Annales de l'I. H. P., section B

Iu. A. Davydov

Sur une classe des fonctionnelles des processus stables et des marches aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 1 (1974), p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 1, 1974, p. 1-29. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur une classe des fonctionnelles des processus stables et des marches aléatoires

par

Iu. A. DAVYDOV
Université de Leningrad
Faculté de Mathématiques et Mécanique,
V. O. 10ia linia, 33. *LÉNINGRAD.* URSS

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement limite des fonctionnelles des types *a* et *b* ci-dessous des processus stables et des marches aléatoires appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable. On donne des conditions suffisantes pour l'existence de la loi limite dans le cas multi-dimensionnel et des conditions nécessaires et suffisantes dans le cas de dimension un. On donne aussi des résultats sur le comportement du quotient de deux fonctionnelles de ce type et sur la structure des lois limites.

SUMMARY. — We study the asymptotic behavior of functionals of type *a* and *b* for stable processes and random walks attracted by a stable law. Sufficient conditions for the existence of the limit law are given in the multidimensional case whereas necessary and sufficient conditions are found in the one-dimensional case. Results on the asymptotic behavior of the ratio of two functionals and on the structure of the limit laws are also given.

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION

1.1. — Cet article est consacré à l'étude du comportement limite des fonctionnelles de deux types :

a) $$\int_0^T h(\xi(t))dt,$$

où $\xi(t)$ est un processus stable dans R_m, h est une fonction réelle sur R_m

b) $$\sum_1^n h(S_k),$$

où S_k est une marche aléatoire sur R_m appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable, h est une fonction réelle sur R_m.

On va s'intéresser à la question suivante : sous quelles hypothèses sur la fonction h et sur la marche aléatoire S_n les fonctionnelles de cette sorte normalisées par une suite convenable de constantes convergent-elles en loi ? Le premier résultat dans cette direction a été obtenu par P. Lévy [*1*] en 1939. Son résultat s'énonce.

Soit S_k la marche aléatoire engendrée par la répartition symétrique concentrée sur les points $+1$, -1 et soit h la fonction indicatrice de $[0, \infty)$. Alors

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_1^n h(S_k) < x\right\} \to \frac{2}{\pi} \text{arc sin } \sqrt{x}, \qquad x \in [0, 1]$$

Cette affirmation (comme, d'ailleurs la loi limite) a reçu le nom de « loi d'arc sinus » et a été généralisée par P. Erdös et M. Kac en 1947 [*2*]. Ceux-ci ont montré que ce résultat reste valable dans le cas où la répartition du pas de la marche aléatoire est centrée et de variance finie. Ensuite, en 1956 [*3*] F. Spitzer a démontré un résultat analogue pour les marches aléatoires appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable. Plus précisément, si S_n est une marche aléatoire de ce type, $h = 1_{[0,\infty)}$ et $\gamma = \lim_{n\to\infty} P\{S_n > 0\}$, alors

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_1^n h(S_k) < x\right\} \to \frac{\text{Sin } \pi\gamma}{\pi} \int_0^x t^{\gamma-1}(1-t)^{-\gamma}dt, \qquad x \in [0, 1]$$

En particulier, si $\gamma = \frac{1}{2}$ on obtient la loi d'arc sinus.

A peu près en même temps, G. Kallianpur, H. Robbins (1953, 1954) [*4*] [*5*] et R. L. Dobrouchine [*6*] (1955) ont étudié le cas où la fonction h est intégrable. L'article [7] (1957) de D. A. Darling et M. Kac prolonge ces études.

Dans les articles [*8*] [*9*] (1965, 1966) A. V. Skorokhod et N. P. Slobodenuk ont étudié les fonctionnelles du processus du mouvement brownien et des marches aléatoires dont la variance est finie. Ils sont éclairci le rôle de la variation régulière des fonctions $\int_0^T h(x)dx$ et $\int_{-T}^0 h(x)dx$ et ils ont obtenu des résultats non triviaux dans le cas multidimensionnel. Tous ces résultats sont contenus dans la monographie [*10*].

Cependant, la plupart de ces résultats ne sont valables que sous des hypothèses assez restrictives sur les marches aléatoires. Par exemple, on suppose qu'il existe un moment d'ordre 5 et de plus que la densité de répartition appartient à L_2. Le problème de l'étude des fonctionnelles des processus stables d'exposant $\alpha < 2$ et des marches aléatoires appartenant au domaine d'attraction de ces processus restait ouvert.

Dans cet article on propose les démonstrations des résultats annoncés dans [*11*] [*12*] et des résultats nouveaux. Dans le § 2 on formule des conditions sur la fonction h dans le cas multidimensionnel et on prouve l'existence de la loi limite. Dans le § 3 nous considérons la structure des variables aléatoires limites et donnons pour elles une représentation intégrale. Le § 3 est consacré à l'étude du comportement limite de plusieurs fonctionnelles des processus stables. Comme conséquence du théorème général on obtient le résultat sur le comportement du quotient de deux fonctionnelles. Il est intéressant de noter que la limite du quotient peut être aléatoire (ce qui est différent du cas où h est intégrable). Ensuite, dans le § 5, on considère les fonctionnelles des marches aléatoires appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable. On prouve l'existence de la loi limite sous des hypothèses qui sont, dans un certain sens, minimales, c'est-à-dire on suppose que la densité de S_n n'existe et est bornée qu'à partir d'un certain rang n_0. Enfin, le § 6 comporte des résultats proposant dans le cas de dimension unité des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la répartition limite.

La plus grande partie de ce travail a été faite durant mon séjour en France ; je remercie vivement le Laboratoire de Calcul des Probabilités de l'Université de Paris VI pour les conditions de travail excellentes dans lesquelles j'ai travaillé au cours de ce séjour.

Je remercie aussi l'équipe de probabilités de Rennes qui m'a donné la possibilité d'exposer ces résultats et dont les remarques m'ont été très précieuses.

1.2. — On va donner dans cette partie les définitions et notations principales.

On va supposer dans toute la suite que S_n est une marche aléatoire dans R_m pour laquelle il existe une suite des constantes C_n telle que $S_nC_n^{-1}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire ξ de loi stable d'exposant α. Il est connu que α appartient à $(0, 2]$ et que les constantes C_n sont de la forme $C_n = n^{1/\alpha}L(n)$, où $L(n)$ est une fonction à variation lente. Remarquons que dans le cas de dimension unité la fonction caractéristique de ξ admet la représentation (*)

$$\text{(1.1)} \qquad E \exp \{ it\xi \} = \exp \{ - |t|^{\alpha} e^{\pm i\varphi} \},$$

où $|\varphi| \leq \frac{\pi\alpha}{2}$, si $\alpha \in (0, 1)$; $\varphi = 0$, si $\alpha = 1$;

$$|\varphi| \leq \frac{\pi(2-\alpha)}{2}, \qquad \text{si} \qquad \alpha \in (1, 2] ;$$

on choisit « + », si $t > 0$ et on choisit « − » sinon.

Désignons par $w_\alpha(t)$ un processus stochastique à accroissements indépendants et stationnaires tel que la loi de $w_\alpha(1)$ est celle de ξ. La propriété de stabilité entraîne que les deux processus :

$$w_\alpha(t) \qquad \text{et} \qquad w_\alpha^{(1)}(t) = T^{-1/\alpha} w_\alpha(tT)$$

ont mêmes répartitions finies pour tout $T > 0$.

Définissons maintenant les fonctionnelles ν_T et τ_n, qui seront l'objet de notre étude, par les formules :

$$\text{(1.2)} \qquad \nu_T = B_T \int_0^1 h(w_\alpha(tT))dt,$$

$$\text{(1.3)} \qquad \tau_n = \frac{B_n}{n} \sum_1^n h(S_k),$$

ici $B_T(B_n)$ sont les constantes de normalisation et h est une fonction mesurable dans R_m.

Nous aurons aussi besoin des notations suivantes :

. $\mathscr{B}_m$ tribu borélienne de R_m
. $\mathscr{L}_m$ sous algèbre des ensembles bornés de $\mathscr{B}_m$

(*) Rappelons que l'on utilise la notion de « stabilité » au sens fort.
La loi du vecteur ξ est stable si pour tout n il existe C_n telle que les lois de $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ et de $C_n\xi$, où ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, sont les copies indépendantes de ξ, coïncident. On peut trouver la représentation (1.1) dans [*13*].

. Γ_m sphère de rayon 1 et de centre 0 dans R_m
. $\mathscr{A}_m$ tribu borélienne de Γ_m
. $\bar{m}$ mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_m$
. χ mesure de Haar sur $\mathscr{A}_m$
. $\lambda_{\mathscr{B}}$ restriction de la mesure λ définie sur la tribu $\mathscr{A}$ sur la tribu $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$
. $\mathscr{B} \cap A$ ou $\mathscr{B}_A$ intersection de la tribu $\mathscr{B}$ avec $A \in \mathscr{B}$
. G_k produit de R_m, k fois
. $\bar{x}$ vecteur $(x_1, \ldots, x_k)$, ou $x_i \in R_m$, $i = 1, \ldots, k$
. I_k produit de l'interval $[0, 1]$ k fois
. $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$, $t_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, k$
. $J_k = \{ \bar{t} \in I_k \mid t_1 < t_2 < \ldots < t_k \}$
. $P_{\bar{t}}$ répartition du vecteur $(w_\alpha(t_1), \ldots, w_\alpha(t_k))$
. $p_{\bar{t}}(\bar{x})$ densité de la répartition $P_{\bar{t}}$
. $Q_{\bar{t},T}$ répartition du vecteur $\left(\frac{S_{t_1}}{C_T}, \ldots, \frac{S_{t_k}}{C_T}\right)$
. $q_{\bar{t},T}$ densité de la répartition $Q_{\bar{t},T}$ (si elle existe)
. $\gamma = P\{ w_\alpha(1) \geq 0 \}$; dans [*13*] a été montré que $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi\alpha}$

On va noter par C les constantes absolues (par toujours les mêmes).

