ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. HILICO

Processus ponctuels marqués stationnaires. Application à l'interaction sélective de deux processus ponctuels stationnaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 2 (1973), p. 177-192

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_2_177_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 2, 1973, p. 177-192. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus ponctuels marqués stationnaires. Application à l'interaction sélective de deux processus ponctuels stationnaires

par

C. HILICO
Université de Dijon.
Département de Mathématiques, 2, bd Gabriel, 21-Dijon

RÉSUMÉ. — L'approche systématique de la structure de la mesure de Palm d'un processus ponctuel marqué stationnaire, à partir de la méthode de J. Neveu [*1*], permet de généraliser un résultat de Matthès [*2*]. Des relations du premier ordre entre processus ponctuels stationnaires, définis dans un processus donné, sont établies.

En particulier, l'étude de l'interaction sélective de deux processus ponctuels stationnaires quelconques, conduit à la formule de l'intensité du processus résultant, formule généralisant celle de Lawrence [*5*].

SUMMARY. — Using the work of J. Neveu [*1*], the structure of the Palm measure for a stationary marked point process is determined and Matthes's result [*2*] is generalised. First order relations between stationary point processes generated by an initial process are obtained.

The selective interaction of two general stationary point processes is studied and the explicit expression for the Intensity of the resulting process is derived.

I. NOTATIONS

Soit $(K, \mathscr{K})$ un espace mesurable non vide dit espace des marques.

1) Définitions

a) Ω_K désigne l'espace formé par les parties non vides de $R \times K$ localement finies ω_K.

Sur Ω_K, on construit la σ-algèbre initiale $\mathscr{A}_K$ associée aux applications N_A, $A \in \beta \otimes \mathscr{K}$; β # σ-algèbre des boréliens sur R

$$N_A(\omega_K) = \text{Card}\,(\omega_K \cap A)$$

$\varphi = (\varphi_t)_{t\in R}$ désigne le groupe d'isomorphismes bimesurables :

$$\varphi_t(\omega_K) = \omega_K + t\,; \qquad (x, k) \in \omega_K \Leftrightarrow (x + t, k) \in \omega_K + t$$

Lorsque l'ensemble K comporte un seul élément, l'espace mesurable Ω_K est identifié à l'espace Ω des parties non vides de R localement finies muni de la σ-algèbre $\mathscr{A}$ rendant mesurables les applications N_A, $A \in \beta$.

On utilisera l'application mesurable t_L de Ω_K dans Ω appelée « trace du processus dans L »

$$t_L(\omega_K) = \omega_K \cap R \times L \in \Omega_L \qquad \text{où } \Omega_L \text{ est identifié à } \Omega$$

On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\Omega_K, \mathscr{A}_K) \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "t_L"'] & (\Omega_K, \mathscr{A}_K) \arrow[d, "t_L"] \\
(\Omega, \mathscr{A}) \arrow[r, "\varphi_t"'] & (\Omega, \mathscr{A})
\end{tikzcd}$$

b) Soit X_K l'ensemble des suites finies ou infinies de $R \times K$ (ayant au moins deux éléments) d'éléments

$$x_K = (x_n, k_n)\,;\ n \in J \subset Z\,; \qquad x_n \text{ strictement croissante}$$

$\mathscr{X}_K$ désigne la σ-algèbre naturelle sur X_K.

Sur $(X_K, \mathscr{X}_K)$ on définit deux groupes de bijections bimesurables

$$\Phi = (\Phi_t),\ t \in R\,;\ [\Phi_t(x_K)]_n = (x_{n+t}, k_n), \qquad n \in J$$
$$\Theta = (\Theta_j),\ j \in Z\,;\ [\Theta_j(x_K)]_n = (x_{n+j}, k_{n+j}), \qquad n \in J - j$$

Sur X_K, Φ et Θ commutent.

On désigne par α l'application de X_K dans Ω_K telle que

$$\alpha(x_K) = \omega_K = \{\,(x_n, k_n),\ n \in J\,\}$$

PROPOSITION I.1. — α est surjective mesurable de $(X_K, \mathscr{X}_K)$ sur $(\Omega_K, \mathscr{A}_K)$

$$\alpha^{-1}(\alpha(x_K)) = \Theta(x_K)$$

Si $f \in \mathcal{M}(X_K, R^+)$, il existe f_{Ω_K} unique, $f_{\Omega_K} \in \mathcal{M}(\Omega_K, R^+)$ avec

$$f_{\Omega_K} \circ \alpha = \sum_{j \in Z} f \circ \Theta_j$$

Le flot Φ sur X_K est transporté par α sur le flot φ sur Ω_K.

c) Soit Y_K l'ensemble des suites non vides finies ou infinies de $R^+ \times K$

$$y_K = (y_n, k_n) \;\#\; n \in J \subset Z \qquad y_n > 0$$

$\mathcal{Y}_K$ désigne la σ-algèbre naturelle; sur $(Y_K, \mathcal{Y}_K)$ θ désigne le groupe de bijections bimesurables défini par

$$[\theta_j(y_K)]_n = (y_{n+j}, k_{n+j}) \qquad j \in J - j$$

On désigne par β l'application de $(X_K, \mathcal{X}_K)$ dans $(Y_K, \mathcal{Y}_K)$ telle que

$$\beta(x_K) = y_K = (x_n - x_{n-1}, k_n), \qquad n \in J, \qquad n - 1 \in J$$

PROPOSITION I.2. — β est surjective de $(X_K, \mathcal{X}_K)$ sur $(Y_K, \mathcal{Y}_K)$

$$\beta^{-1}(\beta(x_K)) = \Phi(x_K)$$

Si $f \in \mathcal{M}(X_K, R^+)$ il existe une application unique $f_{Y_K} \in \mathcal{M}(Y_K, R^+)$ avec

$$f_{Y_K} \circ \beta = \int_R f \circ \Phi_t dt$$

PROPOSITION I.3. — La formule

$$\int_{\Omega_K} f_{\Omega_K} d\lambda_K = \int_{X_K} f d\mu_K = \int_{Y_K} f_{Y_K} d\nu_K$$

établit une correspondance bijective entre les mesures λ_K positives σ-finies φ-invariantes sur Ω_K et les mesures ν_K positives σ-finies, θ invariantes sur Y_K.

