ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. BLANCHARD

Processus de points marqués et processus ramifiés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 3 (1973), p. 259-275
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_3_259_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 3, 1973, p. 259-275. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus de points marqués et processus ramifiés

par

F. BLANCHARD (*)

Université Paris VI[e], Laboratoire de Calcul des Probabilités,
Tour 56, 9, quai Saint-Bernard, 75230 - Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On applique la technique des suites de points marqués au problème des processus ponctuels ramifiés. On obtient en particulier une formulation partielle de la mesure de Palm du processus ramifié (dans le cas stationnaire), ainsi que des conditions de convergence du processus ramifié à partir du temps 0 seulement, vers le processus ramifié lui-même.

SUMMARY. — Results about series of marked events are applied to branching point processes. The stationarity of the branching process is derived from suitable hypotheses, together with a partial result about its Palm measure. It is shown that under general conditions the transient branching process converges to the branching process itself.

INTRODUCTION

Un modèle de l'occurence des pannes dans un ordinateur a été fourni par Lewis [*4*] [*5*]. Il consiste à supposer que chaque défaillance d'un compo-

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S. Cet article résulte de la refonte et de la généralisation du contenu de ma thèse de 3[e] cycle. Je remercie MM. J. NEVEU et A. HANEN des conseils précieux qu'ils m'ont donnés pour ce travail.

sant entraîne, non pas une seule panne, mais une panne chaque fois que ce composant devrait être utilisé, et ceci tant qu'il n'a pas été localisé et réparé. La suite des pannes résulte donc de la superposition :

1) de la suite « des premières pannes » de composants, que Lewis suppose être une réalisation d'un processus de Poisson (appelé processus primaire) ;

2) de l'ensemble des « pannes secondaires » entraînées par les précédentes. Les processus secondaires qui les représentent sont indépendants et identiques, et consistent en des processus de renouvellement finis ayant un nombre aléatoire de points.

Nous établissons ici l'existence du processus « en équilibre » (c'est-à-dire tel qu'il serait si le calculateur fonctionnait depuis toujours), ainsi que certaines de ses propriétés, dans un cas plus général : le processus primaire est supposé stationnaire, les processus secondaires ont un nombre de points dont l'espérance est finie. Nous démontrons ensuite que le processus obtenu en ne ramifiant le primaire qu'à partir du temps 0 — modèle qui convient mieux pour représenter le fonctionnement d'un ordinateur — tend bien vers le précédent quand $t \to +\infty$.

I. CONSTRUCTION D'UN PROCESSUS RAMIFIÉ ; PROPRIÉTÉS DU PROCESSUS EN ÉQUILIBRE

Notre processus se décrit facilement au moyen du modèle des processus de branchement ou de ramification, à partir de la donnée d'une distribution ponctuelle aléatoire sur R (le processus primaire) et d'une probabilité de transition (le processus secondaire général). L'existence de tels processus est démontrée par Harris [3] à l'aide de la fonctionnelle génératrice. Nous allons donner ici une autre construction, plus directement probabiliste.

1. Construction d'un processus ramifié

a) DÉFINITIONS

Nous noterons, suivant l'usage courant, N l'ensemble des entiers naturels, Z celui des entiers relatifs, R celui des réels, et $\mathscr{B}$ la σ-algèbre des boréliens de R. Soit :

Ω l'ensemble des mesures à valeurs entières positives, à support dénombrable, sur R. On notera O la mesure nulle.

. $\mathscr{A}$ la plus petite σ-algèbre sur Ω qui rende mesurable la variable aléatoire $\omega \rightsquigarrow \omega(A)$, qu'on notera $N_A(.)$, pour tout borélien A de R.

. $\mathscr{A}^+$ (resp. $\mathscr{A}^-$) sera la σ-algèbre engendrée pour les applications $N_A(\omega)$, quand A est un borélien de $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$).

. Enfin, la donnée d'une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ constitue une mesure ponctuelle aléatoire ; δ_0 sera la probabilité telle que $\delta_0(O) = 1$.

Soit Ω^0 la partie de Ω constituée des mesures à support sans point d'accumulation, ayant la valeur 1 au plus sur les boréliens réduits à un point. La donnée d'une telle mesure est alors identique à celle d'une partie dénombrable localement finie de R. Donnons-nous une distribution ponctuelle aléatoire $(\Omega, \mathscr{A}, \lambda)$ telle que $\Omega \backslash \Omega^0$ soit λ-négligeable (Nous nous trouvons donc dans le cas développé par Ryll-Nardzewski [*9*] et Neveu [*8*], à ceci près que les mesures finies sont admises).

DÉFINITION 1. — Toute distribution ponctuelle aléatoire λ, telle que $\lambda(\Omega^0) = 1$, sera appelée processus ponctuel.

Nous pourrons dans ce cas indexer les points de ω sur Z, en les classant par ordre croissant, et en appelant t_0 le premier point d'abscisse positive. Nous noterons aussi $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^+$ et $\mathscr{A}^-$ les σ-algèbres traces sur Ω^0.

Suivant une suggestion de Lewis (5, p. 361), nous allons utiliser la technique des suites de points marqués, empruntée à Matthes [*6*], pour construire le processus en équilibre (ainsi que d'autres qui serviront plus loin) et démontrer sa stationnarité.

Soit S l'ensemble des parties finies de Ω_0, $\mathscr{S}$ la plus petite σ-algèbre sur S rendant mesurables les dénombrements sur les boréliens (sur le modèle précédent), ou, ce qui revient au même, les applications coordonnées.

