Annales de l'I. H. P., section B

A. Hanen

Mesures aléatoires stationnaires et mesure de Palm

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 3 (1973), p. 311-325

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_3_311_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 3, 1973, p. 311-325. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Mesures aléatoires stationnaires et mesure de Palm

par

A. HANEN
Université Paris X. Département de Mathématiques

RÉSUMÉ. — On donne une construction générale de la mesure de Palm d'une mesure aléatoire stationnaire, étendant les résultats de Mecke, Matthes et Harris.

SUMMARY. — Extending the results of Harris, Matthes and Mecke, a general construction of Palm measure is given for a stationary random measure.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'étendre la construction, telle qu'elle résulte des travaux de Mecke, de la mesure de Palm associée à une mesure aléatoire stationnaire λ sur un groupe abélien localement compact et σ-compact G.

Cette construction peut se résumer ainsi : se donner λ, c'est en fait se donner une probabilité λ sur l'espace M des mesures de Radon positives sur G, invariante pour le groupe sur M induit par le groupe Γ des translations de G.

Si à la mesure λ est associée la mesure $\tilde{\lambda}$ sur M $\times$ G, définie par

$$\tilde{\lambda}(B \times A) = \int_B \mu(A)\lambda(d\mu),$$

B étant un borélien de M (pour la topologie vague) et A un borélien de G, $\tilde{\lambda}$ est invariante par le groupe de bijections de $M \times G(U_z)_{z \in G}$

$$(\mu, x) \overset{U_z}{\rightsquigarrow} (\mu + z,\ x + z) \text{ (où } \mu \in M,\ x,\ z \in G).$$

Si l'on désigne par Θ la bijection bimesurable de $M \times G$ définie par

$$\Theta(\mu, x) = (\mu - x, x)$$

La mesure image de $\tilde{\lambda}$ par l'application Θ, notée $\tilde{\mu}$, est invariante par le groupe image par Θ de $\{ U_z \}_{z \in G}$, qui est en fait le groupe $(Id)_M \times \Gamma$, où Id_M désigne l'application identique de M, et par conséquent $\tilde{\mu}$ se factorise sous la forme $\tilde{\mu} = \rho P_0 \otimes \nu$, ρ étant une constante > 0, ν la mesure de Haar du groupe G et P_0 une probabilité sur M, appelée probabilité de Palm associée à λ.

Nous étendons ici cette situation aux cas où G est remplacé par un espace Polonais Ω, et Γ par un groupe de bijections bimesurables de Ω, tel que l'on puisse construire une application Θ permettant de se ramener à des factorisations de mesures images analogues à $\tilde{\mu}$.

C'est l'objet de la première partie de ce travail. La seconde partie est consacrée à des lemmes de factorisation de mesures sur des espaces produits, la dernière partie montre que les processus ponctuels marqués de Matthes et les mouvements de processus ponctuels au sens de Harris rentrent dans ce formalisme (il suffit de prendre dans le premier cas

$$\Omega = K \times R,$$

K étant polonais, Γ étant le groupe produit de l'identité sur K et des translations sur R, et dans le second cas $\Omega = R^2$, Γ étant le groupe des translations parallèles à la diagonale de R^2 ; ceci permet d'étendre les mesures de Palm introduites par Harris et Matthes aux mesures aléatoires, R pouvant en outre être remplacé par un groupe abélien localement compact et σ-compact G.

NOTATIONS. — Soient :

$(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable.

$(A_n)_{n \in N}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{A}$, telle que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$.

M l'ensemble des mesures positives sur $(\Omega, \mathscr{A})$ finies sur A_n.

$\mathscr{M}$ la σ-algèbre initiale sur M associée aux applications $\mu \rightsquigarrow \mu(A)$, A parcourant la σ-algèbre $\mathscr{A}$.

Γ un groupe de bijections bimesurables de $(\Omega, \mathscr{A})$, tel que pour tout

$$T \in \Gamma, \qquad T(A_n) \subset A_p \quad \text{pour } p \text{ assez grand.}$$

$\hat{T}(\mu)$ la mesure image de μ par l'application $T \in \Gamma$; alors $\hat{T}(\mu) \in M$ et l'on a, pour toute fonction f mesurable positive sur $(\Omega, \mathscr{A})$

$$\int_\Omega f(\omega)[\hat{T}(\mu)](d\omega) = \int_\Omega (f \circ T)(\omega) \, . \, \mu(d\omega).$$

LEMME 1. — M est polonais pour une certaine métrique d et la tribu borélienne associée coïncide avec $\mathscr{M}$.

Démonstration succincte. — A_n étant fermé, A_n est polonais, donc également (théorème de Prohoroff), l'ensemble des mesures bornées sur A_n, muni de la topologie de la convergence simple sur l'espace des fonctions continues bornées sur A_n, définie par une métrique δ_n. On munit M de la structure uniforme définie par la suite d'écarts sur M définis par δ_n. Il est alors aisé de montrer que cette structure uniforme fait de M un espace polonais, dont la tribu borélienne associée coïncide avec $\mathscr{M}$.

LEMME 2. — Soit λ une probabilité sur $(M, \mathscr{M})$.