2) Flots induits

a) LES σ-ALGÈBRES $\mathcal{X}'_K$ et $\mathcal{Y}'_K$. — Soit $L \in \mathcal{K}$. On désigne par $X_K^{L,j}$ (resp. $Y_K^{L,j}$) le sous-ensemble mesurable de X_K (resp. Y_K)

$$X_K^{L,j} = \{ x_K ; k_{-j}(x_K) \in L \} \qquad X_K^{L,0} = X_K^L$$
$$Y_K^{L,j} = \{ y_K ; k_{-j}(y_K) \in L \} \qquad Y_K^{L,0} = Y_K^L$$

alors $$X_K^{L,j} = \beta^{-1}(Y_K^{L,j}) \qquad \text{et} \qquad Y_K^{L,j} = \beta(X_K^{L,j})$$

les $X_K^{L,j}$ étant Φ_t invariants.

Si $\mathcal{X}'_K$ (resp. $\mathcal{Y}'_K$) est la σ-algèbre engendrée par les $X_K^{L,j}$, $j \in Z$, $L \in \mathcal{K}$ (resp. $Y_K^{L,j}$, $j \in Z$, $L \in \mathcal{K}$) alors

$$\mathcal{X}'_K = \beta^{-1}(\mathcal{Y}'_K) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Y}'_K = \beta(\mathcal{X}'_K)$$

Enfin, $\mathcal{X}'_K$ (resp. $\mathcal{Y}'_K$) est engendrée par $\{\Theta(\{X_K^L, L \in \mathcal{K}\})\}$ resp. $\{\theta(\{Y_K^L, L \in \mathcal{K}\})\}$ où $\{X_K^L, L \in \mathcal{K}\}$ (resp. $\{Y_K^L, L \in \mathcal{K}\}$) est une sous σ-algèbre de $\mathcal{X}'_K$ (resp. $\mathcal{Y}'_K$) isomorphe à $\mathcal{K}$.

La bijection Θ sur X_K définit un automorphisme de $\mathcal{X}'_K$ et la bijection θ, un automorphisme de $\mathcal{Y}'_K$.

b) PROPOSITION I.4. — β définit un isomorphisme β des σ-algèbres $\mathcal{X}'_K$ et $\mathcal{Y}'_K$ où les ensembles négligeables se correspondent.

De plus dès que $\nu_K(T) > 0$, $T \in \mathcal{Y}'_K$ alors $\mu_K(S) = \infty$ où

$$S \in \mathcal{X}'_K \qquad \beta^{-1}(T) = S, \qquad \beta(S) = T.$$

Démonstration. — Soit $S \in \mathcal{X}'_K$ et $T \in \mathcal{Y}'_K$ avec $S = \beta^{-1}(T)$, $T = \beta(S)$

$$\mu_K(S) = \int_{Y_K} f_{Y_K} d\nu_K \quad \text{où} \quad f_{Y_K} \circ \beta(x_K) = \int_R 1_S[\Phi_t(x_K)]dt$$

donc
$$f_{Y_K} = \infty \quad \text{si} \quad y_K \in T$$
$$f_{Y_K} = 0 \quad \text{si} \quad y_K \notin T$$

Si $\mu_K(S) = 0$ alors $0 = \int_T f_{Y_K} d\nu_K \Rightarrow \nu_K(T) = 0.$

La réciproque est immédiate.

Enfin $\nu_K(T) > 0 \Rightarrow \mu_K(S) = \infty$.

c) HYPOTHÈSE FONDAMENTALE. — Supposons que le flot θ sur $\mathcal{Y}'_K$ soit conservatif relativement à la restriction de la mesure ν_K à $\mathcal{Y}'_K$. En particulier cette hypothèse peut être assurée par $\nu_K(Y_K) < \infty$.

De la proposition précédente, il résulte que le flot Θ est conservatif sur $\mathcal{X}'_K$ pour la restriction de μ_K à $\mathcal{X}'_K$.

Rappelons que conservativité est équivalente à récurrence indéfinie.

Soit
$$S \in \mathcal{X}'_K \Rightarrow S \subset X_K \cap (R \times K)^Z \qquad \mu_K \text{ ps}$$
$$T \in \mathcal{Y}'_K \Rightarrow T \subset Y_K \cap (R^+ \times K)^Z \qquad \nu_K \text{ ps}$$

L'hypothèse de conservativité assure l'existence de flots induits Θ_S sur S et θ_T sur T laissant invariante respectivement la trace de μ_K sur S et de ν_K sur T.

