ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. B. LACAZE

Estimation de moyennes et fonctions de répartition de suites d'échantillonnage

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 2 (1973), p. 145-165

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_2_145_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IX, n° 2, 1973, p. 145-165.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Estimation de moyennes et fonctions de répartition de suites d'échantillonnage

par

M. B. LACAZE [1]

RÉSUMÉ. — A partir d'une suite de nombres $\{ t_j \}$ déterministe ou aléatoire, on définit un estimateur de la moyenne d'un processus de Khintchine. On met plus particulièrement en évidence la relation entre la convergence de cet estimateur et la répartition modulo T ($T \in \mathbb{R}_+^*$) de la suite d'échantillonnage.

1. GÉNÉRALITÉS

1-1. On considère un processus aléatoire du second ordre et continu en moyenne quadratique de fonction d'autocorrélation $K(\tau)$ et de fonction de répartition spectrale $S(\omega)$.

On sait que [*1*] $K(\tau)$ et $S(\omega)$ sont reliées par la relation

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dS(\omega) \tag{1}$$

$K(\tau)$ étant seulement assujettie à être une fonction caractéristique (à une constante multiplicative positive près). $S(\omega)$ est alors une fonction non décroissante et bornée telle que $S(-\infty) = 0$.

[1] École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique et d'Hydraulique ; 2, rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex.

Etant donnée une suite d'échantillonnage $\{ t_j \}$ croissante, un estimateur de $E[Z(t)]$ est

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Z(t_j). \tag{2}$$

Cet estimateur étant sans biais, il représentera correctement $E[Z(t)]$ s'il est de plus convergent, c'est-à-dire si

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Var} M_n = 0$$

Supposant, sans perte de généralité, que $E[Z(t)] = 0$, on peut écrire, d'après (1) et (2) :

$$\operatorname{Var} M_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} K(t_j - t_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\omega t_j} \right|^2 dS(\omega) \tag{3}$$

La question de savoir si $\operatorname{Var} M_\infty = 0$ est donc clairement liée aux sommes de Weyl $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\omega t_j}$ et par conséquent [2] à la répartition modulo $\frac{2\pi}{\omega}$ de la suite $\{ t_j \}$.

1-2. THÉORÈME 1. — Une condition suffisante pour que $\operatorname{Var} M_\infty = 0$ est que la suite $\{ t_j \}$ soit équirépartie modulo $\frac{2\pi}{\omega}$ pour presque toutes les valeurs de ω, par rapport à la mesure définie par $S(\omega)$, et que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [S(+\varepsilon) - S(-\varepsilon)] = 0$$

D'après (3), une C. S. pour que $\operatorname{Var} M_\infty = 0$ est que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\omega t_j} = 0$ p. p. ω/S, ce qui suppose d'abord que $\lim_{\varepsilon \to 0} [S(+\varepsilon) - S(-\varepsilon)] = 0$.

D'un autre côté, le 2[e] critère de Weyl [2] (ou critère de Weyl-Schoenberg) assure qu'une C. N. S. pour que t_j soit équirépartie modulo $\frac{2\pi}{\omega}$, est que,

$$\forall k \in N^*, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{ik\omega t_j} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Notons que la continuité de $S(\omega)$ en $\omega = 0$, est une condition nécessaire. Elle est nécessaire et suffisante dans le cas de l'estimateur $\frac{1}{T} \int_0^T Z(t)dt$,

[3] et équivaut à la nullité d'une des composantes dans la décomposition de Slutsky.

D'autre part, l'équirépartition de la suite $\{ t_j \}$ modulo $\frac{2\pi}{\omega}$ p. p. ω/S, n'est pas une condition nécessaire. Il suffit de considérer par exemple $Z(t) = \cos 2\pi(t + \Phi)$ où Φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,1[$. Alors $S(\omega) = 0$ pour $\omega < -2\pi$, $S(\omega) = \frac{1}{4}$ pour $-2\pi < \omega < 2\pi$, et $S(\omega) = \frac{1}{2}$ pour $\omega > 2\pi$. Pour que $\text{Var } M_\infty = 0$ dans ce cas, il faut et il suffit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi t_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{-2i\pi t_j} = 0,$$

égalités vérifiées pour la suite $\{ t_j \}$ non équirépartie modulo 1 définie par :

$$t_j = j \qquad \text{pour } j \text{ pair}$$

$$t_j = j + \frac{1}{2} \qquad \text{pour } j \text{ impair}$$

1-3. D'après le théorème 1, l'étude de la convergence de l'estimateur M_n, peut se ramener à l'étude de la répartition de la suite d'échantillonnage, c'est-à-dire à un problème de théorie des nombres : étant donnée une suite $\{ t_j \}$, peut-on reconnaître si elle est équirépartie modulo T, et plus précisément, quels sont les ensembles de valeurs de T pour lesquels il en est ainsi ? Les critères de Weyl et de Van der Corput [3] donnent une réponse théorique à ces questions ; ils se généralisent d'ailleurs à des distributions non uniformes [5, 6]. Sauf cas très particuliers, ils sont cependant inutilisables. Un résultat très puissant est donné par le théorème de Fejer [7, 8] mais d'un intérêt limité pour les applications physiques, car il implique que $\lim_{n\to\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$. Enfin, Koksma et Lévèque, ont établi des théorèmes métriques valables pour la mesure de Lebesgue, et que nous allons préciser ici.

2. ÉCHANTILLONNAGE DÉTERMINISTE DES PROCESSUS A SPECTRE CONTINU

2-1. Nous nous plaçons dans le cas où la suite d'échantillonnage $\{ t_j \}$ est parfaitement connue, et le processus $Z(t)$ tel que $E[Z(t)] = 0$ et $S(\omega)$

continue. Si $S(\omega)$ est absolument continue on sait que $\lim_{|\tau|\to\infty} K(\tau) = 0$. On ne peut par contre rien dire dans le cas où $S(\omega)$ comporte une partie singulière [9]. Physiquement un tel processus représente un « bruit », et l'échantillonnage croît toujours assez vite. D'où l'intérêt du théorème suivant.

2-2. THÉORÈME 2*a*. — Si $\lim_{|\tau|\to\infty} K(\tau) = 0$.

