ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. FORTET

Espaces à noyau reproduisant et lois de probabilités des fonctions aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 1 (1973), p. 41-58

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_1_41_0>

© Gauthier-Villars, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 1, 1973, p. 41-58. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Espaces à noyau reproduisant et lois de probabilités des fonctions aléatoires

par

R. FORTET [1]

RÉSUMÉ. — L'article rappelle des propriétés des covariances et des espaces à noyau reproduisant qui leurs sont associés. Ces propriétés sont utilisées pour aborder le problème suivant : m_1, m_2 étant les lois de probabilités de deux fonctions aléatoires du second ordre dont on connaît seulement les covariances K_1, K_2, déterminer des conditions sur K_1, K_2, ou nécessaires, ou suffisantes, permettant d'affirmer que m_1 et m_2 sont disjointes, ou équivalentes.

SUMMARY. — The paper quotes some properties of the covariances and of the associated spaces with reproducing kernel. These properties are utilized for studying the following problem: let m_1, m_2 be the probability laws of two second order random functions, whose covariances K_1, K_2 only are known; to determine necessary or sufficient conditions on K_1, K_2, for m_1, m_2 being disjoint, or equivalent.

1. RAPPELS ET NOTATIONS

Les notions et résultats indiqués dans ce paragraphe 1 sont déjà connus ou élémentaires, et sont seulement rappelés brièvement, sans démonstration.

Soit $\mathscr{T}$ un ensemble quelconque d'éléments t; une fonction (numéri-

[1] Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI ; Équipe de Recherche « Processus stochastiques et applications », associée au C. N. R. S. ; tour 56, 9, quai Saint-Bernard, 75-Paris Ve.

que complexe) $K(t_1, t_2)$ de $\{ t_1, t_2 \} \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ est de *type non-négatif* si :

— quel que soit l'entier positif n;
— quel que soit $t_{(n)} = \{ t_1, t_2, \ldots, t_n \} \in \mathcal{T}^n$;
— quel que soit $\lambda^{(n)} = \{ \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n \} \in \mathbb{C}^n$,

le nombre :

$$\phi_n(t_{(n)}, \lambda^{(n)}; K) = \sum_{j,k=1}^{n} \lambda^j \overline{\lambda^k} K(t_j, t_k) \geqq 0 \tag{1,1}$$

est réel et $\geqq 0$.

Nous désignerons par $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ — ou simplement $\mathcal{P}$ — l'ensemble des fonctions de type non-négatif sur $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$; par $\mathcal{R}(K)$ l'espace de Hilbert de *noyau reproduisant* $K \in \mathcal{P}$. Les éléments de $\mathcal{R}(K)$ sont des fonctions (numériques complexes $f(.)$ de $t \in \mathcal{T}$.

Nous désignerons par :

— $[f, g]_K$ le produit hermitique dans $\mathcal{R}(K)$ de $f(.) \in \mathcal{R}(K)$ par $g(.) \in \mathcal{R}(K)$;
— $\| f \|_K$ la norme dans $\mathcal{R}(K)$ de $f(.) \in \mathcal{R}(K)$.

On sait que :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \qquad f(t) = [f, K(t, .)]_K ; \tag{1,2}$$

et que :

THÉORÈME (1,1). — Soit $K \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$, et $f(.)$ une fonction de $t \in \mathcal{T}$; pour que $f(.) \in \mathcal{R}(K)$, il est nécessaire et suffisant que :

$$\sup_{n, t_{(n)}, \lambda^{(n)}} \frac{\left| \sum_{h=1}^{n} \lambda^h \overline{f(t_h)} \right|^2}{\phi_n(t_{(n)}, \lambda^{(n)}; K} = \| f \|_K^2 < +\infty. \tag{1,3}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \Delta(t_1, t_2) &= \| K(t_1, .) - K(t_2, .) \|_K^2 \\ &= K(t_1, t_1) + K(t_2, t_2) - K(t_1, t_2) - K(t_2, t_1) \geqq 0 \end{aligned} \tag{1,4}$$

On a :

THÉORÈME (1,2). — Si $K \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$, pour que $\mathcal{R}(K)$ soit séparable, il est nécessaire et suffisant que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ une famille dénombrable de parties $B_j(\varepsilon)$ de $\mathcal{T}$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, deux à deux disjointes avec :

$$\bigcup_j B_j(\varepsilon) = \mathcal{T},$$

telle que :

$$\forall j, \qquad \forall t_1, t_2 \in B_j(\varepsilon), \qquad \Delta(t_1, t_2) < \varepsilon.$$

PROPRIÉTÉS DE CONVEXITÉ ET D'ORDRE. — $\mathscr{P}(\mathscr{T})$ est visiblement un cône convexe; disons que $B \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$ est proportionnelle à $A \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$ s'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ et $\geqq 0$, tel que : $B = \rho A$. Un élément $E \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$ est *extrêmal* si l'égalité : $\alpha A + \beta B = E$, avec : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $A, B \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$, implique que E est proportionnelle soit à A, soit à B. On a :

THÉORÈME (1,3). — Pour que $E \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$ soit extrêmale, il est nécessaire et suffisant que E soit de la forme :

$$E(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2), \tag{1,4}$$

où $f(.)$ est une fonction arbitraire de $t \in \mathscr{T}$.

Soient $K_1, K_2 \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$; soit $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geqq 0$; disons que K_2 est ρ-dominée par K_1, si :

$$\forall n, \qquad t_{(n)}, \lambda^{(n)}, \Phi_n(t_{(n)}, \lambda^{(n)}, K_2) \leqq \rho\Phi_n(t_{(n)}, \lambda^{(n)}, K_1);$$

disons que K_2 est dominée par K_1, s'il existe $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geqq 0$, tel que K_2 est ρ-dominée par K_1.

Entre convexité et dominance, il y a des relations évidentes; si $K \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$, pour que $E(t_1, t_2) = f(t_1)\overline{f(t_2)}$ [cf. (1,4)] soit dominée par K, il est nécessaire et suffisant que $f(.) \in \mathscr{R}(K)$: cela résulte du Théorème (1,1).

REMARQUE (1,1). — Observons en passant que les propriétés de convexité de $\mathscr{P}(\mathscr{T})$ [ou de certains de ses sous-ensembles], ne semblent pas avoir reçu l'attention qu'elles mériteraient.