Si $x_K \in S$; on désigne par n_S^j l'indice défini par récurrence

$$n_S^{j+1} = \inf (n > n_S^j \ \# \ \Theta_n(x_K) \in S) \qquad | n_S^j | < \infty \quad \mu_K \text{ ps} \qquad \forall j$$

alors $x_K \in S$

$$\Theta_S^j(x_K) = \Theta^{n_S^j}(x_K) \qquad j \in Z \quad \mu_K \text{ ps}$$

On définit $n_T^j \ \# \ \nu_K$ ps finie sur T par

$$n_T^j = \inf (n > n_T^{j-1}, \theta_n(y_K) \in T)$$

alors

$$n_S^j = n_T^j \circ \beta \qquad \text{si} \qquad T = \beta(S)$$

On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} (S, \mathscr{X}_K \cap S) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\Theta_S"'] & (T, \mathscr{Y}_K \cap T) \arrow[d, "\theta_T"] \\ (S, \mathscr{X}_K \cap S) \arrow[r, "\beta"'] & (T, \mathscr{Y}_K \cap T) \end{tikzcd}$$

d) PROPOSITION I.5. — On notera μ_K^S et ν_K^T respectivement les traces des mesures μ_K et ν_K sur S et T, elles sont respectivement Θ_S et θ_T invariantes.

Pour toute fonction f mesurable positive, nulle en dehors de S, f_{Y_K} est nulle en dehors de T et l'on a :

$$\int_S f \ \# \ d\mu_K^S = \int_T f_{Y_K} d\nu_K^T$$

Démonstration :

$$\int_S f \ \# \ d\mu_K^S = \int_S f 1_S d\mu_K = \int_{Y_K} (f 1_S)_{Y_K} d\nu_K$$

avec

$$(f 1_S)_{Y_K} \circ \beta = \int_R f \circ \Phi_t . 1_S \circ \Phi_t dt = 1_S \int_R f \circ \Phi_t dt$$

soit $(f 1_S)_{Y_K} = 1_T f_{Y_K}$.

3) Sous processus d'intervalles

On suppose dans ce qui suit que le flot θ est conservatif relativement à la σ-algèbre $\mathscr{Y}'_K$ et à la mesure ν_K.

Lorsque l'espace des marques comporte un seul élément, Y_K est identifié à l'espace Y des suites finies ou infinies (non vides) d'élément de R^+ muni de sa σ-algèbre naturelle ; alors θ est le groupe de bijections bimesurables tel que :

$$y = (y_n) \in \mathrm{Y} \Leftrightarrow y_n > 0 \qquad n \in \mathrm{J} \subset \mathrm{Z} \qquad \mathrm{J} \text{ non vide}$$

$$[\theta^j(y)]_n = (y_{n+j}, k_{n+j})_{n \in \mathrm{J}-j}$$

Soit p_{T} l'application mesurable définie sur $\mathrm{T} \in \mathscr{Y}'_{\mathrm{K}}$ à valeur dans Y :

$$y_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{T}}(y_{\mathrm{K}}) = (y_{n_{\mathrm{T}}^j}) \quad j \in \mathrm{J} = \mathrm{Z} \qquad \nu_{\mathrm{K}} \text{ ps}$$

Lorsque $\mathrm{T} = \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$ l'application sera notée simplement p_{L}

$$y_{\mathrm{L}} = p_{\mathrm{L}}(y_{\mathrm{K}}) = (y_{n_{\mathrm{L}}^j}) \qquad j \in \mathrm{Z}$$

$$n_{\mathrm{L}}^j \text{ écrit pour } n_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}}^j, \qquad n_{\mathrm{L}}^1 = n_{\mathrm{L}}$$

Soit ν_{L} la mesure image par p_{L} de la restriction de ν_{K} à $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}} \cap \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$, elle est invariante par θ et

$$\forall \mathrm{L} \quad \nu_{\mathrm{K}}(\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}) = \nu_{\mathrm{K}} \circ k_0^{-1}(\mathrm{L}) = \nu_{\mathrm{L}}(\mathrm{Y})$$

THÉORÈME I.1.

1) Quel que soit L tel que $\nu_{\mathrm{K}}(\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}) > 0$, ν_{K} ps tout point y_{K} de $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$ a une infinité de marques dans L

$$\nu_{\mathrm{K}}\{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}} - \overline{\lim}\, \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L},j}\} = 0 \qquad j \text{ ou } -j \in \mathrm{N}$$

2) Si l'hypothèse de conservativité du flot θ est assurée par $\nu_{\mathrm{K}}(\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}) < \infty$, alors la mesure ν_{L} est portée par l'ensemble mesurable des suites doublement infinies de R^+ telles que

$$\sum_{\infty}^{0} y_n = \sum_{1}^{\infty} y_n = +\infty$$

d'où, dès que L a une mesure $(\nu_{\mathrm{K}} \circ k_0^{-1})$ positive, alors

$$\sum_{\infty}^{0} y_{n_{\mathrm{L}}^j} = \sum_{1}^{\infty} y_{n_{\mathrm{L}}^j} = +\infty \qquad \nu_{\mathrm{K}} \text{ ps}$$

3) *Généralisation.* — Les résultats précédents restent valables pour tout T de la σ-algèbre $\mathscr{Y}'_{\mathrm{K}}$, moyennant l'hypothèse $\nu_{\mathrm{K}}(\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}) < \infty$

$$\mathrm{T} \in \mathscr{Y}'_{\mathrm{K}} : \nu_{\mathrm{K}}(\mathrm{T} - \overline{\lim}\, \theta^j \mathrm{T}) = 0 \qquad j \text{ ou } -j \in \mathrm{N}$$

et

$$\sum_{\infty}^{0} y_{n_{\mathrm{T}}^j} = \sum_{1}^{\infty} y_{n_{\mathrm{T}}^j} = +\infty \qquad \nu_{\mathrm{K}} \text{ ps}$$

II. EXEMPLES

1) $$f(x_K) = 1_{X_K^L}(x_K)1_A \circ x_0(x_K) \quad \begin{cases} f_{\Omega_K}(\omega_K) = N_{A\times L}(\omega_K) \\ f_{Y_K}(y_K) = 1_{Y_K^L}(y_K)\left(\int_A dt\right) \end{cases}$$

d'où $$\int_{\Omega_K} N_{A\times L}(\omega_K)d\lambda_K = \left(\int_A dt\right)\nu_K(Y_K^L)$$

On retrouve ainsi que l'intensité du processus à marques dans L s'exprime par

$$\nu_K(Y_K^L) = \nu_L(Y)$$

et ν_K est bornée si et seulement si $E_{\lambda_K}(N_{A\times K}) < \infty$, $\forall$A borélien borné.

