1$, S_n croît vers une limite finie presque sûrement.

b) Si $a \geqslant -1$, $\dfrac{S_n}{H(\operatorname{Log} n)} \to 1$ p. s., $H(\operatorname{Log} n) \sim \dfrac{(\operatorname{Log} n)^{a+1}}{f(a+1)}$ si $a > -1$.

c) Si $a \geqslant -1/2$, $\dfrac{S_n - H(\operatorname{Log} n)}{\sqrt{2H_2(\operatorname{Log} n)}} \to N(0, 1)$ en loi.

CHAPITRE III

0. Introduction

On considère maintenant une suite $\{X_n, n \geqslant 1\}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi concentrée sur (A, B). Le but de ce qui suit est d'appliquer les résultats obtenus dans ce qui précède à l'estimation de A et à l'étude du comportement de la distribution de X au voisinage de A.

Pour un échantillon de taille n, en ce qui concerne l'estimation de A, on est naturellement mené à prendre en considération $\operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)$ qui converge vers A en décroissant presque sûrement. Cet estimateur présente cependant l'inconvénient (on supposera A et B finis) d'avoir un biais d'autant plus important que $F_X(t + A)$ converge plus rapidement vers 0 lorsque t décroît vers 0. Pour fixer les idées, lorsque $F_X(t + A) \sim f_0 t^a$, on montre assez facilement que

$$E(\operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)) \sim \frac{1}{a f_0^{1/a}} \Gamma(1/a) n^{-1/a}$$

(voir [9], p. 58). Pour obtenir une meilleure précision, il est nécessaire d'étudier le comportement de $F_X(A + t)$ d'une part, et d'autre part d'en déduire des estimateurs meilleurs que $\operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)$; les résultats que nous avons obtenus permettent d'obtenir ces améliorations, et en particulier des intervalles de confiance, avec une précision qui est la meilleure possible.

1. Intervalles de confiance

On conserve les notations des chapitres précédents en posant $F(u) = F_X(A + u)$, $G(u) = \operatorname{Inf}\{x \geqslant 0 \mid F(x) \geqslant t\}$, etc.

Utilisant tout d'abord les théorèmes 4 et 3, on obtient aisément que, presque sûrement au-delà d'un certain rang :

$$(3,1,1)\quad A + G\left(\frac{1}{n\,(\mathrm{Log}\,n)\ldots(\mathrm{Log}_p\,n)^{1+R}}\right) \leqslant \mathrm{Inf}\,(X_1,\ldots,X_n) \leqslant A + G\left(\frac{\mathrm{Log}_2\,n + \ldots + (1+R)\,\mathrm{Log}_p\,n}{n}\right)$$

Connaissant F au voisinage de 0, on en déduit les estimateurs :

DÉFINITION 1.

$$E_1(n) = \mathrm{Inf}\,(X_1,\ldots,X_n) - G\left(\frac{1}{n\,(\mathrm{Log}\,n)\ldots(\mathrm{Log}_p\,n)^{1+R}}\right)$$

$$E_2(n) = \underset{p_n\leqslant m\leqslant n}{\mathrm{Inf}}\,[E_1(m)],\ \text{avec } p_n \to \infty.$$

$$E_3(n) = \underset{r_n\leqslant m\leqslant n}{\mathrm{Sup}}\,[\mathrm{Inf}\,(X_1,\ldots,X_n) - G(c_n/n)],\ \text{avec } 0 < \gamma \leqslant c_n \leqslant \delta < \infty.$$

$$E_4(n) = \underset{s_n\leqslant m\leqslant n}{\mathrm{Sup}}\left[\mathrm{Inf}\,(X_1,\ldots,X_n) - G\left(\frac{\mathrm{Log}_2\,n}{n}\right)\right]$$

Le choix des suites r_n et s_n est le suivant :

$$r_n = n\left[\frac{\mathrm{Log}_2\,n}{\mathrm{Log}\,n}\right]^{1+\alpha}\left[\frac{1+\alpha}{e}\right]^{1+\alpha},$$

$$s_n = \exp\left[(\mathrm{Log}\,n)\left[\frac{\mathrm{Log}_3\,n}{\mathrm{Log}_2\,n}\right]^{1+\alpha}\left[\frac{1+\alpha}{e}\right]^{1+\alpha}\right] \qquad \alpha > 0.$$