ÉLÉMENTS DE $\mathscr{P}(\mathscr{T})$ DISJOINTS. — Deux éléments $K_1, K_2 \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$ sont disjoints, s'il n'existe pas de fonction $f(.)$ de $t \in \mathscr{T}$, non identiquement nulle, appartenant à la fois à $\mathscr{R}(K_1)$ et à $\mathscr{R}(K_2)$.

DÉCOMPOSITION D'UN ÉLÉMENT DE $\mathscr{P}(\mathscr{T})$ PAR RAPPORT A UN AUTRE. — Soient $K_1, K_2 \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$, et $K = K_1 + K_2$; $[f, g]$, $[f, g]_1$, $[f, g]_2$ désigneront le produit hermitique, respectivement dans $\mathscr{R}(K)$, $\mathscr{R}(K_1)$, $\mathscr{R}(K_2)$.

Soit U la fermeture dans $\mathscr{R}(K_2)$ de $\mathscr{R}(K_1) \cap \mathscr{R}(K_2)$, et Π le complémentaire orthogonal dans $\mathscr{R}(K_2)$ de U;

THÉORÈME (1,4). — Π est l'ensemble des $f(.) \in \mathscr{R}(K_2)$ telles que $[f, g] = 0$ $\forall g(.) \in \mathscr{R}(K_1)$; ou encore l'ensemble des $f(.) \in \mathscr{R}(K_2)$ telles que $[f, g]_2 = 0$ $\forall g(.) \in \mathscr{R}(K_1) \cap \mathscr{R}(K_2)$; $\Pi = \mathscr{R}(K_2)$ si et seulement si K_1 et K_2 sont disjointes.

En utilisant entre autres le Théorème (1,1), on obtient :

THÉORÈME (1,5). — Si K_2 est dominée par K_1, $\mathscr{R}(K_2) \subset \mathscr{R}(K_1)$, et

$U = \mathscr{R}(K_1) \cap \mathscr{R}(K_2) = \mathscr{R}(K_2)$. Il existe une application linéaire Θ de $\mathscr{R}(K_1)$ dans $\mathscr{R}(K_1)$ et une seule qui, $\forall t \in \mathscr{T}$, à $K_1(t, .) \in \mathscr{R}(K_1)$ fait correspondre $\Theta K_1(t, .) = K_2(t, .) \in \mathscr{R}(K_2) \subset \mathscr{R}(K_1)$; Θ est bornée, et :

$$\forall f(.), g(.) \in \mathscr{R}(K_1), \qquad [g, \Theta f]_1 = [\Theta g, f]_1 = [\Theta g, \Theta f]_2,$$

ce qui implique que Θ est auto-adjointe ; et non-négative, c'est-à-dire que $\forall f(.) \in \mathscr{R}(K_1)$, $[\Theta f, f]_1 \geqq 0$.

Disons que K_1 et K_2 sont *équivalentes*, si K_2 est dominée par K_1, et K_1 par K_2.

Si K_1 et K_2 sont équivalentes, $\mathscr{R}(K_1)$ et $\mathscr{R}(K_2)$ sont constituées des mêmes éléments ; Θ admet une inverse bornée Θ^{-1} ; et $\forall f(.), g(.) \in \mathscr{R}(K_1)$, $[f, g]_1 = [\Theta f, g]_2$. ■

THÉORÈME (1,6). — Soit $\mathscr{E}$ une σ-algèbre de parties de $\mathscr{T}$; soit $K \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$, telle que $K(t_1, t_2)$ est une fonction mesurable $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ de $\{ t_1, t_2 \} \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}$, et que $\mathscr{R}(K)$ est séparable.

Soit $\mathscr{V}$ un espace quelconque d'éléments v, Σ une σ-algèbre de parties de $\mathscr{V}$, $\mu(dv)$ une mesure σ-bornée sur $(\mathscr{V}, \Sigma)$; supposons qu'à chaque $t \in \mathscr{T}$, est associée une fonction $f_0(. \,; t) \in L^2(\mathscr{V}, \Sigma, \mu)$, de telle sorte que :

$$K(t_1, t_2) = \int_{\mathscr{V}} f_0(v \,; t_1)\overline{f_0(v \,; t_2)}\mu(dv), \qquad \forall \{ t_1, t_2 \} \in \mathscr{T} \times \mathscr{T} ;$$

alors il existe une fonction $f(v \,; t)$ de $\{ v, t \} \in \mathscr{V} \times \mathscr{T}$, mesurable $- \Sigma \otimes \mathscr{E}$, telle que :

$$K(t_1, t_2) = \int_{\mathscr{V}} f(v \,; t_1)\overline{f(v \,; t_2)}\mu(dv) \qquad \forall \{ t_1, t_2 \} \in \mathscr{T} \times \mathscr{T},$$

et que :

$$f(. \,; t) = f_0(. \,; t) \ \mu\text{-presque partout}, \qquad \forall t \in \mathscr{T} \text{ fixé.}$$

2. FONCTIONS ALÉATOIRES DU SECOND ORDRE

Considérons l'espace $\mathbb{C}^{\mathscr{T}}$; nous désignerons par v un élément générique de $\mathbb{C}^{\mathscr{T}}$: v est une fonction (numérique complexe) de $t \in \mathscr{T}$; $v(t)$ désignera la valeur numérique particulière que prend v pour la valeur partiulière quelconque t de la variable.

Soit $\mathscr{B}$ la σ-algèbre des Boréliens de $\mathbb{C}$; $\mathscr{B}$ engendre classiquement dans $\mathbb{C}^{\mathscr{T}}$, une σ-algèbre produit $\mathscr{B}^{\mathscr{T}}$ (cf. J. Neveu [*1*], p. 74 et suivantes).

Nous désignerons par S′ l'ensemble des fonctions $\lambda(.)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$, qui sont de la forme :

$$\lambda(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j v(t_j), \tag{2,1}$$

où : n est un entier > 0 ; $t_{(n)} = \{ t_1, \ldots, t_n \} \in \mathscr{T}^n$; $\lambda^{(n)} = \{ \lambda^1, \ldots, \lambda^n \} \in \mathbb{C}^n$. Une telle fonction $\lambda(.)$ est mesurable-$\mathscr{B}^{\mathscr{T}}$.

Par définition, une fonction aléatoire numérique complexe (abréviation : f. a.) $Z(.)$ de $t \in \mathscr{T}$, est un élément aléatoire dans $(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}})$; il nous arrivera de la désigner par le symbole v ; sa loi de probabilité est une mesure de probabilité $m(dv)$ sur $(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}})$.