La formule $\tilde{\lambda}(B \times A) = \int_B \mu(A)\lambda(d\mu)$, où $B \in \mathscr{M}$ et $A \in \mathscr{A}$, définit sur $(\Omega \times M, \mathscr{A} \otimes \mathscr{M})$ une mesure σ-finie, si

$$\tilde{\lambda}(M \times A_n) = \int_M \mu(A_n)\lambda(d\mu) < +\infty.$$

Démonstration. — Triviale.

THÉORÈME 1. — Soit λ une probabilité sur $(M, \mathscr{M})$, telle que $\lambda\{0\} = 0$. Soit U l'application de $M \times \Omega$ dans $M \times \Omega$ définie par

$$U(\mu, \omega) = (\hat{T}(\mu), T(\omega))$$

Alors U est une bijection bimesurable de $M \times \Omega$ et λ est $\hat{T}$-invariante si et seulement si $\tilde{\lambda}$ est U-invariante.

Démonstration. — Il est clair que U est bijective et que

$$U^{-1}(\mu, \omega) = (\hat{T}^{-1}(\mu), T^{-1}(\omega)).$$

La bimesurabilité résulte de la mesurabilité de T sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et de $\hat{T}$ sur $(M, \mathscr{M})$, cette dernière étant immédiate.

Soit alors g une fonction mesurable positive sur $(\mathrm{M} \times \Omega, \mathscr{M} \otimes \mathscr{A})$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{M}\times\Omega} g(\mu, \omega) . \hat{\mathrm{U}}(\tilde{\lambda})(d(\mu, \omega)) &= \int_{\mathrm{M}\times\Omega} (g \circ \mathrm{U})(\mu, \omega) . \tilde{\lambda}(d(\mu, \omega)) \\ &= \int_{\mathrm{M}\times\Omega} (g \circ \mathrm{U})(\mu, \omega)\mu(d\omega)\lambda(d\mu) \quad \text{(d'après la définition de } \tilde{\lambda}) \\ &= \int_{\mathrm{M}} \left[\int_{\Omega} (g \circ \mathrm{U})(\mu, \omega)\mu(d\omega) \right] \lambda(d\mu).\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (g \circ \mathrm{U})(\mu, \omega)\mu(d\omega) &= \int_{\Omega} g[\hat{\mathrm{T}}(\mu), \mathrm{T}(\omega)]\mu(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} g[\hat{\mathrm{T}}(\mu), \omega](\hat{\mathrm{T}}\mu)(d\omega) = h(\hat{\mathrm{T}}(\mu))\end{aligned}$$

où

$$h(\mu) = \int_{\Omega} g(\mu, \omega)\mu(d\omega).$$

D'où

$$\int_{\mathrm{M}\times\Omega} g(\mu, \omega) . \hat{\mathrm{U}}(\tilde{\lambda})(d(\mu, \omega)) = \int_{\mathrm{M}} h[\hat{\mathrm{T}}(\mu)]\lambda(d\mu) = \int_{\mathrm{M}} h(\mu)\hat{\hat{\mathrm{T}}}(\lambda)(d\mu).$$

D'autre part,

$$\int_{\mathrm{M}\times\Omega} g(\mu, \omega) . \tilde{\lambda}(d(\mu, \omega)) = \int_{\mathrm{M}} h(\mu)\lambda(d\mu).$$

Si λ est $\hat{\mathrm{T}}$ invariante, $\hat{\hat{\mathrm{T}}}(\lambda) = \lambda$ et donc

$$\int_{\mathrm{M}\times\Omega} g(\mu, \omega) . \hat{\mathrm{U}}(\tilde{\lambda})(d(\mu, \omega)) = \int_{\mathrm{M}\times\Omega} g(\mu, \omega) . \tilde{\lambda}(d(\mu, \omega)),$$

i. e. $\tilde{\lambda}$ est U-invariante.

Réciproquement, si $\tilde{\lambda}$ est U-invariante et si h est une fonction mesurable positive, il existe une fonction $g(\mu, \omega)$ sur $\mathrm{M} \times \Omega$ telle que

$$h(\mu) = \int_{\Omega} g(\mu, \omega)\mu(d\omega) \qquad (\text{si } \mu \neq 0)$$

Il suffit de prendre $g(\mu, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[\mu(\mathrm{A}_i)=0, i<n, \mu(\mathrm{A}_n)>0]}(\mu) . \dfrac{1_{\mathrm{A}_n}(\omega)}{\mu(\mathrm{A}_n)} . h(\mu)$, où A_n est la suite intervenant dans la définition de M

