ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. MARTIN
J.-L. PETIT
M. LITTAYE

Indépendance conditionnelle dans le modèle statistique bayésien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 1 (1973), p. 19-40
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_1_19_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 1, 1973, p. 19-40. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Indépendance conditionnelle dans le modèle statistique bayésien

par

F. MARTIN
Service de Probabilités, Université de Paris VI[e]

J.-L. PETIT
Département de Mathématiques, Université de Rouen

M. LITTAYE
Département de Mathématiques, Université de Paris VIII[e]

RÉSUMÉ. — Dans le modèle statistique bayésien, le paramètre et l'observation sont conditionnellement indépendants par rapport à une statistique exhaustive. Dans une première partie, on part de cette notion de réduction qui peut se généraliser au cas d'un sous-paramètre et on étudie ses diverses propriétés. Dans une seconde partie on étudie l'indépendance conditionnelle de l'observation et du paramètre par rapport à un sous-paramètre. En associant les deux, on arrive enfin à une notion de réduction d'une expérience statistique pour une famille de mesures *a priori* dont on étudie les propriétés et les liens avec les notions classiques.

SUMMARY. — In the bayesian statistical model, parameter and observation are conditionnally independant given a sufficient statistic. First, we extend this notion of reduction to a situation involving a sub-parameter. Then we study the conditionnal independance of parameter and observation given a sub-parameter. At last, mixing this two concepts, we are led to the notion of reduction of a statistical experiment for a familly of prior measures, of which we study the properties and relations with the classical concepts.

NOTATIONS

— $(\Theta\,;\mathscr{H})$: espace mesurable des paramètres ; $\mathscr{H}'$ une sous-tribu de $\mathscr{H}$.

— $(X\,;\mathscr{A})$: espace mesurable des observations ; $\mathscr{A}'$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$.

— P une transition de probabilité de $(\Theta\,;\mathscr{H})$ dans $(X\,;\mathscr{A})$ notée $(\Theta, \mathscr{H}) \overset{P}{\longrightarrow} (X, \mathscr{A})$ induisant la famille $\mathscr{P}^{\Theta} = \{ P(\theta, .) \mid \theta \in \Theta \}$ de probabilités sur $(X\,;\mathscr{A})$; on notera aussi P^{θ} la probabilité $P(\theta\,; .)$.

— M : une famille de probabilités *a priori* sur $(\Theta\,;\mathscr{H})$; on supposera M muni d'une tribu $\mathscr{G}$ qui rende mesurable les applications : $\mu \to \mu(H)$, $H \in \mathscr{H}$.

— Q notera la transition de probabilité de $(M\,;\mathscr{G})$ dans $(\Theta\,;\mathscr{H})$ définie par :

$$(\forall H \in \mathscr{H}), \qquad Q(\mu\,; H) = \mu(H) \qquad \text{c'est-à-dire } Q^{\mu} = \mu$$

— P sera dite dominée si la famille de probabilités $\mathscr{P}^{\Theta}$ est dominée par une mesure σ-finie λ et dans ce cas on appellera dominante privilégiée une probabilité $\bar{P}$ équivalente à la famille $\mathscr{P}^{\Theta}$ et de la forme :

$$\bar{P} = \sum_{\theta \in \bar{\Theta}} a_{\theta} P^{\theta}$$

où $\bar{\Theta}$ est une partie dénombrable de Θ et les a_{θ} des nombres positifs.

— Soit $(\Theta \times X\,;\mathscr{H} \vee \mathscr{A})$ l'espace mesurable produit de $(\Theta\,;\mathscr{H})$ et $(X\,;\mathscr{A})$; on notera aussi $\mathscr{H}$ (respectivement $\mathscr{A}$) la tribu sur $\Theta \times X$ des cylindres de base $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{A}$).

— Soit $\mathscr{P}(\Theta, \mathscr{H})$ l'ensemble des probabilités sur $(\Theta\,;\mathscr{H})$ et soit $\mu \in \mathscr{P}(\Theta, \mathscr{H})$; on notera $P \circ \mu$ la probabilité sur $(\Theta \times X\,;\mathscr{H} \vee \mathscr{A})$ définie par [cf. [*1*]] :

$$(\forall H \in \mathscr{H})\ (\forall A \in \mathscr{A}) \qquad \left(P \circ \mu(H \times A) = \int_H P(\theta\,; A)\mu(d\theta) \right)$$

on notera $P \circ \mu$ ou $P\mu$ la probabilité marginale de $P \circ \mu$ sur $(X\,;\mathscr{A})$.

— Si P est dominée par une mesure σ-finie λ et si $\mathscr{A}$ est une tribu à base dénombrable on a le résultat suivant [cf. [*6*], p. 194].

Il existe une fonction $f : \Theta \times X \to \mathbb{R}$, $\mathscr{H} \vee \mathscr{A}$ mesurable vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad f(\theta, .) \in \frac{dP^{\theta}}{d\lambda}$$

La mesure $P \circ \mu$ sur $(\Theta \times X ; \mathscr{H} \vee \mathscr{A})$ est alors dominée par la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ ainsi que par le produit de ses marginales $\mu \otimes P_\mu$ et on a :

$$f \in \frac{dP \circ \mu}{d\mu \otimes \lambda} ; \qquad \int_\Theta f(\theta, .)\mu(d\theta) \in \frac{dP_\mu}{d\lambda}$$

— A tout élément $\mu \in \mathscr{P}(\Theta ; \mathscr{H})$ on associe une famille de probabilités $\mathscr{P}_\mu^{\mathscr{H}} = \{ P_\mu^H \mid H \in \mathscr{H} \}$ définie par :

$$(\forall H \in \mathscr{H} \text{ tel que } \mu(H) = 0) ; \qquad P_\mu^H = P_\mu$$

$$(\forall H \in \mathscr{H} \text{ tel que } \mu(H) > 0) ; \ (\forall A \in \mathscr{A}) \quad P_\mu^H(A) = \frac{1}{\mu(H)} \int_H P(\theta ; A)\mu(d\theta)$$

— La famille $\mathscr{P}_\mu^{\mathscr{H}}$ est dominée et P_μ est une dominante privilégiée.

— On peut remarquer que $(\forall f \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{A}))$, l'application

$$\theta \to \int_X f(x)P^\theta(dx)$$

est une version de $E_{P \circ \mu}[f/\mathscr{H}]$ pour tout $\mu \in \mathscr{P}(\Theta, \mathscr{H})$ et par suite :

$$(\forall H \in \mathscr{H}) \quad \int_H E_{P \circ \mu}[f/\mathscr{H}]d\mu = \mu(H)E_{P_\mu^H}(f) = \mu(H) \int_X f(x)P_\mu^H(dx)$$

— S'il existe une version régulière de $\{ E_{P \circ \mu}[H/\mathscr{A}] ; H \in \mathscr{H} \}$ elle sera notée π_μ et appelée transition *a posteriori* de P pour $\mathscr{H}$ relativement à μ. Cette transition vérifie :

$$(\forall H \in \mathscr{H}) \qquad (\pi_\mu(H) \in E_{P \circ \mu}[H/\mathscr{A}])$$

ou encore

$$(\forall H \in \mathscr{H}) \ (\forall A \in \mathscr{A}) \qquad \left(\mu(H)P_\mu^H(A) = \int_A \pi_\mu(x ; H)P_\mu(dx) \right)$$

— Si on prend une sous-tribu $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$ on définit de la même façon la famille $\mathscr{P}_\mu^{\mathscr{H}'} = \{ P_\mu^{H'} ; H' \in \mathscr{H}' \}$ ainsi que la transition π'_μ.

— Soient $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$, $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$; la restriction de P à $(X ; \mathscr{A}')$ sera notée P′ et une version régulière de $\{ E_{P \circ \mu}[H'/\mathscr{A}'], H' \in \mathscr{H}' \}$ sera appelée transition *a posteriori* de P′ pour $\mathscr{H}'$ relativement à μ.