. ■ signe de la fin de démonstration.

2. CONDITIONS SUFFISANTES

2.1. — Soit h une fonction localement intégrable sur R_m. Définissons sur $\mathscr{L}_m$ les fonctions d'ensemble μ_T par la formule

$$\mu_T(A) = \mathscr{D}_T \int_A h(xT)dx, \tag{2.1}$$

$\mathscr{D}_T$ étant une suite de constantes. On dira que μ_T converge vers une fonction d'ensemble μ si quel que soit $A \in \mathscr{L}_m$ pour lequel $\mu(\partial A) = 0$ on a $\mu_T(A) \to \mu(A)$.

PROPOSITION 2.1. — Supposons que $\mu_T \to \mu$ et que μ soit une mesure différente de la mesure nulle et telle que $\mu(A)$ soit finie pour tout $A \in \mathscr{L}_m$. Alors on a

1) $\mathscr{D}_T = T^\beta L(T)$ où L est une fonction à variation lente

2) μ admet la représentation

$$\mu(A) = \int_{\Gamma_m} \lambda_\beta(A_\theta) Z(d\theta) \tag{2.2}$$

où Z est une mesure sur $\mathscr{A}_m$, $A = A_\theta \cap \{ x \mid x = t\theta, t \geq 0, \theta \in \Gamma_m \}$, λ_β est, quand $\beta \neq m$, la mesure sur $\mathscr{B}_{R_+}$ de densité $x^{m-\beta-1}$ et, quand $\beta = m$, λ_β est une mesure dégénérée au point 0.

Cette proposition est assez importante puisque, comme nous allons voir, la répartition limite pour les fonctionnelles ν_T, τ_n dépend de β et de la mesure Z.

Démonstration. — Il est facile de vérifier que l'égalité

$$\mu_{TV}(A) = \frac{\mathscr{D}_{TV}}{V^m \mathscr{D}_T} \mu_T(AV) \tag{2.3}$$

a lieu pour toutes T, V positives et tout $A \in \mathscr{L}_m$. En prenant A de telle manière que $\mu(AV) \neq 0$ et en faisant tendre T vers l'infini on obtient :

quel que soit $V > 0$ $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{\mathscr{D}_{TV}}{\mathscr{D}_T}$ existe et est finie.

D'après un théorème de Feller (cf. [*13*], chap. VIII, § 8) cela signifie que l'affirmation 1) a lieu. Maintenant on déduit de (2.3) que la mesure μ possède la propriété

$$\mu(AV) = V^{m-\beta} \mu(A). \tag{2.4}$$

D'après les résultats de [*14*] on peut écrire

$$\mu(A) = \int_m \lambda^{(\theta)}(A_\theta) Z_1(d\theta), \tag{2.5}$$

où les mesures $\lambda^{(\theta)}$ sont définies sur $\mathscr{B}_{R_+}$ et Z_1 est définie sur $\mathscr{A}_m$. La comparaison de (2.4) et (2.5) montre que presque toutes les mesures $\lambda^{(\theta)}$ possèdent la propriété (2.4). Cela veut dire que pour presque tous $\theta \in \Gamma_m$ $\lambda^{(\theta)}$ est la mesure λ_β à une constante près, disons C_θ. En posant $Z(d\theta) = C_\theta Z_1(d\theta)$ on arrive à la représentation (2.2). ■

REMARQUE 2.1. — On peut montrer que pour toute mesure μ admettant la représentation (2.2) il existe une fonction h telle que les fonctions μ_T définies par h convergent vers μ.

Dans les exemples ci-dessous on donne quelques fonctions h pour lesquelles μ_T convergent.

EXEMPLE 2.1. — Soient h_i, $i = 1, \ldots, k$, des fonctions bornées et telles que $h_i(x) = 0$ pour $x < 0$. Si

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h_i(y)dy = p_i \tag{2.6}$$

existe quel que soit $i = 1, \ldots, k$, alors μ_T engendrées par la fonction

$$h(x) = \prod_1^k h_i(x_i), \qquad x = (x_1, \ldots, x_k),$$

convergent vers la mesure $\mu = \prod_1^k p_i \bar{m}_{R_+^k}$.

EXEMPLE 2.2. — Soit $h(x) = |x|^{-\beta} 1_{\mathscr{U}}(x)$, où $\beta < m$ et $\mathscr{U}$ est un cone mesurable de sommet O. Si l'on pose $\mathscr{D}_T = T^\beta$ alors toutes les μ_T coïncident avec la mesure μ définie par (2.2) avec $Z = \chi_{\mathscr{A}_m \cap \mathscr{U}}$. Pour $h(x) = |x|^{-\beta}$ on note μ_β la mesure qui coïncide avec μ_T.

Maintenant nous pouvons formuler les conditions sur la fonction h qu'on va utiliser dans la suite.

R_1 : μ_T définies par (2.1) convergent vers la mesure μ qui est différente de la mesure nulle et pour laquelle μ_A est finie pour tout $A \in \mathscr{L}_m$.

R_2 : $\exists C > 0$, β_1 et β_2, tels que pour tout T et pour tout $A \in \mathscr{L}_m$

$$|\mu_T(A)| \leq C(\mu_{\beta_1}(A) + \mu_{\beta_2}(A)) \tag{2.7}$$

Il est évident que (2.7) a lieu si la fonction h satisfait à l'inégalité : $|h(x)| \leq C|x|^{-\beta}$ et par conséquent les fonctions des exemples 2.1 et 2.2 possèdent les propriétés R_1 et R_2 avec $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Dans le cas où $m = 1$, $\beta < 1$ les conditions R_1 et R_2 avec $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ sont équivalentes aux conditions suivantes :

i) les limites

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} \frac{\mathscr{D}_T}{T} \int_0^T h(x)dx = p \\ &\lim_{T\to\infty} \frac{\mathscr{D}_T}{T} \int_{-T}^0 h(x)dx = q \end{aligned} \tag{2.8}$$

existent ;

ii) quel que soit $x \in R_1$

$$|h(x)| \leq C|x|^{-\beta} \tag{2.9}$$

2.2. — Considérons les fonctionnelles ν_T.

THÉORÈME 2.1. — Soit h une fonction vérifiant les conditions R_1, R_2 avec $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 < \alpha$. Posons $B_T = \mathscr{D}_T 1/\alpha$ ($\mathscr{D}_T$ sont les constantes liées à h). La répartition de ν_T converge alors vers une répartition limite.

L'exemple suivant illustre ce théorème.

EXEMPLE 2.3. — Supposons que h est la fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathscr{B}_{R_1}$ pour lequel existent les limites

$$(2.10) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{\bar{m}(A \cap [0, T])}{T} \qquad \text{et} \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{\bar{m}(A \cap [-T, 0])}{T}$$

La fonctionnelle ν_T représente dans ce cas là le temps passé (normalisé) par le processus $w_\alpha(t)$ dans A jusqu'au moment T. Le théorème 2.1 affirme que la répartition limite pour ν_T existe.

Démonstration du théorème 2.1. — On va montrer que les moments $E\nu_T^k$ convergent vers des constantes a_k pour lesquelles le problème des moments (*) a une solution unique. En utilisant le fait que les processus $w_\alpha(t)$ et $T^{-1/\alpha}w_\alpha(tT)$ ont les mêmes répartitions finies il est facile de trouver que

$$E\nu_T^k = B_T^k E\left(\int_0^1 h(T^{1/\alpha}w_\alpha(t))dt\right)^k = B_T^k \int_{I_k} d\bar{t}\left(\int_{G_k} p_{\bar{t}}(\bar{x})\prod_1^k h(T^{1/\alpha}x_i)d\bar{x}\right)$$
$$= \int_{I_k} d\bar{t}\left(\int_{G_k} p_{\bar{t}}(\bar{x})\mu_T^{(k)}(d\bar{x})\right),$$

où $\mu_T^{(k)}$ est le produit k fois de μ_T.

Posons

$$A_k = \int_{I_k} d\bar{t}\left(\int_{G_k} p_{\bar{t}}(\bar{x})(\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2})^{(k)}(d\bar{x})\right)$$

LEMME 2.1. — Sous les hypothèses du théorème 2.1 il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in N$

$$(2.11) \qquad A_k \leq C^k . k\,!$$

Démonstration. — Il est évident que

$$A_k = k\,! \int_{J_k} d\bar{t}\left(\int_{G_k} p_{\bar{t}}(\bar{x})(\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2})^{(k)}(d\bar{x})\right)$$

(*) On dit que le problème des moments pour une suite $\{ a_k \}$ a une solution unique s'il n'existe qu'une seule mesure dont le moment d'ordre k coïncide avec a_k. A ce propos cf. par exemple [*13*].