2) $$f(x_K) = 1_{X_K^L}(x_K)1_{(-\infty,0)} \circ x_0(x_K)1_{[0,\infty]} \circ x_{n_L}(x_K)$$

où $n_L < \infty$ ν_K ps

$$\begin{cases} f_{\Omega_K}(\omega_K) = 1 \\ f_{Y_K}(y_K) = 1_{Y_K^L}\, y_{n_L} \end{cases}$$

$$\lambda_K(\Omega_K) = \int_{Y_K^L} y_{n_L} d\nu_K^L$$

λ_K est une probabilité si et seulement si $E_{\nu_K^L}(y_{n_L}) = E_{\nu_K^L}(y_{n_L^j}) = 1$.

3) $$f(x_K) = 1_{X_K^L}1_{x_0<0\leqslant x_{n_L}<t}(x_K) \quad \begin{cases} f_{\Omega_K}(\omega_K) = 1_{\{N([0t)\times L)>0\}}(\omega_K) \\ f_{Y_K}(y_K) = 1_{Y_K^L} \inf(y_{n_L}, t) \end{cases}$$

$$\lambda_K[N([0t) \times L) > 0] = \int_{Y_K^L} \inf(y_{n_L}, t)d\nu_K^L$$

$$\frac{1}{t}\lambda_K[N([0t) \times L) > 0] \underset{t\to 0}{\uparrow} \nu_K(Y_K^L) \qquad \forall L \in \mathscr{K}$$

donc ν_K est bornée si et seulement si $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\lambda_K[N([0t) \times K) > 0] < \infty$.

L'intensité du processus dans L est alors donnée par

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\lambda_K[N[0t) \times L > 0]$$

4) Soit $x_K \in X_K^L$ et

$$n_M = \begin{cases} \inf\{ n > 0,\ k_n(x_K) \in M,\ x_K \in X_K^L \} \\ \infty \quad \text{si le terme précédent n'existe pas} \end{cases}$$

alors

$$n_{\mathrm{M}} = \inf \{ n > 0,\ k_n(y_{\mathrm{K}}) \in \mathrm{M},\ y_{\mathrm{K}} \in \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}} \} \text{ ou } \infty$$
$$f(x_{\mathrm{K}}) = 1_{\mathrm{X}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}}(x_{\mathrm{K}}) 1_{(-\infty,0)} \circ x_0(x_{\mathrm{K}}) 1_{(0,\infty)} \circ x_{n_{\mathrm{M}}}(x_{\mathrm{K}})$$

Désignons par $\xi_{n_{\mathrm{M}}^0}$ l'abscisse du point de ω_{K} dont la marque est dans M le premier à gauche de 0 ($\xi_{n_{\mathrm{M}}^0} < 0$) sinon $\xi_{n_{\mathrm{M}}^0} = -\infty$

$$f_{\Omega_{\mathrm{K}}} = \begin{cases} \mathrm{N} \{ [\xi_{n_{\mathrm{M}}^0}, 0) \times \mathrm{L} \} \\ 0 \quad \text{lorsque} \quad \xi_{n_{\mathrm{M}}^0} = -\infty \end{cases}$$
$$f_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}} = 1_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}}(y_{\mathrm{K}}) y_{n_{\mathrm{M}}}$$
$$\mathrm{E}_{\lambda_{\mathrm{K}}}[\mathrm{N}[\xi_{n_{\mathrm{M}}^0}, 0) \times \mathrm{L}] = \int_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}} y_{n_{\mathrm{M}}} d\nu_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$$

5)
$$f(x_{\mathrm{K}}) = 1_{\mathrm{X}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}}(x_{\mathrm{K}}) 1_{(-\infty,0)} \circ x_0(x_{\mathrm{K}}) 1_{[0t)} \circ x_{n_{\mathrm{M}}}(x_{\mathrm{K}})$$
$$f_{\Omega_{\mathrm{K}}} = \mathrm{N} \{ [\xi_{n_{\mathrm{M}}^0}, 0) \times \mathrm{L} \} 1_{\mathrm{N}([0t) \times \mathrm{M}) > 0}$$
$$f_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}} = 1_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}}(y_{\mathrm{K}}) \inf (y_{n_{\mathrm{M}}}, t)$$
$$\mathrm{E}_{\lambda_{\mathrm{K}}}[\mathrm{N} \{ [\xi_{n_{\mathrm{M}}^0}, 0) \times \mathrm{L} \} 1_{\{\mathrm{N}[0t) \times \mathrm{M} > 0\}}] = \int_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}} \inf (y_{n_{\mathrm{M}}}, t) d\nu_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$$

De cette dernière égalité nous tirons ainsi qu'en 3)

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathrm{E}_{\lambda_{\mathrm{K}}}[\mathrm{N} \{ [\xi_{n_{\mathrm{M}}^0}, 0) \times \mathrm{L} \} 1_{\{\mathrm{N}[\overset{*}{0}t) \times \mathrm{M} > 0\}}] = \nu_{\mathrm{K}}(\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}})$$