Si, de plus, $t_j = f(j)$, $f(x)$ étant une fonction à dérivée continue telle que $f'(x) > bx^{\beta-1} (b, \beta > 0)$, alors : Var $M_\infty = 0$.

D'après (3) il suffit de démontrer l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\omega t_j} \right|^2 dS(\omega) \leqslant \frac{3 + f^{-1}[T(\varepsilon)]}{n} + \frac{3T(\varepsilon)}{bn^{\inf(\beta,1)}} + \varepsilon \tag{4}$$

où $T(\varepsilon)$ est tel que $|\tau| > T(\varepsilon) \Rightarrow |K(\tau)| < \varepsilon$, et en posant $t_1 = 0$, $S(+\infty) = 1$ ce qui ne nuit pas à la généralité.

A k fixé les termes $\tau_j^k = t_j - t_k$ tels que $|K(\tau_j^k)| \geqslant \varepsilon$ sont groupés autour de 0, soit $\tau_{j_1+1}^k, \tau_{j_1+2}^k, \ldots, \tau_k^k = 0, \tau_{k+1}^k, \ldots, \tau_{j_2-1}^k$ avec $j_1(k)$ et $j_2(k)$. On peut donc écrire :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K(\tau_j^k) \right| < \frac{j_2 - j_1}{n} + \varepsilon \tag{5}$$

Reste à majorer $j_2 - j_1$ de manière suffisamment précise :

$$\begin{array}{lll} j_1 \text{ est tel que} & f(k) - f(j_1) > T(\varepsilon) & \text{ou bien } j_1 = 0 \\ j_2 \text{ est tel que} & f(j_2) - f(k) > T(\varepsilon) & \text{ou bien } j_2 = n + 1 \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{ll} f(k) - f(j_1 + \alpha_1) = T(\varepsilon) & \text{ou } j_1 = 0 \\ f(j_2 - \alpha_2) - f(k) = T(\varepsilon) & \text{ou } j_2 = n + 1 \end{array} \tag{6}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ puisque $f(x)$ est continue, croissante, et que

$$\begin{array}{l} f(k) - f(j_1 + 1) \leqslant T(\varepsilon) \\ f(j_2 - 1) - f(k) \leqslant T(\varepsilon) \end{array}$$

Pour les indices k tels que $j_1 \neq 0$ et $j_2 \neq n + 1$, on a, d'après (6) :

$$f(j_2 - \alpha_2) - f(j_1 + \alpha_1) = 2T(\varepsilon) = (j_2 - j_1 - \alpha_1 - \alpha_2) f'(x_j), \quad x_j \in (j_1, j_2)$$

en utilisant le théorème des accroissements finis, d'où :

$$j_2 - j_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{2T(\varepsilon)}{f'(x_j)} \leqslant 2 + \frac{2T(\varepsilon)}{b} x_j^{1-\beta}$$

soit

$$j_2 - j_1 \leqslant 2 + \frac{2T(\varepsilon)}{b} n^{\sup(0,1-\beta)} \tag{7}$$

Reste à déterminer le nombre d'indices k tels que $j_1 = 0$ ou $j_2 = n + 1$. $j_1 = 0$ signifie que $|\tau_1^k| = f(k) - f(1) \leqslant T(\varepsilon)$ soit $k \leqslant f^{-1}[T(\varepsilon)]$ puisque f est croissante. $j_2 = n + 1$ suppose que $f(n) - f(k) \leqslant T(\varepsilon)$, soit $(n - k)f'(\gamma) \leqslant T(\varepsilon)$, $\gamma \in (k, n)$, et $n - k \leqslant \dfrac{T(\varepsilon)}{f'(\gamma)} \leqslant \dfrac{T(\varepsilon)}{b} n^{\sup(0,1-\beta)}$. Le nombre d'indices k tels que $j_1 = 0$ et $j_2 = n + 1$ ne peut donc être supérieur à

$$f^{-1}[T(\varepsilon)] + \frac{T(\varepsilon)}{b} n^{\sup(0,1-\beta)} + 1 \tag{8}$$

Tenant alors compte du fait que $S(+\infty) = K(0) = 1$, $|K(\tau)| \leqslant K(0)$, et des expressions (3), (5), (7), (8), on en déduit immédiatement (4), d'où le théorème.

2-3. Remarque. — Si, dans le théorème 2, on remplace l'hypothèse $\lim\limits_{|\tau| \to \infty} K(\tau) = 0$ par $K(\tau) = 0(|\tau|^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{i\omega t_j} = 0 \qquad \text{p. p. } \omega/S$$

Reprenons l'expression (4) que nous écrivons sous la forme :

$$A_p = \sum_{k=1}^{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} e^{i\omega t_j} \right|^2 dS(\omega)$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{3 + f^{-1}[T(\varepsilon_k)]}{n_k} + \frac{3T(\varepsilon_k)}{b n_k^{\inf(\beta,1)}} + \varepsilon_k \right] \tag{9}$$

Sans perte de généralité, on peut prendre, d'après l'hypothèse $|K(\tau)| \leqslant \dfrac{1}{|\tau|^\alpha}$

Posons $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k^{1+\gamma}} (\gamma > 0)$ d'où par exemple $T(\varepsilon_k) = \varepsilon_k^{-1/\alpha} = k^{1+\gamma/\alpha}$. Pour que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \left[\frac{3}{n_k} + \frac{3T(\varepsilon_k)}{b n_k^{\inf(\beta,1)}} + \varepsilon_k \right]$ converge, il suffit de prendre $n_k = k^\delta$, avec δ

suffisamment grand. Il en est de même pour $\sum_{k=1}^{p} \frac{f^{-1}[T(\varepsilon_k)]}{n_k}$. On sait en effet que,

$$f(x) = \int_1^x f'(u)du > \frac{b}{\beta}(x^\beta - 1),$$

d'où, pour $f(x) = T(\varepsilon_k) = k^{\frac{1+\gamma}{\alpha}}$,

$$f^{-1}[T(\varepsilon_k)] < \left[\frac{\beta}{b} k^{\frac{1+\gamma}{\alpha}} + 1\right]^{1/\beta},$$

de l'ordre de $k^{\frac{1+\gamma}{\alpha\beta}}$. Il suffira donc de prendre $\delta > 1 + \frac{1+\gamma}{\alpha\beta}$.