Un élément $s \in S$ pourra se représenter sous la forme $s = \{ s_1, \ldots, s_T \}$, comme une suite croissante dans R, ayant un nombre total aléatoire T de termes. Nous munissons $(S, \mathscr{S})$ d'une probabilité μ.

A chaque point t_i de $\omega \in \Omega^0$, on assigne une marque s_i dans S, on obtient ainsi une « suite de points marqués ». Nous appellerons Ω_S^0 l'ensemble de ces suites d'éléments de $R \times S$, $\mathscr{A}_S$ la σ-algèbre sur Ω_S^0 engendrée par les ensembles de la forme

$$\{ \omega_s : N_{A_1 \times S_1} = k_1, \ldots, N_{A_p \times S_p} = k_p \}$$

quels que soient $A_1 \ldots A_p \in \mathscr{B}$, $S_1 \ldots S_p \in \mathscr{S}$.

La donnée d'un processus ponctuel λ et de μ permet de définir une probabilité P' sur $(\Omega_S^0, \mathscr{A}_S)$.

b) CONSTRUCTION DE LA SUITE ALÉATOIRE DE POINTS MARQUÉS

Voici le procédé employé à cet effet par Matthes ([*6*], p. 68) : on démontre d'abord que $\mathscr{A}_S$ est la plus petite σ-algèbre rendant mesurables les applications coordonnées de Ω_S^0 dans R × S, $\omega_s \mapsto (t_i, \sigma_i)$, $-\infty < i < +\infty$.

On peut alors définir la restriction λ_{mn} de λ à la σ-algèbre de Ω^0 engendrée par les coordonnées d'indice i, $-m-1 < i < n$; on construit par ailleurs une suite aléatoire finie d'éléments σ_i de $S(-m-1 < i < n)$, répartis indépendamment suivant μ : à savoir suivant la probabilité $\mu^{\otimes(m+n)}$. On obtient pour produit une probabilité $\lambda_{mn} \otimes \mu^{\otimes(m+n)}$. En faisant tendre m et n vers l'infini, on obtient finalement une probabilité sur Ω_S^0 : nous la noterons $[\lambda, \mu]$.

Mettons l'accent sur trois propriétés de $[\lambda, \mu]$.

1re PROPRIÉTÉ. — Soit $p : \Omega_S^0 \to \Omega^0$ l'application qui à ω_s fait correspondre la suite des t_i ; p est mesurable par construction de $\mathscr{A}_S$, et on appellera $\mathscr{A}'_S$ la sous-σ-algèbre de $\mathscr{A}_S$ engendrée par p, soit $p^{-1}(\mathscr{A})$. Comme les t_i sont répartis suivant λ_{mn}, pour $m < 1 < i < n$, on a :

$$[\lambda, \mu]\,[p^{-1}(E)] = \lambda(E), \text{ pour tout E de } \mathscr{A}.$$

2^e PROPRIÉTÉ. — Les applications σ_i, $-\infty < i < +\infty$, sont indépendantes entre elles.

3^e PROPRIÉTÉ. — Si $n = 0$, et que l'on fait tendre m vers $+\infty$, on obtient la restriction de $[\lambda, \mu]$ à $\mathscr{A}_S^-$ qui coïncide donc avec $[\lambda^-, \mu]$, si l'on appelle λ^- la restriction de λ à $\mathscr{A}^-$ (voir II, 1*a*).

c) LE PROCESSUS DE BRANCHEMENT DÉDUIT

Soit $r : \Omega_S^0 \to \Omega$ « le rabattement » qui superpose à ω chacun des événements secondaires engendrés par ses points, chacun prenant son origine au point dont il est la marque.

Plus correctement :

Soit

$$\omega_s = \{ \ldots, (t_0, s_0), \quad (t_1, s_1), \ldots \}$$

avec

$$s_0 = \{ s_0^1, \ldots, s_0^{T_0} \}, \quad s_1 = \{ s_1^1, \ldots, s_1^{T_1} \} \text{ etc.}$$

(Nous utilisons pour les points marqués de ω_s la numérotation prévue au début du § 1).

Nous lui faisons correspondre par r la famille de points :

$r(\omega_s) = \{ \ldots t_0, s_0^1 + t_0, \ldots, s_0^{T_0} + t_0, t_1, s_1^1 + t_1, \ldots, s_1^{T_1} + t_1, t_2 \ldots \}$

PROPOSITION 1. — L'application r est mesurable de $(\Omega_S^0, \mathscr{A}_S)$ dans $(\Omega, \mathscr{A})$.

Démonstration. — Soit p, comme plus haut, l'application qui à ω_s fait correspondre la suite « démarquée » ω.

Soit $\sigma_i : \Omega_S^0 \to S$ l'application (elle aussi mesurable par construction) qui à ω_s fait correspondre la suite secondaire engendrée par le point t_i de ω_s.

Soit ϕ_t la translation de longueur t sur R ; nous noterons de la même manière la translation correspondante sur les parties de R.