D'une mesure $m(dv)$ sur $(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}})$, disons :

— qu'elle est une S-mesure, si :

$$\forall t \in \mathscr{T}, \qquad \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} | v(t) |^2 m(dv) < +\infty ;$$

— qu'elle est une S-loi, si elle est une S-mesure et en outre une mesure de probabilité ;

— qu'elle est une S_0-loi, si elle est une S-loi, et si en outre :

$$\forall t \in \mathscr{T}, \qquad \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} v(t) m(dv) = 0 ;$$

— qu'elle est une G-loi, si la f. a. $Z(.)$ est Laplacienne ; ce qui implique qu'elle est une S-loi ;

— qu'elle est une G_0-loi, si elle est à la fois une G-loi et une S_0-loi.

A une S-mesure $m(dv)$, nous associerons l'espace $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$; et la fermeture $S(m)$ de S′ dans $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$; si une fonction $\lambda(.)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ appartient à $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$, $\| \lambda \|_m$ désignera sa norme dans $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$.

Nous nous limiterons désormais aux f. a. $Z(.)$ *du second ordre*, c'est-à-dire telles que :

$$\forall t \in \mathscr{T}, \qquad E(| Z(t) |^2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} | v(t) |^2 m(dv) < +\infty ;$$

c'est-à-dire encore telles que leur loi de probabilité $m(dv)$ est une S-loi. A une telle f. a. du second ordre, associons sa covariance, c'est-à-dire la fonction de type non-négatif de $\{ t_1, t_2 \} \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}$ définie par :

$$K(t_1, t_2) = E[Z(t_1) \overline{Z(t_2)}] = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} v(t_1) \overline{v(t_2)} m(dv). \tag{2,2}$$

LEMME (2,1). — Si $K \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$, et si $m(dv)$ est une S-mesure telle que :

$$K(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} v(t_1)\,\overline{v(t_2)}m(dv).$$

1° Il existe une isométrie $\mathscr{I}$ de $\mathscr{R}(K)$ sur $S(m)$ qui, $\forall t \in \mathscr{T}$, à $K(t, .) \in \mathscr{R}(K)$ fait correspondre dans $S(m)$ la fonction $v(t)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$.

2° Quelle que soit la fonction $\lambda(.)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ appartenant à $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$, la fonction $f(.)$ de $t \in \mathscr{T}$ définie par :

$$f(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda(v)\,\overline{v(t)}m(dv)$$

appartient à $\mathscr{R}(K)$.

3° Soit $f(.) \in \mathscr{R}(K)$; il existe dans $S(m)$ un élément $\lambda_0(.)$ et un seul tel que :

$$\forall t \in \mathscr{T}, \qquad f(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda_0(v)\,\overline{v(t)}m(dv)$$

$\lambda_0(.)$ est l'image par $\mathscr{I}$ de $f(.)$; pour que :

$$\forall t \in \mathscr{T}, \qquad f(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda(v)\,\overline{v(t)}m(dv),$$

où $\lambda(.) \in L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$, il est nécessaire et suffisant que dans $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$, $\lambda_0(.)$ soit la projection orthogonale de $\lambda(.)$ sur $S(m)$.

LEMME (2,2). — Quelle que soit $K \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$, il existe au moins une G_0-loi $m(dv)$ telle que :

$$\forall \{ t_1, t_2 \} \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}, \qquad K(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} v(t_1)\,\overline{v(t_2)}m(dv). \quad \blacksquare$$

Du Théorème 1,6 on déduit :

THÉORÈME (2,1). — Si $\mathscr{E}$ est une σ-algèbre de parties de $\mathscr{T}$; si $K \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$; si $K(t_1, t_2)$ est une fonction mesurable-$\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ de $\{ t_1, t_2 \} \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}$; si $\mathscr{R}(K)$ est séparable ; si $\Omega \subset \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ désigne l'ensemble des fonctions $v(.)$ de $t \in \mathscr{T}$ qui sont mesurables-$\mathscr{E}$; si $Z(.)$ est une f. c. du second ordre de $t \in \mathscr{T}$, de covariance K ; pour tout $E \in \mathscr{B}^{\mathscr{T}}$ tel que $E\Omega$, on a :

$$\Pr\,[Z(.) \in E] = 1.$$

REMARQUE (2,1). — Ce Théorème (2,1), déjà établi en supposant $Z(.)$ Laplacienne (cf. J. Neveu [2]), est en fait valable sans cette restriction.

La connaissance de la covariance K est évidemment loin de déterminer la loi de probabilité $m(dv)$; cependant elle a sur $m(dv)$ des implications qui valent d'être investiguées ; le Théorème (2,1) est un pas dans cette direction ; le paragraphe 3 se consacrera à cette étude, à un certain point de vue ; pour le moment, il est opportun de noter les points suivants. v_0 désignera l'élément nul de $\mathbb{C}^{\mathcal{T}}$, c'est-à-dire la fonction de $t \in \mathcal{T}$ identiquement nulle.

LEMME (2,3). — Soient : $E \in \mathcal{B}^{\mathcal{T}}$; $\mathcal{B}^{\mathcal{T}}(E)$ la σ-algèbre des parties de E, qui appartiennent à $\mathcal{B}^{\mathcal{T}}$; $\mu(dv)$ une mesure sur $(E, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}(E))$, avec : $\mu(E) : < +\infty$, telle que $\forall t \in \mathcal{T}$, la fonction $v(t)$ de $v \in E$ appartient à $L^2(E, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}(E), \mu)$. Si $\forall t \in \mathcal{T}$ et toute $\lambda(.)$ $L^2(E, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}(E), \mu)$, on a :

$$\int_E \lambda(v)\,\overline{v(t)}\,\mu(dv) = 0,$$

ou bien $\mu(E) = 0$; ou bien E contient v_0, et $\mu(dv)$ est une masse unique placée en v_0.

Soit $K \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$; et soit $\mu(dv)$ une S-mesure sur $(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}})$ telle que :

$$K(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} v(t_1)\,\overline{v(t_2)}\,\mu(dv), \qquad \forall \{ t_1, t_2 \} \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} ;$$

Désignons :

— par $\delta(dv)$ la mesure sur $(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}})$ constituée par une unique masse 1 placée en v_0 ;

— par ρ_0 le nombre défini par :

$$\rho_0 = \inf_e . \mu(e),$$

où $e \in \mathcal{B}^{\mathcal{T}}$, avec : $v_0 \in e$ (rappelons qu'en général $\{ v_0 \} \notin \mathcal{B}^{\mathcal{T}}$) ;

— par $\mu_0(dv)$ la mesure sur $(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}})$:

$$\mu_0(dv) = \mu(dv) - \rho_0\delta(dv).$$

Il est clair que :

$$\forall \{ t_1, t_2 \} \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}, \qquad K(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} v(t_1)\,\overline{v(t_2)}\,\mu_0(dv).$$

Ceci justifie la définition suivante : nous dirons que $\mu(dv)$ est *réduite*, si $\rho_0 = 0$, donc si $\mu(dv) = \mu_0(dv)$.

