

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. YOR

Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 1 (1974), p. 55-88

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_1_55_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert

par

M. YOR (*)

SUMMARY. — Some results of Stroock and Varadhan in : Diffusion with continuous coefficients. Comm. in *Pure and Applied Maths.*, vol. 22, 1969, are extended to the case of a real, separable, Hilbert space, via the same method i. e.: studying the martingale problem linked to the differential operator:

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ a(x)D^2f(x) \} + \langle Df(x), b(x) \rangle$$

Finally, a general theorem of equivalence gives conditions of existence and unicity of diffusions of operator L.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.	56
CHAPITRE I : I.1. Le mouvement brownien (C), à valeurs dans H . . .	58
I.2. Le mouvement brownien (N)	59
I.3. Le mouvement brownien cylindrique ou « faible » . . .	60
I.4. Correspondance entre mouvements browniens (N) et cylindrique	61
I.5. Correspondance entre mouvements browniens (N) et (C). .	62
I.6. Remarques	64
CHAPITRE II : II.1. Rappels et généralités.	64
II.2. Les différentes intégrales stochastiques hilbertiennes . .	65

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S.

CHAPITRE III : III.1. Une formule de Ito en dimension infinie	68
III.2. Existence et unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique $E(x, \sigma, b)$	70
CHAPITRE IV : IV.1. Le problème des martingales : position du problème.	72
IV.2. Le processus de Markov associé aux solutions de $E(x, \sigma, b)$	76
IV.3. Équivalence entre le problème des martingales et la résolu- tion d'une équation différentielle stochastique.	80
IV.4. Conclusions.	84
APPENDICE : Martingales à valeurs dans un espace de Hilbert.	86
BIBLIOGRAPHIE.	87

NOTATIONS

- $\sigma_2(H)$ désigne l'espace des opérateurs de Hilbert Schmidt de H , muni de la norme $\| \cdot \|_2$.
- $\sigma_1(H)$ désigne l'espace des opérateurs nucléaires de H , muni de la norme $\| \cdot \|_1$.
- $\sigma_1^+(H) = \sigma_1(H) \cap \{ A \in L(H), A \geq 0 \}$.
- (F_t) désigne une famille croissante de sous-tribus de F , dans l'espace de probabilité (Ω, F, P) . Sauf précision supplémentaire (F_t) est supposée continue à droite et complète pour (F, P) .
On ne distinguera pas les processus indistinguables.

INTRODUCTION

L'objet de cet article est de généraliser dans le cadre d'un espace de Hilbert H , réel, séparable, une partie du travail de Stroock et de Varadhan [11], c'est-à-dire donner des conditions d'existence et d'unicité de la diffusion associée à l'opérateur différentiel sur H :

$$\forall f \in C_b^2(H), \quad Lf(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ a(x) D^2 f(x) \} + \langle Df(x), b(x) \rangle_H,$$

où $a(x)$ est un opérateur positif, de trace finie de H dans lui-même. Le problème des martingales $M(x, a, b)$ associé à l'opérateur L et la résolution d'équations différentielles $E(x, \sigma, b)$ stochastiques dans H , conduisent séparément à des théorèmes d'existence ou d'unicité des diffusions associées à L . On montre finalement l'équivalence entre existence et unicité d'une solution à l'un de ces trois problèmes.

Les trois premiers chapitres sont des chapitres de généralités et de rappels :

Dans le chapitre I, on essaie d'unifier les différentes présentations des mouvements browniens définis sur H. Le chapitre II est un rappel de la construction des intégrales stochastiques par rapport à une martingale continue à valeurs dans H ([9]), et par rapport à un mouvement brownien défini sur H ([1] et [8]). Dans le chapitre III, on démontre succinctement la formule de Ito, ainsi que, si σ et b sont localement lipschitziennes et bornées par $(1 + \|x\|)$, $E(x, \sigma, b)$ admet une solution unique. Le chapitre IV est divisé en quatre parties : en IV.1, on pose le problème des martingales $M(x, a, b)$; en IV.2 on démontre, à une condition de mesurabilité près, que l'unicité en loi des solutions de $E(x, \sigma, b)$ entraîne l'existence d'un processus de Markov fort, diffusion associée à L, avec $a = \sigma\sigma^*$. Enfin, dans IV.3 et IV.4, on montre l'équivalence entre les trois problèmes.

Le travail est la majeure partie d'une thèse de 3^e cycle. Je tiens à remercier au terme de cette introduction, les trois membres du jury pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée : M. J. Neveu, dont le cours de 3^e Cycle en 1972, m'a permis de m'intéresser aux intégrales stochastiques hilbertiennes, M. P. Priouret qui m'a dirigé constamment tout au long de la préparation de cette thèse, M. P. Courrège, pour son aide en théorie des champs, théorie qui présente des analogies avec certaines constructions faites ici (voir : Echelles hilbertiennes en théorie des Champs et [4]).

CHAPITRE I

DÉFINITIONS DU MOUVEMENT BROWNIEN INFINI-DIMENSIONNEL

Soit H espace de Hilbert réel, séparable.

Si l'on veut étendre au cas où $\dim H = \infty$ la définition du mouvement brownien à valeurs dans H, il est nécessaire en particulier qu'il existe des variables aléatoires gaussiennes $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow H$, de covariance I_H , i. e. :

$\forall h \in H, \langle h, X \rangle_H$ est une v. a. gaussienne centrée.

$\forall h, h' \in H, E[\langle h, X \rangle \langle h', X \rangle] = \langle h, h' \rangle_H$.

D'après le théorème de Fernique [3], $\|X\|$ est alors de carré intégrable, ce qui est contradictoire avec l'égalité :

$$E[\|X\|^2] = \sum_n E[\langle h_n, X \rangle^2] = \infty,$$

où $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H.

Il est donc nécessaire pour une définition correcte du mouvement brownien lié à H , de relaxer la condition de covariance, ou d'appartenance à H , ou de le définir faiblement, d'où les trois définitions suivantes.

1. Le mouvement brownien (C), à valeurs dans H

Cette définition est celle de Curtain et Falb [10] : on conserve la condition d'appartenance à H .

Soit $(F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une famille croissante de sous-tribus de F dans l'espace (Ω, F, P) .

1.1.1. — DÉFINITION I.1.1. — Le processus $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, F_t adapté, à valeurs dans H , est un (F_t) mouvement brownien (C), à valeurs dans H , si :

(C₁) $(t \rightarrow B_t(\omega))$ est continue P. p. s.

(C₂) $\forall s < t$ $(B_t - B_s)$ est centrée, et indépendante de F_s ,
 $s, t \in \mathbb{R}_+$

(C₃) $\forall h, k \in H$

$$E[\langle B_t - B_s, h \rangle \langle B_t - B_s, k \rangle] = (t - s) \langle Wh, k \rangle$$
 $\forall s, t, 0 \leq s \leq t$

où W est un opérateur de $L(H)$, positif et de trace finie.

On appelle W l'opérateur de covariance du mouvement brownien (B_t) .

D'après la définition I.1.1, pour tout h de H , $\langle B_t, h \rangle$ est une (F_t) martingale continue, de processus croissant associé $t \langle Wh, h \rangle$. D'après [I] (structure des martingales locales continues) il existe donc Γ_t , (F_t) mouvement brownien scalaire tel que $\langle B_t, h \rangle = \langle Wh, h \rangle^{1/2} \Gamma_t$.

On appelle (B_t) mouvement brownien (C) lorsque $F_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ et que les autres conditions de la définition I.1.1 sont réalisées.

Dans ce cas, la définition I.1.1 est équivalente à la définition « faible » suivante :

1.1.2. — DÉFINITION I.1.2. — Le processus $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, à valeurs dans H , est un mouvement brownien (C), à valeurs dans H , si :

(C'₁) $(t \rightarrow B_t(\omega))$ est faiblement continue P. p. s.

(C'₂) $\forall u \leq s \leq t$
 $\forall h, k \in H, \langle B_t - B_s, h \rangle$ est centrée et indépendante
 $s, t \in \mathbb{R}_+,$ de $\langle B_u, k \rangle$

(C'₃) $\forall h, k \in H$

$$E[\langle B_t - B_s, h \rangle \langle B_t - B_s, k \rangle] = (t - s) \langle Wh, k \rangle.$$
 $\forall s, t, 0 \leq s \leq t$

Les propriétés (C_1) , (C_2) entraînent évidemment (C'_1) et (C'_2) .

Inversement, (C'_1) et (C'_2) entraînent : pour tout $h \in H$, $\langle B_t, h \rangle$, est une martingale continue, relativement à $F_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. D'après l'appendice et la convergence dans $L^2(\Omega, F, P)$ de la série $\sum_n \langle B_t, h_n \rangle h_n$ vers B_t

$[(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une base orthonormée de $H]$, la continuité faible de $(t \rightarrow B_t)$ entraîne la continuité forte. De plus, soit $H_1 \subset L^2(\Omega, F, P)$ l'espace vectoriel gaussien fermé engendré par les v. a. $\langle B_u, h \rangle$ pour $h \in H, u \leq s$, et $H_2 \subset L^2(\Omega, F, P)$ espace vectoriel gaussien fermé, engendré par les $\langle B_t - B_s, h \rangle (h \in H)$. D'après (C'_2) , les espaces H_1 et H_2 sont orthogonaux. D'après [2] (proposition 2.4), $\mathcal{B}(H_1) = F_s$ et $\mathcal{B}(H_2) = \sigma(B_t - B_s)$ sont donc indépendantes, d'où (C_2) .

I. 1. 3. — EXISTENCE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN (C) , A VALEURS DANS H , D'OPÉRATEUR DE COVARIANCE W . — Soit W opérateur positif, de trace finie, de H dans H .

Soit $(h_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}_1}$ une base incomplète de H , orthonormée, formée de vecteurs propres de W , correspondant aux valeurs propres (λ_{n_i}) , strictement positives de W , chacune d'entre elles étant répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité (fini, puisque W est compact).

En prenant $\Omega = \prod_{n_i \in \mathbb{N}_1} \Omega_{n_i}$, avec pour tout n_i ,

$$\Omega_{n_i} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, F_t, P_0)$$

où $F_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, $X_s(\omega) = \omega(s)$, et P_0 est la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, il existe une suite $\Gamma_t^{(n_i)}$ de mouvements browniens scalaires indépendants,

définis sur Ω . Soit $\xi_t^{(n_i)} = \sqrt{\lambda_{n_i}} \Gamma_t^{(n_i)}$. On définit alors $X_t = \sum_{n_i \in \mathbb{N}_1} \xi_t^{(n_i)} h_{n_i}$.