— Soient $(\Omega ; \mathscr{F} ; P)$ un espace probabilisé, $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$, trois sous-tribus de $\mathscr{F}$. $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont dites conditionnellement indépendantes relativement (noté C. I. R.) à $\mathscr{F}_3$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée [cf. *6*]:

- $(\forall f \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{F}_1)) \ (\forall g \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{F}_2)) \quad (E_P[fg/\mathscr{F}_3] = E_P[f/\mathscr{F}_3]E_P[g/\mathscr{F}_3])$
- $(\forall f \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{F}_1)) \quad (E_P[f/\mathscr{F}_2] = E_P[E_P[f/\mathscr{F}_3]/\mathscr{F}_2])$
- $(\forall g \in \mathscr{L}^\infty(\mathscr{F}_2)) \quad (E_P[g/\mathscr{F}_1] = E_P[E_P[g/\mathscr{F}_3]/\mathscr{F}_1])$

— Si de plus on a $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_2$ alors la propriété suivante est équivalente à chacune des précédentes :

$$- (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_1)) \qquad (\mathrm{E_P}[f/\mathcal{F}_3] \subset \mathrm{E_P}[f/\mathcal{F}_2])$$

— Soit $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$. On dira que $\mathcal{H}'$ est caractérisée par ses atomes dans $\mathcal{H}$ si elle vérifie la propriété suivante : un élément de $\mathcal{H}$ est un élément de $\mathcal{H}'$ si et seulement si il est réunion d'atomes de $\mathcal{H}'$.

Cette propriété est en particulier vérifiée dans le cas suivant :

$$(\Theta, \mathcal{H}) = (\Theta', \mathcal{H}') \otimes (\Theta'', \mathcal{H}'').$$

— Si $(\underline{\mathrm{O}}, \mathcal{I}, \lambda)$ est un espace de mesure, nous utiliserons la notation $(\forall_\lambda \omega)$ pour : « pour λ-presque tout $\omega \in \underline{\mathrm{O}}$ ».

I. RÉDUCTION DANS L'ESPACE DES OBSERVATIONS

Soient :

$$(\Theta ; \mathcal{H}) \overset{\mathrm{P}}{\prec} (\mathrm{X} ; \mathcal{A}), \quad \mathrm{M} \subset \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H}), \quad \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}, \quad \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$$

(I-1) Définition [cf. [5]]. — $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A} ; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive si et seulement si :

$$(1) \qquad (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}))\ (\exists g \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}'))\ (\forall \theta \in \Theta) \quad (g \in \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\theta}[f/\mathcal{A}'])$$

(I-2) Définition [cf. [5]]. — $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A} ; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive par paire si pour tout sous-ensemble Λ de Θ à deux éléments, $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A} ; \mathcal{P}^\Lambda)$ exhaustive.

Rappelons que si $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A} ; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive par paire alors $\mathcal{A}'$ est exhaustive pour toute sous-famille dominée; en particulier si $\mathcal{P}^\Theta$ est dominée, les deux définitions précédentes sont équivalentes.

(I-3) Lemme. — Si $\mathcal{P}^\Theta$ est dominée alors $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A} ; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive si et seulement si :

$$(2) \qquad (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}))\ (\forall \theta \in \Theta) \quad (\mathrm{E}_{\mathrm{P}^\theta}[f] = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\theta}[\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{P}}}[f/\mathcal{A}']])$$

Démonstration. — Soit $\overline{\mathrm{P}} = \Sigma a_\theta \mathrm{P}^\theta$ une dominante privilégiée. Si $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A} ; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive alors on a :

$$(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}))\ (\forall \theta \in \Theta) \quad (\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{P}}}[f/\mathcal{A}'] \subset \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\theta}[f/\mathcal{A}'])$$

Réciproquement, si (2) est vérifié alors :

$$(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}))\ (\forall \mathrm{A}' \in \mathcal{A}')\ (\forall \theta \in \Theta)$$

$$\int_{\mathrm{A}'} \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{P}}}[f/\mathcal{A}'] d\mathrm{P}^\theta = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\theta}[\mathrm{I}_{\mathrm{A}'} \cdot \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{P}}}[f/\mathcal{A}']] = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\theta}[\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{P}}}[\mathrm{I}_{\mathrm{A}'} \cdot f/\mathcal{A}']]$$

$$= \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\theta}[\mathrm{I}_{\mathrm{A}'} \cdot f] = \int_{\mathrm{A}'} f d\mathrm{P}^\theta$$

d'où :

$$(\forall f \in \mathscr{L}^{\infty}(\mathscr{A}))\ (\forall \theta \in \Theta)\quad (\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{P}}}[f/\mathscr{A}'] \subset \mathrm{E}_{\mathrm{P}^{\theta}}[f/\mathscr{A}'])$$

c'est-à-dire (1). C. Q. F. D.

(I-4) Définition. — $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P}\,;\mathscr{H}'\,;\mathrm{M})$ si et seulement si :

(3) $\qquad (\forall \mu \in \mathrm{M}) \qquad (\mathscr{H}'$ et $\mathscr{A}$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}'$ pour $\mathrm{P} \circ \mu)$

Remarque. — Soit $\mathscr{A}'$ une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P}\,;\mathscr{H}'\,;\mathrm{M})$.

Si on a $\mathscr{H}'' \subset \mathscr{H}'$, $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}$, $\mathscr{A}'' \supset \mathscr{A}'$ alors $\mathscr{A}''$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P}\,;\mathscr{H}''\,;\mathrm{M}')$.

(I-5) Proposition. — $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P}\,;\mathscr{H}'\,;\mu)$ si et seulement si $\mathscr{A}'$ est $\left(\mathscr{A}\,;\mathscr{P}_{\mu}^{\mathscr{H}'}\right)$ exhaustive.

Démonstration. — $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P}\,;\mathscr{H}'\,;\mu)$ si et seulement si :

$$-\ (\forall f \in \mathscr{L}^{\infty}(\mathscr{A}))\ (\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}')\quad \left(\int_{\mathrm{H}'} f\,d(\mathrm{P} \circ \mu) = \int_{\mathrm{H}'} \mathrm{E}_{\mathrm{P}\circ\mu}[f/\mathscr{A}']\,d(\mathrm{P} \circ \mu)\right)$$

$\mathscr{A}'$ est $\left(\mathscr{A}\,;\mathscr{P}_{\mu}^{\mathscr{H}}\right)$ exhaustive si et seulement si [cf. (I-3)] :

$$-\ (\forall f \in \mathscr{L}^{\infty}(\mathscr{A}))\ (\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}')\quad (\mathrm{E}_{\mathrm{P}_{\mu}^{\mathrm{H}'}}[f] = \mathrm{E}_{\mathrm{P}_{\mu}^{\mathrm{H}'}}[\mathrm{E}_{\mathrm{P}\circ\mu}[f/\mathscr{A}']])$$

Il suffit donc de montrer que les deux équations suivantes sont équivalentes :

$$\int_{\mathrm{H}'} f\,d(\mathrm{P} \circ \mu) = \int_{\mathrm{H}'} \mathrm{E}_{\mathrm{P}\circ\mu}[f/\mathscr{A}']\,d[\mathrm{P} \circ \mu]$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_{\mu}^{\mathrm{H}'}}[f] = \mathrm{E}_{\mathrm{P}_{\mu}^{\mathrm{H}'}}[\mathrm{E}_{\mathrm{P}\circ\mu}[f/\mathscr{A}']]$$

Si $\mu(\mathrm{H}') = 0$ elles sont vérifiées.

Si $\mu(\mathrm{H}') > 0$ les deux premiers membres, ainsi que les deux seconds, diffèrent du facteur multiplicatif $\mu(\mathrm{H}')$. C. Q. F. D.

(I-6) Remarque. — Existence d'une réduction minimale.

On en déduit, puisque la famille $\mathscr{P}_{\mu}^{\mathscr{H}'}$ admet P_{μ} comme dominante privilégiée, qu'il existe une sous-tribu $\mathscr{A}^{0}$, P_{μ} complète dans $\mathscr{A}$ telle que : pour qu'une sous-tribu $\mathscr{A}'$ soit une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P}\,;\mathscr{H}'\,;\mu)$ il faut et il suffit que ; $\mathscr{A}^{0} \subset \mathscr{A}'[\mathrm{P}_{\mu}]$.

(I-7) PROPOSITION. — Considérons les propositions suivantes :

1) $\mathscr{A}'$ est $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^{\Theta})$ exhaustive.

2) $\mathscr{A}'$ est $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^{\Theta})$ exhaustive par paire.

3) $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P} ; \mathscr{H} ; \mathscr{P}(\Theta ; \mathscr{H}))$.