Grâce à l'indépendance des accroissements du processus $W_\alpha(t)$ on a :

$$\int_{G_k} p_{\bar t}(x)(\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2})^{(k)}(d\bar x) = \int_{R_m} p_{t_1}(x_1)(\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2})(dx_1) \dots \int_{R_m} p_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})(\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2})(dx_k)$$

En utilisant la propriété (2.4) qui est valable pour les mesures μ_{β_1} et μ_{β_2} on obtient

$$\int_{R_m} p_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})(\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2})(dx_k) \tag{2.12}$$

$$= \sum_{i=1,2} (t_k - t_{k-1})^{-\frac{\beta_i}{\alpha}} \int_{R_m} (t_k - t_{k-1})^{\frac{\beta_i - m}{\alpha}} p\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{(t_k - t_{k-1})^{1/\alpha}}\right)\mu_{\beta_i}(dx_k)$$

$$= \sum_{i=1,2} (t_k - t_{k-1})^{-\frac{\beta_i}{\alpha}} \int_{R_m} p(y - b)\mu_{\beta_i}(dx_k),$$

où

$$y = \frac{x_k}{(t_k - t_{k-1})^{1/\alpha}}, \qquad b = \frac{x_{k-1}}{(t_k - t_{k-1})^{1/\alpha}}.$$

Il n'est pas difficile à vérifier que

$$\sup_{b \in R_m} \int_{R_m} p(y - b)\mu_{\beta_i}(dy) \leqq C < \infty \qquad (i = 1, 2).$$

Par conséquent, on obtient que l'expression (2.12) est inférieure où égale à $C(t_k - t_{k-1})^{-\frac{\beta_2}{\alpha}}$. Ainsi,

$$A_k \leqq k!\,C^k \int_{J_k} [t_1(t_2 - t_1)\dots(t_k - t_{k-1})]^{-\frac{\beta_2}{\alpha}} d\bar t$$

$$= k!\,C^k \frac{\Gamma^k\left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + k\left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha}\right)\right)} \leqq C^k k!$$

grâce à l'inégalité $\beta_2 < \alpha$. ■

Revenons à la démonstration du théorème. Posons :

$$f_T(\bar t) = \int_{G_k} p_{\bar t}(\bar x)\mu_T^{(k)}(d\bar x)$$

$$f(\bar t) = \int_{G_k} p_{\bar t}(\bar x)\mu^{(k)}(d\bar x)$$

$$a_k = \int_{I_k} f(\bar t)d\bar t.$$

Les conditions R_1, R_2 et le lemme 2.1 nous donnent la convergence $f_T(\bar{t}) \to f(\bar{t})$ quel que soit $\bar{t} \in I_k$. Il résulte de la condition R_2 que

$$|f_T(\bar{t})| \leqq C^k \int_{G_k} p_{\bar{t}}(\bar{x})(\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2})^{(k)}(d\bar{x})$$

et grâce au lemme 2.1 la fonction à droite est intégrable sur I_k. Par conséquent, d'après le théorème de Lebesgue on obtient que pour tout $k \in N$, $E\nu_T^k \to a_k$ quand $T \to \infty$ et de plus $|a_k| \leqq C^k.k$! Cette inégalité montre que le problème des moments pour la suite $\{a_k\}$ a une solution unique. Ainsi ν_T converge en loi vers une variable aléatoire ν telle que $E\nu^k = a_k$. ■

3. STRUCTURE DES LOIS LIMITES

3.1. — Maintenant on va étudier les variables aléatoires limites dont l'existence a été démontrée dans le paragraphe 2.

Soit $\theta \in \Gamma_m$. Définissons les variables aléatoires $\tau_{(\varepsilon)}$ par la formule :

$$\tau(\varepsilon) = \frac{1}{\chi(V_\varepsilon)} \int_0^1 |W_\alpha(t)|^{-\beta} 1_{K_\varepsilon}(W_\alpha(t))dt \tag{3.1}$$

où $V_\varepsilon = \{\phi \in \Gamma_m \,||\, \phi - \theta| \leqq \varepsilon\}$, K_ε est le cône au sommet 0 engendré par V_ε.

On va montrer que quand $\varepsilon \to 0$ il existe la limite dans L_2 des $\tau(\varepsilon)$.

PROPOSITION 3.1. — Il existe une variable aléatoire, disons τ_θ, telle que

$$E|\tau(\varepsilon) - \tau_\theta|^2 \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0$.

REMARQUE 3.1. — Dans le cas $m = 1$ l'existence des τ_θ est évidente et l'on a

$$\begin{aligned} \tau_{-1} &= \int_0^1 |W_\alpha(t)|^{-\beta} 1_{(-\infty,0]}(W_\alpha(t))dt \\ \tau_1 &= \int_0^1 |W_\alpha(t)|^{-\beta} 1_{[0,\infty)}(W_\alpha(t))dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

REMARQUE 3.2. — Le processus τ_θ, $\theta \in \Gamma_m$ a les répartitions finies qui ne dépendent que des caractéristiques de la loi de $W_\alpha(1)$ et de l'exposant β.

THÉORÈME 3.1. — Sous les hypothèses du théorème 2.1 la variable aléatoire limite admet la représentation :

$$\nu = \int_{\Gamma_m} \tau_\theta Z(d\theta), \tag{3.3}$$

où Z est la mesure de la représentation (2.2).

COROLLAIRE 3.1. — Soit $m = 1$. Supposons que la fonction h possède les propriétés (2.8), (2.9). Alors la loi limite pour ν_T est celle de variable aléatoire

$$\nu = p\tau_{-1} + q\tau_1,$$

où τ_i, $i = \pm 1$ sont définies par (3.2). Dans [*10*] on a montré que dans le cas $\alpha = 2$ la loi de τ_1 coïncide avec la loi de la variable aléatoire

$$\int_0^{W(1)} u(x)dx - \int_0^1 u(W(t))dW(t) \tag{3.4}$$

où $u(x) = \frac{1}{2}|x|^{1-\beta}\{(C_1 + C_2) + (C_1 - C_2)\,\text{sign}\, x\}$,

$$C_1 = \frac{p}{|p| + |q|}; \qquad C_2 = \frac{q}{|p| + |q|}.$$

La forme exacte des répartitions de τ_θ n'est connue que dans le cas où $m = 1$ et $\beta = 0$. Dans ce cas-là $\tau_{-1} = 1 - \tau_1$ et

$$p\{\tau_1 < x\} = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^x s^{\gamma-1}(1 - s)^{-\gamma}ds, \qquad x \in [0, 1]$$

où $\gamma = p\{W_\alpha(1) \geqq 0\}$.

Remarquons encore deux propriétés du processus τ_θ :

— si la loi de $W_\alpha(1)$ est invariante par rotation de R_m alors le processus τ_θ est stationnaire, c'est-à-dire ses répartitions finies sont invariantes par rotation de la sphère Γ_m ;

— si $\beta = 0$, on a alors :

$$\int_{\Gamma_m} \tau_\theta \chi(d\theta) = 1. \tag{3.5}$$

3.2. — **Démonstrations**

Nous allons commencer par l'étude de l'espérance mathématique

$$E\left(\prod_{i=1}^n \tau_i(\varepsilon_i)\right),$$

où $\tau_i(\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$, sont définies par les points $\theta_i \in \Gamma_m$ à l'aide de la formule (3.1). On va noter $V_\varepsilon^{(i)}$ et $K_\varepsilon^{(i)}$ le voisinage et le cône correspondant aux points θ_i. On a alors :

$$E\left(\prod_1^n \tau_i(\varepsilon_i)\right) = A_{\bar{\varepsilon}} \int_{I_n} d\bar{t}\left(\int_{K_{\bar{\varepsilon}}} \prod_1^n |x_i|^{-\beta} p_{\bar{t}}(\bar{x})d\bar{x}\right), \tag{3.6}$$

où

$$A_{\bar{\varepsilon}} = \left(\prod_1^n \chi(V_{\varepsilon_i}^{(i)})\right)^{-1} ; \qquad K_{\bar{\varepsilon}} = K_{\varepsilon_1}^{(1)} \times \ldots \times K_{\varepsilon_n}^{(n)}.$$

Passons aux coordonnées sphériques. Soient $x_i = (\phi_i, r_i)$, $\phi_i \in \Gamma_m$, $r_i \in R_+$, $i = 1, \ldots, n$. Posons

$$\pi(x) = \int_{I_k} p_{\bar{t}}(\bar{x}) d\bar{t}, \qquad \bar{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n), \qquad \bar{r} = (r_1, \ldots, r_n),$$

$V_{\bar{\varepsilon}} = V_{\varepsilon_1}^{(1)} \times \ldots \times V_{\varepsilon_n}^{(n)}$. On obtient maintenant que

$$E\left(\prod_1^n \tau_i(\varepsilon_i)\right) = A_{\bar{\varepsilon}} \int_{V_{\bar{\varepsilon}}} d\bar{\phi}\left(\int_{R_+^{(n)}} \pi(\bar{\phi}, \bar{r}) \prod_1^n r_i^{m-1-\beta} d\bar{r}\right).$$

La fonction

$$\int_{R_+^{(n)}} \pi(\bar{\phi}, \bar{r}) \prod_1^n r_i^{m-1-\beta} d\bar{r}$$

est continue et par conséquent, on trouve que :

$$\lim_{\bar{\varepsilon} \to 0} E\left(\prod_1^n \tau_i(\varepsilon_i)\right) = \int_{R_+^{(n)}} \pi(\bar{\theta}, \bar{r}) \prod_1^n r_i^{m-1-\beta} d\bar{r} \tag{3.7}$$

On en déduit facilement que

$$\lim_{\varepsilon_{1,2} \to 0} E \mid \tau(\varepsilon_1) - \tau(\varepsilon_2) \mid^2 = 0$$

et ce fait démontre la proposition 3.1.

