ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN HAEZENDONCK

Un processus de branchement fellerien discernable

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 3 (1972), p. 265-306

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_265_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 3, 1972, p. 265-306. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Un processus de branchement fellerien discernable

par

Jean HAEZENDONCK
Aangesteld navorser van het
Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek
(Vrije Universiteit Brussel).

SUMMARY. — In this paper we study branching processes of distinguishable particles in a locally compact metrizable space. In the first chapter we give a complete construction of the process under rather general assumptions. The second chapter is devoted to the study of the semi-group of operators generated by the branching process; we prove that this semi-group is strongly continuous at the origin provided some regularity conditions are fulfilled. Finally we prove that the study of branching processes of indistinguishable particles can be deduced from the study of branching processes of distinguishable particles.

PLAN

INTRODUCTION ET HYPOTHÈSES

Nous nous proposons d'étudier un processus de branchement qui représente l'évolution d'un système de particules ou d'une colonie d'individus, ces particules ou ces individus étant supposés discernables entre eux.

Le premier chapitre sera consacré à la construction de ce processus à partir d'un certain nombre de données. Admettons que l'évolution du système ait lieu dans un espace localement compact à base d'ouverts dénombrable E. Sur l'espace $C_0(E)$ des fonctions réelles et continues sur E et qui tendent vers zéro à l'infini, nous considérons un semi-groupe sous-fellerien P_t, c'est-à-dire un semi-groupe d'opérateurs linéaires et continus de $C_0(E)$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ si t et $s \geqslant 0$;
(2) $P_0 = I$ (opérateur identité);
(3) $P_t f \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et pour toute fonction f de $C_0(E)$ qui soit non négative;
(4) $\| P_t f \| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$ et pour toute fonction f de $C_0(E)$ de norme inférieure à 1;
(5) $\lim\limits_{t \to 0} \| P_t f - f \| = 0$ pour toute fonction f appartenant à $C_0(E)$ (continuité forte à l'origine).

Désignons par ∞ le point à l'infini de l'espace E et par $\hat{E} = E \cup \{ \infty \}$ le compactifié d'Alexandroff de E. Il est bien connu que nous pouvons prolonger le semi-groupe P_t en un semi-groupe fellerien $\hat{P}_t$ sur l'espace $C(\hat{E})$ des fonctions réelles et continues sur $\hat{E}$; plus précisément :

(*a*) $\hat{P}_t$ vérifie les conditions (1), (2), (3) et (5) sur $C(\hat{E})$ et la condition (4′) : $\hat{P}_t(1) = 1$ pour tout $t \geqslant 0$;
(*b*) $\hat{P}_t$ est lié à P_t par la relation

$$\hat{P}_t f_0 = P_t f$$

si f appartient à $C_0(E)$ et si f_0 désigne l'extension de f à $\hat{E}$ en posant $f_0 = 0$ à l'infini.

Admettons qu'à l'instant initial $t = 0$ il y ait n individus dans l'espace E, localisés aux points $x_1, \ldots, x_n$. Nous supposons alors que ces n individus évoluent indépendamment les uns des autres suivant les processus markoviens

$$\{ (M, \mathscr{A}, P_{x_i}) ; \{ X_t : t \in \mathbb{R}^+ \} ; \hat{E} \} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

qui sont n réalisations du semi-groupe $\hat{P}_t$; dans les espaces de base $(M, \mathscr{A}, P_{x_i})$ M désigne l'ensemble de toutes les fonctions de l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}^+$ dans l'espace $\hat{E}$ qui sont continues à droite et possèdent en chaque point de $\mathbb{R}^+$ une limite à gauche ; $\mathscr{A}$ est la tribu produit sur M, et P_x est la mesure de probabilité provenant du semi-groupe $\hat{P}_t$; les variables aléatoires $\{ X_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$ sont définies de la façon suivante : si $\omega = (\omega_t : t \in \mathbb{R}^+)$ appartient à M alors $X_t(\omega) = \omega_t$. Il est bien connu que pour chacun de ces processus markoviens le point à l'infini ∞ représente un état piège. Désignons par T le temps d'entrée au point ∞, et choisissons ce temps aléatoire T comme le temps de branchement de chaque individu : si ω_j est une trajectoire possible pour l'individu repéré par l'indice j alors $T(\omega_j)$ est l'instant auquel cet individu donne naissance à de nouveaux individus. Afin de déterminer le nombre d'individus qui naissent à cet instant de branchement, nous introduisons en chaque point x de $\hat{E}$ une mesure de probabilité $p_k(x)$ sur les nombres entiers $\mathbb{Z}$ en supposant que $p_k(x) = 0$ si $k = 1$ et si $k < 0$; si