THÉORÈME 12. — 1) Presque sûrement pour n assez grand :

$$A \leqslant E_2(n) \leqslant E_1(n) < \mathrm{Inf}\,(X_1,\ldots,X_n).$$

2) Presque sûrement pour n assez grand :

$$a)\ A \leqslant E_4(n) \leqslant G\left(\frac{\mathrm{Log}_2\,n + (1+\varepsilon)\,\mathrm{Log}_3\,n}{n}\right) - G\left(\frac{\mathrm{Log}_2\,n}{n}\right) + A$$

$$b)\ A \leqslant E_3(n) \leqslant G\left(\frac{(1+\varepsilon)\,\mathrm{Log}_2\,n}{n}\right) - G(\gamma/n) + A$$

Par exemple, lorsque $F_X(t + A) = f_0 t^a$, on obtient que :

$$A \leqslant E_4(n) \leqslant f_0^{-1/a}\left[\frac{\mathrm{Log}_2\,n}{n}\right]^{(1/a)-1}(1/a)\left[\frac{\mathrm{Log}_3\,n}{n}\right]\ (\mathrm{Cte})$$

$$A \leqslant E_3(n) \leqslant f_0^{-1/a}\left[\frac{\mathrm{Log}_2\,n}{n}\right]^{(1/a)}\ (\mathrm{Cte})$$

Preuve. — C'est la conséquence directe des théorèmes 3 et 4, et de la proposition 11. La seule difficulté consiste dans le cas de E_3 et E_4 à montrer que presque sûrement dans les intervalles (r_n, n) ou (s_n, n), les bornes du théorème 3 aux ordres correspondants dont atteintes. En fonction de l'indépendance des W_i, cela revient, comme pour la proposition 11 à utiliser le lemme de Borel-Cantelli. Il ne reste plus qu'à montrer les majorations presque sûres, qui s'obtiennent aisément en remarquant que $\operatorname{Log}\operatorname{Log} r_n \sim \operatorname{Log}\operatorname{Log} n$ et $\operatorname{Log}_3 s_n \sim \operatorname{Log}_3 n$.

On voit qu'on peut ainsi arriver de même à construire une famille d'estimateurs de A basés sur $\operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)$, de convergence de plus en plus rapide.

Notons également que, par exemple dans le cas où $F_X(t + A) \sim f_0 t^a$, $\operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) - G(c_n/n)$ englobe les estimateurs sans biais de A.

2. Étude du comportement de $F_x(A + t)$ au voisinage de 0

Les résultats du chapitre précédent, et principalement les théorèmes 7, 8, 9, 10 et surtout le théorème 11 permettent d'obtenir des renseignements sur ce comportement là où les estimateurs classiques qui ne convergent convenablement que loin de A.

Sans rentrer dans toutes les hypothèses particulières possibles, une application intéressante est obtenue en supposant que $F_X(A + t) \sim f_0 t^a$, lorsque t décroît vers 0. En utilisant simultanément le corollaire 6 et l'encadrement (2,6,1), on obtient en supposant que (2,5,1) est vrai :

COROLLAIRE 7. — Si $a > 1$, presque sûrement au-delà d'un certain rang :

$$1 - (1/a) - (1 + \varepsilon)\frac{\operatorname{Log}_2 n}{\operatorname{Log} n} \leqslant \frac{\operatorname{Log}(S_n - n \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_{n(\log n)(\log_2 n)}1 + R))}{\operatorname{Log} n}$$

$$1 + (1/a) + (1 + \varepsilon)\frac{\operatorname{Log}_2 n}{\operatorname{Log} n}$$

De même, lorsque $a = 1$, on obtient aisément, par une légère amélioration de la démonstration de la proposition 8, en supposant par exemple que F_X est deux fois différentiable à droite au point A.