Alors, sur tout compact de \mathbb{R}_+ , une sous-suite formée de fonctions aléatoires continues, de dimension finie, converge uniformément p. s. (Théorème de Doob). On en déduit l'existence d'une version continue de $(t \rightarrow X_t)$. Enfin, X vérifie immédiatement (C'_2) et (C'_3) .

2. Le mouvement brownien (N)

Cette définition a été donnée dans [I] (dernier chapitre) ; on n'impose plus l'appartenance à H .

Soit $(F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une famille croissante de sous-tribus de F dans (Ω, F, P) .

I. 2. 1. — DÉFINITION I. 2. 1. — Le processus $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, F_t adapté, est un (F_t) mouvement brownien (N), défini sur H , à valeurs dans V , si :

(N-1) Il existe V , espace de Banach, tel que $u : H \hookrightarrow V$ soit une injection continue, d'image dense.

(N-2) Le processus B , est à valeurs dans V et l'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow B_t \text{ est continue P. p. s.} \\ \mathbb{R}_+ \rightarrow V \end{array} \right.$$

(N-3) $B_0 = 0$ P. p. s. et $\forall s < t$, $B_t - B_s$ est centrée et indépendante de F_s .

(N-4) Si $u^* : V' \rightarrow H'$ désigne l'application transposée de u ,

$$\begin{aligned} \forall y' \in V' \\ \forall s < t \end{aligned} \quad E[\langle y', B_t - B_s \rangle_{V' \times V}^2] = (t - s) \|u^*(y')\|_{H'}^2.$$

Dans la suite, on identifiera souvent H et H' ; l'application « restriction à H » de V' dans $H' \simeq H$ est injective et transposée de u . V' séparant les points de V est dense dans H . Enfin, il existe, d'après le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, des bases orthonormales de H , $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les éléments sont dans V' .

L'existence, dans un cadre très général, de mouvements browniens (N) a été traité par L. Gross [6] et [7].

3. Le mouvement brownien cylindrique (ou « faible »)

Cette définition a été utilisée par Gaveau [13]. Soit (F_t) une famille croissante de sous-tribus de F dans (Ω, F, P) .

I. 3. 1. — DÉFINITION I. 3. 1. — Une application $B : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ($\omega, t, h \rightarrow B_t(h)(\omega)$) est dite (F_t) mouvement brownien cylindrique (ou « faible »), défini sur H , si :

$$(G. 1) \quad \forall h \neq 0 \\ \quad \quad \quad , \quad \frac{1}{\|h\|} B_t(h) \text{ est un } (F_t) \text{ mouvement brownien scalaire} \\ \quad \quad \quad h \in H$$

$$(G. 2) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, B_t(\lambda h + \mu k) = \lambda B_t(h) + \mu B_t(k) \quad \text{P. p. s.} \\ \quad \quad \quad \forall h, k \in H$$

Les définitions I. 1. 1, I. 2. 1, I. 3. 1 sont équivalentes en un sens précisé dans les deux paragraphes suivants :

4. Correspondance entre mouvements browniens (N) et cylindrique

I.4.1. — Un mouvement brownien (N) engendre un mouvement brownien cylindrique.

PROPOSITION I.4.1. — Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un F_t mouvement brownien (N), défini sur H, à valeurs dans V. Il existe un (F_t) mouvement brownien cylindrique $\tilde{B}_t(h)$, défini sur H, tel que :

$$\forall y' \in V', \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \langle y', B_t \rangle_{V' \times V} = \tilde{B}_t(y') \quad \text{P. p. s.}$$

Preuve. — Pour tout h de H, il existe $(y'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans V' , qui converge dans H vers h ; les variables $\langle y'_p, B_t \rangle_{V' \times V}$ convergent dans $L^2(\Omega, F, P)$ vers une variable gaussienne centrée, de covariance $t \|h\|_H^2$. On note $B_t(h)$ cette variable ; $(B_t(h), F_t)$ est une martingale, limite dans $L^2(\Omega, F, P)$ des martingales $\langle y'_p, B_t \rangle_{V' \times V}$. D'après l'appendice, il existe donc une version $\tilde{B}_t(h)$ continue P. p. s., de $B_t(h)$, et $\tilde{B}_t(h)$ est un F_t mouvement brownien cylindrique.

I.4.2. — Inversement, un mouvement brownien cylindrique permet de construire un mouvement brownien (N), qui soit sa « restriction » à un sous-espace dense de H.

PROPOSITION I.4.2. — Soit $(B_t(h))_{t \in \mathbb{R}_+, h \in H}$ un F_t mouvement brownien cylindrique, défini sur H. Il existe un espace de Banach V, $u : H \rightarrow V$ injection dense, et (Γ_t) (F_t) mouvement brownien (N), défini sur H, à valeurs dans V, tel que :

$$\forall y' \in V', \quad B_t(u'(y')) = \langle y', \Gamma_t \rangle_{V' \times V}.$$

Preuve. — Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H. On considère $V = l^2 \{ a_n ; \mathbb{N} \}$ avec $a_n > 0$ et $\sum_n a_n < \infty$; l'injection $u : H \rightarrow V$ est définie par $u\left(h = \sum_n h_n e_n\right) = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\tilde{\Gamma}_t = (B_t(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$, variable aléatoire à valeurs dans V, p. s., puisque :

$$E\left[\sup_{t \leq T} \|\tilde{\Gamma}_t\|_V^2\right] \leq 4T \left(\sum_n a_n\right).$$

$\tilde{\Gamma}_t$ est la limite des $\Gamma_t^p = (B_t(e_1), \dots, B_t(e_p), 0, 0 \dots)$, qui sont continues

à valeurs dans V . D'autre part, $E \left[\sup_{t \leq T} \|\tilde{\Gamma}_t - \Gamma_t^p\|_V^2 \right] \leq \left(\sum_{n>p} a_n \right) 4T$.

D'après l'appendice, il existe donc une version continue de $\tilde{\Gamma}_t$, soit Γ_t . De plus, $\forall y' \in V' \simeq l^2 \left\{ \frac{1}{a_n}; N \right\}$,

$$\langle y', \Gamma_t \rangle_{V' \times V} = \sum_n y'_n B_t(e_n) = B_t(y') \quad \text{P. p. s.}$$

On en déduit donc que $(\Gamma_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un F_t mouvement brownien (N), construit sur H , à valeurs dans V .

5. Correspondance entre mouvements browniens (N) et (C)

D'après le paragraphe précédent, on peut toujours se ramener pour un mouvement brownien (N) au cas $V = l^2 \{ a_n; N \}$ avec $a_n > 0$ et $\sum_n a_n < \infty$, $u : H \hookrightarrow V$, $u \left(h = \sum_n h_n e_n \right) = (h_n)_{n \in N}$. Dans ce cadre, on passe d'un mouvement brownien (N), défini sur H , à valeurs dans V , à un mouvement brownien (C) défini sur H (et inversement) en intervertissant les rôles de H et V . Précisément :

I.5.1. — Soit (B_t) un F_t mouvement brownien (C), à valeurs dans H , d'opérateur de covariance W . Soit $(h_{n_1}, n_1 \in N_1)$ et $(\lambda_{n_1}, n_1 \in N_1)$ définies en I.1.3. B_t est en fait p. s. à valeurs dans H_1 , espace de Hilbert, fermeture dans H des combinaisons linéaires des vecteurs $(h_{n_1}, n_1 \in N_1)$. On considère les espaces $H_{-1} \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow H_1$, avec

$$H_0 = \left\{ x = \sum_{n_1} x_{n_1} h_{n_1} \mid \sum_{n_1} \frac{1}{\lambda_{n_1}} x_{n_1}^2 < \infty \right\}$$

et

$$H_{-1} = \left\{ x = \sum_{n_1} x_{n_1} h_{n_1} \mid \sum_{n_1} \frac{1}{\lambda_{n_1}^2} x_{n_1}^2 < \infty \right\},$$

munis des normes respectives

$$\|x\|_1 = \|x\|_H; \|x\|_0 = \left(\sum_{n_1} \frac{1}{\lambda_{n_1}} x_{n_1}^2 \right)^{1/2}; \quad \|x\|_{-1} = \left(\sum_{n_1} \frac{1}{\lambda_{n_1}^2} x_{n_1}^2 \right)^{1/2}.$$

PROPOSITION I.5.1. — Le mouvement brownien B est un mouvement brownien (N), défini sur H_0 , à valeurs dans H_1 .

Preuve. — Soit u l'injection canonique de H_0 dans H_1 ; $u(H_0)$ est dense dans H_1 et $\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow B_t \\ R_+ \rightarrow H_1 \end{array} \right.$ est p. s. continue, d'après l'hypothèse (C_1) . H_{-1} s'identifie au dual de H_1 , pour la dualité :

$$f = (f_{n_1}) \in H_1$$

$$\langle f, x \rangle_{H_{-1} \times H_1} = \sum_{n_1} \frac{1}{\lambda_{n_1}} f_{n_1} x_{n_1}$$

$$x = (x_{n_1}) \in H_1$$

Enfin,

$$\forall s < t \quad E[\langle y, B_t - B_s \rangle_{H_{-1} \times H_1}^2]$$

$$\forall y \in H_{-1}$$

$$= E \left| \left\{ \sum_{n_1} \frac{1}{\lambda_{n_1}} y_{n_1} \langle B_t - B_s, h_{n_1} \rangle_{H \times H} \right\}^2 \right|$$

$$= \sum_{n_1} \frac{1}{\lambda_{n_1}^2} y_{n_1}^1 \langle h_{n_1}, W h_{n_1} \rangle (t - s)$$

$$= (t - s) \| u^*(y) \|_{H_0}^2$$

I.5.2. — Soit l'injection $H \hookrightarrow V$, avec $V = l^2 \{ a_n, N \}$, d'après les notations du début du paragraphe. Soit (B_t) un F_t mouvement brownien (N) , défini sur H , à valeurs dans V ; V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle y, x \rangle_{V \times V} = \sum_n a_n y_n x_n$. V' est isomorphe à $l^2 \left\{ \frac{1}{a_n} ; N \right\}$ avec :

$$\forall y = (y_n) \in V'$$

$$\forall x = \sum_n x_n e_n \in H$$

$$\langle y, x \rangle_{V' \times V} = (y, x)_{H \times H}$$

soit $W \in L(V)$ avec $Wy = (a_n y_n)_{n \in N}$. W est positif, de trace finie sur V .

PROPOSITION I.5.2. — (B_t) , F_t mouvement brownien (N) , défini sur H , à valeurs dans V , est un F_t mouvement brownien (C) , défini sur V , d'opérateur de covariance W .