3. V-FAMILLES

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions $\lambda(.)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}}$; nous dirons que $\mathcal{F}$ est une V-famille, si toute $\lambda(.) \in \mathcal{F}$ est mesurable-$\mathcal{B}^{\mathcal{T}}$, et si $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

LA PROPRIÉTÉ $C(\mathscr{F})$. — soit $\mathscr{F}$ une V-famille; soit $m(dv)$ une S-loi; nous dirons que $m(dv)$ possède la propriété $C[\mathscr{F}]$, si : $\mathscr{F} \subset L^2(\in^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$; alors nous désignerons :

— par $\mathscr{F}[m]$, l'ensemble des $\lambda(.) \in \mathscr{F}$ telles que :

$$||\lambda||_m^2 = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} |\lambda(v)|^2 m(dv) = 1 ;$$

— par $\mathscr{F}^c[m]$ la fermeture de $\mathscr{F}$ dans $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m)$.

LA PROPRIÉTÉ $G[\mathscr{F}]$. — Soit $\mathscr{F}$ une V-famille, et $m(dv)$ une S-loi; $m(dv)$ à à la propriété $G[\mathscr{F}]$ si elle a la propriété $C[\mathscr{F}]$, et si en outre, en posant :

$$L(a) = \sup_{\lambda(.)\in\mathscr{F}[m]} \Pr\{ |\lambda(v)| \leqq a) \qquad (a \geqq 0 \text{ arbitraire}),$$

on a :

$$\lim_{a \to +0} L(a) = 0.$$

Une simple application de l'inégalité de Bienaymé-Tschébichev montre que :

LEMME (3,1). — Si la S-loi $m(dv)$ a la propriété $G[\mathscr{F}]$, pour tout $E \in \mathscr{B}^{\mathscr{T}}$ tel que $m(E) > 0$, il existe un nombre $\alpha[m(E)] > 0$ ne dépendant que de $m(E)$, tel que :

$$\int_E |\lambda(v)|^2 m(dv) \geqq \alpha[m(E)] \, ||\lambda||_m^2, \qquad \forall\lambda \in \mathscr{F}^c[m].$$

EXEMPLES (3,1). — Comme exemples de V-familles, nous considérerons en particulier les suivantes :

— La famille $\mathscr{F}_1 = S'$, constituée des fonctions $v(t)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ ($t \in \mathscr{T}$ fixé quelconque), et de leurs combinaisons linéaires finies.

— La famille $\mathscr{F}_2$ constituée des fonctions $v(t_1)\,\overline{v(t_2)}$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ ($\{t_1, t_2\} \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}$ fixé quelconque) et de leurs combinaisons linéaires finies.

— La famille $\mathscr{F}_3$ des fonctions $\lambda(.)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$, qui sont de la forme :

$$\lambda(v) = c + \lambda_1(v) + \lambda_2(v),$$

où : c'est une constante, $\lambda_1(.) \in \mathscr{F}_1 = S'$, $\lambda_2(.) \in \mathscr{F}_2$.

PROPRIÉTÉ h, OPÉRATEURS H, Γ. — D'une S-loi $m(dv)$, disons qu'elle a la propriété h, s'il existe une constante $h > 0$ telle que :

$$\forall\lambda(.) \in S(m), \qquad \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} |\lambda(v)|^4 m(dv) \leqq h^2\left(\int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} |\lambda(v)|^2 m(dv)\right)^2 = h^2 \, ||\lambda||_m^2.$$

Soit $m(dv)$ une S-loi ayant la propriété h ; et $\rho(.)$ une fonction de $v \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}}$, mesurable-$\mathscr{B}^{\mathcal{T}}$ et telle que :

$$\int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} |\rho(v)|^4 m(dv) = M^4 < +\infty. \tag{3,1}$$

L'application H qui, à $\lambda(.) \in S(m)$ fait correspondre

$$\mu(.) = H[\lambda(.)] \in L^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathscr{B}^{\mathcal{T}}, m)$$

par :

$$\mu(v) = \overline{\rho(v)}\,\lambda(v),$$

est une application linéaire bornée de $S(m)$ dans $L^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathscr{B}^{\mathcal{T}}, m)$. Si maintenant on appelle P le projecteur de $L^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathscr{B}^{\mathcal{T}}, m)$ sur $S(m)$, l'opérateur :

$$\Gamma = PH$$

est une opération linéaire bornée dans $S(m)$.

(3,1) implique que l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} \rho(v) m(dv)$ existe ; si cette intégrale est nulle, nous dirons de H, Γ qu'ils sont des H_0, Γ_0 opérateurs.

Décomposition d'une S-loi par rapport a une autre. — Soient $K_1, K_2 \in \mathscr{P}(\mathcal{T})$, et $m_1(dv)$, $m_2(dv)$ deux S-lois telles que :

$$K_1(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} v(t_1)\,\overline{v(t_2)} m_1(dv), \qquad K_2(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} v(t_1)\,\overline{v(t_2)} m_2(dv). \tag{3,2}$$

Soit :

$$m_2(dv) = A(dv) + \Delta(dv)$$

la décomposition de Lebesgue de $m_2(dv)$ par rapport à $m_1(dv)$; $A(dv)$ est une mesure absolument continue et de densité $\sigma(v)$ par rapport à $m_1(dv)$; $\Delta(dv)$ est une mesure disjointe de $m_1(dv)$; il existe $N \in \mathscr{B}^{\mathcal{T}}$ tel que : $m_1(N) = 0$ et $\Delta(e) = \Delta(e \cap N)$ $\forall e \in \mathscr{B}^{\mathcal{T}}$. M désignera l'ensemble des v tels que $\sigma(v) = 0$; $m_2(M) = 0$; ε étant un nombre > 0 arbitraire, E désignera l'ensemble des $v \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}} - M$ pour lesquels $\sigma(v) \leqq \frac{1}{\varepsilon}$.