Notons enfin $*$ l'opération « superposition de deux distributions ponctuelles ». On a

$$r(\omega_s) = p(\omega_s) * \{ \ldots * \phi_{t_0}(\sigma_0(\omega_1)) * \phi_{t_1}(\sigma_1(\omega_s)) * \ldots \}$$

donc, pour tout borélien A de R,

$$N_A(r(\omega_s)) = N_A(p(\omega_s)) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_A(\phi_{t_i}(\sigma_i(\omega_s))).$$

Par définition de $\mathscr{A}_S$, chacune des applications effectuées ci-dessus est mesurable, donc $N_A(r(\omega_s))$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega_S^0, \mathscr{A}_S)$, ce qui démontre que $r(\omega_s)$ est mesurable de $(\Omega_S^0, \mathscr{A}_S)$ dans $(\Omega, \mathscr{A})$.

r définit une probabilité (λ, μ) sur $(\Omega, \mathscr{A})$ par la formule ordinaire :

$$(\lambda, \mu)(A) = [\lambda, \mu](r^{-1}A), \quad A \in \mathscr{A}$$

Il en résulte immédiatement la formule d'intégration par rapport à la mesure image, pour toute variable aléatoire réelle f intégrable sur Ω :

$$\int_\Omega f(\omega)(\lambda, \mu)(d\omega) = \int_{\Omega_S^0} f(r\omega_s)[\lambda, \mu](d\omega_s) \tag{1}$$

2. Stationnarité du processus « en équilibre »

Nous allons maintenant supposer que $(\Omega, \mathscr{A}, \lambda)$ est stationnaire, ce qui n'était pas nécessaire jusqu'ici.

Si ϕ_t est la transformation qui à $\omega = \{ \ldots t_{-1}, t_0, t_1 \ldots \}$ fait correspondre $\phi_t(\omega) = \{ \ldots t_{-1} + t, t_0 + t, t_1 + t, \ldots \}$, et si l'on note

$$\phi_t(E) = \{ \omega : \phi_{-t}(\omega) \in E \},$$

pour tout E de $\mathscr{A}$ (ces transformations sont indépendantes de l'indexation choisie pour les points de ω), cela signifie que

$$\lambda(\phi_t(\mathrm{E})) = \lambda(\mathrm{E}) \text{ pour tout } t.$$

PROPOSITION 2. — Si λ est stationnaire (λ, μ) est stationnaire.

Démonstration :

a) $[\lambda, \mu]$ *est stationnaire.*

Cela résulte de la stationnarité de λ (Matthes [*6*], p. 69).

b) (λ, μ) *est stationnaire.*

Par abus de langage, on appellera aussi ϕ_t la transformation de longueur t sur Ω_S : c'est-à-dire que si l'on note :

$$\omega_s = \{ \ldots (t_{-1}, s_{-1}), \quad (t_0, s_0), \quad (t_1, s_1) \ldots \}$$

on a

$$\phi_t(\omega_s) = \{ \ldots (t_{-1} + t, s_{-1}), \quad (t_0 + t, s_0), \quad ((t_1 + s_1) \ldots \}.$$

On vérifie facilement que

$$r(\phi_t(\mathrm{F})) = \phi_t(r(\mathrm{F})), \text{ pour tout } \mathrm{F} \in \mathscr{A}^0_{\mathrm{S}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}(\lambda, \mu)[\phi_t(\mathrm{E})] &= [\lambda, \mu]\,[r^{-1}(\phi_t(\mathrm{E}))] = [\lambda, \mu]\,[\phi_t(r^{-1}(\mathrm{E}))] \\ &= [\lambda, \mu]\,[r^{-1}(\mathrm{E})] \\ &= (\lambda, \mu)\,(\mathrm{E})\end{aligned}$$

3. Moyenne du nombre de points

(λ, μ) étant stationnaire, on sait (voir par exemple Gnedenko et Kovalenko [*1*]) qu'il existe un réel $a > 0$, fini ou non, tel que pour tout borélien A, si l'on appelle $\mathscr{M}$ la mesure de Lebesgue on ait :

$$\int_{\Omega \times \mathrm{A}} \omega(dt)(\lambda, \mu)(d\omega) = \int_{\Omega} \mathrm{N_A}(\omega)(\lambda, \mu)(d\omega) = a.\mathscr{M}(\mathrm{A}).$$

a) Cas ou le processus primaire est quelconque

Supposons λ non forcément stationnaire. Nous noterons

$$\mathrm{Q}_\lambda(\mathrm{A}) = \int_{\Omega \times \mathrm{A}} \omega(dt)\lambda(d\omega), \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{S} \times \mathrm{A}} s(d\tau)\mu(ds),$$

A étant un borélien. Si f est une fonction mesurable, positive sur R, on a

$$\int_{\mathrm{R}\times\Omega} f(t)\omega(dt)\lambda(dw) = \int_{\mathrm{R}} f(t)\mathrm{Q}_{\lambda}(dt) \tag{2}$$

et une formule analogue pour P_{μ}.

Posons, si P et Q sont deux mesures sur R, positives :

$$\mathrm{P} * \mathrm{Q}(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{R}} \mathrm{P}(\phi_{-t}(\mathrm{A}))\mathrm{Q}(dt) = \int_{\mathrm{R}} \mathrm{Q}(\phi_{-t}(\mathrm{A}))\mathrm{P}(dt)$$

PROPOSITION 3. — Soit λ un processus ponctuel, μ une probabilité sur $(\mathrm{S}, \mathscr{S})$. La mesure $\mathrm{Q}_{(\lambda,\mu)}$ sur R s'exprime par la formule :

$$\mathrm{Q}_{(\lambda,\mu)}(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}_{\lambda}(\mathrm{A}) + \mathrm{Q}_{\lambda} * \mathrm{P}_{\mu}(\mathrm{A}).$$