Alors

$$\int_{M\times\Omega} g(\mu,\omega).\hat{U}(\tilde{\lambda})(d(\mu,\omega)) = \int_M h(\mu)1_{\{\mu\neq 0\}}(\mu)\hat{\hat{T}}(\lambda)(d\mu)$$

et

$$\int_{M\times\Omega} g(\mu,\omega)\tilde{\lambda}(d(\mu,\omega)) = \int_M h(\mu).1_{\{\mu\neq 0\}}(\mu).\lambda(d\mu).$$

si $\lambda\{0\}=0$, $\hat{\hat{T}}(\lambda)\{0\}=\lambda[\hat{T}^{-1}\{0\}]=0$, car $\hat{T}^{-1}\{0\}$ est la mesure définie par $\hat{T}^{-1}\{0\}(A)=\{0\}(T(A))=0$, donc $\hat{T}^{-1}\{0\}=\{0\}$ et donc $\hat{\hat{T}}(\lambda)\{0\}=0$. Il en résulte que les deux intégrales de droite coïncident respectivement avec $\int_M h(\mu)\hat{\hat{T}}(\lambda)(d\mu)$ et $\int_M h(\mu)\lambda(d\mu)$, et si les premiers membres sont égaux, il en est de même des seconds membres, donc si $\tilde{\lambda}$ est U invariante, $\hat{\hat{T}}(\lambda)=\lambda$.

THÉORÈME 2. — Soit $\omega \rightsquigarrow \theta_\omega$ une application de Ω dans Γ, telle que, pour tout $T\in\Gamma$

$$\theta_{T(\omega)} = \theta_\omega \circ T^{-1} \tag{1}$$

et soit

$$\Theta(\mu,\omega) = (\hat{\theta}_\omega(\mu),\omega) \tag{2}$$

(1) Θ est une bijection de $(M\times\Omega, \mathcal{M}\otimes\mathcal{A})$ dans lui-même.

(2) L'image par Θ de l'application U est l'application V, définie par

$$V(\mu,\omega) = (\mu, T(\omega)).$$

Démonstration :

1) $\Theta^{-1}(\mu,\omega) = [(\hat{\theta}_\omega)^{-1}(\mu),\omega] = [(\hat{\theta}_\omega^{-1})(\mu),\omega]$

2)
$$\begin{aligned} V(\mu,\omega) &= (\Theta\circ U\circ\Theta^{-1})(\mu,\omega) \\ &= (\Theta\circ U)(\hat{\theta}_\omega^{-1}(\mu),\omega) \\ &= \Theta[\hat{T}\circ\hat{\theta}_\omega^{-1}(\mu), T(\omega)] \\ &= [\hat{\theta}_{T\omega}\circ\hat{T}\circ\hat{\theta}_\omega^{-1}(\mu), T(\omega)] \\ &= [(\theta_{T(\omega)}\circ T\circ\theta_\omega^{-1})(\mu), T(\omega)] = [\mu, T(\omega)], \quad \text{en vertu de (2).} \end{aligned}$$

Remarque 1. — Si l'on suppose, comme nous le ferons dans la suite, que Θ est bimesurable et si $\tilde{\mu}=\hat{\Theta}(\tilde{\lambda})$, alors la relation λ T-invariante implique la relation $\tilde{\mu}$ V-invariante et σ-finie, et même finie sur $M\times A_n$, car $\tilde{\mu}(M\times A_n)=\tilde{\lambda}[\Theta^{-1}(M\times A_n)]=\tilde{\lambda}[M\times A_n]<+\infty$.

LEMME 3. — Soient (E_1, ξ_1) et (E_2, ξ_2) deux espaces mesurables, E_1 étant polonais. Soit A'_n une suite croissante d'éléments de ξ_2, de réunion E_2. Soit m une mesure sur $(E_1 \times E_2, \xi_1 \otimes \xi_2)$, finie sur $E_1 \times A'_n$; il existe une application de $E_2 \times \xi_1$ dans $[0, 1]$ $(e_2, B) \rightsquigarrow P(e_2, B)$, qui soit ξ_2-mesurable pour B fixé et une probabilité sur (E_1, ξ_1) pour e_2 fixé, telle que

$$m(B \times C) = \int_C P(e_2, B)dp(e_2),$$

où p est la mesure image de m par l'application $\Pi(e_1, e_2) = e_2$ (i. e. $p = \hat{\Pi}(m)$).
P est unique p-presque partout.

Démonstration. — m, restreinte à $E_1 \times A'_n$, est une mesure bornée, à laquelle on peut appliquer le théorème de Jirina, E_1 étant polonais ; il existe donc une probabilité de transition régulière, notée $P_n(e_2, B)$, telle que, pour tous $B \in \xi_1$, $C \in \xi_2$

$$m(B \times (C \cap A'_n)) = \int_{C \cap A'_n} P_n(e_2, B)dp_n(e_2).$$

où p_n est l'image de la restriction de m à $E_1 \times A'_n$ par l'application Π ; mais c'est aussi la restriction de p à $A'_n \cap \xi_2$, car si

$$C \in A_n \cap \xi_2,\ p_n(C) = m(E_1 \times C) = p(C),$$

et donc

$$m(B \times (C \cap A'_n)) = \int_{C \cap A'_n} P_n(e_2, B)dp(e_2)$$

remarquons que si

$$n_1 < n_2, m(B \times C \cap A'_{n_1} \cap A'_{n_2}) = \int_{C \cap A'_{n_1} \cap A'_{n_2}} P_{n_2}(e_2, B)dp(e_2)$$
$$= \int_{C \cap A'_{n_1}} P_{n_2}(e_2, B)dp(e_2),$$

donc p_{n_1} et p_{n_2} coïncident (p. presque partout) sur A'_{n_1}.
Soit alors $C_1 = A'_1, \ldots, C_n = A'_n - A'_{n-1}$

$$P(e_2, B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(e_2, B)1_{C_n}(e_2)$$