III. MESURE DE PALM

Dans Ω_{K} définissons les ensembles mesurables

$$\Omega_{0\mathrm{K}} = \{ \omega_{\mathrm{K}},\ 0 \in t_{\mathrm{K}}(\omega_{\mathrm{K}}) \}$$
$$\Omega_{0\mathrm{K}}^{\mathrm{L}} = \{ \omega_{\mathrm{K}},\ 0 \in t_{\mathrm{L}}(\omega_{\mathrm{K}}) \}$$

Dans X_{K} définissons les ensembles mesurables

$$\mathrm{X}_{0\mathrm{K}} = \{ x_{\mathrm{K}},\ x_0(x_{\mathrm{K}}) = 0 \}$$
$$\mathrm{X}_{0\mathrm{K}}^{\mathrm{L}} = \{ x_{\mathrm{K}},\ x_0(x_{\mathrm{K}}) = 0 ;\ k_0(x_{\mathrm{K}}) \in \mathrm{L} \}$$

Soit s_k l'application de Y_{K} sur $\mathrm{X}_{0\mathrm{K}}$ définie par

$$\mathrm{S}_{\mathrm{K}}(y_{\mathrm{K}}) = \left\{ \dots \left(\sum_{-(n-1)}^{0} y_j,\ k_{-n} \right), \dots, (0, k_0), \dots, \left(\sum_{1}^{n} y_j,\ k_n \right), \dots \right\}$$

$s_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$ désigne la restriction de s_{K} à $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$ et envoie $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$ sur $\mathrm{X}_{0\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$.

Soit τ_K l'application de Ω_{0K} sur X_{0K} qui a ω_{0K} fait correspondre la suite des points de ω_{0K}, ordonnée, avec $x_0 = 0$.

$$\tau_K(\omega_{0K}) = \{ \dots (\xi_{-(n-1)}, k_{-n}), \dots, (\xi_0, k_{-1}), (0, k_0), (\xi_1, k_1), \dots \}$$

ou encore

$$\tau_K(\omega_{0K}) = \left\{ -\left(\sum_{-(n-1)}^{0} \eta_j, k_{-n} \right), \dots, (-\eta_0, k_1), (0, k_0)(\eta_1, k_1) \dots \left(\sum_1^n \eta_j, k_n \right) \dots \right\}$$

et τ_K^L sa restriction à Ω_{0K}^L à valeur dans X_{0K}^L.

Si β_{0K}^L et α_{0K}^L désignent les restrictions de β et α à X_{0K}^L on a le diagramme

$$\Omega_{0K}^L \underset{\alpha_{0K}^L}{\overset{\tau_K^L}{\rightleftarrows}} X_{0K}^L \underset{s_K^L}{\overset{\beta_{0K}^L}{\rightleftarrows}} Y_K^L$$

1) Proposition III.1

Soit $(\Omega_K, \mathscr{A}_K, \lambda_K)$ un processus ponctuel marqué stationnaire vérifiant

$$\forall A \text{ borélien borné} \qquad E_{\lambda_K}(N_{A \times K}) < \infty$$

Il existe une mesure ν'_K bornée unique portée par Ω_{0K} telle que l'on ait la désintégration

$$N_{A \times L} \cdot d\lambda_K = \int_A \varphi_t[\nu'^L_K]dt$$

ou encore $\forall f \in \mathscr{M}(\Omega_K, R^+)$

$$\int_{\Omega_K} f(\omega_K) N_{A \times L} d\lambda_K = \int_A dt \int_{\Omega_{0K}^L} f \circ \varphi_t(\omega_{0K}^L) d\nu'^L_K$$

où ν'^L_K désigne la trace de la mesure ν'_K sur Ω_{0K}^L avec $\nu'^L_K = [\alpha_{0K}^L \circ s_K^L]\,(\nu_K^L)$ mesure l'image de ν_K^L.

2) Propriétés de la mesure de Palm

On suppose que ν_K est bornée, soit $E_{\lambda_K}(N_{A \times K}) < \infty$, $\forall A$ borélien borné.

a) $\dfrac{\nu_K(.)}{\nu_K(Y_K)}$ est une probabilité sur Ω_{0K} notée ν'_{0K}.

On posera $m = \nu_K(Y_K) = \nu'_K(\Omega_{0K})$: l'intensité du processus ω_K.

On sait que $\nu'_K(\Omega_{0K}^L) = \nu_K(Y_K^L) = m_L$ représente l'intensité du processus à marques dans L.

Remarque. — L'application $L \to m_L$ de $\mathcal{K}$ dans R^+ est une mesure positive bornée sur $\mathcal{K}$.

$m_L = 0$ s'exprime par le résultat que le processus à marques dans L s'éteint p. s.

b) STATIONNARITÉ

On a déjà vu que chaque processus d'intervalle $(y_{n_L^j})$ est stationnaire pour ν_K^L. Mais on a le résultat plus général suivant :

THÉORÈME III.1. — Sur $(Y_K^L, \mathcal{Y}_K \cap Y_K^L, \nu_K^L)$, soit $y_{L,M;j,i}$ la v. a. représentant la longueur de l'intervalle séparant le j^e point à marques dans L $(j \in Z)$ du i^e point à marque dans M suivant.