Démonstration. — Soit p et la famille σ_i définis comme en 1*b*. Posons

$$f(\omega) = \mathrm{N}_{\mathrm{A}}(\omega)$$

alors

$$\mathrm{Q}_{(\lambda,\mu)}(\mathrm{A}) = \int_{\Omega} f(\omega)(\lambda, \mu)(d\omega)$$

ce qui donne, en appliquant la formule 1

$$\mathrm{Q}_{(\lambda,\mu)}(\mathrm{A}) = \int_{\Omega^{\circ}_{\mathrm{S}}} f(r\omega_s)\,[\lambda, \mu]\,(d\omega_s).$$

Mais, en considérant $r\omega_s$ comme distribution, on a

$$r\omega_s = p\omega_s + \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi_{+t_i}(\sigma_i(\omega_s)) \tag{3}$$

donc

$$f(r\omega_s) = \mathrm{N}_{\mathrm{A}}(p\omega_s) + \sum_{i\in\mathrm{Z}} \mathrm{N}_{\phi_{-t_i}(\mathrm{A})}(\sigma_i(\omega_s)) \tag{4}$$

Si l'on pose, comme plus haut, $\mathscr{A}'_{\mathrm{S}} = p^{-1}(\mathscr{A})$, le premier terme est $\mathscr{A}'_{\mathrm{S}}$-mesurable, donc

$$\mathrm{E}(f \circ r \mid \mathscr{A}'_{\mathrm{S}})(\omega_s) = \mathrm{N}_{\mathrm{A}}(p\omega_s) + \sum_{i\in\mathrm{Z}} \mathrm{E}_{\mu}(\mathrm{N}_{\phi_{-t_i}(\mathrm{A})}(s)),$$

ceci du fait que σ_i et p sont indépendants.

A toute application $\phi(\omega_s)$ dans R, $\mathscr{A}'_{\mathrm{S}}$-mesurable, on peut faire correspondre une application $\Psi(\omega)$ dans R, $\mathscr{A}$-mesurable, telle que $\phi = \Psi \circ p$, et que

$$\int_E \Psi d\lambda = \int_{p^{-1}(E)} \phi d[\lambda, \mu] \tag{5}$$

C'est en effet évident quand ϕ est un indicateur d'ensemble $\mathscr{A}'_S$-mesurable, grâce à la formule

$$[\lambda, \mu]\,(p^{-1}(E)) = \lambda(E) \quad (\text{voir § 1, } b, 1^{re} \text{ propriété}),$$

et le cas général s'en déduit immédiatement.

Nous pouvons donc considérer $E(f \circ r \mid \mathscr{A}'_S)$ comme une application Ψ de Ω dans R. Il vient, d'après (4) :

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= N_A(\omega) + \sum_{i \in Z} E_\mu(N_{\phi_{-t_i}(A)}(s)) \\ &= N_A(\omega) + \int_R E_\mu(N_{\phi_{-t}(A)})\omega(dt) \end{aligned} \tag{6}$$

et, en combinant (5) et (6), on obtient :

$$Q_{(\lambda,\mu)}(A) = \int_{\Omega \times R} \omega(dt)\lambda(d\omega)\,[1_A(t) + E_\mu(N_{\phi_{-t}(A)})] \tag{7}$$

Le premier terme du second membre vaut $Q_\lambda(A)$. En remaniant le second, on a :

$$Q_{(\lambda,\mu)}(A) = Q_\lambda(A) + \int_{\Omega \times R} \omega(dt)\lambda(d\omega) \int_{S \times R} 1_{\phi_{-t}(A)}(\tau)s(d\tau)\mu(ds) \tag{8}$$

soit, en effectuant la seconde intégration :

$$\begin{aligned} Q_{(\lambda,\mu)}(A) &= Q_\lambda(A) + \int_{\Omega \times R} \omega(dt)\lambda(d\omega)P_\mu(\phi_{-t})(A)) \\ &= Q_\lambda(A) + \int_{\Omega \times R} Q_\lambda(dt)P_\mu(\phi_{-t}(A)) \end{aligned} \tag{9}$$

ce qui établit la proposition.

b) Applications

Corollaire. — Pour que la mesure $Q_{(\lambda,\mu)}$ soit finie, il faut et il suffit, si Q_λ est elle-même finie, que $Q_\lambda * P_\mu$ le soit.

Proposition 4. — Soit λ stationnaire en moyenne, de densité $\alpha < +\infty$

(c'est-à-dire, $Q_\lambda(\phi_t(A)) = Q_\lambda(A) = \alpha . \mathscr{M}(A)$). Pour que $Q_{(\lambda,\mu)}$ soit finie, il faut et il suffit que le nombre de points T du processus secondaire ait une moyenne finie, et l'on a alors $Q_{(\lambda,\mu)}(A) = \alpha(1 + E_\mu(T))\mathscr{M}(A)$.

Démonstration. — Intervertissons Q_λ et P_μ dans la formule 9 :

$$Q_{(\lambda,\mu)}(A) = Q_\lambda(A) + \int_{\Omega \times R} P_\mu(dt) \times Q_\lambda(\phi_{-t}(A).$$

Or

$$Q_\lambda(A) = Q_\lambda(\phi_{-t}(A)) = \alpha\mathscr{M}(A).$$

Il vient

$$\begin{aligned} Q_{(\lambda,\mu)}(A) &= \alpha(\mathscr{M}(A))[1 + \int_{S \times R} s(d\tau)\mu(ds)] \\ &= \alpha\mathscr{M}(A)[1 + E_\mu(T)] \end{aligned}$$

PROPOSITION 5. — Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \lambda)$ un processus ponctuel aléatoire stationnaire conforme aux hypothèses de Ryll-Nardzewski, $(S, \mathscr{S}, \mu)$ une distribution aléatoire quelconque. On peut alors construire, à partir de λ et μ, une distribution ponctuelle aléatoire ramifiée $(\Omega, \mathscr{A}, (\lambda, \mu))$ qui est elle-même stationnaire.