Preuve. — $\forall y \in V$, $E[\langle y, B_t - B_s \rangle_{V \times V}^2]$

$$\forall s \leq t$$

$$= E \left[\left\{ \sum_n a_n y_n (B_t - B_s)_n \right\}^2 \right]$$

$$= E \left[\left\{ \langle \{ a_n y_n \}_n, B_t - B_s \rangle_{V' \times V} \right\}^2 \right]$$

$$= (t - s) \| u'(\{ a_n y_n \}) \|_{\tilde{H}}^2$$

$$= (t - s) \langle Wy, y \rangle_{V \times V}$$

6. Remarques

I.6.1. — Les équivalences des paragraphes 4 et 5 font apparaître le mouvement brownien cylindrique comme objet le plus naturel. Néanmoins, dans certaines questions (voir chap. IV), il peut être intéressant de considérer des mouvements browniens (N), liés à certains espaces V , importants dans des questions d'ellipticité par exemple.

I.6.2. — Une présentation différente de ce chapitre est possible à l'aide du théorème de Minlos dans le cadre des espaces de Hilbert réels, séparables (théorème 3.6, de [14], par exemple). Cependant, les propriétés de continuité découlent toujours de l'appendice et doivent être traitées séparément.

CHAPITRE II

LES INTÉGRALES STOCHASTIQUES HILBERTIENNES

1. Rappels et Généralités

II.1.1. — **RAPPELS SUR LES INTÉGRALES STOCHASTIQUES SCALAIRES.** — Le théorème fondamental sur lequel repose la théorie des intégrales stochastiques est le théorème suivant, dû à P. A. Meyer, énoncé ici dans un cadre restreint.

THÉORÈME. — Soit $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ espace de probabilité et $(\mathbf{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ famille croissante de sous-tribus de \mathbf{F} , continues à droite et complètes pour (\mathbf{F}, \mathbf{P}) , soit $(M_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ une \mathbf{F}_t martingale continue telle que, $\forall t$, $E[M_t^2] < \infty$; il existe alors un processus croissant continu unique A_t tel que $M_t^2 - A_t$ soit une \mathbf{F}_t martingale.

On construit [1] $\int_0^t \phi(s) dM_s$, où M_t est une \mathbf{F}_t martingale telle que : $\forall t$, $E[M_t^2] < \infty$ (ou seulement une \mathbf{F}_t martingale locale) et où ϕ est un processus \mathbf{F}_t bien mesurable tel que $E\left[\int_0^t |\phi(s)|^2 dA_s\right] < \infty$, $\forall t$, ou seulement $\mathbf{P}\left[\int_0^t |\phi(s)|^2 dA_s < \infty\right] = 1$, $\forall t$.

La tribu \mathcal{T}_1 des ensembles \mathbf{F}_t bien mesurables est engendrée par les processus adaptés continus à droite, admettant des limites à gauche.

II.1.2. — Il est possible de définir les intégrales stochastiques hilbertiennes à partir de convergence de processus définis à l'aide d'intégrales stochastiques scalaires. On ne développera donc pas les extensions, du type martingales locales, analogues à la présentation faite dans [I]. Le plan utilisé ici suit celui de Kunita [9]. Enfin, les résultats des différentes propositions sont des conséquences directes de la formule de Plancherel dans H, et du théorème de convergence dans L² d'une suite de martingales continues (Appendice). Dans l'appendice, est montrée de façon élémentaire l'existence d'un processus croissant continu associé à une martingale continue à valeurs dans H.

On ne distinguera pas les processus indistinguables.

2. Les différentes intégrales stochastiques hilbertiennes

II.2.1. — INTÉGRALE STOCHASTIQUE D'UN PROCESSUS A VALEURS DANS H, PAR RAPPORT A UNE MARTINGALE CONTINUE RÉELLE. — Soit (m_t)_{t ∈ R₊} une F_t martingale continue, réelle, telle que E[m_t²] < ∞, ∀t. Soit a_t le processus croissant associé à m_t, et φ(t) un processus F_t bien mesurable, à valeurs dans H et tel que

$$(1) \quad \forall t, \quad E \left[\int_0^t \|\phi(s)\|^2 da_s \right] < \infty.$$

Il existe une martingale continue, unique M_t, à valeurs dans H, telle que :

$$\forall y \in H, \quad \langle y, M_t \rangle_H = \int_0^t \langle y, \phi(s) \rangle_H dm_s.$$

Le processus croissant continu A_t associé à M_t est $\int_0^t (\phi(s) \otimes \phi(s)) da_s$, où φ(s) ⊗ φ(s) désigne l'opérateur de L(H) : y → φ(s) < y, φ(s) >_H.

II.2.2. — INTÉGRALE STOCHASTIQUE D'UN PROCESSUS A VALEURS H, PAR RAPPORT A UNE MARTINGALE CONTINUE A VALEURS H. — Soit (M_t)_{t ∈ R₊} martingale continue, à valeurs dans H, telle que E[|M_t|²] < ∞, ∀t.

D'après l'appendice, il existe A_t processus croissant associé à M_t ; on supposera le processus croissant absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, i. e. : il existe un processus a(t), à valeurs dans σ₁(H), tel que

$$\begin{aligned} \forall t \in R_+ \\ , \quad \langle h, A_t h' \rangle_H &= \int_0^t \langle h, a(s) h' \rangle ds \\ \forall h, h' \in H \end{aligned}$$

Soit $\phi(t)$ un processus \mathbf{F}_t mesurable, à valeurs dans H , tel que

$$(2) \quad \mathbb{E} \left[\int_0^t \|\phi(s)\|_H^2 \|a(s)\|_{L(H)} ds \right] < \infty, \quad \forall t.$$

On définit alors $\int_0^t \langle \phi(s), dM_s \rangle_{H \times H}$ comme la martingale continue, unique, telle que, si $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H

$$\int_0^t \langle \phi(s), dM_s \rangle_H = \sum_n \int_0^t \langle \phi(s), e_n \rangle d \langle M_s, e_n \rangle \quad \text{P. p. s.}$$

dans $L^2(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$.

La définition est indépendante de la base choisie, et pour $y \in H$, et $\psi(s)$ processus scalaire, \mathbf{F}_t bien mesurable, avec : $\phi(s) = \psi(s)y$

$$\int_0^t \langle \phi(s), dM_s \rangle_H = \int_0^t \psi(s) d \langle y, M_s \rangle \quad \text{P. p. s.}$$

si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux processus \mathbf{F}_t bien mesurables, à valeurs dans H , et vérifiant (2), le processus à variation bornée associé à

$$\int_0^t \langle \phi_1(s), dM_s \rangle \int_0^t \langle \phi_2(s), dM_s \rangle \quad \text{est} \quad \int_0^t \langle \phi_1(s), a(s)\phi_2(s) \rangle ds.$$

II. 2. 3. — INTÉGRALE STOCHASTIQUE D'UN PROCESSUS A VALEURS $L(H)$, PAR RAPPORT A UNE MARTINGALE CONTINUE A VALEURS H . — Soit M_t avec les mêmes propriétés qu'en II. 2. 2. Soit $\phi(t)$ un processus \mathbf{F}_t bien mesurable, à valeurs $L(H)$ tel que :

$$(3) \quad \forall t, \quad \mathbb{E} \left[\int_0^t \|\phi(s)\|_{L(H)}^2 \text{tr} \{ a(s) \} ds \right] < \infty$$

Il existe alors une martingale continue unique N_t , notée $\int_0^t \phi(s) dM_s$, telle que :

$$\forall y \in H, \quad \langle y, N_t \rangle = \int_0^t \langle \phi^*(s)y, dM_s \rangle,$$

intégrale stochastique définie en II. 2. 2. De plus, on peut obtenir N_t comme la limite, dans $L^2_H(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ de la série des martingales

$$\sum_n \int_0^t \phi(s) e_n d \langle M_s, e_n \rangle,$$

martingales définies en II.2.1. Le processus croissant continu associé à N_t est $\int_0^t \phi(s) a(s) \phi^*(s) ds$.

La définition de cette intégrale permet en particulier de définir $\int_0^t \phi(s) dB_s$ lorsque B est un mouvement brownien (C), d'opérateur de covariance W et que $E \left[\int_0^t \|\phi(s)\|_{L(H)}^2 ds \right] < \infty$. Le processus croissant associé à $\int_0^t \phi(s) dB_s$ est $\int_0^t \phi(s) W_0 \phi^*(s) ds$.

II.2.4. — INTÉGRALE STOCHASTIQUE D'UN PROCESSUS A VALEURS H , PAR RAPPORT A UN MOUVEMENT BROWNIEN (N) — OU CYLINDRIQUE — CONSTRUIT SUR H . — On sait passer — I.4 — d'un mouvement brownien (N) à un mouvement brownien cylindrique, et inversement. L'intégrale stochastique construite ici ne dépend pas du choix de la réalisation du mouvement brownien (N) ou mouvement brownien cylindrique engendré.

Soit (B_t) un F_t mouvement brownien N ou cylindrique, défini sur H . Soit $\phi(t)$ un processus F_t bien mesurable à valeurs dans H , tel que

$$(4) \quad E \left[\int_0^t \|\phi(s)\|^2 ds \right] < \infty.$$

De même que dans II.2.2, on peut définir

$$\int_0^t \langle \phi(s), dB_s \rangle = \sum_n \int_0^t \langle \phi(s), e_n \rangle_H d[B_s(e_n)], \quad \text{p. s. dans } L^2(\Omega, F, P)$$

où (e_n) est une base orthonormée de H . La martingale continue obtenue ne dépend pas du choix de la base, et de plus, si $\phi(s) = \psi(s)y$ avec $y \in H$, $\psi(s)$ processus scalaire $\int_0^t \langle \phi(s), dB_s \rangle = \int_0^t \psi(s) d[B_s(y)]$. Le processus croissant associé à $\int_0^t \langle \phi(s), dB_s \rangle$ est $\int_0^t \|\phi(s)\|^2 ds$.

II.2.5. — INTÉGRALE STOCHASTIQUE D'UN PROCESSUS A VALEURS $\sigma_2(H)$, PAR RAPPORT A UN MOUVEMENT BROWNIEN (N) — OU CYLINDRIQUE DÉFINI SUR H . — Soit (B_t) un F_t mouvement brownien (N) — ou cylindrique — défini sur H , soit $\phi(t)$ un processus F_t bien mesurable, à valeurs dans $\sigma_2(H)$, tel que

$$E \left[\int_0^t \|\phi(s)\|_2^2 ds \right] < \infty.$$

Il existe une martingale continue unique N_t , à valeurs dans H , telle que :

$$\forall y \in H, \quad \langle y, N_t \rangle = \int_0^t \langle \phi^*(s)y, dB \rangle$$

intégrale stochastique définie en II.2.4.