Alors la suite $y_{L,M;i} = (y_{L,M;j,i})_{j \in Z}$ est ν_K^L stationnaire $\forall i$. Ceci résulte de l'invariance de ν_K^L par θ_L et de l'égalité :

$$(\theta_L^h)(y_{L,M,j,i}) = y_{L,M,h+j,i}$$

La suite $\eta_{L,M,i}$ sur Ω_{0K}^L est donc ν'^L_K stationnaire : car

$$\eta_{L,M,i}(\omega_{0K}^L) = y_{L,M,i} \circ \beta_K^L \circ \tau_K^L(\omega_{0K}^L)$$

et la mesure ν_K^L est image de la mesure ν'^L_K par $\beta_{0K}^L \circ \tau_K^L$.

Remarque. — On retrouve le résultat suivant : l'intervalle moyen séparant deux points à marques dans L vaut l'inverse de l'intensité du processus à marques dans L

$$\frac{1}{m_L} = \int_{\Omega_{0K}^L} \eta_L \frac{d\nu'^L_K}{m_L}$$

où $\dfrac{\nu'^L_K(.)}{m_L}$ est la probabilité déduite de la mesure de Palm ν'^L_K.

c) MESURE DE PALM ET PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

THÉORÈME III.2. — Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega_K, R^+)$ telle que $t \to f \circ \varphi_t(\omega_K)$ soit continue pour $\omega_{0K} \in \Omega_{0K}$.

Alors

$$E_{\lambda_K}[f(\omega_K)/N([0, t) \times L) > 0] \underset{t \to 0}{\longrightarrow} E_{\nu_{0K}'^L}(f(\omega_{0K}^L))$$

Démonstration :

$$E_{\lambda_K}[f(\omega_K)/N[0t) \times L > 0] = \frac{\frac{1}{t} E_{\lambda_K}[f(\omega_K) 1_{\{N[0t) \times L > 0\}}(\omega_K)]}{\frac{1}{t} \lambda_K[N[0t) \times L > 0]}$$

le dénominateur tend vers $\nu_K(Y_K^L) = m_L$.

Posons

$$g(\omega_K) = \frac{f(\omega_K)1_{\{N[0t) \times L > 0\}}(\omega_K)}{N([0t) \times L)(\omega_K)}$$

Alors

$$E_{\lambda_K}[f(\omega_K)1_{\{N[0t) \times L > 0\}}(\omega_K)] = \int_{\Omega_K} g(\omega_K) N\{[0, t) \times L\} d\lambda_K$$

le second membre peut s'écrire

$$\int_{[0t)} du \int_{\Omega_{0K}^L} g \circ \varphi_u(\omega_{0K}^L) d\nu'^L_K$$

si $|u| < \inf\{y_{n_L^0}, y_{n_L}\}$ alors $g \circ \varphi_u(\omega_{0K}^L) = f(\omega_{0K}^L + u)$.

Avec l'hypothèse de continuité de $f \circ \varphi_t$, il résulte que

$$\frac{1}{t}\int_0^t g \circ \varphi_u(\omega_{0K}^L) du \underset{t \to 0}{\longrightarrow} f(\omega_{0K}^L)$$

Le résultat du théorème s'obtient en utilisant le théorème de Lebesgue.

Application. — En particulier si la lettre ξ affectée des indices convenables désigne les abscisses des points de ω_K

$$E_{\lambda_K}[N([\xi_{n_L^0}, 0) \times M)/N[0t) \times L > 0] \underset{t \to 0}{\longrightarrow} E_{\nu_{0K}^L}[N[\xi_{n_L^0}, 0) \times M]$$

D'autre part, le premier membre vaut

$$\frac{\frac{1}{t} E_{\lambda_K}[N([\xi_{n_L^0}, 0) \times M) 1_{\{N[0,t) \times L > 0\}}]}{\frac{1}{t} E_{\lambda_K}(N[0t) \times L > 0)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \frac{m_M}{m_L}$$

En utilisant la stationnarité de ν'^M_K sur Ω_{0K}^M nous interprétons ce résultat : le rapport $\frac{m_M}{m_L}$ des intensités des processus à marque dans M et L respectivement donne la valeur du nombre moyen de points à marques dans M entre deux points consécutifs à marques dans L. Rappelons que $\frac{1}{m_L}$ est l'intervalle moyen séparant deux points successifs à marque dans L.

Le nombre moyen de points à marques dans M entre deux points à marques dans L est le produit de la longueur à l'intervalle moyen entre deux points successifs à marques dans L et de l'intensité du processus à marques dans M.

d) FORMULE D'INTÉGRATION DE RYLL-NARDZEWSKI

THÉORÈME III.3. — $\forall L \in \mathscr{K} \qquad g \in \mathscr{M}(\Omega_K, R^+)$

$$\int_{\Omega_K} g(\omega_K)d\lambda_K = m_L \int_{\Omega_{0K}^L} dv'^L_{0K} \int_0^{\eta_{0K}^L} g \circ \varphi_t(\omega_{0K}^L)dt$$

Définissons les applications mesurables :

$$\begin{array}{llll} T_K : \Omega_K \to X_K & x_0(T_K(\omega_K)) = \xi_0(\omega_K) & \xi_0(\omega_K) < 0 \\ & & \xi_1(\omega_K) \geqslant 0 \\ T_K^L : \Omega_K \to X_K^L & x_0(T_K^L(\omega_K)) = \xi_{0K}^L & \xi_{0K}^L < 0 \\ & & \xi_{1K}^L \geqslant 0 \end{array}$$