En conséquence, pour δ suffisamment grand, $n_k = k^\delta$, A_p converge. On applique alors le théorème de Beppo-Lévi à (9), ce qui donne :

$$\lim_{n_k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} e^{i\omega t_j} = 0 \qquad \text{p. p. } \omega/S$$

Puisque $\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{i\omega t_j} = 0 \qquad \text{p. p. } \omega/S \tag{10}$$

Sous les mêmes hypothèses, on peut démontrer que $\forall p \in N^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\omega t_j} = 0 \qquad \text{p. p. } \omega/S \tag{11}$$

En effet, passer de (10) à (11) revient à changer t_j en pt_j. Si $t_j = f(j)$ est tel que $f'(x) > bx^{\beta-1}$, la suite $\{ pt_j \}$ aura la même propriété.

Si on note Δ_p l'ensemble des valeurs de ω telles que (11) n'est pas vérifiée, on peut écrire que $\text{mes}_S (\Delta_p) = 0$, $\forall p \in N^*$. L'ensemble Δ des ω tel que (11) n'est pas vérifiée pour au moins une valeur de p est inclus dans $\bigcup_{p\in N^*} \Delta_p$, réunion dénombrable d'ensembles de S-mesure nulle. Il s'ensuit que $\text{mes}_S (\Delta) = 0$, ce qui entraîne, d'après le 2^e critère de Weyl, que la suite $\{ t_j \}$ est équirépartie modulo $\frac{2\pi}{\omega}$, p. p. ω/S.

En particulier, cette propriété est vraie pour la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$ $\forall a, b \in \mathrm{R}$ (puisqu'alors $\mathrm{K}(\tau) = 0(|\tau|^{-1})$) et donc pour la mesure de Lebesgue sur R (On retrouve ainsi une propriété démontrée par Weyl [*10*]). La propriété est donc vraie pour toute S-mesure telle que S est absolument continue.

Remarquons que le résultat donné ici est, en un certain sens, plus fort que celui de Weyl, puisqu'il reste valable pour la classe des mesures singulières telles que $\mathrm{K}(\tau) = 0[|\tau|^{-\alpha}]$. On peut d'ailleurs relier ce fait avec les développements de Fourier-Stieltjes et plus précisément les ensembles d'unicité [*11*].

2-4. Théorème 2*b*. — Si $\lim\limits_{|\tau| \to \infty} \mathrm{K}(\tau) = 0$.

Si, de plus, il existe $f(x)$, continuement dérivable, telle que

$$\frac{f(x)}{f'(x)} < ax, \; f'(x) > bx^{\beta-1} \qquad (a, b, \beta > 0)$$

et

$$\lim_{j \to \infty} \frac{t_j}{f(j)} = 1$$

alors

$$\mathrm{Var}\, \mathrm{M}_\infty = 0$$

La démonstration est du même type que celle du théorème 2*a*, c'est pourquoi nous ne la donnerons pas ici.

Les théorèmes 2*a* et 2*b* sont basés non seulement sur la croissance de $\{ t_j \}$, mais surtout sur la régularité de cette croissance, c'est-à-dire sur « l'intervalle moyen » entre les éléments de la suite. L'exemple suivant nous en convaincra : soit $\{ t_j \}$ la suite

$$1, 2, 2 + 1/2, 2^2, 2^2 + 1/2^2, 2^2 + 2/2^2, \\ \ldots, 2^n, 2^n + 1/2^n, 2^n + 2/2^n, \ldots, 2^n + (2^n - 1)/2^n, 2^{n+1},$$

Si l'on pose $f(n) = n$, on vérifie que

$$\underline{\lim} \frac{t_n}{f(n)} = \frac{1}{2}, \qquad \overline{\lim} \frac{t_n}{f(n)} = 1$$

Si $\mathrm{K}(\tau) = e^{-|\tau|}$ (signal des télégraphistes) :

$$\mathrm{Var}\, \mathrm{M}_{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{j,k=1}^{2^{n+1}} \mathrm{K}(t_j - t_k) > \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{j,k=2^n}^{2^{n+1}} e^{-|t_j - t_k|}$$

$$> \frac{1}{2^{2n+2}} \frac{(2^{n+1} - 2^n)^2}{e} = \frac{1}{4e}$$

3. ÉCHANTILLONNAGE DÉTERMINISTE DES PROCESSUS A SPECTRE DISCONTINU

3-1. La suite $\{ t_j \}$ étant donnée, on suppose que $S(\omega)$ est une fonction en escalier, ce qui correspond à une processus $Z(t)$ presque périodique [4], c'est-à-dire à un « signal ». (3) s'écrit alors

$$\mathrm{Var}\, M_n = \sum_p \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\omega_p t_j} \right|^2 \Delta S_p \tag{12}$$

où ω_p, $\Delta S_p > 0$ sont respectivement l'abscisse et la hauteur des sauts de $S(\omega)$. D'où

THÉORÈME 3. — Si $S(\omega)$ est complètement discontinue, une C. N. S. pour que $\mathrm{Var}\, M_\infty = 0$ est que, pour tout ω_p,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\omega_p t_j} = 0 \tag{13}$$

3-2. Supposant que $S(\omega)$ est continue à l'origine nous avons vu dans le § 1-2 qu'une condition suffisante pour que $\mathrm{Var}\, M_\infty = 0$ est que $\{ t_j \}$ soit équirépartie modulo $\frac{2\pi}{\omega}$, p. p. ω/S, c'est-à-dire dans le cas présent, équirépartie modulo $\frac{2\pi}{\omega_p}$, $\forall \omega_p$. Cette condition n'est pas en général nécessaire, sauf si, $\forall k \in N^*$, $k\omega_p$ est aussi une discontinuité de $S(\omega)$ (d'après le 2ᵉ critère de Weyl). Le problème se ramène pourtant à l'étude des fonctions de répartition modulo $\frac{2\pi}{\omega_p}$ de la suite $\{ t_j \}$.