Pour démontrer le théorème 3.1 il nous suffit de montrer que les moments de la variable aléatoire $\hat{v} = \int_{\Gamma_m} \tau_\theta Z(d\theta)$ coïncident avec les moments de la loi limite pour les fonctionnelles v_T. Les moments (on les a notés a_k) ont, comme nous avons vu, la représentation suivante :

$$a_k = \int_{I_k} d\bar{t} \int_{G_k} p_{\bar{t}}(\bar{x}) \mu^{(k)}(d\bar{x}) = \int_{G_k} \pi(\bar{x}) \mu^{(k)}(d\bar{x}) \tag{3.8}$$

Considérons $E\hat{v}^k$; on a

$$E\hat{v}^k = \int_{\Gamma_m^{(k)}} E\{\tau_{\theta_1} \ldots \tau_{\theta_k}\} Z^{(k)}(d\bar{\theta})$$

Grâce à (3.7) on obtient que

$$\mathrm{E}\hat{\nu}^k = \int_{\Gamma_m^{(k)}} \left(\int_{\mathrm{R}_+^{(k)}} \pi(\bar{\theta}, \bar{r}) \prod_1^k r_i^{m-1-\beta} dr \right) \mathrm{Z}^{(k)}(d\bar{\theta}) \tag{3.9}$$

Il n'est pas difficile de voir, en utilisant la proposition 2.1, que (3.8) et (3.9) sont égales. ■

4. COMPORTEMENT COMMUN. QUOTIENTS

4.1. — Dans ce paragraphe on va considérer le comportement de la répartition du vecteur $(\nu_{\mathrm{T}}^{(1)}, \ldots, \nu_{\mathrm{T}}^{(k)})$ dont les coordonnées $\nu_{\mathrm{T}}^{(i)}$ sont les fonctionnelles définies par les fonctions h_i, $i = 1, \ldots, k$ à l'aide du même processus $\mathrm{W}_\alpha(t)$.

THÉORÈME 4.1. — Soient h_i, $i = 1, \ldots, k$ des fonctions vérifiant la condition R_1, avec les exposants $\beta^{(i)}$ et les mesures Z_i, et la condition R_2 avec $\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, 0 \leqq \beta_1^{(i)} \leqq \beta_2^{(i)} < \alpha$, $i = 1, \ldots, k$. Posons $\mathrm{B}_{\mathrm{T}}^{(i)} = \mathscr{D}_{\mathrm{T}^{1/\alpha}}^{(i)}$, où $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{(i)}$ sont les constantes liées aux fonctions h_i. On peut alors affirmer que la répartition limite pour le vecteur $\bar{\nu}_{\mathrm{T}} = (\nu_{\mathrm{T}}^{(1)}, \ldots, \nu_{\mathrm{T}}^{(k)})$ existe et coïncide avec la répartition du vecteur $\bar{\nu} = (\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(k)})$, où

$$\nu^{(i)} = \int_{\Gamma_m} \tau_\theta^{(i)} \mathrm{Z}_i(d\theta) \tag{4.1}$$

et $\tau_\theta^{(i)}$ est la limite dans L_2 des variables aléatoires définies par (3.1) avec $\beta = \beta_i$ (cf. la proposition 3.1).

Démonstration. — On ne donnera que les étapes essentielles puisque l'idée de la démonstration est la même que celle utilisée auparavant.

D'abord on considère les moments :

$$m_{\mathrm{T}}(p_1, \ldots, p_k) = \mathrm{E}\left\{ \prod_{i=1}^k (\nu_{\mathrm{T}}^{(i)})^{p_i} \right\}, \qquad \text{où} \qquad \sum_1^k p_i = p.$$

La condition R_2 et le lemme 2.1 nous montrent qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que pour chaque $i = 1, \ldots, k$

$$\mathrm{E}\,|\,\nu_{\mathrm{T}}^{(i)}\,|^p \leqq p\,!\,\mathrm{C}^p. \tag{4.2}$$

On en déduit que

$$|\,m_{\mathrm{T}}(p_1, \ldots, p_k)\,| \leqq p\,!\,\mathrm{C}^p. \tag{4.3}$$

Ces inégalités nous permettent d'affirmer qu'il existe

$$\lim_{T\to\infty} m_T(p_1, \ldots, p_k) = m(p_1, \ldots, p_k)$$

quels que soient $p_1, \ldots, p_k$, et que le problème des moments pour la famille $\{ m(p_1, \ldots, p_k) \}$ a une solution unique. Cela signifie que la répartition du vecteur $\bar{v}_T$ converge, quand $T \to \infty$, vers une certaine répartition limite. De plus on obtient la représentation suivante pour les moments $m(p_1, \ldots, p_k)$:

$$(4.4) \qquad m(p_1, \ldots, p_k) = \int_{I_p} d\bar{t} \int_{G_p} p_t(\bar{y})\mu_{\beta_1}^{(p_1)}(dy_1) \ldots \mu_{\beta_k}^{(p_k)}(dy_k).$$

Pour terminer la démonstration il suffit de vérifier que les moments $m(p_1, \ldots, p_k)$ coïncident avec les moments

$$E\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\int_{\Gamma_m} \tau_\theta^{(i)} Z_i(d\theta)\right)^{p_i}\right).$$

Les mêmes raisonnements que dans la démonstration du théorème 3.1 nous donnent le résultat. ■

4.2. — Comme la conséquence immédiate du théorème 4.1 on obtient la caractérisation du comportement limite du quotient des fonctionnelles v_T.

THÉORÈME 4.2. — Supposons que h_1, h_2 soient deux fonctions vérifiant les conditions du théorème 4.1. On peut alors affirmer que la répartition de $\dfrac{v_T^{(1)}}{v_T^{(2)}}$ converge vers la répartition de la variable aléatoire

$$(4.5) \qquad \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_m} \tau_\theta^{(1)} Z_1(d\theta)}{\displaystyle\int_{\Gamma_m} \tau_\theta^{(2)} Z_2(d\theta)}.$$

COROLLAIRE 4.1. — Supposons que les fonctions h_1, h_2 vérifient les conditions du théorème 4.1 avec $\mathscr{D}_T^{(1)} \sim \mathscr{D}_T^{(2)}$, $Z_1 = CZ_2$ et $0 \leq \beta_1^{(i)} = \beta_2^{(i)} = \beta < \alpha$, $i = 1, 2$. Alors

$$\frac{v_T^{(1)}}{v_T^{(2)}} = \frac{\displaystyle\int_0^T h_1(W_\alpha(t))dt}{\displaystyle\int_0^T h_2(W_\alpha(t))dt} \to C$$

en probabilité.

Regardons encore le cas des fonctions indicatrices quand $m = 1$.

COROLLAIRE 4.2. — Soit A, $B \in \mathscr{B}_{R_+}$. Supposons que

$$\frac{1}{T} \bar{m}(A \cap [0, T]) \to p_1$$

$$\frac{1}{T} \bar{m}(B \cap [0, T]) \to p_2$$

et que $p_2 \neq 0$. On a alors

$$\frac{\int_0^T 1_A(W_\alpha(t))dt}{\int_0^T 1_B(W_\alpha(t))dt} \to \frac{p_1}{p_2}$$

en probabilité.

5. FONCTIONNELLES DES MARCHES ALÉATOIRES

5.1. — Maintenant nous passons aux fonctionnelles des marches aléatoires S_n appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable. Rappelons que cela veut dire qu'il existe une suite de constantes $\{ C_n \}$ telle que $S_n C_n^{-1}$ converge en loi vers $W_\alpha(1)$, où $W_\alpha(t)$ est un processus stable associé à cette loi stable. Posons :

$$S_t = S_n,\ C_t = C_n \quad \text{pour} \quad t \in (n-1, n], \qquad n = 1, 2, \ldots, B_T = \mathscr{D}_{C_T}.$$

Définissons les fonctionnelles τ_T par la formule :

$$\tau_T = B_T \int_0^1 h(S_{tT})dt. \tag{5.1}$$

Il est évident que cette définition est en accord avec la définition que nous avons donné dans le § 1. On va supposer dans la suite que la marche aléatoire S_n vérifie une des deux conditions suivantes :

A : $\exists n_0 \in N$ tel que la densité de S_{n_0} existe et est bornée ;

B : $\exists n_0 \in N$ tel que la partie de la loi de S_{n_0} absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue n'est pas égale à zéro.

THÉORÈME 5.1. — Supposons que S_n possède la propriété A et que la fonction h vérifie les propriétés R_1, R_2 avec $0 \leqq \beta_1 \leqq \beta_2 < \alpha$. La répartition de τ_T converge alors vers une répartition limite qui est la même que la répartition limite pour les fonctionnelles ν_T définies par la fonction h et le processus $W_\alpha(t)$.

Dans le cas $\beta = 0$ on peut renforcer ce résultat.