N_t est aussi la limite dans $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ de $\sum_n \int_0^t \phi(s)e_n d[B_s(e_n)]$, où les intégrales utilisées ont été définies en II.2.1.

Le processus croissant associé à $N_t = \int_0^t \phi(s)dB_s$ est $\int_0^t \phi(s)\phi^*(s)ds$.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE ITO EN DIMENSION INFINIE. EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE $E(x, \sigma, b)$

1. Une formule de Ito en dimension infinie

III.1.1. — CADRE DE LA FORMULE. — Soit H espace de Hilbert réel, séparable et B un (\mathbf{F}_t) mouvement brownien (N) — ou cylindrique — défini sur H .

Soient

$$\begin{aligned} \phi &: [0, T] \times \Omega \rightarrow \sigma_2(H) \\ b &: [0, T] \times \Omega \rightarrow H \end{aligned}$$

deux processus F_t bien mesurables tels que,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \|\phi(s, \omega)\|_2^2 ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T \|b(s, \omega)\|_H^2 ds \right] < \infty.$$

On définit

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi(s)dB_s + \int_0^t b(s)ds$$

pour $t \leq T$, avec $X_0 \in L^2(\Omega, \mathbf{F}_0, \mathbf{P})$.

III.2.1. — THÉORÈME III.1.2. — Soit $f(t, x)$ définie sur $[0, T] \times H$,

C^1 en la première variable t , C^2 en x , et telle que $\frac{\partial f}{\partial t}$, $D_x f = Df$, $D_x^2 f = D^2 f$ soient bornées sur $[0, T] \times H$; alors :

$$\forall t \leq T, \quad f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \langle \phi^*(s) Df(s, X_s), dB_s \rangle + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \langle Df(s, X_s), b(s) \rangle_H + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \phi^*(s) D^2 f(s, X_s) \phi(s) \} \right] ds.$$

Preuve. — Considérons les approximations de dimension finie de X :

$$X^m(t) = Q_m X_0 + \int_0^t (Q_m \phi(s) Q_m) dB_s + \int_0^t Q_m b(s) ds,$$

où (h_n) est une base orthonormée de H et

$$Q_m x = \sum_{p=1}^m \langle x, h_p \rangle h_p.$$

On remarque que

$$\int_0^t (Q_m \phi(s) Q_m) dB_s = \int_0^t (Q_m \phi(s) Q_m) dB_s^{(m)}$$

où

$$B_t^{(m)} = \sum_{p=1}^m B_t(h_p) h_p$$

est un mouvement brownien de dimension m .

$$E \left[\sup_{t \leq T} \| X_t^m - X_t \|^2_H \right] \leq 3 \left\{ E[\| X_0 - Q_m X_0 \|^2] + 4E \left[\int_0^T \| Q_m \phi(u) Q_m - \phi(u) \|^2_2 du \right] \right\} + TE \int_0^T \| Q_m b(u) - b(u) \|^2 du$$

D'où :

$$E \left[\sup_{t \leq T} \| X_t^m - X_t \|^2_H \right] \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} 0$$

Il existe donc une sous-suite $(X^{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $X_t^{m_k} \rightarrow X_t$, p. s. uniformément en t sur $[0, T]$, et dans $L^2[[0, T] \times \Omega, dP \otimes ds]$. On applique la formule de Ito — en dimension finie — à f et X^{m_k} et on fait tendre k vers $+\infty$.

III.1.3. — THÉORÈME III.1.3. — Soit $f(t, x)$ définie sur $[0, T] \times H$,

C^1 en t , C^2 en x , et telle que f , $\frac{\partial f}{\partial t}$, Df et D^2f soient bornées sur tout borné de $[0, T] \times H$. Alors, la formule du théorème III.1.2 est encore valable.

Preuve. — Soit n fixé, $\phi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$, de classe C^∞ , telle que $\forall t \leq n^2$, $\phi_n(t) \equiv 1$ et ϕ_n est à support dans $[0, (n+1)^2]$.

On considère la fonction $f_n : [0, T] \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(t, x) = f(t, x)\phi_n(\|x\|^2)$; la fonction $x \rightarrow \phi_n(\|x\|^2)$ est de classe C^∞ , et les fonctions f_n satisfont aux hypothèses du théorème précédent. Soit $T_n = \text{Inf}(t, \|X_t\| > n)$, suite de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$. Pour tout n , on applique la formule de Ito à f_n , au temps $t \wedge T_n$. D'après le lemme de localisation des intégrales stochastiques [I],

$$f(t \wedge T_n, X_{t \wedge T_n}) = f(0, X_0) + \int_0^{t \wedge T_n} \langle \phi_n^*(s) Df(s, X_s), dB_s \rangle_H \\ + \int_0^{t \wedge T_n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \langle Df(s, X_s), b(s) \rangle_H + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \phi(s) D^2f(s, X_s) \phi(s) \} ds \right\}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat.

2. Existence et unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique $E(x, \sigma, b)$

Soit B_t un F_t mouvement brownien, (N) — ou cylindrique — (resp. C) défini sur H : soit

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow \sigma_2(H) && (\text{resp. } L(H)) \\ b : H &\rightarrow H && \text{et } x \in H. \end{aligned}$$

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ adapté est dit solution de l'équation différentielle $E(x, \sigma, b)$ si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds \quad [E(x, \sigma, b)]$$

(X_t sera alors adapté et continu, donc bien mesurable et l'intégrale $\int_0^t \sigma(X_s) dB_s$ a bien un sens). Lorsque σ et b sont bornés et lipschitziens (pour leurs normes respectives), il y a existence et unicité (à une indistinguabilité près) des solutions de $E(x, \sigma, b)$. La méthode utilisée dans \mathbb{R}^n dans [I] se généralise immédiatement. On peut également utiliser le théorème du point fixe [4]. Le résultat est une conséquence du lemme.

III.2.1. — LEMME III.2.1. — (Cf. [I]) si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable et qu'il existe deux constantes a et $b \geq 0$ telles que

$$f(t) \leq a + b \int_0^t f(s)ds \quad t \leq T$$

alors, $f(t) \leq ae^{bt}, \forall t \leq T$.

L'existence et l'unicité des solutions de $E(x, \sigma, b)$ se conserve lorsque σ et b sont localement lipschitziens. Précisément :

III.2.2. — THÉORÈME III.2.2. — Supposons σ et b lipschitziennes, sur toute boule $B(0, n)$ de H , avec σ et b vérifiant :

$$|\sigma(x)| \leq C(1 + \|x\|_H); \quad |b(x)| \leq C(1 + \|x\|_H)$$

($\|\cdot\|$ désigne les normes respectives de σ et b). Il y a alors existence et unicité des solutions X_t^x de $E(x, \sigma, b)$. De plus, pour $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, borélienne, bornée, l'application $x \rightarrow E(f(X_t^x))$ est mesurable.

Preuve. — Si $B_n = B(0, n)$, désignons par σ_n et b_n les applications

$$\sigma_n(x) = \sigma\left(\frac{x}{1 + d(x, B_n)}\right); \quad b_n(x) = b\left(\frac{x}{1 + d(x, B_n)}\right);$$

elles sont lipschitziennes sur tout H , et on peut appliquer les résultats d'existence et d'unicité cités précédemment. Il existe donc (${}^n X_t^x$) unique, solution de $E(x, \sigma_n, b_n)$. Soit $T_n = \text{Inf}(t \mid \|({}^{n+1})X_t^x\| > n)$. D'après le lemme de localisation des intégrales stochastiques, on a ${}^{n+1}X_{t \wedge T_n}^x = {}^n X_{t \wedge T_n}^x$, et donc $T_n \geq T_{n-1}$. La suite de temps d'arrêt T_n croît presque sûrement vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} P[\forall n, T_n \leq t] &\leq P[T_n \leq t] = P\left[\sup_{s \leq t} \|{}^{n+1}X_s^x\| > n\right] \\ &\leq \frac{1}{n^2} E\left[\sup_{s \leq t} \|{}^{n+1}X_s^x\|^2\right] \\ &\leq \frac{3}{n^2} \left\{ \|x\|^2 + 4E\left[\int_0^t \|\sigma_n({}^n X_s^x)\|_2^2 ds\right] \right\} + tE\left[\int_0^t \|b_n({}^n X_s^x)\|_H^2 ds\right] \end{aligned}$$

Or, $\|\sigma_n(x)\|_2^2 \leq 2C^2(1 + \|x\|^2)$. En appliquant le lemme III.2.1, on obtient une majoration de $E\left[\sup_{s \leq t} \|{}^{n+1}X_s^x\|^2\right]$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $T_n \uparrow \infty$ p. s.

Il existe donc un processus X_t^x tel que $X_{t \wedge T_n}^x = {}^n X_{t \wedge T_n}^x$, et ce processus est solution de $E(x, \sigma, b)$.

Pour f borélienne bornée, $E[f(X_t^x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[f({}^n X_t^x)]$.

En effet :

$$E[|f(X_t^x) - f(X_t^y)|] = E[|f(X_t^x) - f(X_t^y)|, t \geq T_n] \leq 2 \|f\|_\infty P[T_n \leq t] \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

Il suffit donc de démontrer la fin du théorème dans le cas où σ et b sont uniformément lipschitziennes sur H . D'après le théorème des classes monotones, on peut se restreindre à f continue, bornée. On montre alors que $x \rightarrow Ef(X_t^x)$ est continue. D'après le théorème 6.1, de [15], il suffit de se restreindre à f uniformément continue bornée. Le résultat est alors une conséquence de la majoration $E[\|X_t^x - X_t^y\|^2] \leq \|x - y\|^2$, dûe au lemme III.2.1.