Soit $F_p(n, x)$ le nombre d'éléments de $\{ t_j \}_{j \leq n}$ tels que $(t_j)_{\mathrm{mod}\frac{2\pi}{\omega_p}} \in [0, x[$.

$$l_p(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_p(n, x)}{n}$$

est par définition la fonction de répartition modulo $\frac{2\pi}{\omega_p}$ de la suite $\{ t_j \}$ (si du moins cette limite existe en tout point de continuité de $l_p(x)$). On voit immédiatement que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\omega_p t_j}$ n'est autre que la fonction caractéristique associée à $\frac{1}{n} F_p(n, x)$ en $\omega = \omega_p$:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\omega_p t_j} = \int_0^{2\pi/\omega_p} e^{i\omega_p x} d\left[\frac{1}{n} F_p(n, x)\right] \tag{14}$$

puisque

$$\exp\left[i\omega_p(t_j) \bmod \frac{2\pi}{\omega_p}\right] = \exp\left[i\omega_p\left(t_j - \frac{2\pi k_j}{\omega_p}\right)\right] = \exp i\omega_p t_j, \quad k_j \in \mathrm{N}$$

D'après le 2[e] théorème de Helly [9], (14) est encore valable à la limite, soit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\omega_p t_j} = \int_0^{2\pi/\omega_p} e^{i\omega_p x} dl_p(x) \tag{15}$$

qui n'est autre que le fondamental du développement en série de Fourier de $\frac{dl_p}{dx}$, lorsque $l_p(x)$ est absolument continue, et dans tous les cas la valeur de la fonction caractéristique associée à $l_p(x)$, prise au point ω_p. Combinant (13) et (15), on obtient :

THÉORÈME 4. — Si $S(\omega)$ est complètement discontinue, et si $l_p(x)$ existe, $\forall p$, une C. N. S. pour que Var $M_\infty = 0$ est que la fonction caractéristique associée à $l_p(x)$ s'annule au point ω_p.

3-3. CONCLUSION. — D'après le théorème de Slutsky [*4*], tout processus $Z(t)$, stationnaire du second ordre et continu en moyenne quadratique peut s'écrire :

$$Z(t) = E[Z(t)] + A_0 + Z_1(t) + Z_2(t)$$

où A_0 est une v. a. du second ordre, et A_0, Z_1, Z_2 sont non corrélées.

$Z_1(t)$ est tel que $S_1(\omega)$ est continu et représente « physiquement » un « bruit »

$Z_2(t)$ est tel que $S_2(\omega)$ est en escalier et représente physiquement un « signal »

($S_1(\omega)$ et $S_2(\omega)$ fonctions de répartition spectrales de $Z_1(t)$ et $Z_2(t)$).

Une C. N. pour que Var $M_\infty = 0$ est que $E[|A_0|^2] = 0$, ou, ce qui est équivalent, que la fonction de répartition spectrale de $Z(t) - E[Z(t)]$ soit continue à l'origine (§ 1-2).

Cette condition étant remplie, on peut écrire :

$$\text{Var } M_\infty = \text{Var } M'_\infty + \text{Var } M''_\infty$$

où

$$M'_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_1(t_j) \quad \text{et} \quad M''_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_2(t_j)$$

D'après le § 2, une condition suffisante pour que Var $M'_\infty = 0$ est que la suite $\{ t_j \}$ croisse suffisamment vite, sous l'hypothèse $\lim\limits_{|\tau| \to \infty} K(\tau) = 0$, hypothèse toujours vérifiée expérimentalement.

D'après le § 3, une C. N. S. pour que Var $M''_\infty = 0$ est que les sommes de Weyl associées aux abscisses des sauts de $S_2(\omega)$, convergent vers 0. Le théorème 4 donne une condition équivalente portant sur les fonctions de répartition de $\{ t_j \}$ modulo $\dfrac{2\pi}{\omega_p}$.

4. ÉCHANTILLONNAGE ALÉATOIRE

4-1. $Z(t)$ étant défini comme précédemment, on considère le cas où la suite d'échantillonnage est aléatoire. A. Blanc-Lapierre a étudié l'estimateur $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Z(t)U(t)dt$, où $U(t)$ est un processus du même type que $Z(t)$, mais qui dépend de $\{ t_j \}$. Par exemple $U(t)$ peut être la réponse à $\{ t_j \}$ d'un filtre défini par sa réponse percusionnelle $h(t) = 0$ pour $t < 0$, $h(t) = 1$ pour $0 < t < \varepsilon$, $h(t) = 0$ pour $t > \varepsilon$, la suite $\{ t_j \}$ pouvant être poissonnienne, ou dérivée d'une suite périodique par changement d'horloge aléatoire, retard ou avance aléatoire...

Nous disons pour notre part que M_n est un bon estimateur de $E[Z(t)]$, si

$$\lim_{n \to \infty} \text{Var } [M_n \mid \mathscr{E}] = 0, \tag{16}$$

$\mathscr{E}$ étant une catégorie d'épreuves liées à $\{ t_j \}$ telles que $P(\mathscr{E}) = 1$. On supposera toujours qu'il y a indépendance entre les processus $Z(t)$ et $\{ t_j \}$.

4-2. ÉCHANTILLONNAGE POISSONNIEN. — 4-2-1. *Processus de Poisson* *homogène.* — Si $\{ t_j \}$ est un processus de Poisson homogène de paramètre λ alors :

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(presque sûrement)}$$

b) $\{ t_j \}$ est presque sûrement équirépartie modulo T ($T \in R_+^*$).

Ces deux propriétés découlent de l'application de la loi forte des grands nombres.

Tout d'abord, on peut écrire

$$\frac{t_{n+1} - t_1}{n} = \sum_{j=1}^{n} (t_{j+1} - t_j)$$

On sait que [*15*] pour un processus de Poisson homogène $\{ t_j \}$ de paramètre λ, les intervalles successifs entre les t_j constituent des v. a. indépendantes, de même loi, et d'espérance mathématique $\frac{1}{\lambda}$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1} - t_1}{n} = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(p. s.)}$$

et, comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, t_1 p. s. finie ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(p. s.)} \tag{17}$$

Démontrons maintenant que $\{ t_j \}$ est p. s. équirépartie modulo T.