P est ξ_2-mesurable pour B fixé et une probabilité sur (E_1, ξ_1) pour e_2 fixé. De plus

$$
\begin{aligned}
m(\mathrm{B} \times \mathrm{C}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathrm{B} \times (\mathrm{C} \cap \mathrm{C}_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [m(\mathrm{B} \times (\mathrm{C} \cap \mathrm{A}'_n)) - m(\mathrm{B} \times (\mathrm{C} \cap \mathrm{A}'_{n-1}))]\Big] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{\mathrm{C}\cap \mathrm{A}'_n} \mathrm{P}_n(e_2, \mathrm{B}) dp(e_2) - \int_{\mathrm{C}\cap \mathrm{A}'_{n-1}} \mathrm{P}_{n-1}(e_2, \mathrm{B}) dp(e_2) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathrm{C}\cap \mathrm{C}_n} \mathrm{P}_n(e_2, \mathrm{B}) dp(e_2) = \int_{\mathrm{C}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}_n(e_2, \mathrm{B}) 1_{\mathrm{C}_n}(e_2) dp(e_2) \\
&= \int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(e_2, \mathrm{B}) dp(e_2)
\end{aligned}
$$

L'unicité de P résulte de celle des P_n, d'après le théorème de Jirina.

COROLLAIRE 1. — Soit $\mathrm{S} = (\mathrm{T}', \mathrm{T}'')$ T' et T'' étant deux bijections bimesurables de E_1 et E_2. Si m est S-invariante, p est T″-invariante et l'on a, p-presque partout

$$\mathrm{P}(e_2, \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{T}''(e_2), \mathrm{T}'(\mathrm{B})), \quad \text{pour tout } \mathrm{B} \in \xi_1.$$

Démonstration :

a) le diagramme

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \\
\Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\
\mathrm{E}_2 & \xrightarrow{\mathrm{T}''} & \mathrm{E}_2
\end{array}
$$

est commutatif.

La relation $p = \hat{\Pi}(m)$ entraîne la T″-invariance de p.

b) $m(\mathrm{S}(\mathrm{B} \times \mathrm{C})) = m(\mathrm{T}'(\mathrm{B}) \times \mathrm{T}''(\mathrm{C}))$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathrm{T}''(\mathrm{C})} \mathrm{P}(e_2, \mathrm{T}'(\mathrm{B})) dp(e_2) = \int_{\mathrm{E}_2} (1_{\mathrm{C}} \circ \mathrm{T}''^{-1})(e_2) \mathrm{P}(e_2, \mathrm{T}'(\mathrm{B})) dp(e_2) \\
&= \int_{\mathrm{E}_2} 1_{\mathrm{C}}(e_2) \mathrm{F}(\mathrm{T}''(e_2), \mathrm{T}'(\mathrm{B})) d[p \circ \mathrm{T}''^{-1}](e_2) \\
&= \int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(\mathrm{T}'' e_2, \mathrm{T}'(\mathrm{B})) dp(e_2) = m(\mathrm{B} \times \mathrm{C}) \quad \text{si} \quad m \text{ est S-invariante} \\
&= \int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(e_2, \mathrm{B}) dp(e_2).
\end{aligned}
$$

L'unicité de P donne le résultat.

COROLLAIRE 2. — Soit G un groupe abelien localement compact et σ-compact.

$\beta(\mathscr{G})$ la tribu borélienne sur G.

ν la mesure de Haar sur G, qui est σ-finie.

Soit $z \rightsquigarrow T''_z$ un isomorphisme algébrique de G sur un groupe de bijections bimesurables de (E_2, ξ_2), tel que :

a) $(x, z) \rightsquigarrow T''_z(x)$ de $E_2 \times G$ dans E_2 est une application mesurable, lorsqu'on munit E_2 et G des tribus boréliennes correspondantes.

b) Pour tout couple (e_2, e'_2) d'éléments de E_2, il existe ζ élément de G tel que $T''_\zeta(e_2) = e'_2$.

Si, dans les conditions du lemme 3, *m* est —(T', T''_z) invariante (T' étant une bijection mesurable de (E_1, ξ_1)), il existe une probabilité P' sur (E_1, ξ_1) telle que $P(e_2, B) = P'(B)$ p-presque partout, pour tout $B \in \xi_1$ et de plus *m* coïncide avec la mesure produit $P' \otimes p$.

Démonstration. — On sait que, pour tout $z \in G$ fixé,

$$P(e_2, B) = P(T''_z(e_2), T'(B)) \ p\text{-presque partout.}$$

$\{ (e_2, z) : P(e_2, B) \neq P(T''_z(e_2), T'(B) \}$ est $\xi_2 \otimes \beta(\mathscr{G})$ mesurable et de mesure $p \otimes \nu$ nulle, car sa z-section est de mesure p-nulle ; sa e_2-section est donc, p-presque partout, de mesure ν nulle ; il existe $N \in \xi_2$, $p(N) = 0$, tel que si $e_2 \notin N$, $\nu \{ z : P(e_2, B) \neq P(T''_z(e_2), T'(B) \} = 0$.