Reprenons les notations du paragraphe 2, alinéa : décomposition d'un élément de $\mathscr{P}(\mathcal{T})$ par rapport à un autre ; soient en particulier : U la fermeture dans $\mathscr{R}(K_2)$ de $\mathscr{R}(K_1) \cap \mathscr{R}(K_2)$; Π le complémentaire orthogonal de U dans $\mathscr{R}(K_2)$.

Soit $f(.) \in \mathscr{R}(K_2)$ quelconque ; d'après le Lemme (2,1), il existe $\lambda_2(.) \in S(m_2)$ telle que :

$$\forall t, \qquad f(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} \lambda(v)\,\overline{v(t)} m_2(dv),$$

avec :

$$\| f \|_{K_2}^2 = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} | \lambda(v) |^2 m_2(dv). \tag{3,3}$$

Définissons la fonction $g(.)$ de $t \in \mathcal{T}$ par :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \qquad g(t) = \int_{E} \lambda(v)\, \overline{v(t)} m_2(dv)$$
$$= \int_{E} \lambda(v)\, \sigma(v)\, \overline{v(t)} m_1(dv) ;$$

posons :

$$\lambda_1(v) = \begin{cases} \lambda(v)\,\sigma(v) & \text{si} \quad v \in E \\ 0 & \text{si} \quad v \notin E, \end{cases} \qquad \lambda_2(v) = \begin{cases} \lambda(v) & \text{si} \quad v \in E, \\ 0 & \text{si} \quad v \notin E, \end{cases} \tag{3,4}$$

On remarque que :

$$\lambda_1(.) \in L^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}, m_1), \qquad \lambda_2(.) \in L^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}, m_2),$$
$$g(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} \lambda_1(v)\, \overline{v(t)} m_1(dv) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} \lambda_2(v)\, \overline{v(t)} m_2(dv) ;$$

il résulte du lemme (2,1) que :

$$g(.) \in \mathcal{R}(K_1) \cap \mathcal{R}(K_2) \subset U.$$

Posons :

$$h(.) = f(.) - g(.) ;$$

$h(.) \in \mathcal{R}(K_2)$, et s'écrit :

$$h(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}} - E} \lambda(v)\, \overline{v(t)} m_2(dv),$$

de sorte que [cf. lemme (2,1)] :

$$\| h \|_{K_2}^2 \leqq \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}} - E} | \lambda(v) |^2 m_2(dv) = \| f \|_{K_2}^2 - \int_{E} | \lambda(v) |^2 m_2(dv).$$

1° Supposons que $f(.)$ est un élément non-nul de Π ; alors d'après le théorème (1,4) : $[f, g]_2 = 0$, de sorte que :

$$\| h \|_{K_2}^2 = \| f \|_{K_2}^2 + \| g \|_{K_2}^2 ;$$

comme ε peut être aussi petit qu'on le veut, cela exige que $\lambda(.)$ soit nulle A-presque-partout ; de sorte que $f(.)$ s'écrit :

$$f(t) = \int_{N} \lambda(v)\, \overline{v(t)}\, \Delta(dv),$$

d'où :

THÉORÈME (3,1). — Si Π contient un élément non-nul, la partie singulière $\Delta(dv)$ de $m_2(dv)$ par rapport à $m_1(dv)$ n'est pas nulle.

2° Supposons que $\Delta(N) = \Delta(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}) = 0$; alors $f(.) - g(.)$ s'écrit :

$$f(t) - g(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}} - E} \lambda(v) \overline{v(t)} \, A(dv),$$

de sorte que :

$$\| f - g \|_{K_2}^2 \leqq \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}} - E} | \lambda(v) |^2 A(dv) ; \tag{3,5}$$

si $\varepsilon \to +0$, le second membre de (3,5) tend vers 0, d'où :

THÉORÈME (3,2). — Si la partie singulière $\Delta(dv)$ de $m_2(dv)$ par rapport à $m_1(dv)$ est nulle, $\mathcal{R}(K_1) \cap \mathcal{R}(K_2)$ est dense dans $\mathcal{R}(K_2)$, autrement dit $U = \mathcal{R}(K_2)$, et Π ne contient que l'élément nul. ■

Soient : $\mathcal{B}^{\mathcal{T}}[E]$ la σ-algèbre des parties de E qui appartiennent à $\mathcal{B}^{\mathcal{T}}$; $A_E(dv)$ la restriction de $A(dv)$ à $(E, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}[E])$. Observons que $A_E(dv)$ est aussi la restriction de $m_2(dv)$ à $(E, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}[E])$.

Soit $\theta(.) \in L^2(E, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}[E], A_E)$ quelconque ; définissons la fonction $l(.)$ de $t \in \mathcal{T}$ par :

$$l(t) = \int_E \theta(v) \overline{v(t)} \, A(dv) ;$$

posons :

$$\theta_1(v) = \begin{cases} \theta(v)\,\sigma(v) & \text{si} \quad v \in E, \\ 0 & \text{si} \quad v \notin E, \end{cases} \qquad \theta_2(v) = \begin{cases} \theta(v) & \text{si} \quad v \in E, \\ 0 & \text{si} \quad v \notin E ; \end{cases}$$

on vérifie que :

$$\theta_1(.) \in L^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}, m_1), \qquad \theta_2(.) \in L^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}, m_2) ;$$

or :

$$l(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} \theta_1(v) \overline{v(t)} \, m_1(dv) = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} \theta_2(v) \overline{v(t)} \, m_2(dv) ;$$

donc d'après le Lemme (2,1) :

$$l(.) \in \mathcal{R}(K_1) \cap \mathcal{R}(K_2) \subset U.$$

Supposons que $A(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}) = A(\mathbb{C}^{\mathcal{T}} - N) > 0$; prenons ε assez petit pour que $A(E) = A_E(E) > 0$; supposons en outre $m_1(dv)$ réduite, de sorte que

$A(dv)$ est réduite; alors d'après le Lemme (2,2), on peut choisir $\theta(.)$ de telle sorte que $l(.)$ ne soit pas nulle; d'où :

THÉORÈME (3,3). — Si $m_1(dv)$ est réduite,

1° si la partie absolument continue $A(dv)$ de $m_2(dv)$ par rapport à $m_1(dv)$ n'est pas nulle, $\mathscr{R}(K_1) \cap \mathscr{R}(K_2) \subset U$ contient au moins un élément nul.

2° si $\Pi = \mathscr{R}(K_2)$ — c'est-à-dire si K_1 et K_2 sont disjointes, les mesures $m_1(dv)$ et $m_2(dv)$ sont disjointes.