Si de plus λ possède une densité $\alpha < +\infty$, et si l'espérance du nombre de points T de s, $E_\mu(T)$, est finie, alors (λ, μ) a une densité, qui vaut

$$\alpha(1 + E_\mu(T)).$$

Conséquence. — Ce résultat nous montre que dans les hypothèses du théorème la distribution ponctuelle ω est (λ, μ)-presque sûrement localement finie.

4. Mesure de Palm de (λ, μ)

Nous utiliserons la formule de définition (2.8) de Mecke [7] de la mesure de Palm, adaptée aux notations utilisées ici :

$$P_0(A) = \int_\Omega < \omega, g(t)1_A(\phi_{-t}(\omega)) > P(d\omega),$$

où P est une distribution aléatoire, $A \in \mathscr{A}$, $\int_R g(t)dt = 1$.

La stationnarité de (λ, μ) entraîne l'existence de $(\lambda, \mu)_0$; l'existence d'une densité finie pour (λ, μ) nous assure que $(\lambda, \mu)_0$ est une mesure finie, dont on sait par ailleurs (J. Neveu [8]) que c'est une distribution ponctuelle.

En prenant $g = 1_{[0,1]}$, on aura :

$$(\lambda, \mu)_0(A) = \int_\Omega (\lambda, \mu)(d\omega) < \omega, \quad 1_{[0,1]}(.) \times 1_A(\phi_{-t}(\omega)) > \tag{10}$$

Combinons les formules 1 et 10

$$(\lambda, \mu)_0(A) = \int_{\Omega_S^0} [\lambda, \mu](d\omega_s) < r\omega_s, \quad 1_{[0,1]}(.) \times 1_A(\phi_{-t}(r\omega_s)) > \tag{11}$$

Or $r(\omega_s)$, considéré comme distribution ponctuelle sur R, peut s'écrire

$$r(\omega_s) = p(\omega_s) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi_{t_i}(\sigma_i\omega_s),$$

ce qui, reporté dans (11), nous donne :

$$\begin{aligned}(\lambda, \mu)_0(A) = &\int_{\Omega_S^0} < p\omega_s, \quad 1_{[0,1]}(.)1_A(\phi_{-t}(r\omega_s)) > [\lambda, \mu](d\omega_s) \\ &+ \int_{\Omega_S^0} < [\Sigma\phi_{t_i}(\sigma_i\omega_s)], \quad 1_{[0,1]}(.)1_A(\phi_{-t}(r\omega_s)) > [\lambda, \mu](d\omega_s)\end{aligned} \tag{12}$$

INTERPRÉTATION HEURISTIQUE

a) λ ayant une densité α, λ_0 est une mesure finie. Soit λ'_0 la probabilité sur Ω telle que $\lambda_0 = \alpha\lambda'_0$. Le premier terme de la formule (12) vaut

$$\alpha(\lambda'_0, \mu)(A),$$

c'est-à-dire qu'à un facteur près, cette partie de $(\lambda, \mu)_0$ est égale à la distribution engendrée par la probabilité de Palm du primaire, ramifiée par μ.

On peut en donner une démonstration à l'aide des résultats de Hanen [*2*]. On peut aussi en avoir une intuition directe en remarquant que ce terme vaut

$$\int_{\Omega_S^0} N(\omega_s)\,[\lambda, \mu]\,(d\omega_s)$$

où $N(\omega_s)$ est le nombre des points t_i de $p\omega_s$ dans [0,1], tels que $\phi_{-t_i}(r\omega_s) \in A$.

b) Le second terme représente la contribution des points des processus secondaires à la mesure de Palm. Je n'ai pas trouvé de moyen de l'expliciter plus précisément.

II. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES PROCESSUS RAMIFIÉS

Lewis [4] [5] envisageait un processus de Poisson stationnaire, commençant au temps 0, et ramifié au moyen d'un secondaire qui était un renouvellement tronqué.

Nous allons nous placer ici dans des conditions plus générales : le processus primaire n'est pas nécessairement stationnaire, mais simplement de densité bornée sur $]-\infty, 0]$. Le processus secondaire a un nombre de points T d'espérance finie. Nous en déduirons, en utilisant les résultats du chapitre I, qu'un processus ponctuel, ramifié seulement à partir du temps 0, se comporte comme le processus ramifié de $-\infty$ à $+\infty$ quand $t \to +\infty$; ou, si l'on veut, que l'influence des processus secondaires lointains va en s'effaçant avec le temps.

Il en résulte que la distribution décrite par Lewis (transient process) tend vers le processus « en équilibre » quand $t \to +\infty$, ce qui permet d'interpréter certains des résultats donnés par Lewis [5].