THÉORÈME 5.2. — Supposons que $\beta = 0$ et que la marche aléatoire S_n possède la propriété B. Soit h une fonction bornée pour laquelle la propriété R_1 ait lieu avec $\mathscr{D}_T = 1$. Le résultat du théorème 5.1 est encore valable.

Pour le cas de dimension unité ce théorème donne :

COROLLAIRE 5.1. — Soit $m = 1$ et soit h une fonction indicatrice pour laquelle les limites (2.8) existent (avec $\mathscr{D}_T = 1$). Si S_n possède la propriété B,

$$\tau_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} h(S_k)$$

converge en loi vers la variable aléatoire v du corollaire 3.1.

Le résultat suivant est analogue au théorème 4.1.

THÉORÈME 5.3. — Soient h_i, $i = 1, \ldots, k$, des fonctions vérifiant les conditions du théorème 4.1. Supposons que pour S_n la condition A soit vérifiée. Alors la répartition du vecteur

$$\bar{\tau}_T = \left(\tau_T^{(1)}, \ldots, \tau_T^{(k)}\right)$$

où les $\tau_T^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$, sont les fonctionnelles définies par h_i et S_n par la formule (5.1), converge vers la répartition du vecteur $\bar{v} = (v^{(1)}, \ldots, v^{(k)})$ dont les coordonnées sont définies par (4.1).

REMARQUE 5.1. — Un résultat semblable est encore valable dans le cas où pour les fonctions h_i les conditions du théorème 5.2 sont vérifiées.

Comme la conséquence immédiate du dernier théorème on obtient :

THÉORÈME 5.4. — Supposons que pour la marche aléatoire S_n et deux fonctions h_1, h_2 les conditions du théorème 5.1 (ou du théorème 5.2) soient vérifiées avec les exposants β_1, β_2 (dans le deuxième cas $\beta_1 = \beta_2 = 0$) et les mesures Z_1, Z_2. Alors la répartition de $\frac{\tau_T^{(1)}}{\tau_T^{(2)}}$ converge vers celle de la variable aléatoire définie par (4.5). Si les mesures Z_1, Z_2 sont proportionnelles, c'est-à-dire $Z_1 = CZ_2$ et si $\mathscr{D}_T^{(1)} \sim \mathscr{D}_T^{(2)}$, alors

$$\frac{\tau_T^{(1)}}{\tau_T^{(2)}} \to C$$

en probabilité.

COROLLAIRE 5.2. — Soit $m = 1$ et soient h_1, h_2 deux fonctions indicatrices pour lesquelles les limites (2.8) existent (avec $\mathscr{D}_T = 1$). Supposons que S_n possède la propriété B et que

$$\frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} h_1(x)\,dx}{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} h_2(x)\,dx} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} h_1(x)\,dx}{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} h_2(x)\,dx} = C.$$

Alors

$$\frac{\sum_1^n h_1(s_k)}{\sum_1^n h_2(s_k)} \to C$$

en probabilité.

5.2. — Avant de passer aux démonstrations des théorèmes on va donner quelques propositions auxiliaires.

LEMME 5.1. — Soit $L(t)$, $t \geqq 0$ une fonction à variation lente. Alors quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $L_\varepsilon(t)$, $t \geqq 0$, à variation lente qui possède les propriétés :

1) $L_\varepsilon(t) \sim L(t), \qquad t \to \infty$
2) $L_\varepsilon(t) \to C \neq 0, \qquad t \to 0$
3) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \dfrac{L_\varepsilon(t)}{L_\varepsilon(tx)} \leqq \begin{cases} x^\varepsilon, & x \geqq 1 \\ x^{-\varepsilon}, & 0 < x \leqq 1 \end{cases}$

Démonstration. — D'après le théorème de Karamata (cf. [*16*] [*13*])

$$L(t) = a(t)\exp\left\{\int_1^t \frac{\varepsilon(x)}{x}\,dx\right\} \tag{5.2}$$

où $a(t) \to a$, $\varepsilon(t) \to 0$, quand $t \to \infty$.

Choisissons $A > 1$ de telle manière que $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ pour $t \geqq A$ et posons

$$\varepsilon_1(t) = \begin{cases} \varepsilon(t), & t \geqq A \\ \dfrac{\varepsilon}{A^2}t^2, & 0 < t < A \end{cases}$$

$$a_1 = a.\exp\left\{-\int_1^A \frac{\varepsilon_1(t) - \varepsilon(t)}{t}\,dt\right\}.$$

Alors il n'est pas difficile de vérifier que la fonction

$$\mathrm{L}_\varepsilon(t) = a_1 \exp \left\{ \int_1^t \frac{\varepsilon_1(x)}{x} dx \right\}$$

possède toutes les propriétés nécessaires. ■

Rappelons que par $\mathrm{Q}_{\bar{t},\mathrm{T}}$ et $q_{\bar{t},\mathrm{T}}$ on a noté la répartition du vecteur $\left(\frac{\mathrm{S}_{t_1}}{\mathrm{C}_\mathrm{T}}, \ldots, \frac{\mathrm{S}_{t_k}}{\mathrm{C}_\mathrm{T}}\right)$ et sa densité si elle existe.

PROPOSITION 5.1. — Supposons que S_n possède la propriété A. Alors

$$\sup_{\bar{x}\in \mathrm{G}_k} | q_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}}(\bar{x}) - p_{\bar{t}}(\bar{x}) | \to 0 \tag{5.3}$$

quand $\mathrm{T} \to \infty$ quel que soit $\bar{t} \in \mathrm{J}_k$.

PROPOSITION 5.2. — Supposons que pour la marche aléatoire S_n la propriété B ait lieu. Alors

$$\int_{\mathrm{G}_k} | q_{\bar{t},\mathrm{T},\mathrm{T}}(\bar{x}) - p_{\bar{t}}(\bar{x}) | \, d\bar{x} \to 0 \tag{5.4}$$

quand $\mathrm{T} \to \infty$ quel que soit $\bar{t} \in \mathrm{J}_k$.

Démonstration. — Un résultat analogue du théorème de Gnedenko [*17*], dans le cas multi-dimensionnel démontré dans [*18*] nous dit que sous des hypothèses de la proposition 5.1

$$\sup_{x\in \mathrm{R}_m} | q_{\mathrm{T},\mathrm{T}}(x) - p(x) | \to 0 \tag{5.5}$$

quand $\mathrm{T} \to \infty$. En utilisant des propriétés des densités des lois stables (cf. [*21*]) il est facile de déduire (5.3) de (5.5).

Pour démontrer la proposition 5.2 il suffit d'utiliser la variante multi-dimensionnelle du théorème de Prokhorov [*17*], obtenue aussi dans [*18*]). ■

5.3. — **Démontration du théorème** 5.1

Dans nos conditions $\mathrm{B}_\mathrm{T} = \mathscr{D}_{\mathrm{C}_\mathrm{T}}$ et $\mathscr{D}_\mathrm{T} = \mathrm{T}^\beta \mathrm{L}_1(\mathrm{T})$, $\mathrm{C}_\mathrm{T} = \mathrm{T}^{1/\alpha}\mathrm{L}_2(\mathrm{T})$, où L_1 et L_2 sont des fonctions à variation lente. Cela entraîne que les constantes B_T admettent la représentation : $\mathrm{B}_\mathrm{T} = \mathrm{T}^{\beta/\alpha}\mathrm{L}(\mathrm{T})$, où $\mathrm{L}(\mathrm{T})$ est aussi à variation lente. Il est évident que le comportement limite des fonctionnelles τ_T ne changera pas si l'on remplace $\mathrm{L}(\mathrm{T})$ par une fonction équivalente. Par conséquent on peut supposer que la fonction $\mathrm{L}(\mathrm{T})$ possède les propriétés 2) et 3) du lemme 5.1 avec $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{\beta_2}{\alpha} + \varepsilon < 1$. Montrons maintenant qu'on peut supposer la fonction h bornée. La propriété R_2 donne que pour chaque T l'inégalité

$$(5.6) \qquad \mathcal{D}_T \,|\, h(xC_T) \,| \leqq C(|\,x\,|^{-\beta_1} + |\,x\,|^{-\beta_2})$$

a lieu pour presque tous $x \in R_m$. Il en résulte que presque partout

$$(5.7) \qquad \begin{array}{ll} |\,h(x)\,| \leqq C\,|\,x\,|^{-\beta_2}, & |\,x\,| \in (0, 1) \\ |\,h(x)\,| \leqq C\,|\,x\,|^{-\beta_1}, & |\,x\,| \geqq 1. \end{array}$$

Posons

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x), & |\,x\,| \geqq 1 \\ 0\ , & |\,x\,| < 1 \end{cases}; \qquad h_2 = h - h_1$$

et définissons les fonctionnelles $\tau_T^{(1)}$ par la formule :

$$\tau_T^{(1)} = B_T \int_0^1 h_1(S_{tT})dt.$$

Montrons que $|\,\tau_T - \tau_T^{(1)}\,| \to 0$ en probabilité. On remarque d'abord que :

$$(5.8) \qquad B_T \int_0^{2n_0/T} |\,h_2(S_{tT})\,|\,dt = \frac{B_T}{T} \sum_{k=1}^{2n_0} h_2(S_k) \to 0$$

en probabilité puisque $\frac{B_T}{T} \to 0$.