Soit A_k^θ le nombre d'éléments de la suite $\{ t_j \}$ dans $[(k-1)T, (k-1)T + \theta[$, $\theta \leqslant T$, $k \in N^*$. A_k^θ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$ et donc d'espérance mathématique $\lambda\theta$; d'autre part, les v. a. A_k^θ, $k = 1, \ldots, n$ sont mutuellement indépendantes, ce qui entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_k^\theta = \lambda\theta \qquad \text{(p. s.)}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k^\theta \Big/ \sum_{k=1}^{n} A_k^T = \frac{\theta}{T} \qquad \text{(p. s.)} \tag{18}$$

L'ensemble des réalisations du processus qui vérifient (18) pour une suite dense sur [0, T] de valeurs de θ est donc de probabilité 1. Soit $\{ t_j \}$

une de ces réalisations, $\{ a_k^\theta \}$ les réalisations correspondantes de $\{ A_k^\theta \}$; on peut écrire successivement :

$$k_n T \leqslant t_n < (k_n + 1)T$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} a_j^T \leqslant n < \sum_{j=1}^{k_n+1} a_j^T$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} a_j^\theta \leqslant F_T(n, \theta) < \sum_{j=1}^{k_n+1} a_j^\theta$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k_n} a_j^\theta \Big/ \sum_{j=1}^{k_n+1} a_j^T \leqslant \frac{F_T(n, \theta)}{n} < \sum_{j=1}^{k_n+1} a_j^\theta \Big/ \sum_{j=1}^{k_n} a_j^T$$

d'où

$$l_T(\theta) = \lim_{n \to \infty} \frac{F_T(n, \theta)}{n} = \frac{\theta}{T} \tag{19}$$

Comme $l_T(\theta)$ est parfaitement définie par une suite dense sur $[0, T]$ de valeurs de θ, il s'ensuit que le processus $\{ t_j \}$ est p. s. équiréparti modulo T, T donné dans R_+^*. Plus généralement, l'ensemble des réalisations du processus $\{ t_j \}$ qui sont équiréparties pour un ensemble dénombrable $\{ T_p \}$ de valeurs de T, est de probabilité 1.

Reportant (17) dans le § 2 *b*, et utilisant le théorème 3, avec $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$, on en déduit que l'échantillonnage, par un processus de Poisson homogène, d'un processus composé d'un « bruit » ($\lim\limits_{|\tau| \to \infty} K_1(\tau) = 0$) et d'un « signal » ($K_2(\tau)$ presque périodique de moyenne nulle), est bon c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Var}(M_n \mid \mathscr{E}) = 0$ avec $P(\mathscr{E}) = 1$.

4-2-2. *Processus de Poisson non homogène.* — Soit $\{ u_j \}$ un processus de Poisson homogène de paramètre $\lambda = 1$, et $\sigma(t)$ une fonction strictement croissante sur R_+ telle que $\sigma(0) = 0$, $\sigma(+\infty) = +\infty$. On définit le processus de Poisson $\{ t_j \}$, non homogène si $\sigma(t) \neq \lambda t$, par la relation $t_j = \sigma^{-1}(u_j)$. Si, par exemple, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sigma^{-1}[n(1+\varepsilon)]}{\sigma^{-1}(n)} < 1 + \varepsilon' \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sigma^{-1}[n(1-\varepsilon)]}{\sigma^{-1}(n)} > 1 - \varepsilon'$$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t_n}{\sigma^{-1}(n)} = 1 \qquad \text{(p. s.)} \tag{20}$$

A quelle condition (19) restera-t-elle valable ? Si nous reprenons les v. a. A_k^θ définies dans le paragraphe précédent, on ne peut en général pas leur appliquer la loi forte des grands nombres puisqu'elles ne sont pas équidistribuées, qu'il n'y a aucune relation entre leurs moments...

Par définition du processus, $B_n^T = \sum_{k=1}^{n} A_k^T$ a comme fonction caractéristique :

$$\Phi_n(u) = \exp\left[\sigma(nT)\{ e^{iu} - 1 \}\right] \tag{21}$$

Posons $B_n^\theta = \sum_{k=1}^{n} A_k^\theta$. Alors

$$\Pr[B_n^\theta = k] = \sum_{p=k}^{\infty} \Pr[B_n^\theta = k \mid B_n^T = p] \Pr[B_n^T = p]$$

On sait que, sous l'hypothèse $B_n^T = p$, les p points $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont indépendamment répartis, la f. de r. de l'un de ces points étant $\dfrac{\sigma(u)}{\sigma(nT)}$. D'où

$$\Pr[B_n^\theta = k \mid B_n^T = p] = C_p^k(\alpha_n^\theta)^k(1 - \alpha_n^\theta)^{p-k} \qquad \forall k \leqslant p,$$

avec

$$\alpha_n^\theta = \frac{1}{\sigma(nT)} \sum_{q=1}^{n} \{ \sigma[(q-1)T + \theta] - \sigma[(q-1)T] \} \tag{22}$$

Si donc $\phi_n(u)$ est la fonction caractéristique de B_n^θ, il vient :

$$\phi_n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=k}^{\infty} \Pr[B_n^T = p] e^{iuk} C_p^k(\alpha_n^\theta)^k(1 - \alpha_n^\theta)^{p-k}$$

soit

$$\phi_n(u) = \sum_{p=0}^{\infty} (\alpha_n^\theta e^{iu} + 1 - \alpha_n^\theta)^p \Pr[B_n^T = p]$$

$$\phi_n(u) = E\{ \exp(B_n^T \operatorname{Log}[\alpha_n^\theta e^{iu} + 1 - \alpha_n^\theta]) \}$$

d'où d'après (21)

$$\phi_n(u) = \exp[\alpha_n^\theta \sigma(nT)(e^{iu} - 1)] \tag{23}$$

ce dont on aurait pu se douter !