1. Conditions de convergence

a) DÉFINITIONS

Soit $(\Omega^0, \mathscr{A}, \lambda)$ un processus ponctuel quelconque. Appelons Ω^- (resp. Ω^+) la partie de Ω^0 qui se compose des sous-ensembles localement finis de

$$]-\infty, 0] \text{ (resp. } [0, +\infty[).$$

Soit $\omega \in \Omega^0$ (resp. $\omega_s \in \Omega_S^0$), nous appellerons ω^- et ω^+ (resp. ω_s^- et ω_s^+) ses « projections » sur R^- et R^+ :

$$\omega^- = \omega \cap]-\infty, 0[\, \in \Omega^-, \quad \omega^+ = \omega \cap [0, +\infty[\, \in \Omega^+$$

(resp. $\omega_s^- = \{ (t_i, \sigma_i) : t_i < 0 \}$ et $\omega_s^+ = \{ (t_i, \sigma_i) : t_i \geq 0 \}$.)

Pour tout $E \in \mathscr{A}$, nous poserons

$$\lambda^-(E) = \lambda \{ \omega : \omega^- \in E \} \quad \text{et} \quad \{ \omega^+(E) = \lambda \{ \omega : \omega^+ \in E \}.$$

et pour tout $F \in \mathscr{A}_s$,

$$[\lambda, \mu]^- (F) = [\lambda, \mu] \{ \omega_s : \omega_s^- \in F \},$$
$$[\lambda, \mu]^+ (F) = [\lambda, \mu] \{ \omega_s : \omega_s^+ \in F \}.$$

λ^-, λ^+, $[\lambda, \mu]^-$ et $[\lambda, \mu]$ sont des probabilités et grâce à (I, 1, b, 3° propriété), on a :

$$[\lambda^-, \mu] = [\lambda, \mu]^-$$

(λ^-, μ) et (λ^+, μ) sont définis comme en (I, 1, c).

b) Théorème de convergence

Soit A un intervalle de R^+, borné ou non. Nous appellerons $\mathscr{A}_A$ la σ-algèbre engendrée par les dénombrements sur les boréliens de A.

Proposition 1. — Soit $E \in \mathscr{A}_A$ (resp. $\mathscr{A}^+$). Pour que

$$(\lambda^+, \mu)(\phi_t(E)) \to (\lambda, \mu)(E) \quad \text{quand } t \to +\infty,$$

il suffit que

$$(\lambda^+, \mu)(\phi_t)(N_A(\omega) > 0)) \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty$$

Démonstration. — Par définition $(\lambda, \mu)(\phi_t(E) = [\lambda, \mu]\,(\phi_t(r^{-1}E))$. Décomposons $\phi_t(r^{-1}E)$ en 2 événements disjoints :

$$\begin{aligned}\phi_t(r^{-1}E) = {} & \phi_t(\{\, r\omega_s \in E \,\} \cap \{\, N_A(r\omega_s^-) = 0 \,\}) \\ & + \phi_t(\{\, r\omega_s \in E \,\} \cap \{\, N_A(r\omega_s^-) > 0 \,\}).\end{aligned}$$

Comme $E \in \mathscr{A}_A$, le premier est identique à

$$\phi_t(\{\, r\omega_s^+ \in E \,\} \cap \{\, N_A(r\omega_s^-) = 0 \,\}),$$

donc il se décompose à son tour en

$$\phi_t(\{\, r\omega_s^+ \in E \,\} \setminus \phi_t(\{\, r\omega_s^+ \in E \,\} \cap \{\, N_A(\omega_s^-) > 0 \,\})).$$

Donc

$$\begin{aligned}(\lambda, \mu)(\phi_t(E)) = {} & [\lambda, \mu]\,(\phi_t(\{\, r\omega_s^+ \in E \,\})) \\ & - [\lambda, \mu]\,(\{\, \phi_t(\{\, r\omega_s^+ \in E \,\} \cap \{\, N_A(r\omega_s^-) > 0 \,\})) \\ & + [\lambda, \mu]\,(\phi_t(\{\, r\omega_s \in E \,\} \cap \{\, N_A(r\omega_s^-) > 0 \,\}))\end{aligned}$$

Le premier terme est identique à

$$[\lambda^+, \mu]\,(\phi_t r^{-1}E) = (\lambda^+, \mu)(\phi_t E)$$

Les autres sont l'un et l'autre majorés par

$$\begin{aligned}[\lambda, \mu]\,(\phi_t\,\{\, N_A(r\omega_s^-) > 0 \,\}) & = [\lambda^-, \mu]\,(\phi_t\,\{\, N_A(r\omega_s) > 0 \,\}) \\ & = (\lambda^-, \mu)(\phi_t\,\{\, N_A(\omega) > 0 \,\})\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

Donc $(\lambda^+, \mu)(\phi_t E) - (\lambda, \mu)(E) = \varepsilon(t)$, $(\varepsilon \to 0$ quand $t \to +\infty)$.

Remarque. — L'existence d'un intervalle I borné sur lequel l'hypothèse est vérifiée, entraîne qu'elle est vraie sur tout borné ; l'hypothèse où $I = R^+$ est plus forte.

c) MOYENNE DU NOMBRE DE POINTS

Nous remplacerons les hypothèses de la proposition 1 par

$$E(N_{\phi_t(A)}) = \int_\Omega N_{\phi_t(A)}(\omega)(\lambda^-, \mu)(d\omega) \to 0.$$

Ces hypothèses sont plus fortes (les premières s'en déduisent grâce au théorème de Lebesgue), mais beaucoup plus faciles à vérifier grâce à la proposition I,3.