Soient e_2 et $e'_2 \notin N$ et $E_{e_2} = \{ z : P(e_2, B) = P[T''_z(e_2), T'(B)] \}$.

La relation $T''_z(e_2) = T''_{z'}(e'_2)$ a lieu si et seulement si $T''_{z-z'}(e_2) = e'_2$, i. e. si $z - z' = \zeta$.

Si $z \in E_{e_2}$ et $z' \in (E_{e_2} - \zeta) \cap E'_{e_2}$ (qui n'est pas vide puisque son complémentaire est de mesure ν-nulle, alors

$$P(e_2, B) = P(T''_z(e_2), T'(B)) = P(T''_{z'}(e'_2), T'(B)) = P(e'_2, B)$$

Donc $P(e_2, B)$ est constante sur N^c et l'on a bien le résultat.

Remarque 2. — Ce corollaire s'applique, en particulier, lorsque $E_2 = G$ et T'_z la translation par z sur G ; alors p est un multiple de la mesure de Haar de G et $m = \rho P' \otimes \nu$.

COROLLAIRE 3. — Soit G un groupe abélien localement compact et σ-compact. ν sa mesure de Haar.

Si $E_1 = E_2 = G$ et si *m* est une mesure sur $G \times \mathscr{G}$ vérifiant les conditions du lemme 3 pour une suite A'_n de compacts de G, si $S_z = (T_z, T_z)$ est le groupe des translations parallèles à la diagonale de $G \times G$ défini par

$$S_z(x, y) = (T_z(x), T_z(y)) = (x + z, y + z) \quad \text{et si } m \text{ est } S_z \text{ invariante.}$$

1. — $p = \hat{\Pi}(m)$ est un multiple de la mesure de Haar $p = \rho . \nu$.

2. — Il existe une probabilité $\tilde{P}$ sur G telle que, ν presque partout :

$$P(y, T_y(B)) = \tilde{P}(B)$$

et

$$\int_G \int_G u(x, y) dm(x, y) = \rho \int_G \left[\int_G u(x + y, y) \tilde{P}(dx) \right] \nu(dy)$$

pour toute fonction u mesurable positive sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

3. — Si de plus $m(A'_n \times G) < +\infty$ et si $\Pi'(e_1, e_2) = e_1$.
$p' = \hat{\Pi}'(m) = \rho'\nu$, m a une désintégration par rapport à p', et l'on a $\rho = \rho'$.
Il existe alors une probabilité $\tilde{P}'$, sur G telle que, ν presque partout

$$P'(x, T_x(C)) = \tilde{P}'(C) \quad \text{et l'on a} \quad \tilde{P}'(A) = \tilde{P}(-A).$$

Démonstration. — Le premièrement résulte de l'invariance de p par T_z (corollaire 1 *a*).

Pour montrer le 2^e, on sait, d'après le corollaire 1, que pour z fixé,

$$P(y, B) = P[T_z y, T_z(B)] \ p\text{-presque partout.}$$

En raisonnant comme au corollaire 2, il en résulte que si

$$y \in N^c, p(N) = 0 \quad P(y, B) = P[T_z y, T_z B] \quad \text{si} \quad z \in E_y, \quad \text{où} \quad \nu(E_y^c) = 0.$$

Si y_1 et $y_2 \in N^c$

$$P[y_1, T_{y_1}B] = P[T_{z_1}y_1, T_{z_1+y_1}B] \quad \text{si} \quad z_1 \in E_{y_1}$$
$$P[y_2, T_{y_2}B] = P[T_{z_2}y_2, T_{z_2+y_2}B] \quad \text{si} \quad z_2 \in E_{y_2}.$$

mais il existe un couple (z_1, z_2) tel que $z_1 \in E_{y_1}$, $z_2 \in E_{y_2}$, $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, car ceci équivaut à $z_1 \in E_{y_1}$, $z_2 \in (E_{y_1} + y_1 - y_2) \cap E_{y_2}$, ensemble non vide car son complémentaire est de mesure nulle.

Pour un tel couple (z_1, z_2), on a :

$$\begin{aligned} P(y_1, T_{y_1}B) &= P[y_1 + z_1, T_{y_1+z_1}B] \\ &= P[y_2 + z_2, T_{y_2+z_2}B] \\ &= P(y_2, T_{y_2}B). \end{aligned}$$

Donc $P(y, T_y B)$ est constante sur N^c.

Nous avons alors, pour toute fonction mesurable positive u sur $G \times G$.

$$\int_{G \times G} u(x, y) dm(x, y) = \rho \int_{G \times G} u(x, y) P(y, dx) \nu(dy)$$

La relation $\tilde{P}(B) = P(y, T_y(B))$ s'écrit aussi

$$\tilde{P}[T_y^{-1}(B)] = P[y, B] \quad \text{i. e. } P(y,.) = \hat{T}_y(\tilde{P})$$

alors

$$\int_G u(x, y)\hat{T}_y(\tilde{P})(dx) = \int_G u(T_y(x), y)\tilde{P}(dx) = \int_G u(x + y, y)\tilde{P}(dx)$$

D'où

$$\int_{G \times G} u(x, y)dm(x, y) = \rho \int_{G \times G} u(x + y, y)\tilde{P}(dx).v(dy)$$

ce qui achève la démonstration de la deuxième partie.