CHAPITRE IV

LE PROBLÈME DES MARTINGALES

1. Le problème des martingales : position du problème

IV.1.1. — NOTATIONS. — Soit B_t un F_t mouvement brownien (\mathbb{N}) — ou cylindrique — défini sur H et

$$\begin{aligned} \sigma &: H \rightarrow \sigma_2(H) \\ b &: H \rightarrow H \end{aligned}$$

deux applications mesurables bornées; on considère dans la suite les classes suivantes de fonctions réelles définies sur H :

$$C_b^2 = \{ f: H \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est de classe } C^2, \text{ et } f, Df, D^2f \text{ sont bornées sur tout } H \}$$

$$C_{loc}^2 = \{ f: H \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est } C^2 \text{ et } f, Df, D^2f \text{ sont bornées sur tout borné de } H \}$$

$$C^{2,n} = \{ f: H \rightarrow \mathbb{R}, \text{ il existe } Q_n \text{ projecteur orthogonal de } H, \text{ de dimension } n, \text{ tel que } f(x) = f(Q_n x) \text{ et } f \text{ est de classe } C^2 \}$$

On désigne par L l'opérateur différentiel :

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ \sigma(x)\sigma^*(x)D^2f(x) \} + \langle Df(x), b(x) \rangle_H.$$

IV.1.2. — INTRODUCTION. — Supposons l'existence de (X_t) solution du problème $E(x, \sigma, b)$. D'après la formule de Ito, démontrée en III.1.3,

pour toute fonction f de C_{loc}^2 , $f(X_t) - f(x) - \int_0^t f(X_s)ds$ est une martingale locale continue : il suffit de considérer les temps d'arrêt

$$T_n = \text{Inf} (t \mid \|X_t - x\| > n).$$

Dans le cas où B est un mouvement brownien (C) défini sur H , d'opérateur de covariance W_0 , si (X_t) désigne une solution de $E(x, \sigma, b)$, avec σ (resp. b) mesurable et borné de H dans $L(H)$ (resp. H), d'après la formule de Ito démontrée par Curtain et Falb [10], pour toute fonction f de C_{loc}^2 ,

$$f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds$$

est une martingale locale continue, avec

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \sigma(x)W_0\sigma^*(x)D^2f(x) \} + \langle Df(x), b(x) \rangle_H.$$

Quitte à prendre $C = W_0^{1/2}$, opérateur de Hilbert-Schmidt de H , et $\sigma_1(x) = \sigma(x)C$, on a la même formule pour les deux opérateurs différentiels (Lf).

On peut donc formuler le problème unique suivant :

IV.1.3. — DÉFINITION IV.1.3. — Soit

- $a : H \rightarrow \sigma_1^+(H)$ (opérateurs positifs, de trace finie de H)
- $b : H \rightarrow H$ deux applications mesurables et bornées.

$\Omega^0 = \mathcal{C}(R_+, H)$, X_t les applications coordonnées; $F_t^0 = \sigma(X_s, s \leq t)$.

On dit qu'une famille de probabilités $(P_x)_{x \in H}$ sur (Ω^0, F^0) est solution du problème des martingales $M(x, a, b)$ si pour toute fonction f de C_b^2 , $f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ est une P_x martingale continue pour la famille (F_t^0) et $P_x[X_0 = x] = 1$.

IV.1.4. — THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE IV.1.4. — Soit P une loi de probabilité sur (Ω^0, F^0) telle que $P[X_0 = x] = 1$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall n, \forall f \in C^{2,n}, H_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds$

est une martingale locale continue.

(2) $\forall f \in C_b^2, H_t^f$ est une martingale continue.

(3) $\forall f \in C_{\text{loc}}^2, \quad H_t^f$ est une martingale locale continue.

(4) $\forall \theta \in H, \quad M_t^\theta = \langle \theta, X_t - X_0 \rangle + \int_0^t b(X_s) ds$

est une martingale locale de processus croissant $A_t^\theta = \int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle ds$.

(5) $\forall \theta \in H, \quad X_t^\theta = \exp \left\{ M_t^\theta - \frac{1}{2} A_t^\theta \right\}$

est une martingale locale.

Preuve. — (4) et (5) sont équivalentes, d'après le lemme suivant, dû à la formule de Ito, en dimension 1.

LEMME (cf. [1]). — Soit M_t et A_t deux processus adaptés à une famille croissante (F_t) , tels que $A_0 = M_0 = 0$; il y a équivalence entre :

a) M_t est une martingale locale continue de processus croissant A_t .

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}, X_t^\theta = \exp \left\{ \theta M_t - \frac{1}{2} \theta^2 A_t \right\}$ est une martingale locale continue.

(5) \Rightarrow (1) : Soit Q_m projecteur orthogonal de dimension m . Pour m fixé, d'après (5), pour tout θ de $H_m = Q_m H$, X_t^θ est une martingale locale. Soit

$$V_t^\theta = \exp \left[\langle \theta, \int_0^t b(X_s) ds \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle ds \right]$$

V_t^θ est à variation bornée; on peut donc utiliser la formule d'intégration

par partie scalaire $V_t^\theta X_t^\theta = \int_0^t V_s^\theta dX_s^\theta + \int_0^t X_s^\theta dV_s^\theta$, soit en explicitant :

$$\begin{aligned} \int_0^t V_s^\theta dX_s^\theta &= \exp \langle \theta, X_t - X_0 \rangle \\ &\quad - \int_0^t \left[\langle \theta, b(X_s) \rangle + \frac{1}{2} \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle \right] \exp \langle \theta, X_s - X_0 \rangle ds \end{aligned}$$

Donc, H_t^f est une martingale locale si

$$f(x) = \exp \langle \theta, x \rangle \begin{cases} \theta \in H_m \\ x \in H_m \end{cases}$$

(1) est donc vrai pour les fonctions $f: H_m \rightarrow \mathbb{R}$, combinaison linéaire d'exponentielles. Or, l'ensemble des fonctions $f: H_m \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifient (1) est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de H_m , des dérivées d'ordre ≤ 2 (il suffit de stopper $Q_m X_s$ aux temps de sortie d'une suite de boules $B_n(Q_m x, n)$ qui recouvrent H_m). Toute fonc-

tion de $C_c^{2,m}$ (fonction de $C^{2,m}$ à support compact dans H_m) peut être approchée pour cette topologie par une combinaison linéaire d'exponentielles. Donc, pour toute fonction f de $C_c^{2,m}$, H_t^f est une martingale locale continue. Or, f et ses dérivées sont bornées. Donc, pour tout $t \leq T$, $(H_t^f)_{t \leq T}$ est une martingale. H_t^f est donc une martingale.

Si f appartient seulement à $C^{2,m}$, en considérant une suite croissante de compacts (K_p) recouvrant H_m , il existe pour tout p , $g_p \in C_c^{2,m}$ telle que $f|_{K_p}$ coïncide avec $g_p|_{K_p}$; pour T_p , premier temps de sortie de K_p pour $(Q_n X_s)$, $H_{t \wedge T_p}^f = H_{t \wedge T_p}^{g_p}$ est une martingale par rapport aux tribus $F_{t \wedge T_p}$, ce qui entraîne que H_t^f est une martingale locale.

(1) \Rightarrow (2) Si $f \in C^{2,n}$ et est bornée, ainsi que ses deux dérivées, H_t^f est alors une martingale continue, puisque c'est une martingale continue sur tout $[0, T]$, $\forall T$. Pour f de C_b^2 , on pose $f_n(x) = f(Q_n x)$, avec Q_n projecteur orthogonal de dimension, et $Q_n \xrightarrow{(s)} I$. On a donc :

$$\forall n, \quad \forall s < t, \quad E[H_t^{f_n} | F_s] = H_s^{f_n};$$

avec le théorème de Lebesgue, on a donc (2) en faisant tendre n vers $+\infty$.

(2) \Rightarrow (3) En utilisant les fonctions test ayant servi dans la démonstration de la formule de Ito (théorème III.1.3), pour $f \in C_{loc}^2$, il existe $f_n \in C_b^2$, $f_n|_{B(x,n+1)} = f|_{B(x,n+1)}$; en prenant pour T_n le temps de sortie pour X_s de $B(x, n)$, d'après (2) $H_{t \wedge T_n}^f = H_{t \wedge T_n}^{f_n}$ est une martingale pour les tribus $F_{t \wedge T_n}$. On en déduit que H_t^f est une martingale locale.

(3) \Rightarrow (4) Pour $\theta \in H$, $f(x) = \langle \theta, x \rangle$ est une fonction de C_{loc}^2 , et d'après (3), $M_t^\theta = \left\langle \theta, X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s) ds \right\rangle$ est une martingale locale continue.

De même, pour $g(y) = (\langle \theta, y \rangle)^2$, d'après (3) :

$$\langle \theta, X_t \rangle^2 - \langle \theta, X_0 \rangle^2 - 2 \int_0^t \langle \theta, X_s \rangle \langle \theta, b(X_s) \rangle ds - \int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle ds$$

est une martingale locale. Pour prouver que A_t est le processus croissant associé à M_t , il suffit donc que $(M_t)^2 - N_t$ soit une martingale locale,

avec $N_t^\theta = \langle \theta, X_t \rangle^2 - \int_0^t \langle \theta, X_s \rangle \langle \theta, b(X_s) \rangle ds$. Si l'on consi-

dère le processus à variation bornée $Z_t^\theta = \int_0^t \langle \theta, (X_s) \rangle ds$, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^t M_s^\theta dZ_s^\theta = M_t^\theta Z_t^\theta - \int_0^t Z_s^\theta dM_s^\theta$$

et on vérifie facilement :

$$(\mathbf{M}_t^\theta)^2 - \mathbf{N}_t^\theta = -2 \langle \theta, \mathbf{X}_0 \rangle \mathbf{M}_t^\theta + 2 \left[\int_0^t \mathbf{M}_s^\theta d\mathbf{Z}_s^\theta - \mathbf{M}_t^\theta \mathbf{Z}_t^\theta \right],$$

d'où le résultat.

2. Le processus de Markov associé aux solutions de $E(x, \sigma, b)$

IV.2.1. — ÉTUDE DE $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{V})$ (\mathbf{V} ESPACE DE BANACH SÉPARABLE); ESPÉRANCES CONDITIONNELLES RÉGULIÈRES (cf. [15]). — Soit $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{V})$ l'espace des fonctions continues sur \mathbf{R}_+ , à valeurs dans \mathbf{V} espace de Banach séparable. On munit $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{V})$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de \mathbf{R}_+ ; c'est un espace métrisable complet pour la distance :

$$d(f, g) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{\sup_{t \leq n} |f(t) - g(t)|_{\mathbf{V}}}{1 + \sup_{t \leq n} |f(t) - g(t)|_{\mathbf{V}}}.$$

Si $g_n : \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est de classe C^∞ , égale à 1 sur $[0, n]$ et nulle lors de $[0, n+1]$, alors $f_n(t) = f(t)g_n(t) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} f$. $f \in C[[0, 1], \mathbf{V}]$ est approchable uniformément par ses polynômes de Bernstein $P_n(f)$, eux-mêmes approchables uniformément par des polynômes de la forme

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^m C_m^k a_k t^k (1-t)^{m-k},$$

où $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite dense dans \mathbf{V} . Donc $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{V})$ est séparable, et d'après [15] est un espace standard.

Si \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 sont deux espaces de Banach séparables, $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{V}_1) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{V}_2)$ (produit d'espaces boréliens) est un espace standard.

Enfin, si (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) sont deux espaces standards, \mathbf{P} une probabilité sur (X, \mathcal{A}) et $\pi : X \rightarrow Y$ application mesurable surjective; il existe alors une probabilité conditionnelle régulière de \mathbf{P} quand π .