Maintenant on a :

$$E\left(B_T \int_{2n_0/T}^1 |\,h_2(S_{tT})\,|\,dt\right) = \int_{2n_0/T}^1 dt\left(B_T \int_{R_m} |\,h_2(xC_{tT})\,|\,q_{tT,tT}(x)\,dx\right)$$
$$\leqq C \int_{2n_0/T}^1 dt\left(\frac{B_T}{B_{Tt}} \int_{|x| \leqq C_{tT}^{-1}} |\,x\,|^{-\beta_2} q_{tT,tT}(x)\,dx\right)$$

car nous avons (5.7) et par définition $h_2(x) = 0$, si $|\,x\,| \geqq 1$.

La densité $q_{tT,tT}$ existe puisque $tT \geqq 2n_0$ et est bornée par une constante qui ne dépend pas de t, T tels que $tT \geqq 2n_0$ grâce à (5.5). D'après notre choix de fonction L(t). $\frac{B_T}{B_{Tt}} \leqq t^{-\gamma}$, où $\gamma = \frac{\beta_2}{\alpha} + \varepsilon$. Ainsi

$$\overline{t}\left(B_T \int_{2n_0}^1 |\,h_2(S_{tT})\,|\,dt\right) \leqq C \int_0^1 f_T(t)\,dt,$$

où $f_T(t) = t^{-\gamma} \int_{|x| \leqq C_{Tt}^{-1}} |x|^{-\beta_2} dx$ pour $t \in [2n_0/T, 1]$ et $f_T(t) = 0$ pour $t \in (0, 2n_0/T)$.

Il est clair que $f_T(t) \leqq Ct^{-\gamma}$ et $f_T(t) \to 0$, $T \to \infty$. Par conséquent on peut affirmer que $\int_0^1 f_T(t)dt \to 0$. Cela signifie que

$$B_T \int_{2n_0/T}^{1} |h_2(S_{tT})| \, dt \to 0$$

en probabilité. Ce fait avec (5.8) nous montre que $|\tau_T - \tau_T^{(1)}| \to 0$ en probabilité. Dans la suite on peut donc supposer h bornée : $|h(x)| \leqq M$. Démontrons maintenant encore une proposition auxiliaire.

LEMME 5.2. — Sous les hypothèses du théorème 5.1 les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(5.9) \quad \sup_{y \in R_m} B_T \int_{R_m} h(xC_T) Q_{tT,T}(dx - y) \leqq \begin{cases} MB_T, & \text{quand} \quad t \leqq 2n_0/T \\ C\dfrac{B_T}{B_{Tt}}, & \text{quand} \quad 2n_0/T \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

Démonstration. — La première inégalité est évidente. Vérifions la seconde. La densité $q_{tT,T}$ existe si $tT \geqq 2n_0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sup_{y \in R_m} B_T \int_{R_m} & h(xC_T) q_{tT,T}(x - y) \, dx \\ &= \frac{B_T}{B_{Tt}} \sup_{y \in R_m} \left\{ B_{Tt} \int_{R_m} h(xC_{tT} + y) q_{tT,tT}(x) \, dx \right\} \\ &\leqq C \frac{B_T}{B_{Tt}} \max_{i=1,2} \sup_{y \in R_m} \left\{ \int_{R_m} |x + y|^{-\beta_i} q_{tT,tT}(x) \, dx \right\} \\ &\leqq C \frac{B_T}{B_{Tt}} \end{aligned}$$

car les expressions

$$\int_{R_m} |x + y|^{-\beta_i} q_{tT,tT}(x) \, dx, \qquad i = 1, 2$$

sont bornées uniformément en y. Le lemme est démontré. ■

Considérons les moments $E\tau_T^k$. Posons :

$$\begin{aligned} J_k &= \{ \bar{t} \in I_k \mid 0 < t_1 \dots < t_k < 1 \} \\ J_k^{(1)} &= \{ t \in I_k \mid t_{i+1} - t_i \geqq 2n_0/T \, ; \, i = 0, 1, \dots, k - 1 \} \\ J_k^{(2)} &= J_k \backslash J_k^{(1)} \, ; \, \Pi_s = \{ i_1, \dots, i_s \}, \, i_l \in N, \, i_1 < \dots < i_s, \, s = 0, 1, \dots, k \\ A(\Pi_s) &= \{ \bar{t} \in J_k \mid t_{j+1} - t_j \geqq 2n_0/T \text{ si } j \in \Pi_s, \, t_{j+1} - t_j < 2n_0/T \text{ si } j \notin \Pi_s \}. \end{aligned}$$

Il est clair que $J_k^{(1)} = A(\pi_k)$ et que

$$J_k^{(2)} = \bigcup_{s=0}^{k-1} \bigcup_{\pi_s} A(\pi_s)$$

On a :

$$E\tau_T^k = \int_{I_k} d\bar{t}\left(B_T^k \int_{G_k} H(\bar{x}C_T)Q_{\bar{t}T,T}(d\bar{x}) \right) = k\,! \int_{J_k} f_T(\bar{t})d\bar{t},$$

où l'on a posé $H(\bar{x}) = \prod_1^k h(x_i)$,

$$f_T(\bar{t}) = B_T^k \int_{G_k} H(\bar{x}C_T)Q_{\bar{t}T,T}(d\bar{x}).$$

Montrons que $\int_{J_k^{(2)}} f_T(\bar{t})d\bar{t} \to 0$ quand $T \to \infty$.

Les ensembles $A(\pi_s)$ sont disjoints et cela entraîne que

$$\int_{J_k^{(2)}} f_T(\bar{t})\,d\bar{t} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{\pi_s} \int_{A(\pi_s)} f_T(\bar{t})d\bar{t}.$$

Les inégalités du lemme 5.2 donnent l'évaluation :

$$\int_{A(\pi_s)} f_T(\bar{t})d\bar{t} \leqq CB_T^{k-s} \int_{A(\pi_s)} \prod_{i\in\pi_s} (t_{i+1} - t_i)^{-\rho} d\bar{t},$$

où $\rho = \dfrac{\beta_2}{\alpha} + \varepsilon$. En utilisant le fait que quel que soit $p \in N$

$$\int_{J_p} \prod_{i=0}^{p-1} (t_{i+1} - t_i)^{-\rho} d\bar{t} < \infty.$$

on obtient que

$$\int_{J_k^{(2)}} f_T(\bar{t})\,d\bar{t} \leqq C \prod_{s=0}^{k-1} \left(\frac{B_T}{T}\right)^{k-s} \to 0$$

quand $T \to \infty$. Un raisonnement analogue nous montre que pour $\bar{t} \in A(\pi_k)$

$$(5.10) \qquad | f_T(\bar{t}) | \leqq C \prod_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i)^{-\rho}$$

Maintenant nous sommes capables de montrer que la différence

$|\,\mathrm{E}\tau_{\mathrm{T}}^{k} - \mathrm{E}\nu_{\mathrm{C_T}}^{k}\,|$ converge vers zéro. Manifestement, cela démontrera le théorème.

Remarquons que

$$\mathrm{E}\nu_{\mathrm{C_T}}^{k} = k\,!\int_{\mathrm{J}_k} g_{\mathrm{T}}(\bar{t})d\bar{t},$$

où

$$g_{\mathrm{T}}(\bar{t}) = \mathrm{B}_{\mathrm{T}}^{k}\int_{\mathrm{G}_k} \mathrm{H}(\bar{x}\mathrm{C}_{\mathrm{T}})p_{\bar{t}}(\bar{x})d\bar{x}.$$

On vérifie facilement que $\int_{\mathrm{J}_k^{(2)}} g_{\mathrm{T}}(\bar{t})d\bar{t} \to 0$ quand $\mathrm{T} \to \infty$, il suffit donc d'étudier le comportement de $\int_{\mathrm{J}_k^{(1)}} |\,f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})\,|\,dt$. On a

$$\begin{aligned}|\,f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})\,| &\leqq \mathrm{B}_{\mathrm{T}}^{k}\int_{\mathrm{G}_k} |\,\mathrm{H}(\bar{x}\mathrm{C}_{\mathrm{T}})\,|\;|\,q_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}}(\bar{x}) - p_{\bar{t}}(\bar{x})\,|\,d\bar{x}\\ &\leqq \mathrm{C}\max_{j=1,2}\int_{\mathrm{G}_k}\prod_{i=1}^{k}|\,x_i\,|^{-\beta_j}\,|\,q_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}}(\bar{x}) - p_{\bar{t}}(\bar{x})\,|\,d\bar{x}.\end{aligned}$$

C'est pourquoi pour chaque $\mathrm{A} > 0$

$$\begin{aligned}&\limsup_{\mathrm{T}\to\infty}|\,f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})\,|\\ &\quad\leqq \mathrm{C}\max_{j=1,2}\left\{\int_{|\bar{x}|\leqq\mathrm{A}}\prod_{1}^{k}|\,x_i\,|^{-\beta_j}d\bar{x}\right\}\limsup_{\mathrm{T}\to\infty}|\,q_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}}(\bar{x}) - p_{\bar{t}}(\bar{x})\,|\\ &\quad+ \mathrm{C}\limsup_{\mathrm{T}\to\infty}\int_{|\bar{x}|>\mathrm{A}}|\,q_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}}(\bar{x}) - p_{\bar{t}}(\bar{x})\,|\,d\bar{x}.\end{aligned}$$

La première limite est égale à zéro d'après la proposition 5.1. La deuxième limite peut être rendue $\leqq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$, si A est suffisamment grand. Par conséquent

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty}|\,f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})\,| = 0$$