La fonction caractéristique de $\frac{1}{\sigma(n\mathrm{T})}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k^\theta$ sera

$$\phi_n'(u) = \exp\left[\alpha_n^\theta \sigma(n\mathrm{T})(e^{iu/\sigma(n\mathrm{T})} - 1)\right]$$

Si α_∞^θ existe, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n'(u) = \exp\left(iu\alpha_\infty^\theta\right)$$

et $\frac{1}{\sigma(n\mathrm{T})}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k^\theta$ converge vers α_∞^θ (en probabilité). L'existence de α_∞^θ est une C. N. S. pour qu'il en soit ainsi. Deux questions se posent alors : α_∞^θ est-il égal à $\frac{\theta}{\mathrm{T}}$ ce qui nous assurerait (en un certain sens) de l'équirépartition de la suite $\{ t_j \}$, et cette équirépartition est-elle valable pour presque tous les échantillons de la suite ?

α_n^θ dépend uniquement de $\sigma(t)$; on peut démontrer que, par exemple, $\alpha_\infty^\theta = \frac{\theta}{\mathrm{T}}$ dans les deux cas suivants :

$\sigma'(t)$ non croissante

$\sigma'(t)$ croissante et $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma[(n+1)\mathrm{T}]}{\sigma(n\mathrm{T})} = 1$

Par contre, $\alpha_\infty^\theta \neq \frac{\theta}{\mathrm{T}}$ lorsque $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma[(n+1)\mathrm{T}]}{\sigma(n\mathrm{T})} > 1$, ce qui correspond à une suite d'échantillonnage « qui ne croît pas assez vite ».

Plaçons-nous dans le cas où $\alpha_\infty^\theta = \frac{\theta}{\mathrm{T}}$. De façon à prouver que $\frac{\mathrm{B}_n^\theta}{\sigma(n\mathrm{T})}$ converge p. s. vers $\frac{\theta}{\mathrm{T}}$, il suffit de démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \Pr\left\{ \left| \frac{\mathrm{B}_n^\theta}{\sigma(n\mathrm{T})} - \frac{\theta}{\mathrm{T}} \right| > \varepsilon \right\} < \infty \tag{24}$$

De manière à simplifier les notations, posons $\mathrm{T} = 1$ et $\sigma(n) = \sigma_n$. D'après (23) :

$$\Pr\left[\mathrm{B}_n^\theta = k\right] = \frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^k}{k\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n}$$

Considérons l'inégalité $\left|\dfrac{B_n^\theta}{\sigma_n} - \theta\right| > \varepsilon$, avec $\varepsilon < \theta$. Elle est vérifiée pour

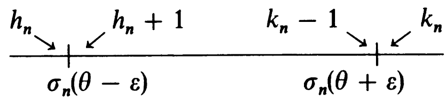
$$B_n^\theta > \sigma_n(\theta + \varepsilon)$$

ou

$$B_n^\theta < \sigma_n(\theta - \varepsilon)$$

Notons h_n et k_n les entiers tels que

$$\begin{array}{lcl} h_n < \sigma_n(\theta - \varepsilon) & \text{et} & h_n + 1 \geqslant \sigma_n(\theta - \varepsilon) \\ k_n > \sigma_n(\theta + \varepsilon) & \text{et} & k_n - 1 \leqslant \sigma_n(\theta + \varepsilon) \end{array}$$



Si l'on note

$$P_n = \sum_{q=0}^{h_n} \frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^q}{q\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n}$$

$$Q_n = \sum_{q=k_n}^{\infty} \frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^q}{q\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n} \tag{25}$$

(24) deviendra

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (P_n + Q_n) < \infty \tag{26}$$

Majorons Q_n ; puisque

$$\left[\frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^{q+1}}{(q+1)\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n}\right] \left[\frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^q}{q\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n}\right]^{-1} = \frac{\alpha_n^\theta \sigma_n}{q+1} \leqslant \frac{\alpha_n^\theta \sigma_n}{\sigma_n(\theta + \varepsilon)} = \frac{\alpha_n^\theta}{\theta + \varepsilon}$$

pour $q \geqslant k_n$, on pourra écrire d'après (25), dès que $\alpha_n^\theta < \theta + \varepsilon$

$$Q_n \leqslant \frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^{k_n}}{k_n\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n} \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha_n^\theta}{\theta + \varepsilon}}$$

Appliquons la formule de Stirling :

$$Q_n \leqslant \frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^{k_n}}{k_n^{k_n + 1/2} e^{-k_n}} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n} \frac{(1 + \mu(n))}{\sqrt{2\pi}\left(1 - \dfrac{\alpha_n^\theta}{\theta + \varepsilon}\right)} \qquad \text{avec } \lim_{n \to \infty} \mu(n) = 0$$

soit

$$\operatorname{Log} Q_n \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Log} \alpha_n^\theta \sigma_n + \sigma_n(\theta + \varepsilon - \alpha_n^\theta) - \left(\sigma_n(\theta + \varepsilon) + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} \frac{\theta + \varepsilon}{\alpha_n^\theta}$$
$$+ 1 + \operatorname{Log}(1 + \mu(n))/\sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{\alpha_n^\theta}{\theta + \varepsilon}\right) \quad (27)$$

Le second membre de (27) se comporte comme

$$\sigma_n \alpha_n^\theta \left[\frac{\theta + \varepsilon}{\alpha_n^\theta} - 1 - \frac{\theta + \varepsilon}{\alpha_n^\theta} \operatorname{Log} \frac{\theta + \varepsilon}{\alpha_n^\theta}\right]$$

Si l'on considère la fonction $y = x - 1 - x \operatorname{Log} x$, $y' = -\operatorname{Log} x$ entraîne que y est décroissante dès que $x > 1$; comme $y(1) = 0$, et $\dfrac{\theta + \varepsilon}{\alpha_n^\theta} > 1$, dès que n est suffisamment grand, Log Q_n se comporte donc comme $-\sigma_n \alpha_n^\theta$. Il s'ensuit que Q_n converge vers 0 comme $e^{-\gamma\sigma_n}$ (γ étant positif et tendant vers 0 avec ε).