Pour montrer le 3^e^, il suffit de montrer que si B est un sous-ensemble de G de mesure de Haar finie et non nulle, $p(B) = p'(B)$. Nous avons

$$\int_G m(B \times T_z(B))v(dz) = \int_G m(T_{-z}(B) \times B).v(dz),$$

en utilisant l'invariance de m par S_{-z}
mais

$$\int_G m(B \times T_z(B))v(dz) = \int_G \left[\int_{G \times G} 1_B(x).1_{T_z(B)}(y)dm(x, y) \right].v(dz)$$
$$= \int_{G \times G} \left[\int_G 1_{T_z(B)}(y)v(dz) \right].1_B(x).dm(x, y)$$

mais

$$\int_G 1_{T_z(B)}(y)v(dz) = \int_G 1_{T_z(-B)}(z)v(dz) = v(T_{-z}(B)) = v(B)$$

et donc

$$\int_G m(B \times T_z(B))v(dz) = \int_{G \times G} v(B).1_B(x).dm(x, y) = v(B)p(B)$$

et de même

$$\int_G m(T_{-z}(B) \times B)v(dz) = \int_{G \times G} v(B).1_B(y)dm(x, y) = v(B).p'(B)$$

Il en résulte que $p(B) = p'(B)$ et donc que $\rho = \rho'$.

On peut alors introduire, en échangeant les rôles de x et de y, une mesure $\tilde{P}$, sur G, telle que $\tilde{P}'(x, T_x(C)) = \tilde{P}'(C)$ et que

$$\int_{G \times G} u(x, y)dm(x, y) = \rho \int_{G \times G} u(x, x + y)\tilde{P}'(dy)v(dx).$$

D'autre part,

$$\int_G u(x+y,y)\nu(dy) = \int_G u(y,y-x)\nu(dy)$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{G\times G} u(x+y,y)\tilde{P}(dx)\nu(dy) &= \rho \int_G \left[\int_G u(y,y-x)\tilde{P}(dx) \right] \nu(dy) \\ &= \rho \int_G \left[\int_G u(y,y+x)\tilde{P}^s(dx) \right] \nu(dy)\end{aligned}$$

en posant $\tilde{P}^s(A) = P(-A)$. D'autre part

$$\int_{G\times G} u(x,y)dm(x,y) = \rho \int_{G\times G} u(x,x+y)\tilde{P}'(dy)\nu(dx)$$

en échangeant les écritures x et y, on en déduit $\tilde{P}' = \tilde{P}^s$.

Application 1. — Soit $(K, \mathcal{K})$ un espace polonais.
G un groupe abélien localement compact, σ-compact.
$(G = \lim \uparrow C_n,\ C_n$ compacts).
$\Omega = K \times G$
$A_n = K \times C_n$
I_K l'application identique sur $(K, \mathcal{K})$
Γ le groupe S'_z de bijections de Ω, définies par

$$S'_z = (I_K, T_Z), \quad \text{i. e.} \quad S'_z(k,x) = (k, x+z)$$
$$\theta_{(k,z)} = S'_{-z}$$

alors

$$\theta_{S'_{z'}(k,z)} = \theta_{(k,z+z')} = S'_{-z-z'} = S'_{-z} \circ S'_{-z'} = S'_{-z} \circ (S'_{z'})^{-1} = \theta_{(k,z)} \circ (S'_{z'})^{-1}.$$

La propriété (1) du théorème 2 est vérifiée, ainsi que la bimesurabilité de l'application θ sur $M \times K \times G$, définie par

$$\Theta(\mu,(k,z)) = (\hat{S}_{-z}(\mu),(k,z)) \quad \text{et donc} \quad \Theta^{-1}(\mu,(k,z)) = (\hat{S}_z(\mu),(k,z)).$$

Alors, si λ est S'_z-invariante sur $K \times G$, $\tilde{\mu}$ est V_z-invariante sur $M \times K \times G$, où V_z est l'application

$$V_z(\mu,(k,x)) = (\mu, S'_z(k,x)) = (\mu,(k,x+z))\,;\ V_z = (I_{M\times K}, T_z)$$

Nous sommes alors dans les conditions d'application du corollaire 2, avec $E_1 = M \times K$, $E_2 = G$, $A'_n = C_n$, $T' = I_{M\times K}$, $T'' = T_z$, $m = \tilde{\mu}$.