Soit A un intervalle de R^+. Nous voulons que

$$Q_{\lambda^-}(\phi_t A) + Q_{\lambda^-} * P_\mu(\phi_t A) \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

Dès que t est assez grand, le premier terme est nul ; nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — Pour que $E(N_{\phi_t(A)}) \to 0$, A borné (resp. $E_{\phi_t(R^+)} \to 0$) il faut et il suffit que $Q_{\lambda^-} * P_\mu(\phi_t A) \to 0$ (resp. qu'il existe un réel t_0 tel que

$$Q_{\lambda^-} * P_\mu(\phi_t\, R^+) < +\infty).$$

Démonstration :

a) Quand l'intervalle est borné, la démonstration se déduit immédiatement de ce qui précède.

b) Soit $Q_{\lambda^-} * P_\mu(\phi_{t_0} R^+) < +\infty$.

Sur $\phi_{t_0}(R^+) = [t_0, +\infty[$, $Q_{\lambda^-} * P_\mu$ se comporte alors comme une mesure finie.

Donc comme
$$\bigcap_{t > t_0} \phi_t(R^+) \text{ est vide,}$$
$$Q_{\lambda^-} * P_\mu(\phi_t(R^+)) \to 0$$
quand $t \to +\infty$.

Applications.

1) Quand P_μ ne charge qu'un intervalle borné de R^+, la proposition 1 s'applique sans qu'il soit nécessaire de recourir à la proposition 2.

2) Voici maintenant une proposition qui, à partir d'hypothèses un peu plus générales, nous donnera une condition suffisante de convergence dans le cas où λ est stationnaire en moyenne :

PROPOSITION 3. — Soit A un intervalle de R^+, et $Q_\lambda(B) \leq c(B)$, B parcourant l'ensemble des boréliens. S'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\int_{t_0}^{+\infty} P_\mu(d\tau) < +\infty \text{ (resp. } \int_{t_0}^{+\infty} \tau . P_\mu(d\tau) < +\infty \quad \text{si} \quad A = R^+),$$

alors

$$E(N_{\phi_t(A)}(\omega)) \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

Démonstration :

$$E(N_{\phi_t(A)}) = \int_R Q_{\lambda^-}(\phi_{t} - A) P_\mu(d\tau).$$

a) Si A est un intervalle borné

$$Q_{\lambda^-}(\phi_{t-\tau}A) = 0 \text{ pour } \tau < +t,$$

et

$$Q_{\lambda^-}(\phi_{t-\tau}A) \leqslant b\mathcal{M}(A) \text{ pour } \tau > t.$$

Donc

$$E(N_{\phi_t(A)}) \leq b\mathcal{M}(A) \int_t^{+\infty} P_\mu(d\tau).$$

Donc, pour A borné, il suffit que P soit finie au-delà d'un réel t_0 pour que les hypothèses de la proposition 2 soient vérifiées.

b) Si $A = R^+$

$$Q_{\lambda^-}(\phi_{t-\tau}R^+) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau < +t,$$

et

$$Q_{\lambda^-}(\phi_{t-\tau}R^+) \leq b\mathcal{M} \quad ([-t + \tau, 0]) \leq b. \quad \mathcal{M}([-t, 0]) = b.\tau$$

quand $\tau > t$. Donc

$$E(N_{\phi_t(A)} \leq b \int_{t_0}^{+\infty} \tau P_\mu(d\tau),$$

et il suffit qu'il existe un réel t_0 tel que $\int_{t_0}^{+\infty} P_\mu(d\tau) < +\infty$, pour que les hypothèses de la proposition 2 soient vérifiées.

3) On obtiendrait des propositions analogues dans le cas où, par exemple, Q_λ et P_μ admettent toutes deux des dérivées de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue.

Remarque. — La proposition 3 permet de retrouver facilement un des résultats de Lewis [5] : à savoir que

$$N_{\phi_t(A)}(\omega)(\lambda^+, \mu)(d\omega) \to \alpha(1 + E_\mu(T)) \text{ quand } t \to +\infty.$$

Cela résulte de ce que

$$\alpha(1 + E_\mu(T)) = \int N_{\phi_t(A)}(r\omega_s^+)[\lambda, \mu](d\omega_s) + \int N_{\phi_t(A)}(r\omega_s^-)[\lambda, \mu](d\omega_s)$$

et la proposition 3 établit que le second terme du second membre tend vers 0, avec les hypothèses de Lewis.

III. INTERPRÉTATION DE CERTAINS RÉSULTATS DE LEWIS ; DISCUSSION

1) Trois des résultats asymptotiques donnés par Lewis [5] à propos du processus (λ^+, μ), dans un cas particulier : λ de Poisson, μ renouvellement tronqué, qui vérifie les hypothèses de la proposition 3, peuvent être interprétés à l'aide des résultats qui précèdent.

a) MOYENNE DU NOMBRE DE POINTS DANS UN INTERVALLE

Lewis montre que $Q_{(\lambda+,\mu)}(\phi_t A) \to \alpha(1 + E_\mu(T))$.
Nous savons maintenant que la limite est la moyenne du nombre de points de (λ, μ) dans l'intervalle unité.

b) TEMPS DE RÉCURRENCE EN AVANT

$(\lambda^+, \mu)\{ N_{(t,t+h)} = 0 \} = R_L(h, t)$ détermine la fonction de répartition du temps de récurrence en avant (temps qui sépare l'instant t du premier point qui le suit). Lewis donne, dans un cas très général, la limite de cette quantité ; le théorème 2 nous permet d'en déduire que cette limite est

$$(\lambda, \mu)\{ N_{(t,t+h)} = 0 \}.$$

c) FONCTION GÉNÉRATRICE DU NOMBRE DE POINTS DANS UN INTERVALLE

Lewis donne également la limite quand $t \to +\infty$ de la transformée de Laplace du logarithme de la fonction génératrice de $N_{(t,t+h)}$ pour le processus (λ^+, μ).