LA PROPRIÉTÉ $H[\mathscr{F}]$. — Soit $\mathscr{F}$ une V-famille. Nous dirons que $m_2(dv)$ possède la propriété $H[\mathscr{F}]$ par rapport à $m_1(dv)$ si :

1° $m_1(dv)$ et $m_2(dv)$ possèdent la propriété $C[\mathscr{F}]$;

2° il existe un nombre β réel $\geqq 0$ tel que :

$$\forall \lambda(.) \in \mathscr{F}, \qquad 0 \leqq \frac{\|\lambda\|_{m_2}^2}{\|\lambda\|_{m_1}^2} \leqq \beta < +\infty. \tag{3,6}$$

Supposons que $m_2(dv)$ a la propriété $H[\mathscr{F}]$ par rapport à $m_1(dv)$.

Soit $\mathscr{G}[\mathscr{F}]$ l'ensemble : $\mathscr{G}[\mathscr{F}] = \mathscr{F}^c[m_1] \cap \mathscr{F}^c[m_2]$; définissons le produit hermitique $\lambda.\mu$ de $\lambda(.) \in \mathscr{G}[\mathscr{F}]$ par $\mu(.) \in \mathscr{G}[\mathscr{F}]$, par :

$$\lambda.\mu = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda(v)\, \overline{\mu(v)}\, m_1(dv). \tag{3,7}$$

Soit $\{\lambda_k(.)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite d'éléments de $\mathscr{G}[\mathscr{F}]$, ayant la propriété de Cauchy ; elle a donc la propriété de Cauchy dans $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m_1)$, et à ce titre converge vers un élément $l_1(.) \in \mathscr{F}^c[m_1]$. D'après (3,6), elle a aussi la propriété de Cauchy dans $L^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m_2)$, et à ce titre converge vers un élément $l_2(.) \in \mathscr{F}^c[m_2]$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, et comme ci-dessus soit E l'ensemble des $v \notin N$ tels que : $\sigma(v) \leqq \frac{1}{\varepsilon}$; on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \int_E |\lambda_k(v) - l_1(v)|^2 m_1(dv) = 0\,;$$

or :

$$\left(\int_E |l_2(v) - l_1(v)|^2 m_2(dv)\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_E |l_2(v) - \lambda_k(v)|^2 m_2(dv)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_E |\lambda_k(v) - l_1(v)|^2 m_2(dv)\right)^{\frac{1}{2}}\,;$$

$$\int_E |\lambda_k(v) - l_1(v)|^2 m_2(dv) \leqq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |\lambda_k(v) - l_1(v)|^2 m_1(dv)\,;$$

donc :

$$l_2(.) = l_1(.) \qquad m_2\text{-presque-partout sur E};$$

comme ε est arbitraire, il vient :

$$l_2(.) = l_1(.) \qquad m_2\text{-presque-partout sur } \mathbb{C}^{\mathcal{T}} - \mathrm{N}.$$

Posons :

$$l(v) = \begin{cases} l_1(v) & \text{si} \quad v \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}} - \mathrm{N}; \\ l_2(v) & \text{si} \quad v \in \mathrm{N}; \end{cases}$$

on voit que :

1° $l(.) = l_1(.)$ m_1-presque-partout ; donc $l(.) \in \mathcal{F}^c[m_1]$, et :

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k(.) = l(.) \qquad \text{dans } \mathrm{L}^2(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}^{\mathcal{T}}, m_1); \tag{3,8}$$

2° $l(.) = l_2(.)$ m_2-presque-partout ; donc $l(.) \in \mathcal{F}^c[m_2]$.

Il en résulte que $l(.) \in \mathcal{G}[\mathcal{F}]$; et d'après (3,8) que :

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k(.) = l(.) \qquad \text{dans } \mathcal{G}[\mathcal{F}]$$

soit :

LEMME (3,2). — Si $m_2(dv)$ a la propriété H[$\mathcal{F}$] (3,6) par rapport à $m_1(dv)$, l'espace $\mathcal{G}[\mathcal{F}]$, avec le produit hermitique (3,7), est un espace de Hilbert ; et :

$$\int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} |\lambda(v)|^2 m_2(dv) \leqq \beta \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} |\lambda(v)|^2 m_1(dv), \qquad \lambda(.) \in \mathcal{G}[\mathcal{F}]. \quad \blacksquare$$

Soient : $\mathcal{F}$ une V-famille ; $m_1(dv)$ une S-loi ayant la propriété C[$\mathcal{F}$] ; $m_2(dv)$ une S-loi ayant la propriété G[$\mathcal{F}$] ; supposons que $m_2(dv)$ *n'a pas* la propriété H[$\mathcal{F}$] par rapport à $m_1(dv)$. Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\lambda(.) \in \mathcal{F}[m_2] \subset \mathcal{F}$, telle que :

$$\int_{\mathbb{C}^{\mathcal{T}}} |\lambda(v)|^2 m_1(dv) < \eta;$$

de sorte que :

$$\int_{\mathrm{E}} |\lambda(v)|^2 m_2(dv) = \int_{\mathrm{E}} |\lambda(v)|^2 \sigma(v) m_1(dv)$$
$$\leqq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathrm{E}} |\lambda(v)|^2 m_1(dv) \leqq \frac{\eta}{\varepsilon};$$

supposons que :

$$\mathrm{A}(\mathbb{C}^{\mathcal{T}}) > 0;$$

alors on peut prendre ε assez petit pour que $m_2(\mathrm{E}) > 0$; du Lemme (3,1) résulte alors que :

$$\alpha[m(\mathrm{E})] \leqq \frac{\eta}{\varepsilon} ;$$

ce qui est contradictoire puisque, pour ε fixé, nous pouvons prendre η arbitrairement petit ; d'où :

THÉORÈME (3,4). — Si $\mathscr{F}$ est une V-famille ; si $m_1(dv)$ est une S-loi possédant la propriété $\mathrm{C}[\mathscr{F}]$; si $m_2(dv)$ est une S-loi possédant la propriété $\mathrm{G}[\mathscr{F}]$; si $m_2(dv)$ n'a pas la propriété $\mathrm{H}[\mathscr{F}]$ par rapport à $m_1(dv)$, alors $m_1(dv)$ et $m_2(dv)$ sont disjointes.

CAS DE LA V-FAMILLE $\mathscr{F}_1 = \mathrm{S}'$. — Soient $m_1(dv)$, $m_2(dv)$ deux S-lois ; elles ont chacune la propriété $\mathrm{C}[\mathscr{F}_1 = \mathrm{S}']$; $\mathrm{S}(m_1) = \mathscr{F}^c[m_1]$, $\mathrm{S}(m_2) = \mathscr{F}^c[m_2]$.