4) $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P} ; \mathscr{H} ; \mathscr{P}_2(\Theta ; \mathscr{H}))$ où $\mathscr{P}_2(\Theta ; \mathscr{H})$ désigne l'ensemble des mesures *a priori* qui sont combinaisons linéaires convexes de deux Dirac. On a :

$$1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Leftrightarrow 2)$$

Si de plus la famille $\mathscr{P}^{\Theta}$ est dominée, toutes ces propositions sont équivalentes.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 3) Soient

$$f \in \mathscr{L}^{\infty}(\mathscr{A}) \qquad \text{et} \qquad g \in \bigcap_{\theta \in \Theta} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^{\theta}}[f/\mathscr{A}']$$

On a donc :

$$(\forall \theta \in \Theta)\ (\mathrm{E}_{\mathrm{P}^{\theta}}[f] = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^{\theta}}[g]) \quad \text{d'où} \quad (\forall \mu \in \mathscr{P}(\Theta, \mathscr{H})) \quad g \in \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[f/\mathscr{A}']$$

Ainsi :

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[f/\mathscr{H}] = \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[g/\mathscr{H}] = \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[\mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[f/\mathscr{A}']/\mathscr{H}]$$

c'est-à-dire : $\mathscr{A}$ et $\mathscr{H}$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}'$ pour $\mathrm{P} \circ \mu$.

3) $\Rightarrow$ 4) Évident.

4) $\Rightarrow$ 2) Soit

$$\mu = \lambda \delta_{\theta_1} + (1 - \lambda) \delta_{\theta_2}$$

On a :

$$(\forall f \in \mathscr{L}^{\infty}(\mathscr{A})) \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[f/\mathscr{A}'] \subset \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[f/\mathscr{H} \vee \mathscr{A}']$$

Ainsi :

$$(\forall \theta \in \{\theta_1, \theta_2\})\ (\forall \mathrm{A}' \in \mathscr{A}') \quad \left(\int_{\mathrm{A}'} f d\mathrm{P}^{\theta} = \int_{\mathrm{A}'} \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[f/\mathscr{A}'] d\mathrm{P}^{\theta} \right)$$

D'où

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}[f/\mathscr{A}'] \subset \mathrm{E}_{\mathrm{P}^{\theta_i}}[f/\mathscr{A}'] \qquad i = 1, 2$$

Ainsi $\mathscr{A}'$ est $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^{\Lambda})$ exhaustive avec $\Lambda = \{\theta_1, \theta_2\}$.

2) $\Rightarrow$ 4) Même démonstration que 1) $\Rightarrow$ 3) en remplaçant Θ par Λ. Dans le cas dominé 2) $\Rightarrow$ 1) [cf. [5]]. C. Q. F. D.

On peut se demander si l'introduction d'une sous-tribu $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$ permet une plus forte réduction dans l'espace des observations que l'exhaustivité. Hajek [cf. [4]] énonce le résultat suivant : « Si $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P} ; \mathscr{H}' ; \mathscr{P}(\Theta ; \mathscr{H}))$ et si $\mathscr{H}' \neq \{\emptyset, \Theta\}$ alors $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P} ; \mathscr{H} ; \mathscr{P}(\Theta ; \mathscr{H}))$ ».

Montrons sur un exemple que ceci n'est pas vrai. Soient :

$$\Theta = \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \}, \quad \mathscr{H} = \mathscr{P}(\Theta), \quad X = \{ x_1, x_2, x_3 \}, \quad \mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$$
$$\mathscr{H}' = \{ \varnothing, \{ \theta_1, \theta_2 \}, \{ \theta_3 \}, \Theta \}, \quad \mathscr{A}' = \{ \varnothing, \{ x_1, x_2 \}, \{ x_3 \}, X \}$$

La transition P de $(\Theta ; \mathscr{H})$ dans $(X ; \mathscr{A})$ est donnée par la matrice markovienne :

	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	1/3	2/3	0
x_2	2/3	1/3	0
x_3	0	0	1

$\mathscr{A}'$ n'est pas $(\mathscr{H} ; \mathscr{P}^\Theta)$ exhaustive et cependant $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(P ; \mathscr{H}' ; \mathscr{P}(\Theta ; \mathscr{H}))$. En effet pour toute mesure *a priori* μ la famille $\mathscr{P}_\mu^{\mathscr{H}'}$ est donnée par :

	$\{ \theta_1, \theta_2 \}$	$\{ \theta_3 \}$
x_1	$\dfrac{\mu_1 + 2\mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)}$	0
x_2	$\dfrac{2\mu_1 + \mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)}$	0
x_3	0	1

où $\mu_i = \mu(\theta_i)$

et $\mathscr{A}'$ est bien $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}_\mu^{\mathscr{H}'})$ exhaustive.

On a cependant le résultat suivant :

(I-8) Proposition. — Supposons que les probabilités $\{ P^\theta ; \theta \in \Theta \}$ soient toutes équivalentes et que $\mathscr{H}' \neq \{ \varnothing ; \Theta \}$. Si $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(P ; \mathscr{H}' ; \mathscr{P}_2(\Theta ; \mathscr{H}))$ alors $\mathscr{A}'$ est $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ exhaustive.

Démonstration. — Si $\mathscr{A}'$ n'est pas $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ exhaustive, il existe un couple $\Lambda = (\theta, \theta') \in \Theta^2$ tel que $\mathscr{A}'$ n'est pas $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Lambda)$ exhaustive et par suite $\dfrac{dP^\theta}{dP^{\theta'}}$ n'a pas de version $\mathscr{A}'$ mesurable.

Si $\mathscr{H}'$ sépare θ et θ' soient $H' \in \mathscr{H}'$ tel que $\theta \in H'$ et $\theta' \in H'^c$ (complémentaire de H') et $\mu = \dfrac{1}{2}[\delta_\theta + \delta_{\theta'}]$. On a alors $P_\mu^{H'} = P^\theta$; $P_\mu^{H'^c} = P^{\theta'}$ et $\mathscr{A}'$ ne peut être exhaustive pour $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}_\mu^{\mathscr{H}'})$.

Si $\mathscr{H}'$ ne sépare pas θ et θ' il existe θ'' tel que $\mathscr{H}'$ sépare θ'' et $\{\theta, \theta'\}$. De l'égalité $\frac{dP^\theta}{dP^{\theta'}} = \frac{dP^\theta}{dP^{\theta''}} \times \frac{dP^{\theta''}}{dP^{\theta'}}$ on en déduit que l'une des densités $\frac{dP^\theta}{dP^{\theta''}}$ ou $\frac{dP^{\theta''}}{dP^{\theta'}}$ n'a pas de version $\mathscr{A}'$ mesurable et il suffit alors de reprendre le raisonnement précédent avec le nouveau couple. C. Q. F. D.

Dans le cadre de l'exhaustivité on a le résultat suivant :

si P est dominée par λ alors $\mathscr{A}'$ est $(\mathscr{A}\,; \mathscr{P}^\Theta)$ exhaustive si et seulement si : il existe pour chaque $\theta \in \Theta$, une version $f(\theta, .)$ de la densité $\frac{dP^\theta}{d\lambda}$ de la forme $f(\theta, x) = \phi(\theta, x)\eta(x)$ avec $\phi(\theta, .)$ $\mathscr{A}'$-mesurable.

Cette propriété a déjà été utilisée dans (I-8).

La réduction étudiée ici possède aussi des propriétés de factorisation des densités.

(I-9) PROPOSITION.

1) Si $P \circ \mu$ est dominée par $P_\mu \otimes \mu$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

a) $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(P\,; \mathscr{H}'\,; \mu)$.

b) Il existe une version de $\frac{dP \circ \mu}{dP_\mu \otimes \mu}$ de la forme $\varphi\psi$ avec :

$$\begin{cases} \varphi \ \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \text{ mesurable} \\ E_{P_\mu \otimes \mu}[\psi/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}] = 1 \end{cases}$$

2) Si P est dominée par λ et $\mathscr{A}$ est dénombrablement engendrée les propriétés précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

c) Il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi \ \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \text{ mesurable} \\ \eta \ \mathscr{H} \vee \mathscr{A} \text{ mesurable et } (\forall_\lambda x),\ E_\mu[\eta(.,x)/\mathscr{H}'] \ni E_\mu[\eta(.,x)] \\ (\forall_\mu \theta)\ \varphi(\theta, .)\eta(\theta, .) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases}$$

Démonstration :

1) Supposons $P \circ \mu$ dominé par $P_\mu \otimes \mu$ et soient :

$$g \in \frac{dP \circ \mu}{dP_\mu \otimes \mu}, \qquad \varphi \in E_{P_\mu \otimes \mu}[g/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}']$$

$a) \Leftrightarrow \mathscr{A}$ et $\mathscr{H}'$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}'$ pour $P \circ \mu$
$\Leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{A}), (\forall H' \in \mathscr{H}'), \quad E_{P \circ \mu}[AH'] = E_{P \circ \mu}[H' E_{P \circ \mu}[A/\mathscr{A}']]$
$b) \Leftrightarrow E_{P_\mu \otimes \mu}[g/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}] \supset E_{P_\mu \otimes \mu}[g/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}']$
$\Leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{A}), (\forall H' \in \mathscr{H}'), \quad E_{P_\mu \otimes \mu}[AH'g] = E_{P_\mu \otimes \mu}[AH'\varphi]$

Or

$$E_{P_\mu \otimes \mu}[AH'g] = E_{P \circ \mu}[AH']$$

et

$$E_{P_\mu \otimes \mu}[AH'\varphi] = E_{P \circ \mu}[H' E_{P_\mu \otimes \mu}[A/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}']$$

mais

$$E_{P_\mu \otimes \mu}[A/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'] \supset E_{P_\mu \otimes \mu}[A/\mathscr{A}'] = E_{P \circ \mu}[A/\mathscr{A}']$$

d'où

$$E_{P_\mu \otimes \mu}[AH'\varphi] = E_{P \circ \mu}[H' E_{P \circ \mu}[A/\mathscr{A}']]$$

L'équivalence en découle.