De l'autre côté, d'après (5.10) $f_{\mathrm{T}}(\bar{t})$ est majorée par une fonction intégrable sur I_k. $g_{\mathrm{T}}(\bar{t})$ possède aussi cette propriété (cf. la démonstration du théorème 2.1). Ainsi

$$\int_{\mathrm{J}_k^{(1)}}|\,f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})\,|\,d\bar{t} \to 0$$

quand $\mathrm{T} \to \infty$. ■

La démonstration du théorème 5.2 est plus simple. On a

$$|\mathrm{E}\tau_{\mathrm{T}}^{k} - \mathrm{E}\nu_{\mathrm{C_T}}^{k}| = k!\left|\int_{\mathrm{J}_k} d\bar{t}\left(\int_{\mathrm{G}_k} \mathrm{H}(\bar{x}\mathrm{C_T})[\mathrm{Q}_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}} - \mathrm{P}_{\bar{t}}](d\bar{x})\right)\right|.$$

On va considérer l'intégrale sur J_k comme la somme des intégrales sur $\mathrm{J}_k^{(1)}$ et $\mathrm{J}_k^{(2)}$

$$\int_{\mathrm{J}_k^{(2)}}^{1} d\bar{t}\left|\int_{\mathrm{G}_k} \mathrm{H}(\bar{x}\mathrm{C_T})[\mathrm{Q}_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}} - \mathrm{P}_{\bar{t}}](d\bar{x})\right| \leqq \mathrm{C}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{\pi_s}\int_{\mathrm{A}(\pi_s)} d\bar{t} \leqq \mathrm{C}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{1}{\mathrm{T}^{k-s}} \to 0$$

quand $\mathrm{T} \to \infty$. Pour $\bar{t} \in \mathrm{J}_k^{(1)}$ la densité de la répartition $\mathrm{Q}_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}}$ existe. On a donc

$$\int_{\mathrm{J}_k^{(1)}} d\bar{t}\left|\int_{\mathrm{G}_k} \mathrm{H}(\bar{x}\mathrm{C_T})[\mathrm{Q}_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}} - \mathrm{P}_{\bar{t}}](d\bar{x})\right| = \int_{\mathrm{J}_k^{(1)}} |f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})|\, d\bar{t},$$

où l'on a utilisé les notations de la démonstration précédente. Il est évident que $\forall \bar{t} \in \mathrm{J}_k^{(1)}$, $|f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})| \leqq \mathrm{C}$, où C ne dépend ni de T ni de $\bar{t}$. De plus nous avons d'après la proposition 5.2 que

$$|f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})| \leqq \mathrm{C}\int_{\mathrm{G}_k} |q_{\bar{t}\mathrm{T},\mathrm{T}}(\bar{x}) - p_{\bar{t}}(\bar{x})|\, d\bar{x} \to 0$$

quand $\mathrm{T} \to \infty$ si $\bar{t} \in \mathrm{J}_k^{(1)}$. Par conséquent

$$\int_{\mathrm{J}_k^{(1)}} |f_{\mathrm{T}}(\bar{t}) - g_{\mathrm{T}}(\bar{t})|\, d\bar{t} \to 0$$

et donc

$$|\mathrm{E}\tau_{\mathrm{T}}^{k} - \mathrm{E}\nu_{\mathrm{C_T}}^{k}| \to 0. \blacksquare$$

La démonstration du théorème 5.3 est analogue à celle du théorème 4.1. On ne va pas s'étendre dessus.

REMARQUE 5.2. — L'analyse des démonstrations ci-dessus montre que la proposition suivante est encore valable :

PROPOSITION 5.3. — Supposons que la fonction h possède la propriété R_2 avec $0 \leqq \beta_1 \leqq \beta_2 < \alpha$ et que pour la marche aléatoire S_n la condition A soit vérifiée. On peut alors affirmer que les répartitions limites pour les fonctionnelles τ_{T} et ν_{T} existent ou n'existent pas en même temps. Dans le cas de l'existence elles coïncident.

6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES

6.1. — Maintenant on passe au cas de dimension unité où l'on peut donner des résultats plus précis.

Soit S_n une marche aléatoire dans R_1 telle que $\frac{S_n}{C_n}$ converge vers $W_\alpha(1)$, où $W_\alpha(t)$ est un processus stable d'exposant α et soient τ_T, ν_T des fonctionnelles définies par les formules (1.2), (1.3). On va supposer que S_n possède la propriété A (ou B, si $\beta = 0$ et $\mathscr{D}_T = 1$). Les propositions suivantes sont vérifiées.

THÉORÈME 6.1. — Supposons que

i) $\gamma = P\{W_\alpha(t) > 0\} > 0$

ii) $h(x) = 0,\ x < 0$

iii) $\mathscr{D}_T = T^\beta L(T)$, où $\beta \in [0, \alpha \wedge 1)$ et L est une fonction à variation lente ;

iv) les fonctions h et L sont telles que

$$\sup_{0<x<1} |h(x)|\, x^\beta + \sup_{x \geq 1} |h(x)|\, x^\beta L(x) < \infty. \tag{6.1}$$

Alors l'existence de la répartition limite soit pour ν_T soit pour τ_T est équivalente à l'existence d'une des limites suivantes :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L(T)}{T^{1-\beta}} \int_0^T h(x)dx = a \tag{6.2}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L(T)}{T} \int_0^T h(x)x^\beta dx = b. \tag{6.3}$$

REMARQUE 6.1. — Manifestement, l'affirmation analogue (avec les changements évidents des conditions) est réalisée pour les fonctions h telles que $h(x) = 0,\ x > 0$.

REMARQUE 6.2. — Les constantes a et b sont liées par l'égalité :

$$a = \frac{b}{1-\beta}.$$

Dans le cas où L est constante on peut renforcer le résultat précédent.

THÉORÈME 6.2. — Supposons que

i) $\gamma > 0$
ii) $h(x) = 0, \ x < 0$
iii) $\mathscr{D}_T = T^\beta, \ \beta \in [0, \alpha \wedge 1)$
iv)

$$\sup_{x \in R_+} |h(x)| x^\beta < \infty. \tag{6.4}$$

Alors la répartition limite pour ν_T et pour τ_T existe si et seulement si une des limites suivantes existe :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^{1-\beta}} \int_0^T h(x) dx \tag{6.5}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(x) x^\beta dx.$$

COROLLAIRE 6.1. — Soit $A \in \mathscr{B}_{R_+}$ et soit $\gamma > 0$. Alors la répartition limite pour $\nu_T = \frac{1}{T} \int_0^T 1_A(W_\alpha(t)) dt$ et pour $\tau_n = \frac{1}{n} \sum_1^n 1_A(S_k)$ (sous l'hypothèse B sur la m. a. S_n) existe si et seulement si la limite

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \bar{m}(A \cap [0, T])$$

existe.

6.2. — La démonstration des affirmations précédentes est basée sur un théorème de Wiener du type tauberien et ses généralisations. Le résultat principal dans cette direction s'énonce :

THÉORÈME 6.3. — Supposons que

$$\frac{L(T)}{T^{1-\beta}} \int_0^\infty p\left(\frac{x}{T}\right) h(x) dx \to C \int_0^\infty p(x) x^{-\beta} dx, \qquad T \to \infty,$$

où L(T) est une fonction à variation lente, β est un nombre réel et C est une constante. Supposons aussi que

i) il existe $\beta_1, \beta_2, \beta_1 < \beta < \beta_2$ tels que

$$\int_0^1 |p(x)| x^{-\beta_2} dx + \int_1^\infty |p(x)| x^{-\beta_1} dx < \infty.$$

ii) $\int_0^\infty p(x)x^{it-\beta} \neq 0$ quel que soit $t \in \mathrm{R}_1$

iii) $\sup_{0<x<1} |h(x)|x^\beta + \sup_{x \geqq 1} |h(x)|x^\beta \mathrm{L}(x) < \infty.$

On a alors pour chaque fonction q, satisfaisant à la condition *i)* :

$$\frac{\mathrm{L(T)}}{\mathrm{T}^{1-\beta}} \int_0^\infty q\left(\frac{x}{\mathrm{T}}\right)h(x)dx \to \mathrm{C}\int_0^\infty q(x)x^{-\beta}dx, \qquad \mathrm{T} \to \infty. \tag{6.8}$$

Démonstration. — Le comportement limite de l'expression

$$\frac{\mathrm{L(T)}}{\mathrm{T}^{1-\beta}} \int_0^\infty p\left(\frac{x}{\mathrm{T}}\right)h(x)dx$$

ne change pas si L(T) est remplacée par une fonction équivalente. C'est pourquoi on peut supposer que L est choisie, d'après le lemme 5.1, de telle manière que

$$\sup_{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{L(T)}}{\mathrm{L(T}x)} \leqq \begin{cases} x^\varepsilon, & x \geqq 1 \\ x^{-\varepsilon}, & x \leqq 1 \end{cases}$$

où $0 < \varepsilon < \min(\beta_2 - \beta, \beta - \beta_1)$. On a

$$\frac{\mathrm{L(T)}}{\mathrm{T}^{1-\beta}} \int_0^\infty p\left(\frac{x}{\mathrm{T}}\right)h(x)dx = \int_0^\infty p_1(x)h_1(x\mathrm{T})\frac{\mathrm{L(T)}}{\mathrm{L(T}x)}dx,$$

où $p_1(x) = p(x)x^{-\beta}$, $h_1(x) = h(x)x^\beta \mathrm{L}(x)$. Ainsi

$$\left| \int_0^\infty p_1(x)h_1(x\mathrm{T})\frac{\mathrm{L(T)}}{\mathrm{L}(x\mathrm{T})}dx - \int_0^\infty p_1(x)h_1(x\mathrm{T})dx \right| \leqq \int_0^\infty |p_1(x)|\,|h_1(x\mathrm{T})| \left| \frac{\mathrm{L(T)}}{\mathrm{L}(x\mathrm{T})} - 1 \right| dx \tag{6.9}$$