$M \times K$ est un espace polonais, car $K \times G$ l'est et M, espace des mesures sur $K \times G$, bornées sur $K \times C_n$, l'est aussi, d'après le lemme 1. Il en résulte le

THÉORÈME 3. — Il existe, dans les conditions ci-dessus, une probabilité P′ sur $(\mathrm{M} \times \mathrm{K}, \mathscr{M} \otimes \mathscr{K})$ telle que $\tilde{\mu} = \Theta(\tilde{\lambda}) = \mathrm{P}' \otimes p = \rho \mathrm{P}' \otimes \nu$, où ρ est un réel > 0 et ν la mesure de Haar du groupe G, et donc d'après la définition de θ, pour toute fonction g mesurable positive sur $\mathrm{M} \times \mathrm{K} \times \mathrm{G}$

$$\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{K}\times\mathrm{G}} g(\mu, (k, x))\tilde{\lambda}(d(\mu, (k, x)) = \int_{\mathrm{M}\times\mathrm{K}\times\mathrm{G}} g[\Theta^{-1}(\mu, k, x)]d\tilde{\mu}, \text{ i. e.}$$

$$\int_{\mathrm{M}\times\mathrm{K}\times\mathrm{G}} g(\mu, k, x)\mu(dk, dx)\lambda(d\mu) = \rho \int_{\mathrm{M}\times\mathrm{K}\times\mathrm{G}} \left[\int g(\hat{\mathrm{S}}'_x(\mu), k, x)\nu(dx) \right] \mathrm{P}'(d(\mu, k))$$

Cette formule a été établie par Matthes dans le cas $\mathrm{G} = \mathrm{R}$ pour les processus ponctuels et par Mecke dans le cas $\mathrm{K} = \{ 1 \}$.

Application 2. — Supposons que G soit un groupe abélien localement compact σ-compact.

$\Omega = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, $\mathrm{G} = \lim \uparrow \mathrm{C}_n$, C_n compacts, M la classe des mesures sur $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ finies sur $\mathrm{A}_n = \mathrm{G} \times \mathrm{C}_n$ et sur $\tilde{\mathrm{A}}_n = \mathrm{C}_n \times \mathrm{G}$.

Γ est le groupe S_z des translations de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ parallèles à la diagonale de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$

$$\mathrm{S}_z(x, y) = (x + z, y + z) = (\mathrm{T}_z, \mathrm{T}_z)(x, y)$$

Nous introduirons deux applications θ

$$\theta^1_{(x,y)} = \mathrm{S}_{-x} \qquad \Theta^1(\mu, x, y) = (\mu - x, x, y)$$
$$\theta^2_{(x,y)} = \mathrm{S}_{-y} \qquad \Theta^2(\mu, x, y) = (\mu - y, x, y)$$

Ces deux applications vérifient les propriétés du théorème 2, car

$$\theta^1_{\mathrm{S}_z(x,y)} = \theta^1_{(x+z,y+z)} = \mathrm{S}_{-x-z} = \mathrm{S}_{-x} \circ \mathrm{S}_{-z} = \theta^1_{(x,y)} \circ (\mathrm{S}_z)^{-1}$$

et de même pour $\theta^2_{(x,y)}$.

Nous désignerons par V_z l'application

$$(\mu, x, y) \rightsquigarrow (\mu, \mathrm{S}_z(x, y)) = (\mu, x + z, y + z) ;$$

soient q_1, q_2, q_3 les 3 applications suivantes

$$(\mu, x, y) \xrightarrow{q_1} (\mu, x)$$
$$(\mu, x, y) \xrightarrow{q_2} (\mu, y)$$
$$(\mu, x, y) \xrightarrow{q_3} (x, y)$$

L'image par q_1 de V_z est l'application de $\mathrm{M} \times \mathrm{G}$ dans

$$\mathrm{M} \times \mathrm{G} : \mathrm{S}'_z(\mu, x) = (\mu, x + z),$$

ou encore $\mathrm{S}'_z = (\mathrm{I}_\mathrm{M}, \mathrm{T}_z)$ (I_M étant l'application identique dans M).

De même, l'image par q_2 de V_z est aussi l'application S'_z. L'image par q_3 de V_z est l'application S_z.

Nous poserons

$$m_1 = \hat{q}_1(\tilde{\mu}_1) \quad \text{où} \quad \tilde{\mu}_1 = \hat{\theta}^1(\tilde{\lambda})$$
$$m_2 = \hat{q}_2(\tilde{\mu}_2) \quad \text{où} \quad \tilde{\mu}_2 = \hat{\theta}^2(\tilde{\lambda})$$
$$m_3 = \hat{q}_3[\tilde{\mu}_1] = \hat{q}_3[\tilde{\mu}_2] = \hat{q}_3(\tilde{\lambda}),$$

car

$$q_3 \circ \Theta^1 = q_3 \circ \Theta^2 = q_3.$$

Si λ est S_z-invariante, $\tilde{\mu}_1$ et $\tilde{\mu}_2$ sont V_z-invariantes et donc m_1 et m_2 sont deux mesures sur $M \times G$, S'_z-invariantes, finies sur $M \times C_n$, car $\tilde{\mu}_1$ et $\tilde{\mu}_2$ sont finies respectivement sur $(M \times C_n \times G)$ et $(M \times G \times C_n)$, s'il en est de même de $\tilde{\lambda}$, d'après la remarque suivant le théorème 2.