IV.2.2. — Précisons la notion de solution de $E(x, \sigma, b)$. On suppose σ et b mesurables et bornées dans leurs espaces respectifs.

DÉFINITION IV.2.2. — On appelle solution du problème $E(x, \sigma, b)$ un ensemble $\{(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}); (\mathbf{B}_t); \mathbf{X}_t\}$ où :

. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace de probabilité, muni d'une famille croissante de sous-tribus \mathcal{A}_t .

- . (B_t) est un \mathcal{A} -mouvement brownien (N), ou cylindrique défini sur H.
- . $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus adapté, à valeurs dans H tel que :

$$\forall t, X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds \quad \text{P. p. s.}$$

IV.2.3. — DÉFINITION IV.2.3 :

1. — On dit qu'il y a unicité trajectorielle du problème $E(x, \sigma, b)$ si (X_t, B_t) et (X'_t, B'_t) étant deux solutions de ce problème sur le même espace (Ω, \mathcal{A}, P) on a :

$$X_t = X'_t \quad \text{P. p. s.}$$

2. — On dit qu'il y a unicité en loi du problème $E(x, \sigma, b)$ si, étant données deux solutions $(\Omega; X_t; B_t; P)$ et $(\Omega', X'_t, B'_t, P')$ et les applications

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H) \\ \omega &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

on a : $\phi \circ P = \phi' \circ P'$

$$\begin{aligned} \phi' : \Omega' &\rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H) \\ \omega' &\rightarrow X'_t(\omega') \end{aligned}$$

IV.2.4. — THÉORÈME IV.2.4. — L'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi.

Preuve. — Soient $(\Omega^i, B^i, X^i, P^i)$ deux solutions du problème $E(x, \sigma, b)$. On sait, d'après I.4, que $(B^i)_{i=1,2}$ engendre un mouvement brownien cylindrique \tilde{B}^i défini sur H, qui engendre lui-même un mouvement brownien B'^i ,

(N), à valeurs dans $V = l^2 \{ a_n, N \} \left(\sum_n a_n < \infty \text{ et } a_n > 0 \right)$ (situation définie

en I.4). D'après le caractère intrinsèque des intégrales stochastiques définies dans le chapitre II $(\Omega^i, (V, B'^i), X^i, P^i)_{i=1,2}$ sont deux solutions du problème $E(x, \sigma, b)$ soit ϕ_i :

$$\begin{aligned} (\Omega^i, P^i) &\rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, V) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H) \\ \omega &\rightarrow (B'^i(\omega), X^i(\omega)) \\ P^i &\rightarrow \phi_i \circ P^i. \end{aligned}$$

D'après IV.2.1, il existe, π étant la projection de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, V) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H)$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, V)$, une probabilité conditionnelle régulière Q_ω^i sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H)$ telle que :

$$\pi \circ (\phi_i \circ P^i) = W$$

(mesure de probabilité du mouvement brownien N) définie sur $H \hookrightarrow V = l^2 \{a_n, N\}$, injection déjà définie), et

$$(\phi_i \circ P^i)(A' \times A'') = \int_{A'} dW(\omega') Q_{\omega'}^i(A''),$$

soient :

$$\Omega' = \mathcal{C}(R_+, V); \quad \Omega'' = \mathcal{C}(R_+, H); \quad \Omega''' = \mathcal{C}(R_+, H); \quad \Omega = \Omega' \times \Omega'' \times \Omega'''$$

$$\xi_t^{(i)}(\omega', \omega'', \omega''') = \omega^{(i)}(t) \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{B}_t^{(i)} = \sigma(\omega^{(i)}(s), s \leq t); \quad \mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t^1 \otimes \mathcal{B}_t^2 \otimes \mathcal{B}_t^3.$$

On construit sur Ω la probabilité $R(d\omega', d\omega'', d\omega''') = W(d\omega'), Q^1(\omega'', d\omega'')$ $Q^2(\omega', d\omega''')$. On montre alors, de même que dans [I] que $\xi_t^{(1)}$ est un \mathcal{B}_t mouvement brownien, défini sur H, à valeurs dans V, pour la mesure R.

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout y' de V' , $\langle y', \xi_t^1 \rangle_{V' \times V}$ est un \mathcal{B}_t mouvement brownien scalaire, multiplié par $|y'|_{\mathbb{H}}^2$. Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{B}_t, R, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}$ et $\xi_t^{(3)}$ sont des solutions du problème $E[x, \sigma, b, \xi_t^{(1)}]$, et d'après l'unicité trajectorielle vérifient $\xi_t^{(2)} = \xi_t^{(3)}$ P. p. s. D'où $R[\omega'' = \omega'''] = 1$.

$Q^1(\omega', d\omega'') \otimes Q^2(\omega', d\omega''')$ est donc portée par la diagonale de $\Omega'' \times \Omega'''$, donc $Q^1(\omega', d\omega'') = \varepsilon_{\tau(\omega')}$; $Q^2(\omega', d\omega''') = \varepsilon_{\tau(\omega')}$ où

$$\tau : (\mathcal{C}(R_+, V), \mathcal{B}'_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}(R_+, H), \mathcal{B}''_\infty)$$

mesurable et donc

$$\phi_i \circ P^i = \int_{\Omega'} dW(\omega') \varepsilon_{\tau(\omega')}(\cdot) \quad (i = 1, 2).$$

IV.2.5. — THÉORÈME IV.2.5. — Supposons l'unicité en loi, et l'existence pour tout x de H d'une solution (X_t, B_t) au problème $E(x, \sigma, b)$. Soit P_x l'unique loi de probabilité des solutions (X_t) au problème $E(x, \sigma, b)$ sur $\mathcal{C}(R_+, H)$ muni de sa tribu borélienne. Si, pour tout $f : H \rightarrow R$, borélienne bornée, l'application $x \rightarrow E_x[f(\xi_t)]$ [(ξ_t) est la famille des projections de $\mathcal{C}(R_+, H)$ sur H] est borélienne, alors $(P_x, x \in H)$ a la propriété de Markov forte pour les tribus $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_s, s \leq t)$.

Preuve. — Soit $\Omega' = \mathcal{C}(R_+, V)$, $\Omega'' = \mathcal{C}(R_+, H)$ munis de leurs tribus boréliennes, $\mathcal{B}'_t = \sigma(\xi'_s, s \leq t)$, $\mathcal{B}''_t = \sigma(\xi''_s, s \leq t)$ avec les notations du théorème précédent. Soit (Ω^0, B_t, X_t) une solution du problème $E(x, \sigma, b)$. D'après la démonstration du théorème précédent, on peut supposer que, $\Omega^0 = \Omega' \times \Omega''$, muni des tribus $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}'_t \otimes \mathcal{B}''_t$, $B_t = \xi'_t$ et ξ''_t solution de $E(x, \sigma, b, \xi'_t, P)$. Soit T un temps d'arrêt de $(\Omega'', \mathcal{B}''_t)$. Alors, $S(\omega', \omega'') = T(\omega'')$

est un temps d'arrêt de $(\Omega' \times \Omega'', \mathcal{B}'_t \otimes \mathcal{B}''_t)$. Soit $\tilde{\xi}'_t = \xi'_{t+s} - \xi'_s$ et $\tilde{\xi}''_{t+s} = \xi''_t$. On démontre, comme dans le cas fini dimensionnel [I], que $\tilde{\xi}'_t$ est un $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{t+s}$ mouvement brownien pour la probabilité $\tilde{P} = P[\cdot / S < \infty]$. Soit $Q_{S,\omega}$ une probabilité conditionnelle régulière de P par rapport à S . D'après une démonstration de Stroock-Varadhan [II], ou Reinhard ([I7], exposé 2), pour tout y' de V' ,

$$\exp \left\{ \left\langle y', \tilde{\xi}'_{t+S(\omega)} - \tilde{\xi}'_{S(\omega)} \right\rangle - \frac{1}{2} t \|y'\|_{\mathbb{H}}^2 \right\}$$

est une $Q_{S,\omega}$ martingale relativement aux tribus $\mathcal{B}_{t+S(\omega)}$, sauf pour un ensemble \tilde{P} négligeable de ω . Pour de tels ω , $(\tilde{\xi}'_{t+S(\omega)} - \tilde{\xi}'_{S(\omega)}, \tilde{\xi}''_{t+S(\omega)})$ est une solution au problème $E[\tilde{\xi}''_{S(\omega)}; \sigma, b]$ sur $(\Omega, Q_{S,\omega})$.

D'après l'unicité en loi, on a donc : $Q_{S,\omega} f(\tilde{\xi}'_{t+S(\omega)}) = P_{\tilde{\xi}'_{S(\omega)}}(f(\xi''_t))$. D'où, P. p. s. sur $(S < \infty)$, $E[f(\xi''_{t+s}) | \mathcal{B}_S] = P_{\xi'_S}(f(\xi''_t))$. Soit $A \in \mathcal{B}''_T$.

$$\int_{A \cap (T < \infty)} f(\xi''_{t+T}) dP_x = \int_{(\Omega' \times A) \cap (S < \infty)} f(\xi''_{t+S}) dP.$$

D'où :

$$\int_{A \cap (T < \infty)} f(\xi''_{t+T}) dP_x = \int_{A \cap (T < \infty)} P_{\xi'_T}(f(\xi''_t)) dP_x.$$

D'après la mesurabilité de $x \rightarrow P_x[f(\xi_t)]$, on a donc :

$$E_x[f(\xi''_{t+T}) | \mathcal{B}''_T] = E_{\xi'_T}(f(\xi''_t)) P_x \quad \text{p. s. sur } (T < \infty).$$

IV.2.6. — APPLICATION. — Supposons

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow \sigma_2(H) \\ b : H &\rightarrow H \end{aligned}$$

lipschitziennes bornées.

D'après III.2, il y a unicité trajectorielle des solutions du problème $E(x, \sigma, b)$ et l'application $x \rightarrow E[f(X_t^x)]$ (notation de III.2.2) est borélienne, pour f borélienne bornée. D'après les théorèmes IV.2.4 et IV.2.5, les probabilités canoniques (P_x) sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H)$ vérifient la propriété de Markov forte pour $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_s, s \leq t)$. On définit

$$P_t f(x) = E_x[f(\xi_t)] = E[f(X_t^x)].$$

De même que dans [I], on a alors : si $U^b(H)$ désigne les fonctions uniformément continues bornées de H , (P_t) est un semi-groupe tel que $P_t(U^b(H)) \subset U^b(H)$,

$$\forall f \in U^b(H), \quad \|P_t f - f\|_{U^b(H)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$\forall f$ bornée, telle que $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} |f(y)| = 0$, $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} |P_t f(y)| = 0$

$$\forall f \in C_b^2(\mathbb{H}), \quad P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s(Lf)(x) ds$$

(notations de IV.1.1).