Supposons que $m_2(dv)$ possède la propriété $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ (ce qui implique que $m_2(dv)$ est réduite). Si $m_2(dv)$ n'a pas la propriété $\mathrm{H}[\mathrm{S}']$ par rapport à $m_1(dv)$, d'après le Théorème (3,4), $m_1(dv)$ et $m_2(dv)$ sont disjointes.

Considérons le cas contraire où $m_2(dv)$ a la propriété $\mathrm{H}[\mathrm{S}']$; selon (3,2), en posant :

$$\lambda(v) = \sum_{h=1}^{n} \lambda^h v(t_h) \in \mathrm{S}',$$

on a :

$$\phi_n[t_{(n)}, \lambda^{(n)} ; \mathrm{K}_1] = \int_{\mathrm{C}^{\mathscr{F}}} |\lambda(v)|^2 m_1(dv), \quad \phi_n[t_{(n)}, \lambda^{(n)} ; \mathrm{K}_2] = \int_{\mathrm{C}^{\mathscr{F}}} |\lambda(v)|^2 m_2(dv) ;$$

de sorte que d'après (3,6), la propriété $\mathrm{H}[\mathscr{F}]$ de $m_2(dv)$ par rapport à $m_1(dv)$ équivaut à ce que K_2 est dominée par K_1 ; de sorte que

$$\mathscr{R}(\mathrm{K}_1) \cap \mathscr{R}(\mathrm{K}_2) = \mathscr{R}(\mathrm{K}_2) \subset \mathscr{R}(\mathrm{K}_1).$$

Si $m_1(dv)$ aussi a la propriété $\mathrm{G}[\mathrm{S}']$, les rôles de $m_1(dv)$ et de $m_2(dv)$ dans ce qui précède, peuvent être intervertis ; de sorte que :

THÉORÈME (3,5). — Si $m_1(dv)$, $m_2(dv)$ sont des S-lois possèdant chacune la propriété $\mathrm{G}[\mathrm{S}')$, si K_1 et K_2 ne sont pas équivalentes, $m_1(dv)$ et $m_2(dv)$ sont disjointes.

CAS DE LA V-FAMILLE $\mathscr{F}_3$. — Soit $m_1(dv)$ une S-loi possèdant la propriété $\mathrm{C}[\mathscr{F}_3]$; et $m_2(dv)$ une S-loi possèdant la propriété $\mathrm{G}[\mathscr{F}_3]$.

Si $m_2(dv)$ n'a pas la propriété $H[\mathscr{F}_3]$ par rapport à $m_1(dv)$, $m_1(dv)$ et $m_2(dv)$ sont disjointes d'après le Théorème (3,4).

Supposons dorénavant que $m_2(dv)$ a la propriété $H[\mathscr{F}_3]$ par rapport à $m_1(dv)$. Comme $\mathscr{F}_1 = S' \subset \mathscr{F}_3$, $m_2(dv)$ a la propriété $G[S']$, et la propriété $H[S']$ par rapport à $m_1(dv)$. D'après ce qui précède, K_2 est dominée par K_1.

Pour toute $\lambda(.) \in \mathscr{G}[\mathscr{F}_3]$, on a d'après (3,6) :

$$\left| \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda(v) m_2(dv) \right|^2 \leqq \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} |\lambda(v)|^2 m_2(dv) \leqq \beta \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} |\lambda(v)|^2 m_1(dv) ;$$

$\int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda(v) m_2(dv)$ est donc une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Hilbert $\mathscr{G}[\mathscr{F}_3]$; il existe donc, d'après (3,7), un élément $\rho(.)$ et un seul dans $\mathscr{G}[\mathscr{F}_3]$ tel que :

$$\int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda(v) m_2(dv) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \lambda(v)\, \overline{\rho(v)} m_1(dv), \qquad \forall \lambda(.) \in \mathscr{G}[\mathscr{F}_3].$$

La fonction $v(t_1)\,\overline{v(t_2)}$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$, en particulier appartient à $\mathscr{G}[\mathscr{F}_3]$; donc d'après (3,2) :

$$K_2(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} v(t_1)\,\overline{v(t_2)}\,\overline{\rho(v)} m_1(dv).$$

Nous posons :

$$\rho_0(.) = \rho(.) - 1 ;$$

comme la constante 1 appartient à $\mathscr{G}[\mathscr{F}_3]$, on a :

$$\rho_0(.) \in \mathscr{G}[\mathscr{F}_3] ;$$

et :

$$1 = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} 1 . m_2(dv) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} 1 . \overline{\rho(v)} m_1(dv) ;$$

donc :

$$\int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \rho_0(v) m_1(dv) = 0 \tag{3,9}$$

Ajoutons les hypothèses suivantes :

1° $m_1(dv)$ a la propriété h ;

2° $$\int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} |\rho(v)|^4 m_1(dv) < +\infty ; \tag{3,10}$$

(3,10) implique que :

$$\int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} |\rho_0(v)|^4 m_1(dv) < +\infty.$$

Soient :

— $\mathscr{I}_1$ l'isométrie de $\mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$ sur $\mathrm{S}(m_1)$ qui, $\forall t \in \mathscr{T}$, à $\mathrm{K}_1(t, .) \in \mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$ fait correspondre $v(t) \in \mathrm{S}(m_1)$ [cf. Lemme (2,1)] ;

— Θ l'application linéaire bornée de $\mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$ dans $\mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$ qui, $\forall t \in \mathscr{T}$, à $\mathrm{K}_1(t, .) \in \mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$ fait correspondre $\Theta\mathrm{K}_1(t, .) = \mathrm{K}_2(t, .) \in \mathscr{R}(\mathrm{K}_2) \subset \mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$ [cf. Théorème (1,5)] ;

— P le projecteur de $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m_1)$ sur $\mathrm{S}(m_1)$;

— $\mathscr{R}'(\mathrm{K}_1)$ l'ensemble de $f(.) \in \mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$ de la forme :

$$f(.) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \mathrm{K}_1(t_j, .),$$

où n est un entier fini, $t_{(n)} = \{ t_1, \ldots, t_n \} \in \mathscr{T}^n$, $\lambda^{(n)} = \{ \lambda^1, \ldots, \lambda^n \} \in \mathbb{C}^n$.