M est d'autre part polonais, en vertu du lemme 1 appliqué à l'espace polonais $G \times G$. Le corollaire 2 s'applique alors, avec $E_1 = M$, $E_2 = G$, $m = m_1$ (resp. m_2), $T' = I_M$, $T'' = T_z$; p est un multiple de la mesure de Haar et il existe donc sur M une probabilité P′ (resp. P″) et un nombre ρ' (resp. ρ'') tels que

$$m_1 = \rho' P' \otimes \nu \quad \text{et} \quad m_2 = \rho'' P'' \otimes \nu,$$

ν étant la mesure de Haar de G.

D'autre part, m_3 est une mesure sur $G \times G$, S_z-invariante et telle que

$$m_3(C_n \times G) = \tilde{\lambda}[M \times C_n \times G] < +\infty$$
$$m_3(G \times C_n) = \tilde{\lambda}(M \times G \times C_n) < +\infty$$

Le corollaire 3 implique l'existence d'une probabilité $\tilde{P}$ sur G telle que

$$P(x, T_x(B)) = \tilde{P}(B) \quad \nu\text{-presque partout}$$

et donc

$$m_3(B \times C) = \int_C P(x, B)dp(x) = \rho \int_C \tilde{P}(T_{-x}(B))\nu(dx)$$
$$= \rho \int_C \tilde{P}(B - x)\nu(dx)$$

en posant $T_x(B) = (B + x)$.

De plus, $m_3(C_n \times G) = \rho\nu(C_n)$ d'après la dernière formule et d'autre part

$$m_3(C_n \times G) = \tilde{\mu}_1[M \times C_n \times G] = m_1(M \times C_n) = \rho' P'(M).\nu(C_n) = \rho'.\nu(C_n)$$

donc $\rho = \rho'$.

Le même raisonnement aurait montré l'existence d'une autre probabilité $\tilde{P}'$ sur G, telle que

$$m_3(B \times C) = \rho \int_B \tilde{P}'(T_{-x}(B)\nu(dx)$$

et donc, en intervertissant μ_1 et μ_2, $\rho = \rho''$.

$\rho = \rho''$ et par conséquent $\rho = \rho' = \rho''$.

Nous pouvons rassembler nos résultats dans le

THÉORÈME 4. — Soit G un groupe abélien localement compact, σ-compact $- G = \lim \uparrow C_n$, C_n-compacts.

Soit M l'ensemble des mesures sur $G \times G$, finies sur $G \times C_n$ et sur $C_n \times G$.

Soit λ une probabilité sur $(M, \mathscr{M})$, $\hat{S}_z$ invariante et $\tilde{\mu}_1$ (resp. $\tilde{\mu}_2$) les mesures associées à λ et à θ^1 (resp. θ^2) pour le théorème 2.

Alors il existe un nombre ρ, deux probabilités P′ et P″ sur $(M, \mathscr{M})$ et deux probabilités $\tilde{P}$ et $\tilde{P}'$ sur G, tels que

1) $$m_1 = q_1[\tilde{\mu}_1] = \rho P' \otimes \nu$$
2) $$m_2 = q_2[\tilde{\mu}_2] = \rho P'' \otimes \nu$$
3) $$m_3 = q_3[\tilde{\mu}_1] = q_3[\tilde{\mu}_2] = q_3[\tilde{\lambda}]$$

vérifie

$$m_3(B \times C) = \rho \int_C \tilde{P}(B - y)\nu(dy) = \rho \int_B \tilde{P}'(C - x)\nu(dx)$$

D'autre part, $\tilde{\lambda}$, mesure sur $M \times G \times G$, finie sur $M \times C_n \times G$, a une désintégration par rapport à m_3, d'après le lemme 1 appliqué à

$$E_1 = M,\ E_2 = G \times G,\ A'_n = C_n \times G.$$

Il existe une application $(x, y, B) \rightsquigarrow P(x, y, B)$ de $G \times G \times \mathscr{M}$ dans $[0, 1]$ qui soit une probabilité sur M pour (x, y) fixés et une fonction $\beta_6 \times \beta_6$ mesurable pour $F \in \mathscr{M}$ fixé, telle que

$$\tilde{\lambda}(F \times C) = \int_C P(x, y, F)dm_3(x, y)$$

On peut alors montrer assez aisément, de manière analogue à celle de Harris, le

THÉORÈME 5.

1) $P(x, y, F) = P(x + z, y + z, \hat{S}_z(F))$ pour presque tout couple (x, y) (pour la mesure m_3) et l'on peut trouver une version de P telle que cette égalité ait lieu pour tout couple (x, y) et tout $z \in G$.

2) $$P'(F) = \int_G P(o, y, F)\tilde{P}'(dy)$$

$$P''(F) = \int_G P(x, o, F)\tilde{P}(dx) = \int_G P(-x, o, F)\tilde{P}'(dx).$$

Je remercie M. J. Neveu pour de fructueuses discussions qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

HARRIS, Random measures and motions of point processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **18** (71), p. 85-115.

K. MATTHES, Stationare zufalige punktfolgen I. *J. ber. Deutsch. Math. Verei*, t. **66** (63), p. 66-79.

S. MECKE, Stationäre zufällige Masse auf lokalfompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **9** (67), p. 36-58.

RYLL-NARDZEWSKI, Remarks on processes of calls. Proc. 4th Berkeley Symposium, t. **2**, 1961, p. 455-465.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1973).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1947*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6635. 10-1973