2) Supposons P dominée par λ

$c) \Rightarrow a)$ Soit

$$\varepsilon \in E_{\lambda \otimes \mu}[\eta/\mathscr{A}] \subset E_{\lambda \otimes \mu}[\eta/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}]$$

Posons :

si $\quad H' \in \mathscr{H}' \quad$ et $\quad \mu(H') \neq 0 \quad \Phi^{H'}(.) = \dfrac{1}{\mu(H')} \displaystyle\int_{H'} \varphi(\theta, .)\, \mu(d\theta)$

si $\quad H' \in \mathscr{H}' \quad$ et $\quad \mu(H') = 0 \quad \Phi^{H'}(.) = \displaystyle\int_{\Theta} \varphi(\theta, .)\, \mu(d\theta)$

ε est $\mathscr{A}$ mesurable, pour tout $H' \in \mathscr{H}'$, $\Phi^{H'}$ est $\mathscr{A}'$ mesurable et $\varepsilon\Phi^{H'}$ est une version de $\dfrac{dP_\mu^{H'}}{d\lambda}$; $\mathscr{A}'$ est donc exhaustive pour $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}_\mu^{\mathscr{H}})$ d'où $a)$ (cf. [I-5]).

Supposons de plus que $\mathscr{A}$ est dénombrablement engendrée. Alors $P \circ \mu$ est dominée par $P_\mu \otimes \mu$.

$b) \Rightarrow c)$ Soient :

$$l \in \frac{dP_\mu}{d\lambda},$$

et $\mathscr{A}_0$ une algèbre dénombrable engendrant $\mathscr{A}$.

Posons :

$$\eta = \psi l; \qquad \varphi \text{ est } \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \text{ mesurable}$$

On a

$$(\forall H \in \mathscr{H}), (\forall A \in \mathscr{A}), \quad \int_H \int_A \varphi(\theta, x)\, \eta(\theta, x) d\lambda d\mu = \int_H P^\theta(A) d\mu$$

Par suite si

$$\Theta_1 = \left\{ \theta \in \Theta, \ (\forall A \in \mathscr{A}_0) \ P^\theta(A) = \int_A \varphi(\theta, x)\, \eta(\theta, x) d\lambda \right\}$$

alors $\mu(\Theta_1) = 1$ et $(\forall \theta \in \Theta_1), \quad \varphi(\theta, .)\eta(\theta, .) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$

De plus

$$(\forall_{P_\mu} x),\ E_\mu[\psi(., x)/\mathscr{H}'] = 1$$

d'où $(\forall_\lambda x),\ E_\mu[\eta(., x)/\mathscr{H}'] = l(x) = E_\mu[\eta(., x)]$

(I-10) Corollaire. — Soient :

$$(\Theta, \mathscr{H}) = (\Theta', \mathscr{H}') \otimes (\Theta'', \mathscr{H}''), \qquad \mu = \nu \circ \mu'$$

où μ' est une probabilité sur $(\Theta', \mathscr{H}')$

ν est une transition de probabilité de $(\Theta' ; \mathscr{H}')$ dans $(\Theta'' ; \mathscr{H}'')$.

Si P est dominée par λ et si $\mathscr{A}$ est dénombrablement engendrée, une sous-tribu $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(P ; \mathscr{H}' ; \mu)$ si et seulement si :

c') il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

— φ est $\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'$ mesurable,

— η est $\mathscr{H} \vee \mathscr{A}$ mesurable et :

$$(\forall_\lambda x)\ (\forall_{\mu'} \theta') \quad \int_{\Theta''} \eta(\theta', \theta'', x)\, \nu(\theta', d\theta'') \text{ indépendant de } \theta'$$

— $$(\forall_\mu \theta), \quad \varphi(\theta, .)\eta(\theta, .) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cadre de la théorie de la décision. Soit $(\Delta ; \mathscr{D})$ l'espace mesurable des actions ; une stratégie est une transition de probabilité de $(X ; \mathscr{A})$ dans $(\Delta ; \mathscr{D})$. Soit l une fonction de perte, fonction positive définie sur $(\Theta \times \Delta)$, $\mathscr{H} \vee \mathscr{D}$ mesurable ; la fonction de risque d'une stratégie S est définie par :

$$(\forall \theta \in \Theta), \quad \lambda(\theta, S) = \int_{X \times \Delta} l(\theta, .) d[S \circ P^\theta] = E_{S \circ P \circ \delta_\theta}[l]$$

le risque bayésien d'une stratégie S pour la mesure *a priori* μ est défini par :

$$\lambda(\mu, S) = \int_\Theta \lambda(\theta, S)\, \mu(d\theta) = E_{S \circ P \circ \mu}[l]$$

On a le résultat suivant :

(I-11) Théorème. — $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(P ; \mathscr{H}' ; \mu)$ si et seulement si :

quel que soit l'espace d'action $(\Delta ; \mathscr{D})$ localement compact à base dénombrable,

quelle que soit la stratégie S, $\mathscr{A}$ mesurable,
il existe une stratégie S′, $\mathscr{A}'$ mesurable, telle que :

les mesures $S \circ P \circ \mu$ et $S' \circ P \circ \mu$ aient même restriction à la tribu $\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \vee \mathscr{D}$ (et par suite les deux stratégies ont même risque bayésien pour μ si la fonction de perte est $\mathscr{H}' \vee \mathscr{D}$ mesurable).

Démonstration.

C. N. Soit $A \in \mathscr{A}$, prenons $\Delta = \{0, 1\}$, $S(x, \{1\}) = 1_A(x)$. Il existe S′, $\mathscr{A}'$ mesurable, telle que $E_{P\circ\mu}[S'\{1\}/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'] = E_{P\circ\mu}[S\{1\}/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}']$ par suite $E_{P\circ\mu}[A/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'] \supset E_{P\circ\mu}[A/\mathscr{A}']$.

C. S. Soit $S : (X, \mathscr{A}) \multimap (\Delta, \mathscr{D})$. Par suite des hypothèses sur $(\Delta ; \mathscr{D})$ il existe une transition de probabilité de $(X ; \mathscr{A}')$ dans $(\Delta ; \mathscr{D})$ vérifiant :

$$(\forall D \in \mathscr{D}), \quad S'(D) \in E_{P\circ\mu}[S(D)/\mathscr{A}']$$

On a : $\qquad (\forall D \in \mathscr{D}), \quad (\forall A' \in \mathscr{A}'), \quad (\forall H' \in \mathscr{H}')$

$$\begin{aligned} S \circ P \circ \mu(H' \times A' \times D) &= E_{P\circ\mu}[1_{A'} \cdot 1_{H'} E_{P\circ\mu}[S(D)/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}']] \\ &= E_{P\circ\mu}[1_{A'} \cdot 1_{H'} E_{P\circ\mu}[S(D)/\mathscr{A}']] \\ &= E_{P\circ\mu}[1_{A'} \cdot 1_{H'} S'(D)] \\ &= S' \circ P \circ \mu[H' \times A' \times D] \qquad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que l'invariance du modèle fournit des réductions.