La convergence de (λ^+, μ) vers (λ, μ) entraîne la convergence de la fonction génératrice de (λ^+, μ) vers celle de (λ, μ), donc l'expression donnée par Lewis est bien, comme il l'affirme (p. 361) la valeur pour le processus (λ, μ) de cette transformée (Voir Vere-Jones [*11*]).

Le présent travail constitue donc une justification des résultats de Lewis (5). Nous avons démontré :

— d'une part, que le « processus en équilibre » dont il parle peut se construire rigoureusement ;

— d'autre part, que les limites, calculées par Lewis, des quantités relatives au processus (λ^+, μ) (le processus transitoire), coïncident avec les quantités correspondantes relatives au processus stationnaire (λ, μ).

Ces grandeurs ne pourraient-elles pas s'obtenir par un calcul direct ? C'est peu probable. La valeur de $Q_{(\lambda,\mu)}(A)$, nécessaire à la démonstration de la proposition I,5 est beaucoup plus difficile à calculer directement que celle de la limite de $Q_{(\lambda+,\mu)}\phi_t(A)$. A supposer qu'on puisse obtenir directement $R_L(h, t)$ et la fonction génératrice de $N_{(t,t+h)}$, nous pouvons penser que ce serait au moins aussi laborieux. Les calculs simples de Lewis restent donc indispensables.

2) Le type de convergence dont il est question dans la prop. II, 1 est plus fort que la convergence faible (c'est-à-dire ne concernant que les événements $E = \{ \omega : N_I(\omega) = k \}$ et leurs intersections finies).

Ainsi, soit $S = \bigcup_{p \in I} \{ N_{\{p\}}(\omega) > 1 \}$ (il s'agit de l'ensemble des mesures ponctuelles donnant une masse ≥ 2 à au moins un point dans l'intervalle I).

S appartient à la σ-algèbre $\mathscr{A}$, mais non à l'algèbre engendrée par les événements $\{ \omega : N_I(\omega) = k \}$.

Or si μ ne charge pas un point avec une probabilité non nulle, on peut démontrer que $(\lambda^+, \mu)(\phi_t S) = 0$ pour tout t : dans l'intervalle borné $\phi_t(I)$, (λ^+, μ) résulte de la superposition non indépendante d'un nombre fini de mesures ponctuelles aléatoire.

Il en résulte que $(\lambda, \mu)(S) = 0$, lorsque les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées ; c'est-à-dire que dans ce cas (λ, μ) est « séparée » au sens de Gnedenko et Kovalenko [*1*].

3) Discussion

Sans qu'il ait énoncé cette formule explicitement, des résultats plus forts que la formule de la proposition I,4 ont été démontrés par Vere Jones [*10*] à l'aide des fonctionnelles génératrices. A l'aide du même outil, Westcott [*12*] a également donné un résultat assez proche de la proposition I,5. A cet égard, le seul intérêt de la méthode employée ici est donc de donner une construction explicite d'un processus ramifié.

Son utilité spécifique apparaît mieux à propos de la mesure de Palm

(I, paragraphe 4), et surtout à la proposition II, 1, qu'il paraît difficile de démontrer à l'aide de la fonctionnelle génératrice (dont la convergence est équivalente à une convergence faible des probabilités).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GNEDENKO and KOVALENKO, *Introduction to queuing theory*. Israel Program For Scientific Translation.

[2] A. HANEN, *Mesures aléatoires stationnaires et mesure de Palm*. A paraître.

[3] T. E. HARRIS, *Les processus de ramification*. Dunod, 1969.

[4] P. A. W. LEWIS, A branching Poisson Model for the Analysis of computer Failure Pattern. *J. R. Stat. Soc.*, B, t. **26** (64), p. 398.

[5] P. A. W. LEWIS, Asymptotic Properties and Equilibrium Conditions for branching Poisson processes. *J. Appl. Proba.*, t. **6** (69), p. 355.

[6] K. MATTHES, Stationäre zufällige Punktfolgen (1). *Jahresbericht des D. M. V.*, t. **66** (63), p. 66.

[7] J. MECKE, Stationäre zufällige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **9**, 1967, p. 36-58.

[8] J. NEVEU, Sur la structure des processus ponctuels stationnaires. *C. R. Acad. Sci.*, t. **267**, A, 1968, p. 561.

[9] RYLL-NARDZEWSKI, Remarks on processes of calls. Fourth Berkeley Symposium II, p. 455.

[10] D. VERE-JONES, Stochastic models for earthquate occurrences. *J. R. Stat. Soc.*, B, t. **32**, 1, 1970, p. 1.

[11] D. VERE-JONES, Some applications of probability generating functionals to the study of input-output streams. *J. R. Stat. Soc.*, B, t. **30**, 2, 1968, p. 321.

[12] M. WESTCOTT, On existence and mixing results for cluster point processes. *J. R. Stat. Soc.*, B, t. **33**, 2, 1971, p. 290.

(Manuscrit reçu le 3 avril 1973).