3. Équivalence entre le problème des martingales et la résolution d'une équation différentielle stochastique

En IV.1.2, on a montré que l'existence d'une solution au problème $E(x, \sigma, b)$ entraînait l'existence d'une solution au problème $M(x, a = \sigma\sigma^*, b)$. On s'intéresse maintenant au passage du problème des martingales $M(x, a) = \sigma\sigma^*, b$ à la résolution d'une équation différentielle stochastique $E(x, \sigma', b)$, où σ' est une autre racine de a , i. e. : $a(y) = \sigma'(y)\sigma'^*(y)$.

IV.3.1. — Rappelons le lemme de décomposition polaire des opérateurs compacts.

LEMME IV.3.1. — Soit $A \in L(\mathbb{H})$, opérateur compact ; $T = (A^*A)^{1/2}$. Il existe alors $U \in L(\mathbb{H})$, U partiellement isométrique tel que $A = UT$.

Il suffit de prendre U isométrique sur $\overline{R(T)}$ et nul sur $[\overline{R(T)}]^\perp$. De même, il existe V isométrique sur $\overline{R(A)}$, nul sur $[\overline{R(A)}]^\perp$ tel que $T = VA$. On considérera maintenant uniquement les opérateurs U et V , ainsi définis. Le lemme suivant assure la bien-mesurabilité des processus employés dans la suite.

IV.3.2. — LEMME IV.3.2. — Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le lemme IV.3.1, on a :

- a) $U = s. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A[A^*A + \varepsilon I]^{-1/2}$
- b) $V = s. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A^*A + I)^{-1/2} A^* = U^*$
- c) $P_{[\overline{R(T)}} = s. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(T + \varepsilon I)^{-1}$
- d) $P_{[\overline{R(A)}} = U P_{[\overline{R(T)}} U^*$.

La démonstration de ce lemme est une conséquence immédiate du fait suivant : si une famille équicontinue d'opérateurs de $L(\mathbb{H})$ converge fortement vers 0 sur un sous-espace dense de \mathbb{H} , alors elle converge fortement vers 0 sur tout \mathbb{H} .

IV.3.3. — LEMME IV.3.3. — Soit P solution au problème des martin-

gales $M(x, a, b)$ avec $a(y) = \sigma(y)\sigma^*(y) = (a^{1/2}(y))^2$. Supposons que l'on ait montré

$$Y_t = X_t - x - \int_0^t b(X_s)ds = \int_0^t \sigma(X_s)dB_s,$$

où (B_t) est un mouvement brownien cylindrique sur H ; il existe alors \tilde{B}_t , mouvement brownien cylindrique tel que

$$Y_t = \int_0^t a^{1/2}(X_s)d\tilde{B}_s.$$

Preuve. — Appliquons le lemme IV.3.1 à $A = \sigma^*(y)$; il existe donc $U(y)$ partiellement isométrique tel que $\sigma^*(y) = U(y)a^{1/2}(y)$. Quitte à prendre pour nouvel espace de probabilité $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H) \times \Omega'$, il existe B' mouvement brownien, cylindrique sur H , indépendant de B et X . On définit alors :

$$\forall y \in H, \quad \tilde{B}_t(y) = \int_0^t (U(X_s)y, dB_s) + \int_0^t \langle P_{[\overline{R[a^{1/2}(X_s)]}]^\perp} y, dB'_s \rangle$$

Le processus croissant de $\tilde{B}_t(y)$ est alors la somme des deux processus croissants des intégrales stochastiques, donc $\|t\|_H^2$; \tilde{B}_t est donc un mouvement brownien cylindrique sur H ; soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H

$$\begin{aligned} \forall y \in H, \quad \langle y, Y_t \rangle &= \int_0^t \langle \sigma^*(X_s)y, dB_s \rangle \\ &= \int_0^t \langle U(X_s)a^{1/2}(X_s)y, dB_s \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \int_0^t \langle a^{1/2}(X_s)y, e_p \rangle d[\tilde{B}_s(e_p)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \int_0^t \langle a^{1/2}(X_s)y, e_p \rangle \langle P_{[\overline{R[a^{1/2}(X_s)]}]^\perp} e_p, dB'_s \rangle \end{aligned}$$

La première limite est $\int_0^t \langle a^{1/2}(X_s)y, d\tilde{B}_s \rangle$: la seconde est :

$$\int_0^t \langle P_{[\overline{R[a^{1/2}(X_s)]}]^\perp} a^{1/2}(X_s)y, dB'_s \rangle = 0.$$

IV.3.4. — LEMME IV.3.4. — Soit P solution au problème des martingales $M(x, a, b)$ avec $a(y) = \sigma(y)\sigma^*(y) = (a^{1/2}(y))^2$. Supposons que l'on

ait montré $Y_t = \int_0^t a^{1/2}(X_s) dB_s$, où (B_t) est un mouvement brownien cylindrique sur H ; il existe alors \tilde{B}_t mouvement brownien cylindrique tel que $Y_t = \int_0^t \sigma(X_s) d\tilde{B}_s$.

Preuve. — D'après la fin du lemme IV.3.1, il existe $V(y)$ partiellement isométrique tel que $a^{1/2}(y) = V(y)\sigma^*(y)$; avec $V(y)$ isométrique sur $R[\sigma^*(y)]$, nul sur l'orthogonal. On pose, comme dans le lemme IV.3.3

$$\tilde{B}_t(y) = \int_0^t \langle V(X_s)y, dB_s \rangle + \int_0^t \langle P_{[R\sigma^*(X_s)]^\perp} y, dB'_s \rangle$$

et alors :

$$\langle y, Y_t \rangle = \int_0^t \langle V(X_s)\sigma^*(X_s)y, dB_s \rangle = \int_0^t \langle \sigma^*(X_s)y, d\tilde{B}_s \rangle$$

IV.3.5. — Les deux lemmes précédents permettent d'énoncer le théorème général IV.3.5. Ce théorème est une application immédiate d'un théorème de représentation des martingales continues, à valeurs dans H [12]. Nous reprenons la démonstration détaillée de ce théorème pour montrer que les processus utilisés sont ici des fonctions de (X_s) .

THÉORÈME IV.3.5. — Soit P solution au problème des martingales $M(x, a, b)$. Alors, pour toute σ , racine carrée de a (i. e. : $a(y) = \sigma(y)\sigma^*(y)$, $y \in H$), il existe B mouvement brownien cylindrique sur H tel que

$$Y_t = \int_0^t \sigma(X_s) dB_s.$$

Preuve. — Par hypothèse, Y_t est une P martingale continue de processus croissant $\int_0^t a(X_s) ds$ (appendice). Soit une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H . On note $Y_t^n = \langle e_n, Y_t \rangle$; soit $Z_t^1 = Y_t^1$. Il existe Z_t^2 martingale continue, orthogonale à Z_t^1 et une fonction $\phi^{2,1} : H \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$Y_t^2 = \int_0^t \phi^{2,1}(X_s) dZ_s^1 + Z_t^2;$$

en effet, si cela est vérifié :

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle_t = \int_0^t \phi^{2,1}(X_s) d\langle Y^1, Y^2 \rangle_s;$$

en appliquant l'égalité de Cauchy-Schwarz à $a(x) \geq 0$, il existe donc $\phi^{2,1}(x)$ telle que : $\langle e_1, a(x)e_2 \rangle = \phi^{2,1}(x) \langle e_1, a(x)e_1 \rangle$; on définit alors

$$Z_t^2 = Y_t^2 - \int_0^t \phi^{2,1}(X_s) dY_s^1$$

et on vérifie Z_t^2 est orthogonale à Z_t^1 . On itère ce procédé d'orthogonalisation (de type Schmidt) pour obtenir l'existence de fonctions $\phi^{n,k} (k \leq n - 1, n \in \mathbb{N}) \phi^{n,k} : H \rightarrow \mathbb{R}$, et (Z_t^n) martingales deux à deux orthogonales telles que :

$$Y_t^n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t \phi^{n,k}(X_s) dZ_s^k + Z_t^n.$$

Le processus croissant de Z_t^n est donné par :

$$\int_0^t \langle e_n, a(X_s)e_n \rangle ds = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t (\phi^{n,k}(X_s))^2 d \langle Z^k, Z^k \rangle_s + \langle Z^n, Z^n \rangle_t.$$

Par récurrence, on démontre que le processus croissant de (Z_t^n) est absolument continu pour la mesure de Lebesgue et qu'il existe une nouvelle fonction $\psi_n : H \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\langle Z^n, Z^n \rangle_t = \int_0^t \{ \psi_n(X_s) \}^2 ds$. On pose alors

$$\begin{aligned} \theta_n(x) &= \frac{1}{\psi_n(x)} \quad \text{si } \psi_n(x) \neq 0 \\ &= 0 \quad \text{sinon et } B_t(e_n) = \int_0^t \theta^n(X_s) dZ_s^n + \int_0^t 1_{(\psi_n(X_s)=0)} dB_s^n, \end{aligned}$$

où (B^n) est une suite de mouvements browniens réels indépendants entre eux, et indépendants de X . B_t définit alors un mouvement brownien cylindrique sur H , puisque l'on connaît la valeur de B_t sur une base orthonormée de H et que les mouvements browniens scalaires $B_t(e_n)$ sont deux à deux orthogonaux.

De plus, on a :

$$Y_t^n = \sum_{k=1}^n \int_0^t \phi^{n,k}(X_s) \psi_k(X_s) dB_s(e_k).$$

Si $\sigma(x)$ est l'opérateur (non défini partout *a priori*) sur H , défini par :

$$\sigma(x)h = \sum_n e_n \left\{ \sum_{k \leq n} \phi^{n,k}(x) \psi_k(x) h_k \right\}$$

(lorsque cette expression a bien un sens), on a :

$$\begin{aligned} E[\|Y_t\|^2] &= \sum^n E[(Y_t^n)^2] \\ &= \sum_n \sum_{k \leq n} E \int_0^t \{ \phi^{n,k}(X_s) \psi_n(X_s) \}^2 ds \\ &= E \left[\int_0^t \|\sigma(X_s)\|_2^2 ds \right] < \infty. \end{aligned}$$

Donc, P. p. s., $\sigma(X_s)$ est un opérateur de Hilbert Schmidt et

$$Y_t = \int_0^t \sigma(X_s) dB_s.$$

D'après l'unicité du processus croissant de Y_t , on a :

$$a(X_s) = \sigma(X_s) \sigma^*(X_s) \quad \text{P. p. s.}$$

On ne connaît pas le comportement de $\sigma(x)$ pour tout x , mais d'après les démonstrations des lemmes IV.3.3 et IV.3.4 seul le processus $\sigma(X_s)$ (et non la fonction $\sigma(x)$) importe, d'où le résultat annoncé.