(I-12) DÉFINITION. — Une transformation g est dite laisser le modèle invariant si g est une bijection bimesurable de X dans X et de Θ dans Θ vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta) \ (\forall A \in \mathscr{A}) \qquad (P^{g.\theta}(g.A) = P^{\theta}(A))$$

A une telle transformation g on associe les sous-tribus des invariants :

$$\mathscr{A}_g = \{ A \in \mathscr{A} \mid g^{-1}.A = A \} ; \qquad \mathscr{H}_g = \{ H \in \mathscr{H} \mid g^{-1}H = H \}$$

(I-13) PROPOSITION. — Soit g une transformation laissant le modèle invariant.

Si $\mathscr{H}_g = \mathscr{H}$ alors $\mathscr{A}_g$ est $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^{\Theta})$ exhaustive.

Démonstration. — A toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$, mesurable, bornée, nous pouvons associer la suite de fonctions mesurables bornées :

$$f_n : X \to \mathbb{R} ; \qquad f_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(g^i x)$$

En utilisant le théorème ergodique ponctuel (cf. [7]) on sait que la suite f_n

converge sauf sur un ensemble N_f tel que $(\forall\theta \in \Theta)$ $P^\theta(N_f) = 0$. Posons donc :

$$f^*(x) = \begin{cases} \operatorname{Lim}_n f_n(x) & \text{si} \quad x \notin N_f \\ 0 & \text{si} \quad x \in N_f \end{cases}$$

On a alors :

$$(\forall\theta \in \Theta) \qquad f^* \in E_{P^\theta}[f/\mathscr{A}_g]$$

(I-14) PROPOSITION. — Si μ est une mesure invariante par g alors $\mathscr{A}_g$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathscr{P}^\Theta ; \mathscr{H}_g ; \mu)$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $(\forall H \in \mathscr{H}_g)$, P^H_μ est invariante par g.

$(\forall A \in \mathscr{A})$ $(\forall H \in \mathscr{H}_g ; \mu(H) > 0)$ on a :

$$(g.P^H_\mu)(A) = P^H_\mu(g^{-1}.A) = \frac{\int_H P^\theta(g^{-1}.A)\mu(d\theta)}{\mu(H)} = \frac{\int_H P^{g\theta}(A)\mu(d\theta)}{\mu(H)} = P^H_\mu(A)$$

De même, si $\mu(H) = 0$ on a $(\forall A \in \mathscr{A})$ $(g.P^H_\mu)(A) = P^H_\mu(A)$.

Considérons maintenant le cas d'un groupe G de transformations laissant le modèle invariant et posons :

$$\mathscr{A}_G = \bigcap_{g\in G} \mathscr{A}_g ; \qquad \mathscr{H}_G = \bigcap_{g\in G} \mathscr{H}_g$$

Nous allons supposer le modèle dominé et si $\mathscr{A}'$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$ nous noterons $\overline{\mathscr{A}'}$ la complétée de $\mathscr{A}'$ pour une probabilité équivalente à la famille $\mathscr{P}^\Theta$. Nous allons montrer sur un exemple que nous sommes obligés, pour généraliser la proposition précédente, de remplacer le couple $(\mathscr{A}_G ; \mathscr{H}_G)$ par le couple $(\tilde{\mathscr{A}}_G ; \mathscr{H}_G)$ où $\tilde{\mathscr{A}}_G = \bigcap_{g\in G} \overline{\mathscr{A}}_g$. Considérons en effet le modèle suivant :

$$(X ; \mathscr{A}) = (\mathbb{R} ; \mathscr{B})$$

$\mathscr{P}^\Theta$ = ensemble des probabilités absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce modèle est laissé invariant par le groupe G des transformations g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne déplaçant qu'un nombre fini de points. Nous avons alors :

$$\mathscr{A}_G = \{ \emptyset ; \mathbb{R} \} ; \qquad \mathscr{H}_G = \mathscr{H}$$

(I-15) PROPOSITION. — Soit G un groupe de transformations laissant le modèle invariant. Si μ est une mesure sur $(\Theta ; \mathscr{H})$ invariante par G, $\tilde{\mathscr{A}}_G$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathscr{P}^\Theta ; \mathscr{H}_G ; \mu)$.

Remarque. — Nous avons le résultat suivant (cf. [*8*]).

Si G est un groupe de transformations localement compact, dénombrable à l'infini et si l'application $(g, x) \mapsto g.x$ est $\mathscr{B} \vee \mathscr{A}$ mesurable, $\mathscr{B}$ étant la tribu borélienne de G, alors on a :

$$\tilde{\mathscr{A}}_G = \overline{\mathscr{A}}_G$$

II. RÉDUCTION DANS L'ESPACE DES PARAMÈTRES

Soient :

$$(\Theta\,;\mathscr{H}) \overset{P}{\prec} (X\,;\mathscr{A}), \quad M \subset \mathscr{P}(\Theta\,;\mathscr{H}), \quad \mathscr{A}' \subset \mathscr{A}, \quad \mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$$

(II-1) DÉFINITION. — $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}')$ si la restriction P' de P à $\mathscr{A}'$ est $\mathscr{H}'$ mesurable, c'est-à-dire si $(\forall A' \in \mathscr{A}')$ l'application $\theta \to P^\theta(A')$ est $\mathscr{H}'$ mesurable.

(II-2) DÉFINITION. — $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}'\,;M)$ si $(\forall \mu \in M)$ $\mathscr{H}$ et $\mathscr{A}'$ sont C. I. R. à $\mathscr{H}'$ pour $P \circ \mu$.

(II-3) PROPOSITION. — Considérons les propositions suivantes :

1) $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}')$
2) $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}'\,;\mathscr{P}(\Theta\,;\mathscr{H}))$
3) $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}'\,;\mathscr{P}_2(\Theta\,;\mathscr{H}))$

On a 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3)

Si $\mathscr{H}'$ est caractérisé par ses atomes dans $\mathscr{H}$ alors 3) $\Rightarrow$ 1).

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 2) car $(\forall \mu \in \mathscr{P}(\Theta\,;\mathscr{H}))$, $(\forall A' \in \mathscr{A}')$ l'application $\theta \to P^\theta(A')$ est une version $\mathscr{H}'$ mesurable de $E_{P \circ \mu}[A'/\mathscr{H}]$.

Supposons $\mathscr{H}'$ caractérisé par ses atomes dans $\mathscr{H}$. Pour vérifier 1) il suffit donc de montrer que la restriction de P à $\mathscr{A}'$ est constante sur les atomes de $\mathscr{H}'$.

3) $\Rightarrow$ 1) Soient θ_1 et θ_2 deux éléments d'un même atome H' de $\mathscr{H}'$ et

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_{\theta_1} + \delta_{\theta_2})$$

$$(\forall A' \in \mathscr{A}') \qquad E_{P \circ \mu}[A'/\mathscr{H}'] \subset E_{P \circ \mu}[A'/\mathscr{H}]$$

d'où

$$P^{\theta_1}(A') = P^{\theta_2}(A').$$

(II-4) REMARQUE. — Supposons qu'il existe une transition *a posteriori* π_μ

de P pour $\mathscr{H}$ relativement à μ. Les deux propositions sont alors équivalentes :

— $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}'\,;\mu)$

— $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(\pi_\mu\,;\mathscr{A}'\,;P_\mu)$.

En effet on a :

$$P \circ \mu = \pi_\mu \circ P_\mu$$

(II-5) Proposition. — Si

$\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(P\,;\mathscr{H}\,;\mu)$

et si $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}'\,;\mu)$

alors $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}\,;\mu)$

Démonstration. — En effet

$$(\forall A \in \mathscr{A}) \qquad \begin{aligned} E_{P\circ\mu}[A/\mathscr{H}] &= E_{P\circ\mu}[E_{P\circ\mu}[A/\mathscr{A}']/\mathscr{H}] \\ &= E_{P\circ\mu}[E_{P\circ\mu}[A/\mathscr{A}']/\mathscr{H}'] \end{aligned}$$

(II-6) Remarque. — Existence d'une réduction minimale.

Soit $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$. Il existe une tribu $\mathscr{H}^0$ complète dans $\mathscr{H}$ telle que : pour que $\mathscr{H}'$ soit une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}'\,;\mu)$, il faut et il suffit que : $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}^0[\mu]$.

En effet il suffit de prendre $\mathscr{H}^0$ tribu μ-complète dans $\mathscr{H}$ engendrée par la restriction de P à $\mathscr{A}'$.

La réduction dans l'espace des paramètres possède elle aussi des propriétés de factorisation des densités.