Avec les hypothèses faites (cf. ci-dessus), et compte tenu de (3,10), les formules :

$$\mu(.) = \lambda(.)\,\overline{\rho(.)}, \qquad \mu(.) = \lambda(.)\,\overline{\rho_0(.)},$$

où $\lambda(.)\mathrm{S}(m_1)$, $\mu(.) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m_1)$, définissent des applications linéaires bornées H, H_0 de $\mathrm{S}(m_1)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}^{\mathscr{T}}, \mathscr{B}^{\mathscr{T}}, m_1)$; on peut leur associer les opérations linéaires bornées Γ, Γ_0 dans $\mathrm{S}(m_1)$ définies par :

$$\Gamma = \mathrm{PH}, \qquad \Gamma_0 = \mathrm{PH}_0.$$

Soit $f(.) \in \mathscr{R}'(\mathrm{K}_1)$ quelconque ; posons : $\lambda(.) = \mathscr{I}_1 f(.)$; on tire aisément de (3,2) que :

$$f(.) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \overline{v(.)}\,\lambda(v) m_1(dv) ;$$

$$\Theta f(.) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \overline{v(.)}\,\lambda(v) m_2(dv) ;$$

d'ailleurs, $\forall t \in \mathscr{T}$, la fonction $\overline{v(t)}\,\lambda(v)$ de $v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ appartient à $\mathscr{F}_3 \subset \mathscr{G}[\mathscr{F}_3]$; donc :

$$\Theta f(.) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \overline{v(.)}\,[\lambda(v)\,\overline{\rho(v)}] m_1(dv) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \overline{v(.)}\,[\mathrm{H}\lambda](v) m_1(dv) ; \quad (3,11)$$

puisque $\forall t \in \mathscr{T}$, $v(t) \in \mathrm{S}(m_1)$, (3,11) peut aussi s'écrire :

$$\Theta f(.) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \overline{v(.)}\,(\Gamma\lambda)(v) m_1(dv) ;$$

de façon analogue :

$$(\Theta - \mathrm{I})f(.) = \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} \overline{v(.)}\,(\Gamma_0\lambda)m_1(dv).$$

Puisque $(\Gamma\lambda)(.)$, $(\Gamma_0\lambda)(.) \in \mathrm{S}(m_1)$, il résulte du Lemme (2,1) que, pour $f(.) \in \mathscr{R}'(\mathrm{K}_1)$,

$$\Theta f(.) = (\mathscr{I}_1^{-1}\Gamma\mathscr{I}_1)f(.), \tag{3,12}$$

$$(\Theta - \mathrm{I})f(.) = (\mathscr{I}_1^{-1}\Gamma_0\mathscr{I}_1)f(.)\,; \tag{3,13}$$

il est bien connu que $\mathscr{R}'(\mathrm{K}_1)$ est dense dans $\mathscr{R}(\mathrm{K}_1)$; la continuité des applications Γ, Γ_0, $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_1^{-1}$, Θ, I permet d'affirmer que :

THÉORÈME (3,6). — Avec les hypothèses faites dans le présent alinéa relatif à la famille $\mathscr{F}_3$, les applications Θ, $\Theta - \mathrm{I}$ admettent les représentations respectives (3,12), (3,13), construites à partir des fonctions $\rho(.)$, $\rho_0(.)$ dont la signification a été précisée.

4. PREMIÈRE APPLICATION

Soient $m_0(dv)$ une S_0-loi de covariance K_0 ; $s_1(.)$, $s_2(.)$ deux fonctions quelconques de $t \in \mathscr{T}$; ψ_1, ψ_2 les deux applications de $\mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ sur $\mathbb{C}^{\mathscr{T}}$ définies respectivement par :

$$\psi_1(v) = s_1 + v, \qquad \psi_2(v) = s_2 + v \qquad (v \in \mathbb{C}^{\mathscr{T}})\,;$$

enfin, soient $m_1(dv)$, $m_2(dv)$ les deux S-lois définies par :

$$m_1(e) = m_0[\psi_1^{-1}(e)], \qquad m_2(e) = m_0[\psi_2^{-1}(e)], \qquad \forall e \in \mathscr{B}^{\mathscr{T}}.$$

On a le :

THÉORÈME (4,1). — Si $\overline{s_2} - \overline{s_1} \notin \mathscr{R}(\mathrm{K}_0)$, $m_1(dv)$ et $m_2(dv)$ sont disjointes. ■

Ce Théorème (4,1) est bien connu, dans le cas où $m_0(dv)$ est une G_0-loi ; en fait il est valable sans cette restriction. Il ne s'obtient pas par une application immédiate des théorèmes du paragraphe 3, mais par une méthode analogue à celle qui conduit au Théorème (3,4).

APPLICATION AUX G-LOIS. — L'application au cas où $m_1(dv)$, $m_2(dv)$ sont des G-lois, est immédiate ; elle repose sur les remarques suivantes :

1° une G-loi est réduite, ou bien identique à $\delta(dv)$;

2° une G-loi a la propriété h ;

3° une G-loi, non identique à $\delta(dv)$, a la propriété $G[\mathscr{F}_3]$;

4° pour une G-loi $m(dv)$, toute $\rho(.) \in \mathscr{F}_3$ définit un Γ-opérateur ; si cet opérateur est un Γ_0-opérateur, cet opérateur est auto-adjoint et de Hilbert-Schmidt ; sa norme de Hilbert-Schmidt est égale à :

$$2 \int_{\mathbb{C}^{\mathscr{T}}} | \rho(v) |^2 m(dv).$$

3° et 4° s'obtiennent par des calculs élémentaires.

On retrouve ainsi les théorèmes classiques établissant que deux G-lois $m_1(dv)$, $m_2(dv)$ sont soient disjointes, soient équivalentes.

On remarquera en passant que ces théorèmes relatifs aux G-lois, si intéressants soient-ils, sont de portée limitée ; lorsque $m_1(dv)$, $m_2(dv)$ représentent des lois de probabilités objectives, il est rarement licite de supposer qu'elles sont *rigoureusement* des G-lois ; au mieux on peut seulement admettre qu'elles « diffèrent peu » de G-lois ; il faudrait donc compléter les théorèmes classiques, par exemple en montrant qu'ils conservent une certaine validité pour des lois qui sont « presque » des G-lois ; peut-être les méthodes ci-dessus pourraient y aider.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*. Paris, 1964, Masson édit.

[*2*] J. NEVEU, *Les processus aléatoires gaussiens*. Montréal, 1968, Les Presses de l'Université de Montréal édit.

(Manuscrit reçu le 20 septembre 1972).