On opère de la même manière pour la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} P_n$. On écrit tout d'abord $P_n = \sum_{q=0}^{h_n} \beta_q$ avec $\beta_q = \dfrac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^q}{q\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n}$, d'après (25). P_n peut être représentée par $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ avec $u_0 = \beta_{h_n}$, $u_1 = \beta_{h_n - 1}$, $\ldots$, $u_{h_n} = \beta_1$, $u_{h_n + 1} = \beta_0$ et $u_p = 0$ pour $p \geqslant h_n + 2$.

Comme $\dfrac{u_{p+1}}{u_p} = \dfrac{\beta_{r-1}}{\beta_r} = \dfrac{r}{\alpha_n^\theta \sigma_n} \leqslant \dfrac{\theta - \varepsilon}{\alpha_n^\theta}$ pour $p \leqslant h_n + 1$ et $u_p = 0$ pour $p > h_n + 1$, on peut écrire dès que n est suffisamment grand $\left(\dfrac{\theta - \varepsilon}{\alpha_n^\theta} < 1\right)$:

$$P_n \leqslant \frac{(\alpha_n^\theta \sigma_n)^{h_n}}{h_n\,!} e^{-\alpha_n^\theta \sigma_n} \frac{1}{1 - \dfrac{\theta - \varepsilon}{\alpha_n^\theta}}$$

Appliquant alors la formule de Stirling, on s'aperçoit que P_n se comporte comme $e^{-\gamma'\sigma_n}$ (γ' positif tendant 0 avec ε) ; si donc $\sigma(t)$ croît suffisamment vite, par exemple comme t^β, $\beta > 0$, et si $\lim_{n \to \infty} \alpha_n^\theta = \theta$ (26) sera vérifiée, d'où (24) et la suite $\{ t_j \}$ sera p. s. équirépartie modulo 1. Les calculs précédents peuvent être repris pour T quelconque ; on en déduira aisément que pour tout T, $\{ t_j \}$ sera p. s. équirépartie modulo T, sous la même condition concernant la croissance de $\sigma(t)$.

En résumé, $\{ t_j \}$ sera p. s. équirépartie modulo T par exemple lorsque $\sigma(t)$ est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma[(n+1)T]}{\sigma(nT)} = 1$, $\sigma(t) > t^{\beta}$ $(\beta > 0)$ $\sigma'(t)$ étant non croissante, ou non décroissante. Si $\sigma(t)$ obéit à de telles conditions, qui sont en fait très larges, et ceci $\forall T$, $\{ t_j \}$ est p. s. équirépartie modulo un ensemble dénombrable $\{ T_p \}$ de valeurs de T.

Si, de plus, $\sigma^{-1}(t)$ vérifie les conditions du théorème 2 *b* et (20), l'estimateur $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} Z(t_j)$ de $E[Z(t)]$ est « bon ».

4-3. ÉCHANTILLONNAGE A « ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS ». — Le processus de Poisson n'est que le cas particulier de processus à « accroissements indépendants ». On écrit dans ce cas $t_j = \sum\limits_{k=1}^{j} A_k$, les A_k étant des v. a. positives mutuellement indépendantes. Si les A_k suivent la même loi, et si $E[A_j]$ existe, alors, p. s.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A_j = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = E[A_j],$$

d'après la loi forte des grands nombres. Pour l'équirépartition de la suite $\{ t_j \}$, on peut raisonner d'une manière plus simple que dans § 4-2-1 (voir [*16*]) ; soit $\phi(u)$ la fonction caractéristique de A_j. Pour que $\{ t_j \}$ soit équirépartie modulo 1, il faut et il suffit que, $\forall q \in N^*$

$$B_{n,q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi q t_j} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{(p. s)}$$

Pour cela (voir [*17*]), il suffit que

$$\sum_{n\in I} E[\,|B_{n,q}|^2] < \infty,$$

I étant un ensemble de valeurs de n judicieusement choisi. Comme

$$t_j = \sum_{k=1}^{j} A_k,$$

on peut écrire :

$$\mathrm{E}[\,|\,\mathrm{B}_{n,q}\,|^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \mathrm{E}[e^{2i\pi q(t_\alpha - t_\beta)}] \tag{28}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n-k)\mathscr{R}[\phi^k(2\pi q)] \tag{29}$$

Si $|\,\phi(2\pi q)\,| = \mu < 1$, alors :

$$\mathrm{E}[\,|\,\mathrm{B}_{n,q}\,|^2] \leqslant \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu^k + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\mu^k \leqslant \frac{2}{n}\left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{(1-\mu)^2}\right]$$

ce qui entraîne que $\mathrm{B}_{n^2,q}$ converge p. s. vers 0. La convergence p. s. vers 0 de $\mathrm{B}_{n,q}$ en découle. En effet, si p est tel que $n^2 < n^2 + p < (n+1)^2$,

$$|\,\mathrm{B}_{n^2+p,q}\,| = \frac{1}{n^2+p}\left|\sum_{j=1}^{n^2+p} e^{2i\pi q t_j}\right| \leqslant \frac{n^2}{n^2+p}|\,\mathrm{B}_{n^2,q}\,| + \frac{p}{n^2+p} \leqslant |\,\mathrm{B}_{n^2,q}\,| + \frac{2n+1}{n^2}$$

Si donc $|\,\mathrm{B}_{n^2,q}\,| < \varepsilon$ dès que $n > \mathrm{N}$, alors

$$|\,\mathrm{B}_{n,q}\,| < 2\varepsilon \quad \text{dès que } n > \mathrm{N}^2 \text{ pourvu que } \quad \frac{2\mathrm{N}+1}{\mathrm{N}^2} < \varepsilon$$

Si maintenant, $|\,\phi(2\pi q)\,| = 1$, pour une valeur de q, c'est que A_j suit une loi de treillis [9] de pas rationnel. Si les points du treillis sont rationnels, et donc de la forme $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{s}{q}$, α, β, q entiers fixés, on aura

$$t_j = j\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{j} s_j, \qquad \text{p. s.,}$$

s_j étant une v. a. ne pouvant prendre que des valeurs entières. Donc t_j ne pourra prendre modulo 1 qu'un nombre fini de valeurs ce qui entraîne que cette suite n'est pas équirépartie modulo 1. Que se passe-t-il si les points de treillis ne sont pas rationnels ?