(II-7) Proposition. — Si P est dominé par λ et si $\mathscr{A}$ est dénombrablement engendrée alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A})$,

b) il existe une fonction f, $\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}$ mesurable telle que :

$$\forall \theta \in \Theta, \qquad f(\theta, .) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$$

Démonstration :

b) $\Rightarrow$ *a*) car $(\forall A \in \mathscr{A})$ l'application $\left(\theta \to \int_A f(\theta, .)d\lambda\right)$ est $\mathscr{H}'$ mesurable

a) $\Rightarrow$ *b*) résulte de [*6*], p. 194.

(II-8) Proposition.

1) Si $P \circ \mu$ est dominée par $\lambda \otimes \mu$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P\,;\mathscr{A}'\,;\mu)$

b) il existe une version de $\dfrac{dP \circ \mu}{d\lambda \otimes \mu}$ de la forme $\varphi\psi$ avec :

$$\begin{cases} \varphi \ \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \text{ mesurable} \\ E_{\lambda\otimes\mu}[\psi/\mathscr{H} \vee \mathscr{A}'] = 1 \end{cases}$$

2) Si P est dominé par λ et $\mathscr{A}$ est dénombrablement engendrée les propriétés précédentes sont encore équivalentes à chacune des deux suivantes :

c) il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi \ \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \text{ mesurable} \\ \eta \ \ \mathscr{H} \vee \mathscr{A} \text{ mesurable et } (\forall_\mu \theta) \quad E_\lambda[\eta(\theta, .)/\mathscr{A}'] \text{ ne dépend pas de } \theta \\ (\forall_\mu \theta) \quad \varphi(\theta, .)\, \eta(\theta, .) \in \dfrac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases}$$

d) il existe une fonction f, $\mathscr{H} \vee \mathscr{A}$ mesurable vérifiant :

$$\begin{cases} E_{\lambda\otimes\mu}[f/\mathscr{H} \vee \mathscr{A}'] \supset E_{\lambda\otimes\mu}[f/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'] \\ (\forall_\mu \theta) \quad f(\theta, .) \in \dfrac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases}$$

Démonstration.

1) Supposons $P \circ \mu$ dominée par $\lambda \otimes \mu$ et soit $f \in \dfrac{dP \circ \mu}{d\lambda \otimes \mu}$

b) $\Leftrightarrow$ $\qquad E_{\lambda\otimes\mu}[f/\mathscr{H} \vee \mathscr{A}'] \supset E_{\lambda\otimes\mu}[f/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}']$

La démonstration de *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) est analogue à celle de (I-9).

2) Supposons P dominée par λ.

c) $\Rightarrow$ *d*) En prenant $f = \varphi\eta$.

d) $\Rightarrow$ *c*) Évident.

Supposons de plus $\mathscr{A}$ dénombrablement engendrée, alors $P \circ \mu$ est dominée par $\lambda \otimes \mu$.

b) $\Rightarrow$ *c*) On démontre encore de façon analogue à (I-9) que :

$$(\forall_\mu \theta) \qquad \varphi(\theta, .)\, \psi(\theta, .) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$$

et ici :

$$E_{\lambda\otimes\mu}[\psi/\mathscr{H} \vee \mathscr{A}'] = 1$$

c'est-à-dire :

$$(\forall_\mu \theta) \qquad E_\lambda[\psi(\theta, .)/\mathscr{A}'] = 1.$$

Corollaire. — Supposons que $(X ; \mathscr{A}) = (X' ; \mathscr{A}') \otimes (X'' ; \mathscr{A}'')$ et que $\lambda = \gamma \circ \lambda'$ (où γ est une transition de probabilité de $(X' ; \mathscr{A}')$ dans $(X'' ; \mathscr{A}'')$

et λ' une probabilité sur $(X' ; \mathscr{A}'))$ est une mesure dominant P. Supposons de plus la tribu $\mathscr{A}$ dénombrablement engendrée. Alors, pour qu'une sous-tribu $\mathscr{H}'$ soit une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P ; \mathscr{A}' ; \mu)$, il faut et il suffit que : il existe deux fonctions φ et η telles que :

— $(\forall_\mu \theta)$, $\quad \varphi(\theta, .)\, \eta(\theta, .) \in \dfrac{dP^\theta}{d\lambda}$

— φ est $\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'$ mesurable

— $(\forall_\mu \theta)$ $\quad \displaystyle\int \eta(\theta, x', x'')\, \gamma(x', dx'')$ ne dépend pas de θ.

III. RÉDUCTION

Soients :

$$(\Theta, \mathscr{H}) \xrightarrow{P} (X, \mathscr{A}), \quad M \subset \mathscr{P}(\Theta, \mathscr{H}), \quad \mathscr{A}' \subset \mathscr{A}, \quad \mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$$

(III-1) DÉFINITION. — $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(P ; M)$ si et seulement si :

a) $(\forall \mu \in M)$ $\mathscr{H}$ et $\mathscr{A}'$ sont C. I. R. à $\mathscr{H}'$ pour $P \circ \mu$

b) $(\forall \mu \in M)$ $\mathscr{A}$ et $\mathscr{H}'$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}'$ pour $P \circ \mu$

(III-2) REMARQUE. — On utilise aussi une définition plus forte que (III-1) en y remplaçant *a*) par *a'*) $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(P ; \mathscr{A}')$ (cf. (II-1)).

(III-3) REMARQUE. — La définition (III-1) ne présente d'intérêt que si M est une famille restreinte de mesures *a priori*.

En effet si les probabilités $(P^\theta ; \theta \in \Theta)$ sont équivalentes, si la sous-tribu $\mathscr{H}'$ est engendrée par ses atomes dans $\mathscr{H}$ et non triviale, alors la propriété de réduction partielle : $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(P ; \mathscr{P}_2(\Theta ; \mathscr{H}))$ entraîne (en utilisant (I-8), (II-5) et (II-3)) la propriété de réduction « totale » :

— P est $\mathscr{H}'$ mesurable,

— $\mathscr{A}'$ est $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ exhaustive.

(III-4) DÉFINITION. — Soient $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ et $(\mathscr{H}'' ; \mathscr{A}'')$ deux déductions de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(P : M)$. $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est dite plus forte que $(\mathscr{H}'' ; \mathscr{A}'')$ si :

$$\begin{cases} \mathscr{H}' \subset \mathscr{H}'' & [\mu ; \mu \in M] \\ \mathscr{A}' \subset \mathscr{A}'' & [P \circ \mu ; \mu \in M] \end{cases}$$

(III-5) PROPOSITION. — Soient $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$ et μ une probabilité *a priori* sur $(\Theta ; \mathscr{H})$.

Parmi toutes les réductions $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(\mathrm{P} ; \mu)$ vérifiant $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}'$ il en existe une plus forte.

Démonstration.

— On définit deux suites de tribus; $(\mathscr{H}_{2n+1} ; n \in \mathbb{N})$, $(\mathscr{A}_{2n+2} ; n \in \mathbb{N})$ par [I-6] et [II-6] :

$\mathscr{H}_1$ = complétée pour μ de $\mathscr{H}_0$ dans $\mathscr{H}$,

$\mathscr{A}_{2n+2}$ = sous-tribu $\mathrm{P} \circ \mu$ complète de $\mathscr{A}$, réduction minimale de $\mathscr{A}$ pour $(\mathscr{H}_{2n+1} ; \mathrm{P} ; \mu)$,

$\mathscr{H}_{2n+1}$ = [sous-tribu μ complète de $\mathscr{H}$, réduction minimale de $\mathscr{H}$ pour $(\mathscr{A}_{2n} ; \mathrm{P} ; \mu)] \vee \mathscr{H}_0$.

— On montre par récurrence que les deux suites sont croissantes.

— Soient :

$$\mathscr{H}_\infty = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mathscr{H}_{2n+1}, \qquad \mathscr{A}_\infty = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mathscr{A}_{2n+2}$$

— $(\mathscr{H}_\infty ; \mathscr{A}_\infty)$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(\mathrm{P} ; \mu)$; en effet :

$(\forall n \geqslant 1)$ $\mathscr{A}$ et $\mathscr{H}_{2n+1}$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}_{2n+2}$ pour $\mathrm{P} \circ \mu$

d'où $(\forall n \geqslant 1)$ $\mathscr{A}$ et $\mathscr{H}_{2n+1}$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}_\infty$ pour $\mathrm{P} \circ \mu$

d'où $\mathscr{A}$ et $\mathscr{H}_\infty$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}_\infty$ pour $\mathrm{P} \circ \mu$ [9].