COROLLAIRE 8. — Presque sûrement au-delà d'un certain rang :

$$f_0 - \sqrt{\frac{(\operatorname{Log}_2 n) \ldots (\operatorname{Log}_p n)^{1+\varepsilon}}{\operatorname{Log} n}} \leqslant \frac{S_n - n \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)}{\operatorname{Log} n}$$

$$\leqslant f_0 + \sqrt{\frac{(\operatorname{Log}_2 n) \ldots (\operatorname{Log}_p n)^{1+\varepsilon}}{\operatorname{Log} n}}$$

Compte tenu de ce qui précède, la convergence étant presque sure, on en déduit aisément des estimateurs améliorés de A sans connaissance précise de F, par exemple :

DÉFINITION 2. — Si $F_X(A + t) \sim f_0 t^a$, on posera, si $a > 1$:

$$\begin{aligned} E_5(n) = {} & \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) \\ & - \left[\frac{1}{n(\operatorname{Log} n) \ldots (\operatorname{Log}_p n)^{1+R}}\right]^{\left[1 - \frac{\operatorname{Log}(S_{n/(\log n)(\log_2 n)^{1+R}} - n \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)/(\operatorname{Log} n)(\operatorname{Log}_2 n))}{\operatorname{Log} n} + (1+\varepsilon)\frac{\operatorname{Log}_2 n}{\operatorname{Log} n}\right]} \end{aligned}$$

Si $F(A + t) \sim f_0 t$, on posera de même, en supposant les conditions du corollaire 8 vérifiées :

$$E_6(n) = \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n) - \frac{1}{n(\operatorname{Log} n) \ldots (\operatorname{Log} n)^{1+R}} \left[\frac{S_n - n \operatorname{Inf}(X_1, \ldots, X_n)}{\operatorname{Log} n} + \frac{(\operatorname{Log}_2 n) \ldots (\operatorname{Log}_p n)}{\operatorname{Log} n}\right]$$

On déduit de même que pour le théorème 12 les propriétés de E_5, E_6. On peut de même construire sur ce modèle des estimateurs adaptés à chaque cas particulier.

Remarque. — Tous ces résultats se généralisent aisément sans modification importante pour l'estimation dans des espaces métriques quelconques.

Nous rectifions ici quelques imprécisions d'hypothèses dans les résultats de [*1*] et [*2*].

Il est tentant de vouloir estimer la densité à l'aide de minimas, par exemple en posant $Z_n = |X_n - x|$ pour $f_X(x)$. Nous avons obtenus des résultats qui montrent clairement (théorème 3, corollaire 2, et proposition 12) qu'il est inutile de chercher des estimateurs de la forme

$$[(\operatorname{Inf}(Z_1, \ldots, Z_n))/T_n]^{-1},$$

T_n étant une suite numérique décroissante, car presque sûrement, ils ne convergeraient pas. Nous devons donc par exemple réfuter les résultats inexacts de MM. Loftsgaarden et Quesenberry [*8*].

Par contre, les théorèmes 1, 2, 8, 9, nous permettent de recommander :

$$\frac{\operatorname{Log} n}{S_n} \to f(x)$$

presque sûrement. Malheureusement, la convergence est assez lente (de l'ordre de $\frac{1}{(\text{Log } n)^{1/2-\varepsilon}}$), ceci étant dû à la perte d'information inhérente à l'estimateur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Paul DEHEUVELS, Sur la convergence de sommes de Minima de Variables aléatoires. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **276**, Série A, 1973, p. 309-313.

[2] Paul DEHEUVELS, Sur la convergence de certaines suites de variables aléatoires. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **276**, Série A, 1973, p. 641-645.

[3] Ulf GRENANDER, *A limit theorem for sums of minima of stochastic variables.* Forksnungs rapport Inst. Försakringsmatematik och Matematik statistik, Stockholm, 1965.

[4] Ulf GRENANDER, *Ann. Math. Stat.*, 1966, p. 1041-1042.

[5] Ove FRANK, *Skand. Akt.*, 1967, p. 58-59.

[6] Michel LOEVE, *Probability Theory*, 2e édit., 1960.

[7] Alfred RENYI, *Calcul des Probabilités*, édit., 1966.

[8] D. O. LOFTSGAARDEN et C. P. QUESENBERRY, A nonparametric estimate of a multivariate density function. *Ann. Math. Stat.*, 1965, p. 1049-1051.

[9] TITCHMARSH, *Theory of functions.*

(Manuscrit reçu le 28 novembre 1973).