L'expression sous le signe de l'intégrale est inférieure ou égale à $\mathrm{C}|p_1(x)|(1 + x^{-\varepsilon})$ si $0 < x \leqq 1$ et $\mathrm{C}|p_1(x)|(1 + x^\varepsilon)$, si $1 \leqq x$. Grâce au choix de ε, cette fonction est intégrable et par conséquent on peut passer à la limite dans (6.9). On obtient donc :

$$\int_0^\infty p_1(x)h_1(x\mathrm{T})dx = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^\infty p_1\left(\frac{x}{\mathrm{T}}\right)h_1(x)dx \to \mathrm{C}\int_0^\infty p_1(x)dx, \qquad \mathrm{T} \to \infty,$$

et d'après le théorème de Wiener (cf. [*19*] [*20*]) quelle que soit la fonction $q_1(x)$ intégrable sur R_+ on a :

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^\infty q_1\left(\frac{x}{\mathrm{T}}\right)h_1(x)dx \to \mathrm{C}\int_0^\infty q_1(x)dx, \qquad \mathrm{T} \to \infty.$$

En prenant $q_1(x) = q(x)x^{-\beta}$ et en remarquant que la différence

$$\left| \int_0^\infty q_1(x)h_1(xT)\frac{L(T)}{L(Tx)}dx - \int_0^\infty q_1(x)h_1(xT)dx \right|$$

converge vers zéro, on obtient le résultat nécessaire.

REMARQUE 6.3. — Dans le cas où la fonction L est bornée et minorée par une constante strictement positive, on n'a pas besoin d'utiliser le lemme 5.1 et c'est pourquoi on peut remplacer la condition *i*) du théorème 6.3 par la condition

$$\int_0^\infty |p(x)|\, x^{-\beta}dx < \infty. \tag{6.10}$$

6.3. — **Démonstration du théorème** 6.1

Supposons que ν_T converge en loi vers une variable aléatoire, disons ν. On peut supposer que la fonction L possède les propriétés du lemme 5.1 avec $\varepsilon > 0$ pour lequel $\beta + \varepsilon < \alpha \wedge 1$. Par conséquent l'inégalité $\frac{L(T)}{L(Tx)} \leqq x^\varepsilon + x^{-\varepsilon}$ est réalisée quels que soient T et $x \in R_+$. Grâce à la condition de stabilité du processus $W_\alpha(t)$ la répartition de ν_T coïncide avec celle de la variable aléatoire

$$\nu_T^{(1)} = \mathcal{D}_T \int_0^1 h(T^{1/\alpha}W_\alpha(t))dt$$

Remarquons que

$$|\nu_T^{(1)}| \leqq \mathcal{D}_T \int_0^1 |h(T^{1/\alpha}W_\alpha(t))|\,dt \leqq C \int_0^1 |W_\alpha(t)|^{-\beta} \frac{L(T^{1/\alpha})}{L(T^{1/\alpha}|W_\alpha(t)|)}dt$$
$$\leqq C\left(\int_0^1 |W_\alpha(t)|^{-\beta+\varepsilon}dt + \int_0^1 |W_\alpha(t)|^{-\beta-\varepsilon}dt \right) = C\zeta.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $E|\zeta|^2 < \infty$. Il en résulte que $E|\nu_T|^2 = E|\nu_T^{(1)}|^2 \leqq C < \infty$ uniformément en T. Cela entraîne la convergence de $E\nu_T$ et l'on en déduit que la limite

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{D}_T \int_0^\infty h(Tx)\pi(x)dx = \lim_{T\to\infty} \frac{L(T)}{T^{1-\beta}} \int_0^\infty \pi\left(\frac{x}{T}\right)h(x)dx$$

existe $\left(\text{ici } \pi(x) = \int_0^1 p_t(x)dt\right)$. Supposons pour un instant que la fonction π possède les propriétés *i*) et *ii*) du théorème 6.3. Alors en prenant

$q(x) = 1_{[0,1]}(x)$ ou $q(x) = 1_{[0,1]}(x).x^{-\beta}$ nous obtenons d'après ce théorème, l'existence des limites (6.2) et (6.3). Il nous reste donc à vérifier ces conditions. La vérification de *i*) est triviale. Pour établir *ii*) remarquons que

$$\int_0^\infty \pi(x)x^{it-\beta}dx = \int_0^1 ds\left(\int_0^\infty x^{it-\beta}p_s(x)dx\right)$$
$$= \left(\int_0^\infty y^{it-\beta}p(y)dy\right)\left(\int_0^1 s^{\frac{it-\beta}{\alpha}}ds\right) = \psi(t, \beta).\frac{\alpha}{it-\beta+\alpha},$$

où $\psi(t, \beta) = \int_0^\infty y^{it-\beta}p(y)dy$. D'après les calculs de [*15*],

$$\psi(t, \beta) = \frac{i}{2\pi\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta - it}{\alpha}\right)\Gamma(1 - \beta + it)(e^{\delta} - e^{-\delta})$$

où $\delta = \left(\frac{\phi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right)(t + i\beta)$ et ϕ est pris de la représentation (1.1) pour la fonction caractéristique de $W_\alpha(1)$. Cette expression montre que $\psi(t, \beta)$ ne peut avoir des zéros que dans le cas où $\frac{\phi}{\alpha} - \frac{\pi}{2} = 0$. Mais cette condition est équivalente à la condition $\gamma = 0$ parce que $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\phi}{\pi\alpha}$ (cf. [*15*]) et cela signifie que sous les hypothèses de notre théorème $\psi(t, \beta) \neq 0$ quel que soit $t \in R_1$. Par conséquent les limites (6.2) et (6.3) existent.

Si l'on suppose que les fonctionnelles τ_T convergent alors on peut utiliser la proposition 5.3 (avec $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta - \varepsilon$) grâce à laquelle on obtient aussi la convergence de ν_T.

Pour démontrer la partie suffisante il suffit de remarquer que l'existence des limites (6.2), (6.3) avec les conditions *iii*) et *iv*) entraîne que les conditions du théorème 2.1 sont vérifiées. Par conséquent ν_T converge en loi quand $T \to \infty$ et grâce à la première partie de la démonstration les fonctionnelles τ_T convergent aussi. ■

La démonstration du théorème 6.2 est analogue. Il suffit d'utiliser l'autre forme (d'après la remarque 6.3) du théorème 6.3.

RÉFÉRENCES

[*1*] P. Levy, *Compositio Mathematica*, t. **7**, 1939, p. 283-339.
[*2*] P. Erdös et M. Kac, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **53**, 1947, p. 1011-1020.
[*3*] F. Spitzer, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **82**, 1956, p. 323-339.
[*4*] G. Kallianpur et H. Robbins, *Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A.*, t. **39**, 1953, p. 525-533.
[*5*] G. Kallianpur et H. Robbins, *Duke Math. J.*, t. **21**, 1954, p. 285-307.

[6] R. L. DOBROUCHINE, *Ouspehi Mat. Nauk*, t. X, 3, 1955, p. 139-146.
[7] D. A. DARLING et M. KAC, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **84**, 1957, p. 444-458.
[8] A. V. SKOROKHOD et N. P. SLOBODENUK, *Teor. ver. i ee prim.*, t. **10**, 1965, p. 660-672 ; t. **11**, 1966, p. 56-67.
[9] A. V. SKOROKHOD et N. P. SLOBODENUK, *Ukr. mat. journal*, t. **18**, 1966, p. 60-71.
[10] A. V. SKOROKHOD et N. P. SLOBODENUK, *Théorèmes limites pour les marches aléatoires*, 1970 (en russe).
[11] Iu. A. DAVYDOV, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, t. **198**, n° 3, 1971.
[12] Iu. A. DAVYDOV, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **275**, série A, 1972, 1239-1242.
[13] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, 1966.
[14] V. A. ROKHLINE, *Matem. sbornik*, t. **25** (67), 1, 1949, p. 107-150.
[15] Iu. A. DAVYDOV et I. A. IBRAGUIMOV, *Teor. ver. i ee prim.*, t. **16**, 1971, p. 157-163.
[16] J. KARAMATA, *Bull. Soc. Math. France*, t. **61**, 1933, p. 55-62.
[17] I. A. IBRAGUIMOV et Iu. V. LINNIK, *Variables aléatoires indépendantes et stationnairement liées*, 1965 (en russe).
[18] A. MAKCHANOV, Thèse de 3e cycle, Faculté de Mathématiques, Université de Léningrad.
[19] N. WIENER, *Ann. Math.*, t. **33**, 1932, p. 1-100.
[20] I. GELFAND, D. RAIKOV et G. SHILOV, *Commutative normed rings*, 1964.
[21] P. LEVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1954.
[22] Iu. A. DAVYDOV, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **276**, série A, 18, 1973.

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1973).