Soit $g \in \mathscr{M}(\Omega_K, R^+)$; pour $L \in \mathscr{K}$ définissons f sur X_K par

$$f(T_K^L(\omega_K)) = g(\omega_K)$$

$$f(\omega_K) = 0 \quad \text{si} \quad x_K \notin T_K^L(\omega_K) \quad \text{avec} \quad \alpha(x_K) = \omega_K$$

alors f est nulle en dehors de X_K^L et $f_{\Omega_K}(\omega_K) = g(\omega_K)$

$$\int_{\Omega_K} g(\omega_K)d\lambda_K = \int_{X_K^L} f \# d\mu_K^L = \int_R dt \int_{\Omega_{0K}^L} f \circ \varphi_t \circ \tau_K^L(\omega_{0K}^L)dv'^L_K$$

$$= \int_R dt \int_{\Omega_{0K}^L} f\left[\tau_K^L(\omega_{0K}^L) + t\right]dv'^L_K$$

$$x_0\left[\tau_K^L(\omega_{0K}^L) + t\right] = t + \xi_{0K}^L$$

donc

$$f\left[\tau_K^L(\omega_{0K}^L) + t\right] \neq 0 \quad \text{tant que} \quad 0 \leqslant t < \eta_{0K}^L$$

$$\int_{\Omega_K} g(\omega_K)d\lambda_K = \int_{\Omega_{0K}^L} dv'^L_K\left(\int_0^{\eta_{0K}^L} g \circ \varphi_t dt\right)$$

soit encore

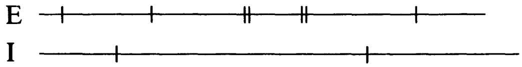
$$\int_{\Omega_K} g(\omega_K)d\lambda_K = m_L \int_{\Omega_{0K}^L} dv'^L_{0K}\left(\int_0^{\eta_{0K}^L} g \circ \varphi_t dt\right)$$

IV. UNE APPLICATION A L'INTERACTION SELON LAWRENCE

1) Définition de l'interaction [*3*, *4*, *5*, *6*]

Soit ω_1 et ω_2 deux processus ponctuels n'ayant aucun point en commun. $x_n \in \omega_1$ efface $y_p \in \omega_2$ si $y_{p-1} < x_n < y_p < x_{n+1}$.

L'ensemble des points non effacés de ω_2 forme le processus résultant : un point de ω_2 non effacé est caractérisé par le fait qu'il est précédé, dans le processus obtenu par superposition de ω_1 et ω_2, par un point de ω_2.



2) Intensité du processus résultant

Soient L et M deux sous-ensembles de $\mathscr{K}$.

Soient

$$S = \Theta(X_K^M) \cap X_K^M \qquad \text{et} \qquad T = \theta(Y_K^M) \cap (Y_K^M) = \beta(S)$$

a) La trace de la mesure ν_K sur T est invariante par θ_T et la mesure de T donne l'intensité du processus résultant (effacement des points du processus à marque dans M par ceux du processus à marques dans L).

b) Prenons $f(x_K) = 1_S 1_{(-\infty,0)} \circ x_0 1_{[0t)} \circ x_{n_L}(x_K)$

$$f_{\Omega_K} = \{ N([\xi_{n_L}; 0) \times M) - 1 \} 1_{\{N[0t) \times L > 0\}} 1_{\{N[\xi_{n_L}^0, 0) \times M > 0\}}$$
$$f_{Y_K} = 1_T \inf(y_{n_L}, t)$$

d'où

$$E_{\lambda_K}(f_{\Omega_K}) = \int_T \inf(y_{n_L}, t) d\nu_K^T$$

donc

$$\frac{1}{t} E_{\lambda_K}(f_{\Omega_K}) \underset{t \to 0}{\to} \nu_K(T)$$

Prenons maintenant la limite au premier membre

$$\begin{aligned} E_{\lambda_K} \{ (N[\xi_{n_L}, 0) \times M) - 1) 1_{\{N[0t) \times L > 0\}} \\ - (N([\xi_{n_L}, 0) \times M) - 1) 1_{\{N[\xi_{n_L}, 0) \times M = 0\}} 1_{\{N[0t) \times L > 0\}} \} \\ = E_{\lambda_K} \{ (N([\xi_{n_L}, 0) \times M) - 1) 1_{\{N[0t) \times L > 0\}} + 1_{\{N([\xi_{n_L}, 0) \times M) = 0\}} 1_{\{N[0t) \times L > 0\}} \} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} E_{\lambda_K}(f_{\Omega_K}) = m_M - m_L \\ + \lim_{t \to 0} \lambda_K[N[\xi_{n_L}, 0) \times M = 0 / N[0t) \times L > 0 \} . \frac{1}{t} \lambda_K \{ N[0t) \times L > 0 \} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} E_{\lambda_K}(f_{\Omega_K}) = m_M - m_L(1 - \nu'^L_{0K} \{ N[\eta^L_{0K}, 0) \times M > 0 \}$$

d'où le :

THÉORÈME IV.1. — $\nu_K(T) = m_M - m_L(1 - \nu'^L_{0K} \{ N[\eta^L_{0K}, 0) \times M > 0 \})$

Cette formule donnant l'intensité du processus résultant contient celle donnée par Lawrence [6] dans le cas de l'effacement d'un processus de Poisson par un renouvellement.