De même

$(\forall n \geqslant 1)$ $\mathscr{H}$ et $\mathscr{A}_{2n}$ sont C. I. R. à $\mathscr{H}_{2n+1}$ pour $\mathrm{P} \circ \mu$

d'où $(\forall n \geqslant 1)$ $\mathscr{H}$ et $\mathscr{A}_{2n}$ sont C. I. R. à $\mathscr{H}_\infty$ pour $\mathrm{P} \circ \mu$

d'où $\mathscr{H}$ et $\mathscr{A}_\infty$ sont C. I. R. à $\mathscr{H}_\infty$ pour $\mathrm{P} \circ \mu$.

— De plus on a $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}_\infty$.

— Soit $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(\mathrm{P} ; \mu)$ vérifiant $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}'$. On montre par récurrence que l'on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \begin{aligned} \mathscr{H}_{2n+1} &\subset \mathscr{H}' \ [\mu] \\ \mathscr{A}_{2n+2} &\subset \mathscr{A}' \ [\mathrm{P} \circ \mu] \end{aligned}$$

et par suite $\mathscr{H}_\infty \subset \mathscr{H}'[\mu]$ et $\mathscr{A}_\infty \subset \mathscr{A}'[\mathrm{P} \circ \mu]$.

(III-6) THÉORÈME. — Soient :

$$(\mathrm{M}, \mathscr{G}) \overset{\mathrm{Q}}{\prec} (\Theta ; \mathscr{H}) \overset{\mathrm{P}}{\prec} (\mathrm{X}, \mathscr{A}), \quad \mathscr{G}' \subset \mathscr{G}, \quad \mathscr{H}' \subset \mathscr{H}, \quad \mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$$

Hypothèses :

1) $\mathscr{G}'$ est une réduction de $\mathscr{G}$ pour $(\mathrm{Q} ; \mathscr{H}')$
2) $\mathscr{H}'$ est une réduction de $\mathscr{H}$ pour $(\mathrm{P} ; \mathscr{A}')$
3) $\mathscr{A}'$ est une réduction de $\mathscr{A}$ pour $(\mathrm{P} ; \mathscr{H}' ; \mathrm{M})$
4) La tribu $\mathscr{A}'$ est dénombrablement engendrée

5) La tribu $\mathscr{H}'$ est dénombrablement engendrée et admet une classe compacte dénombrable $\mathscr{K}$ d'approximation pour les mesures μ, $\mu \in \mathrm{M}$.

Conclusion. — Il existe une transition de probabilité π :

$$(\mathrm{M}, \mathscr{G}') \times (\mathrm{X}, \mathscr{A}') \multimap (\Theta, \mathscr{H})$$

telle que pour tout $\mu \in \mathrm{M}$, $\pi(\mu, .,)$ est une transition *a posteriori* de P pour $\mathscr{H}$ relativement à μ c'est-à-dire :

$$(\forall \mu \in \mathrm{M})\ (\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}') \qquad \pi(\mu, \,.\,, \mathrm{H}') \in \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}(\mathrm{H}'/\mathscr{A})$$

Démonstration. — L'hypothèse 3) entraîne que toute transition *a posteriori* de P′ pour $\mathscr{H}'$ relativement à μ est aussi une transition *a posteriori* de P pour $\mathscr{H}'$ relativement à μ. Les hypothèses 1) et 2) entraînent que $\mathscr{G}'$ est une réduction de $\mathscr{G}$ pour $(\mathrm{P} \circ \mathrm{Q}\,;\, \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}')$. Soit $(\mathrm{A}_n\,;\, n \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments engendrant $\mathscr{A}'$. La sous-tribu $\mathscr{A}_n$ engendrée par $(\mathrm{A}_p\,;\, p \leqslant n)$ est engendrée par une partition finie $(\mathrm{A}_n^i\,;\, i \in \mathrm{I}_n)$. Posons :

$$(\forall n \in \mathrm{N})\ (\forall \mu \in \mathrm{M})\ (\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}')\ (\forall x \in \mathrm{X}) \quad \varphi_n(\mu, x, \mathrm{H}') = \sum_{i \in \mathrm{I}_n} \frac{\mathrm{P} \circ \mu(\mathrm{H}'_x \mathrm{A}_n^i)}{\mathrm{P} \circ \mu(\mathrm{A}_n^i)}\, 1_{\mathrm{A}_n^i}$$

φ possède les propriétés suivantes :

— $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}')$ l'application $(\mu, x) \to \varphi_n(\mu, x, \mathrm{H}')$ est $\mathscr{G}' \vee \mathscr{A}'$ mesurable.

— $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall \mu \in \mathrm{M})\ (\forall x \in \mathrm{X}) \quad \varphi_n(\mu, x, .)$ est σ-additif sur $\mathscr{H}'$.

— $(\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}')\ (\forall \mu \in \mathrm{M})$ la suite $(\varphi_n(\mu, \,.\,, \mathrm{H}')\,;\, n \in \mathbb{N})$ converge P_μ presque sûrement vers un représentant de $\mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}(\mathrm{H}'/\mathscr{A}')$.

Soit $\mathscr{C}$ une famille dénombrable engendrant $\mathscr{H}'$ et soit $\mathscr{H}_0$ l'algèbre dénombrable engendrée par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{K}$. Posons :

— $\mathrm{U} = \{ (\mu, x) \in \mathrm{M} \times \mathrm{X}\,;\, (\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}_0)$ la suite $\varphi_n(\mu, x, \mathrm{H}')$ converge $\}$

— $\forall (\mu, x) \in \mathrm{U},\ \forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}_0, \quad \varphi(\mu, x, \mathrm{H}') = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(\mu, x, \mathrm{H})$

— $\mathrm{V} = \{ (\mu, x) \in \mathrm{U}\,;\, (\forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}_0)\ \ \varphi(\mu, x, \mathrm{H}') = \sup \{ \varphi(\mu, x, \mathrm{K})\,;\, \mathrm{K} \in \mathscr{K}, \mathrm{K} \in \mathrm{H}' \}$

On a :

— $\mathrm{V} \in \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'$

— $(\forall \mu \in \mathrm{M}) \quad \mathrm{P}_\mu[x \in \mathrm{X}, (\mu, x) \in \mathrm{V}] = 1$

— $(\forall (\mu, x) \in \mathrm{V}), \quad \varphi(\mu, x\,;\, .)$ est σ-additive sur $\mathscr{H}_0$.

Posons :

— $(\forall (\mu, x) \in \mathrm{V})\ \forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}' \ \ \pi(\mu, x\,;\, \mathrm{H}') = \sup (\varphi(\mu, x, \mathrm{K})\,;\, \mathrm{K} \in \mathscr{H}, \mathrm{K} \in \mathrm{H}')$

— $(\forall (\mu, x) \notin \mathrm{V}) \quad \pi(\mu, x, .) = \mu(.)$

π est une transition de probabilité de $(\mathrm{M}, \mathscr{G}') \times (\mathrm{X}, \mathscr{A}')$ dans $(\Theta, \mathscr{H}')$ et

$$\forall \mu \in \mathrm{M}, \quad \forall \mathrm{H}' \in \mathscr{H}', \quad \pi(\mu, ., \mathrm{H}') \in \mathrm{E}_{\mathrm{P} \circ \mu}(\mathrm{H}'/\mathscr{A}).$$

(III-7) THÉORÈME.

1) Si $P \circ \mu$ est dominé par $P_\mu \otimes \mu$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(P ; \mu)$,

b) il existe une version de $\dfrac{dP \circ \mu}{dP_\mu \otimes \mu}$ de la forme $\varphi\psi$ avec :

$$\begin{cases} \varphi \ \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \text{ mesurable} \\ E_{P_\mu \otimes \mu}[\psi/\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}] = E_{P_\mu \otimes \mu}[\psi/\mathscr{H} \vee \mathscr{A}'] = 1 \end{cases}$$

2) Si P est dominé par λ et $\mathscr{A}$ est dénombrablement engendrée les propriétés précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

c) il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi \ \mathscr{H}' \vee \mathscr{A}' \text{ mesurable} \\ \eta \ \mathscr{H} \vee \mathscr{A} \text{ mesurable et} \\ \qquad \begin{cases} (\forall_\lambda x) & E_\mu[\eta(.,x)/\mathscr{H}'] = E_\mu[\eta(.,x)] \\ (\forall_\mu \theta) & E_\lambda[\eta(\theta, .)/\mathscr{A}'] \text{ indépendant de } \theta \end{cases} \\ (\forall_\mu \theta), \quad \varphi(\theta, .)\,\eta(\theta, .) \in \dfrac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases}$$

Démonstration. — Voir (I-9) et (II-7).