4. Conclusions

IV.4.1. — THÉORÈME IV.4.1. — Soient

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow \sigma_2(H) \\ b : H &\rightarrow H \end{aligned} \quad \text{boréliens, bornés.}$$

Il y a équivalence entre :

- 1) Le problème des martingales relatif à $\sigma\sigma^*$ et b admet une solution unique.
- 2) L'équation stochastique $E(x, \sigma, b)$ a une solution unique en loi.

Preuve :

a) Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{X}, \tilde{\beta}, \tilde{\mathbb{P}})$ une solution de l'équation $E(x, \sigma, b)$ et P_x l'image de \mathbb{P} sur $\Omega^0 = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H)$ par l'application $\phi : \Omega \rightarrow \Omega^0, \omega \rightarrow X_*(\omega)$; d'après IV.1.2, pour tout x , P_x est une solution au problème des martingales $M(x, \sigma\sigma^*, b)$.

b) Soit P_x une solution au problème des martingales $M(x, \sigma\sigma^*, b)$.

Prenons dans la démonstration du théorème IV.3.5 un mouvement brownien (N) (B') défini sur H , à valeurs dans V . Soit W la loi de (B') ;

on a montré alors, qu'il existe sur $\Omega^0 \times \Omega'$ un mouvement brownien $\tilde{\beta}_t$, tel que pour $\tilde{P}_x = P_x \otimes W$,

$$X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega, \omega') = x + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s) d\tilde{\beta}_s + \int_0^t b(\tilde{X}_s) ds,$$

d'où le résultat.

IV.4.2. — THÉORÈME IV.4.2. — Soit

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow \sigma_2(H) && \text{boréliens, bornés. } a = \sigma\sigma^* \\ b : H &\rightarrow H \end{aligned}$$

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ a(x) D^2 f(x) \} + \langle Df(x), b(x) \rangle_H.$$

Il y a équivalence entre :

- 1) Il y a existence et unicité de la diffusion associée à L.
- 2) Il y a existence et unicité de la solution au problème des martingales relatif à L et, de plus, l'application $x \rightarrow E_x[f(X_t)]$ est mesurable pour toute $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne, bornée.
- 3) Il y a existence et unicité en loi de la solution de $E(x, \sigma, b)$, pour tout x , et de plus, l'application $x \rightarrow E_x[f(X_t)]$ est mesurable pour toute $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne, bornée.

Preuve. — D'après le théorème précédent, 2) et 3) sont équivalents.

(1) \Rightarrow (2) C'est la propriété de Markov simple. D'autre part, la propriété de mesurabilité est vraie pour tout processus de Markov, défini à partir d'un semi-groupe de transition $P_t(x, \cdot)$.

(3) \Rightarrow (1) D'après le théorème IV.2.5.

IV.4.3. — En général, c'est l'unicité trajectorielle des solutions de $E(x, \sigma, b)$ qui est accessible. D'où, l'importance du théorème :

THÉORÈME IV.4.3. — Soient

$$\begin{aligned} a : H &\rightarrow \sigma_1^+(H) \\ b : H &\rightarrow H \end{aligned} \quad \text{boréliens, bornés.}$$

S'il existe une racine σ de a qui soit localement lipschitzienne, si b est localement lipschitzienne, il y a existence et unicité de la diffusion associée à L.

Preuve. — D'après le théorème III.2.2, il y a existence et unicité trajectorielle des solutions de l'équation $E(x, \sigma, b)$, ainsi que la propriété de

mesurabilité. D'après le théorème IV.2.4, il y a donc unicité en loi des solutions de $E(x, \sigma, b)$.

Enfin, d'après les théorèmes IV.2.5 et IV.4.2, il y a existence et unicité de la diffusion associée à L .

APPENDICE

MARTINGALES CONTINUES A VALEURS DANS UN ESPACE DE HILBERT

A.1. — La proposition suivante est d'un emploi constant dans les chapitres I et II.

PROPOSITION A.1. — Soit B espace de Banach, réel, séparable, et $(M_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une suite de F_t martingales continues à valeurs dans B , convergeant dans $L_B^2(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ vers M_t . Alors, $(M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une F_t martingale qui admet une version p. s. continue.

Preuve. — Pour tout (m, n) , le processus $\|M_t^m - M_t^n\|$ est une sous-martingale positive et continue. D'après le théorème de Doob, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$E \left[\sup_{t \leq T} \|M_t^m - M_t^n\|^2 \right] \leq 4E \left[\|M_T^m - M_T^n\|^2 \right] \xrightarrow{(m,n \rightarrow \infty)} 0$$

Il existe donc une sous suite $(M_t^{n_k})$ qui converge uniformément p. s. sur $[0, T]$ vers une version de M_t .

La proposition A.1 montre en particulier l'équivalence entre la continuité faible et la continuité forte d'une martingale de carré intégrable, à valeurs dans un espace de Hilbert H réel, séparable.

A.2. — Le théorème suivant prouve l'existence et l'unicité — de façon élémentaire — d'un processus croissant \mathcal{A}_t associé à une martingale continue à valeurs dans H , espace de Hilbert réel séparable.

THÉORÈME A.2. — Soit (M_t) , F_t martingale continue à valeurs dans H , telle que $\forall t, E[\|M_t\|^2] < \infty$. Il existe alors un processus croissant \mathcal{A}_t unique, à valeurs dans les opérateurs positifs de $\sigma_1(H)$ (munis de la relation d'ordre sur les opérateurs positifs), continu pour la norme $\|\cdot\|_1$ et tel que :

$$\forall y \in H, \quad \langle y, M_t \rangle^2 - \langle y, \mathcal{A}_t y \rangle$$

soit une martingale continue.

Preuve. — D'après le théorème de Meyer (II.1.1), pour tout y de H , il existe A_t^y processus croissant associé à $\langle y, M_t \rangle$. De même, pour y et z de H , il existe $A_t^{y,z}$ processus continu, à variation bornée, associé à $\langle y, M_t \rangle \langle z, M_t \rangle$. Si (h_n) est une base orthonormée de H , considérons la série double

$$\sigma_t(y) = \sum_n \langle y, h_n \rangle \langle y, h_n \rangle A_t^{h_n, h_n}.$$

De l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|A_t^{h_n, h_n}|^2 \leq (A_t^{h_n})(A_t^{h_n}),$$

on déduit la convergence absolue de la série double $\sigma_t(y)$, puisque :

$$E[\|M_t\|^2] = \sum_n E[A_t^{h_n}] < \infty.$$

On montre ensuite par passage à la limite que $\langle y, M_t \rangle^2 - \sigma_t(y)$ est une martingale continue. D'où : $\sigma_t(y) = A_t^y$; on en déduit par linéarité :

$$A_t^{y,z} = \sum_{n,n'} \langle y, h_n \rangle \langle z, h_{n'} \rangle A_t^{h_n, h_{n'}}$$

et donc il existe \mathcal{A}_t processus à valeurs opérateurs de $\sigma_1(H)$, positif tel que

$$A_t^{y,z} = \langle y, \mathcal{A}_t z \rangle \quad \text{avec} \quad E[\text{tr}(\mathcal{A}_t)] = \sum_n E[A_t^{h_n}] < \infty.$$

($t \rightarrow \mathcal{A}_t$) est une application croissante puisque :

$$\forall y \in H, \quad \langle y, \mathcal{A}_{t+s} y \rangle \geq \langle y, \mathcal{A}_t y \rangle.$$

Enfin, l'application ($t \rightarrow \mathcal{A}_t$) est continue pour les normes de $L(H)$ et $\sigma_1(H)$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{t+h} - \mathcal{A}_t\|_{L(H)} &\leq \|\mathcal{A}_{t+h} - \mathcal{A}_t\|_1 \\ &= \sum_n \langle h_n, (\mathcal{A}_{t+h} - \mathcal{A}_t) h_n \rangle \\ &\leq \sum_n \langle h_n, \mathcal{A}_T h_n \rangle \quad \text{pour} \quad t, t+h \leq T \end{aligned}$$

On a le résultat d'après le théorème de convergence dominé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. NEVEU, *Notes sur l'Intégrale Stochastique*. Cours de 3^e Cycle (2^e semestre 1972).
- [2] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens*. Presses de l'Université de Montréal.
- [3] J. NEVEU, *Variables aléatoires gaussiennes vectorielles*. Séminaire de janvier 1972. Laboratoire de Calcul des probabilités, Paris VI.
- [4] Y. DALETSKI, Infinite dimensional elliptic operators and parabolic equations connected with them. *Uspekhi Math. Nank*, t. 22, 1967 (en anglais dans : *Russian Maths. surveys*).
- [5] L. GROSS, Abstract Wiener measure and infinite dimensional potential theory. *Lecture Notes*, Springer, t. 140, 1970, p. 84-116.
- [6] L. GROSS, Potential theory on Hilbert space. *J. funct. Analysis*, t. 1, 1967, p. 123-181.
- [7] L. GROSS, Abstract Wiener space. Proc. of 5th Berkeley Symposium on Math. *Stat. of Prob.*, t. 2, 1965, p. 31-42.
- [8] H. H. KUO, Stochastic integrals in abstract Wiener space. *Pacific Journal of Math.*, t. 41, 1972, p. 469-483.
- [9] H. KUNITA, Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert space. *Nagoya Math. J.*, vol. 38, 1970, p. 41-52.
- [10] R. CURTAIN et P. FALB, Ito's lemma in infinite dimensions. *Journal of Math. Analysis and Applications*, vol. 31, 1970, p. 434-448.
- [11] STROOCK-VARADHAN, Diffusion processes with continuous coefficients. *Comm. in Pure and applied Math.*, vol. 22, 1969.

- [12] WATANABE-YAMADA, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *Kyoto*, vol. 11, 1971, n° 1.
- [13] J. Y. OUVRARD et D. LEPINGLE, Martingales browniennes hilbertiennes. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. 276, mai 1973.
- [14] B. GAVEAU, Intégrale stochastique radonifiante. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. 276, 19 février 1973.
- [15] A. BENSOUSSAN, *Filtrage optimal des systèmes linéaires* (p. 101). Collection M. M. I. (Dunod).
- [16] K. R. PARTHASARATHY, *Probability Measures on Metric spaces*. Academic Press (1967).
- [17] N. KAROUI et H. REINHARD, Processus de diffusion sur \mathbb{R}^n , *Lecture Notes*, Springer, Séminaire de Probabilités de Strasbourg, n° VIII.

(Manuscrit reçu le 16 novembre 1974).