3) Superposition de processus indépendants

Sur $(\Omega_K, \mathscr{A}_K)$ soient λ_K et λ'_K deux processus ponctuels stationnaires ν_{0K} et ν'_{0K} leur mesure de Palm (probabilité).

a) DÉFINITION

Sur $\Omega_K \times \Omega_K$ définissons l'application mesurable S à valeurs dans Ω_K qui au couple (ω_K, ω'_K) fait correspondre $\kappa = \omega_K + \omega'_K$, telle que

$$\mathrm{Card}\,(\omega_K + \omega'_K \cap A) = \mathrm{Card}\,(\omega_K \cap A) + \mathrm{Card}\,(\omega'_K \cap A) \quad A \in \beta \otimes \mathscr{K}$$

avec

$$\mathrm{Card}\,(\Delta \cap (\omega_K, \omega'_K)) = 0 \qquad \lambda_K \times \lambda'_K \text{ ps}$$

Alors la mesure Λ sur $(\Omega_K, \mathscr{A}_K)$ convoluée des mesures λ_K et λ'_K, $\lambda_K * \lambda'_K$ est définie par la formule

$$\int_\Omega f(\kappa) d\Lambda_K = \iint_{\Omega^2} f(\omega_K + \omega'_K) d\lambda_K d\lambda'_K \qquad f \in \mathscr{M}(\Omega_K, \mathrm{R}^+)$$

DÉFINITION. — Le processus stationnaire Λ_K est obtenu par superposition des 2 processus indépendants λ_K et λ'_K.

PROPOSITION IV.1. — La mesure (probabilité) de Palm associée à Λ s'écrit

$$(m_L + m'_L)\mathrm{N}_{0K}^L = m_L \nu_{0K}^L * \lambda'_K + m'_L \lambda_K * \nu'^L_{0K}$$

Cette relation qui se montre en utilisant la formule de Ryll-Nardzewki se trouve dans Mecke [8] pour des processus sans marques et dans Matthès [2] pour les processus marqués.

b) APPLICATION AU PROCÉDÉ D'EFFACEMENT SELON LAWRENCE

La superposition de deux processus indépendants suivie de l'effacement permet de trouver la mesure de Palm du processus résultant en supposant dans la proposition IV.1 que M et L sont disjoints.

Les intensités et mesure de Palm du processus λ à marque dans L (effaceur) seront notées $m = m_L$ et ν_0. Les mêmes expressions pour le processus λ' à marques dans M seront notées $m' = m_M$ et ν'_0.

Puisque $m'_L = 0$ la mesure de Palm du processus de superposition débutant par un point à marques dans L s'écrit

$$m\mathcal{N}_{0K}^{L} = m\nu_0 * \lambda'$$

L'intensité du processus résultant s'écrit dans ces conditions

$$m' - m\{1 - \mathcal{N}_{0K}^{L}[N[\eta_{0K}^{L}, 0) \times M] > 0\}$$

soit

$$m' - m\left(1 - \int_{\Omega_0}\int_{\Omega} d\nu_0(\omega_0)d\lambda'(\omega)1_{\mathrm{Card}\{\omega' \cap [\eta_0(\omega_0), 0) > 0\}}\right)$$

Ce qui s'écrit encore si $\eta_0(\omega_0)$ à la fonction de répartition F

$$m' - m\left\{1 - \int_0^{\infty} \lambda'[N(l) > 0]dF(l)\right\}$$

formule qui donne la formule de Lawrence lorsque F possède une densité φ.

4) **Les quatre processus**

Le procédé d'effacement de Lawrence définit 4 sous-processus dont l'ensemble est stationnaire : le processus résultant r, l'effacé e dans le processus excitateur, le processus effaceur actif a et effaceur passif p dans l'inhibiteur. Le couple des processus a et e forme un « mouvement de processus ponctuels stationnaires au sens de Harris T. E. [7] ».

Nous savons qu'alors a et e ont même intensité d'où le tableau

$$\begin{array}{ll} r: & m' - m(1 - \mathcal{N}_{0K}^{L}\{N[\eta_{0K}^{L}, 0) \times M > 0\}) \\ e: & m(1 - \mathcal{N}_{0K}^{L}\{N[\eta_{0K}^{L}, 0) \times M > 0\}) \\ a: & m(1 - \mathcal{N}_{0K}^{L}\{N[\eta_{0K}^{L}, 0) \times M > 0\}) \\ p: & m\mathcal{N}_{0K}^{L}\{N[\eta_{0K}^{L}, 0) \times M > 0\} \end{array}$$

Or l'inversion du temps montre que les quatre processus s'échangent de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} r \leftrightarrow p \\ e \leftrightarrow a \end{array}$$

d'où l'intensité de p :

$$m - m'\left(1 - \int_0^{\infty} \lambda[N(0l) > 0]dG(l)\right)$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. NEVEU, Sur la structure des processus ponctuels stationnaires. *C. R. A. S.*, t. **267**, 1968, p. 561-564.

[*2*] MATTHES, Stationäre zufällige Punkfolgen I. *J. Ber. Deutsch. Math. Veien*, t. **66**, 1963, p. 66-79.

[*3*] TEN HOOPEN and REUVER, Selective Interaction of two independant recurrent processes. *J. Appl. Prob.*, t. **2**, 1965, p. 286-292.

[*4*] TEN HOOPEN and REUVER, Recurrent Point processes with dependant Inference with reference to Neuronal Spike trains. *Math. Biosc.*, t. **2**, 1968, p. 1-10.

[*5*] LAWRENCE, Selective interaction of a stationnary point processes and a renewal Process. *J. Appl. Prob.*, t. **7**, 1970, p. 483-489.

[*6*] LAWRENCE, Selective interaction of a Poisson and renewal process First order stationnary point results. *J. Appl. Prob.*, t. **7**, 1970, p. 359-372.

[*7*] T. E. HARRIS, Random Measures and Motion of Point Process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **18**, 1971, p. 85-115.

[*8*] J. MECKE, Stationäre zufällige Masse auf lokalkompakten abelschen gruppen. *Z. Wahr scheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **9**, 1967, p. 36-58.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1973).