(III-8) COROLLAIRE. — Sous les hypothèses de (I-10) et (II-8), pour que $(\mathscr{H}', \mathscr{A}')$ soit une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour (P, μ) il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions φ et η vérifiant :

— $(\forall_\mu \theta) \quad \varphi(\theta, .)\,\eta(\theta, .) \in \dfrac{dP^\theta}{d\lambda}$

— φ est $\mathscr{H}' \vee \mathscr{A}'$ mesurable

— $(\forall_\lambda x) \quad \displaystyle\int_{\Theta''} \eta(\theta', \theta'', x)\,\lambda(\theta', d\theta'')$ indépendant de θ'

— $(\forall_\mu \theta) \quad \displaystyle\int_{X'} \eta(\theta, x', x'')\,\gamma(x', dx'')$ indépendant de θ

Voici trois exemples de réduction :

Réduction de Fraser [*3*]

(III-9) DÉFINITION. — Dans le cas d'un espace produit

$$(\Theta ; \mathscr{H}) = (\Theta' ; \mathscr{H}') \otimes (\Theta'' ; \mathscr{H}''),$$

on dit que $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H}, \mathscr{A})$ au sens de Fraser si :

a_f) la restriction P′ de P à $\mathscr{A}'$ est indépendante de θ'',

b_f) $(\forall\theta'' \in \Theta'')$, $\mathscr{A}'$ est une sous-tribu $(\mathscr{A} ; \mathscr{P}^{\Theta' \times \{\theta''\}})$ exhaustive.

(III-10) PROPOSITION. — Si le modèle est dominé et si la sous-tribu $\mathscr{A}'$ est dénombrablement engendrée, alors $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ au sens de Fraser si et seulement si $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour (P ; M), où $M = \{ \mu' \otimes \mu'' : \mu' \in \mathscr{P}(\Theta', \mathscr{H}')\mu'' \in \mathscr{P}(\Theta'', \mathscr{H}'') \}$.

Démonstration. — Nous devons montrer que a_f) et b_f) sont équivalentes respectivement à :

a) $(\forall\mu \in M)$ $\quad \mathscr{A}'$ et $\mathscr{H}$ sont C. I. R. à $\mathscr{H}'$ pour $P \circ \mu$

b) $(\forall\mu \in M)$ $\quad \mathscr{H}'$ et $\mathscr{A}$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}'$ pour $P \circ \mu$

Comme $(\Theta ; \mathscr{H})$ est un espace produit, et que M sépare les atomes de $\mathscr{H}'$, on peut appliquer la proposition (II-3), ce qui entraîne l'équivalence de a_f) et *a*). D'autre part, comme $\mathscr{A}'$ est dénombrablement engendrée, la condition b_f) est équivalente à l'existence, pour tout $A \in \mathscr{A}$ et tout $\theta \in \Theta$, d'une version $\varphi(\theta ; .)$ de $E_{P\theta}(A/\mathscr{A}')$ telle que φ soit $\mathscr{H}'' \vee \mathscr{A}'$ mesurable. Par suite :

$(\forall\mu \in \mathscr{P}(\Theta, \mathscr{H}))$ $\quad \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}' \vee \mathscr{H}$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}' \vee \mathscr{H}''$ pour $P \circ \mu$

Or $(\forall\mu \in M)$ $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$ sont indépendantes pour μ, donc $\mathscr{A}' \vee \mathscr{H}'$ et $\mathscr{A}' \vee \mathscr{H}''$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}'$ pour $P \circ \mu$ et par suite $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}' \vee \mathscr{H}'$ sont C. I. R. à $\mathscr{A}'$ pour $P \circ \mu$.

Il reste *b*) $\Rightarrow$ b_f), qui résulte, à cause de la domination, de la proposition (I-7) appliquée à chaque $\Theta' \times \{ \theta'' \}$.

Application (voir [*3*]).

Si $(\mathscr{H}' ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ au sens de Fraser alors, pour tout $(\theta'_0 ; \theta'_1) \in (\Theta')^2$, il existe un test U. M. P. de l'hypothèse $\{ \theta'_0 \} \times \Theta''$ contre $\{ \theta'_1 \} \times \Theta'$ qui est $\mathscr{A}'$ mesurable.

Réduction de Hajek [*4*]

(III-12) DÉFINITION. — Étant donné une application mesurable τ de $(\Theta ; \mathscr{H})$ dans $(\Theta' ; \mathscr{H}')$, on dit que $(\tau ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H}, \mathscr{A})$ au sens de Hajek si :

a_h) la restriction de P à $\mathscr{A}'$ est $\tau^{-1}(\mathscr{H}')$ mesurable,

b_h) $(\forall\theta' \in \Theta')$, il existe un élément $Q^{\theta'}$ de l'enveloppe convexe de $\mathscr{P}^{\tau^{-1}(\theta')}$ telle que $\mathscr{A}'$ est $(\mathscr{A} ; \mathscr{Q}^{\Theta'})$ exhaustive (où $\mathscr{Q}^{\Theta'} = \{ Q^{\theta'} ; \theta' \in \Theta' \}$).

(III-13) PROPOSITION. — Soit ν une transition de $(\Theta' ; \mathscr{H}')$ dans $(\Theta ; \mathscr{H})$ vérifiant :

$$(\forall \theta' \in \Theta') \quad \nu[\tau^{-1}(\theta')] = 1 \qquad \text{et} \qquad M = \{ \nu \circ \mu', \mu' \in \mathscr{P}(\Theta', \mathscr{H}') \}$$

Si $(\tau ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ au sens de Hajek avec dans b_h) $(\forall \theta' \in \Theta')$ $Q^{\theta'} = P \circ \nu^{\theta'}$ alors $(\tau^{-1}(\mathscr{H}') ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour $(P ; M)$.

La réciproque est vraie si P est dominée et $\tau^{-1}(\mathscr{H}')$ caractérisée par ses atomes dans $\mathscr{H}$. La démonstration découle de (I-7) et (II-3).

(III-14) APPLICATION (voir [*4*]). — Soit $(D ; \mathscr{D})$ un espace de décision convexe localement compact à base dénombrable et L une fonction de coût défini sur $\Theta' \times D$, convexe en d, $\mathscr{H}' \vee \mathscr{D}$ mesurable. Pour toute stratégie S posons :

$$(\forall \theta' \in \Theta') \quad R(\theta', S) = \sup_{\tau^{-1}(\theta')} \int_X L(\tau(\theta), S(x)) P^{\theta}(dx)$$

Alors si $(\tau ; \mathscr{A}')$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ au sens de Hajek, à toute stratégie S, on peut associer une stratégie S', mesurable, telle que :

$$(\forall \theta' \in \Theta') \quad R(\theta', S') \leqslant R(\theta', S).$$

Réduction par invariance

Considérons comme dans (I-12) un groupe G de transformations laissant le modèle invariant. Nous avons alors :

(III-15) PROPOSITION. — Si μ est une mesure invariante par G, $(\mathscr{H}_G ; \tilde{\mathscr{A}}_G)$ est une réduction de $(\mathscr{H} ; \mathscr{A})$ pour (P, μ).

Démonstration. — Cela résulte de (I-13) et du fait que, pour $A' \in \mathscr{A}_G$ l'application $\theta \rightsquigarrow P^{\theta}(A')$ est $\mathscr{H}_G$-mesurable.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Ph. CAILLOT, Thèse de 3e cycle, I. S. S. U. P., Paris, 1966.

[*2*] Ph. CAILLOT et F. MARTIN, Modèle statistique bayésien. *Ann. Inst. H. Poincaré* (Série B), vol. **8**, 1972, p. 183-210.

[*3*] D. FRASER, Sufficient statistique with nuisance parameters. *Ann. Math. Stat.*, vol. **27**, 1956, p. 838-842.

[*4*] J. HAJEK, *On basic concepts of statistics.* 5e Berkeley, vol. **1**, p. 139-162.

[5] P. HALMOS et L. SAVAGE, Applications of the R. N. theorem to the theory of sufficient statistics. *Ann. Math. Stat.*, vol. **20**, 1949, p. 225-241.
[6] P. MEYER, *Probabilités et potentiel.* Hermann, 1966.
[7] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson, 1964.
[8] J. L. PETIT, Exhaustivité, ancillarité et invariance. *Ann. Inst. H. Poincaré* (Série B), vol. **6**, 1970, p. 327-334.
[9] G. A. HUNT, *Martingales et processus de Markov.* Dunod.

(Manuscrit reçu le 26 juin 1972).