On aura alors

$$\phi(u) = e^{iu\xi}\sum_{s\in\mathrm{I}\subset\mathrm{N}} p_s e^{i\frac{s}{q}t}, \qquad \xi \notin \mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad \sum_s p_s = 1.$$

D'où $\phi(2\pi q) = e^{2i\pi q\xi}$, et, d'après (29) :

$$E[\,|\,B_{n,q}\,|^2] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n-k)(e^{2i\pi kq\xi} + e^{-2i\pi kq\xi}) \leqslant \frac{\gamma}{n}$$

ce qui entraîne la convergence p. s. de $B_{n,q}$ vers 0.

On voit donc qu'une C. N. S. pour que $\{ t_j \}$ soit p. s. équirépartie modulo 1 est que A_j ne soit pas une v. a. de treillis d'abscisses rationnelles.

Plus généralement, une C. N. S. pour que $\{ t_j \}$ soit p. s. équirépartie modulo une suite $\{ T_k \}$ de valeurs de T, est que A_j ne soit pas une v. a. discrète d'abscisses appartenant à $\bigcup_k T_k Q$.

On conclut que pour les suites $\{ t_j \}$ étudiées ici :

1° l'échantillonnage d'un « bruit » est bon (sous l'hypothèse de l'existence de $E[A_j]$) ;

2° une C. S. pour qu'il en soit ainsi pour le « signal » est que A_j ne soit pas v. a. de treillis dont les abscisses sont rationnelles avec une des « périodes » du « signal ». On remarquera que l'échantillonnage présenté dans ce paragraphe est un très mauvais modèle pour tout ce qui touche à la « détection synchrone » sans repérage de phase puisque, dans ce cas, on ne désire pas un « bon échantillonnage », même si physiquement l'intervalle entre les t_j suit une loi absolument continue.

4-4. ÉCHANTILLONNAGE « MIXTE ». — Pratiquement, l'expérimentateur dispose souvent d'une suite d'échantillonnage déterministe mais perturbée par des facteurs aléatoires. L'échantillonnage résultant $\{ t_j \}$ consiste en l'addition d'un terme déterministe u_j et d'un terme aléatoire X_j (appelé « Jitter »), soit $t_j = u_j + X_j$. Dans le cas le plus simple $\{ u_j \}$ est telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \theta$ (fini) et les X_j sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même répartition et telles que $E[X_j]$ existe. Alors, puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ (p. s.) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \theta \qquad \text{(p. s.)} \tag{30}$$

Les variables aléatoires $e^{2i\pi q(u_j + X_j)}$ étant mutuellement indépendantes et bornées, on peut leur appliquer la loi forte des grands nombres (voir [*18*]).

Autrement dit

$$\Pr\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi q t_j} - \mathrm{E}(e^{2i\pi q t_j})\right| = 0\right] = 1 \tag{31}$$

Posant $\phi(2\pi q) = \mathrm{E}(e^{2i\pi q X_j})$ et

$$\Phi(2\pi q) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi q u_j},$$

(31) devient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi q t_j} = \phi(2\pi q)\Phi(2\pi q)$$

La suite $\{t_j\}$ sera donc presque sûrement équirépartie modulo 1 si et seulement si $\phi(2\pi q)\Phi(2\pi q) = 0$, $\forall q \in \mathrm{N}^*$. Si $\phi(2\pi q) \neq 0$, $\forall q$, il y a donc équivalence entre l'équirépartition de la suite $\{u_j\}$ et la presque sûre équirépartition de la suite $\{t_j\}$. De ceci et de (30), on peut déduire que dans la plupart des cas, le « jitter » ne perturbe pas l'échantillonnage, à savoir que s'il est « bon » (resp. « mauvais ») par la suite $\{u_j\}$, il sera « bon » (resp. « mauvais ») pour la suite $\{u_j + X_j\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] P. Levy, *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Gauthier-Villars, 1948.
[*2*] J. W. S. Cassels, An introduction to diophantine approximation. Cambridge U. P., 1957.
[*3*] Kampe de Feriet, Sur les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène. *Ann. Soc. Sc. de Bruxelles*, t. **50**, p. 145-194.
[*4*] Slutsky, Sur les fonctions aléatoires périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes. *Act. Sc. et Ind.*, n° 738, p. 33-55.
[*5*] Kuipers, Remark on the Weyl Schoennberg criterion in the theory of asymptotic distribution of real numbers. *Niew Archief voor Wiskunde* (3), XVI, 1968, p. 197-202.
[*6*] B. Lacaze, Sur la généralisation du critère de Weyl-Schoennberg *(à paraître).*
[*7*] J. Chauvineau, *Équirépartition et équirépartition uniforme modulo 1*, Séminaire Delange-Pisot, 61/62, n° 7.
[*8*] J. F. Koksma, Diophantische approximationen, Berlin, 1936, *Ergebnisse der Mathematik*, IV, 4.
[*9*] Lukacs, *Fonctions caractéristiques*, Dunod, 1964.
[*10*] H. Weyl, Uber die Gleichverteiling von Zahlen modulo Eins, *Math. Annalen*, t. **77**, 1916, p. 313-352.
[*11*] Salem et Kahane, *Algebraic numbers et Fourier Analysis*, Hermann.
[*12*] A. Blanc-Lapierre, Échantillonnage et détermination des moyennes temporelles dans le cas des fonctions al. stat. d'ordre 2. *C. R. A. S.*, t. **264**, p. 1170-1173.

[*13*] BLANC-LAPIERRE, Remarques sur certains problèmes d'échantillonnage aléatoire liés à la détermination des moyennes temporelles. *C. R. A. S.*, t. **267**, p. 517-520.
[*14*] A. REYNIE, *Calcul des probabilités*. Dunod, 1966.
[*15*] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson, 1953.
[*16*] M. LOEVE, *Probability theory*. Van Nostrand, 1955, p. 266.
[*17*] R. FORTET, *Éléments de la théorie des probabilités*. C. N. R. S., t. **1**, 1963, p. 379.
[*18*] FISZ, *Probability theory and mathematical statistics*. Wiley, 1963, p. 222.

(Manuscrit reçu le 11 décembre 1972).