$$X_{T-}(\omega_j) = \lim_{t \uparrow T(\omega_j)} X_t(\omega_j)$$

est la limite à gauche de la trajectoire ω_j au point $T(\omega_j)$ (cette limite existe si $T(\omega_j) < \infty$) le nombre $p_k(X_{T-}(\omega_j))$ est par définition la probabilité de naissance de k nouveaux individus à l'instant de branchement $T(\omega_j)$. Il est clair que nous supposons que pour chaque k fixe, la fonction $p_k(x)$ de la variable x est mesurable. Les nouveaux individus doivent démarrer de k positions dans l'espace E ; afin de déterminer ces positions nous introduisons sur $\hat{E}$ une probabilité de transition $q(x, A)$ qui vérifie $q(x, \{ \infty \}) = 0$ pour tout point x de $\hat{E}$; chaque nouvel individu démarre alors d'un point y de E avec la probabilité $q(X_{T-}(\omega_j), dy)$. Ensuite, nous convenons de ce que les nouveaux individus évoluent encore indépendamment les uns des autres et suivant les processus markoviens $\{ (M, \mathscr{A}, P_{y_i}) ; \{ X_t : t \in \mathbb{R}^+ \} ; E \}$ $(i = 1, \ldots, k)$ qui sont k nouvelles réalisations du semi-groupe $\hat{P}_t$. Vu globalement, si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont n trajectoires possibles pour les n individus de départ et si l'individu « j » est le premier de ces individus à se brancher, c'est-à-dire si $T(\omega_j) < T(\omega_i)$ lorsque $i \neq j$, nous avons à partir de l'instant $T(\omega_j)$, $n - 1 + k$ individus avec une probabilité $p_k(X_{T-}(\omega_j))$, à savoir les $n - 1$ individus $1, \ldots, j - 1, j + 1, \ldots, n$ qui continuent à décrire les trajectoires $\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_n$, et les k nouveaux individus démarrant aux points $y_1, \ldots, y_k$ avec la probabilité $q(X_{T-}(\omega_j), dy_1) \ldots q(X_{T-}(\omega_j), dy_k)$. A partir de l'instant $T(\omega_j)$ nous raisonnons sur les $n - 1 + k$ individus comme sur les

n individus avant l'instant $T(\omega_j)$. Nous remarquons ici qu'une difficulté technique apparaît lorsque plusieurs individus se branchent au même instant, c'est-à-dire lorsque

$$\min \{ T(\omega_i) \mid s \leqslant i \leqslant n \}$$

est atteint pour plus d'un indice; afin de l'éviter nous introduisons l'hypothèse : $P_x(T = C) = 0$ pour toute constante $C \geqslant 0$ et pour tout point x de E. Heuristiquement le processus de branchement avec n individus au départ localisés aux points $x_1, \ldots, x_n$ est maintenant complètement défini. Il est clair que ce processus évolue dans l'espace des états

$$X = \sum_{n \geqslant 0} E^n.$$

La partie E^0 de X ne contient qu'un seul point, noté δ, qui représente l'état du processus lorsqu'il n'existe plus d'individus dans le système; il est donc naturel d'admettre que δ est un état piège pour le processus. Il peut être commode d'ajouter à l'espace des états X un point à l'infini, noté Δ, et qui représente l'explosion du système; en transportant alors chaque trajectoire du processus après l'explosion en Δ, nous obtenons un processus sans arrêt. Le premier chapitre est entièrement consacré à la construction rigoureuse de ce processus de branchement.

Si

$$\{ (W, \hat{\mathscr{F}}, \check{P}_{(x_1,\ldots,x_n)}) ; \{ Y_t : t \in \mathbb{R}^+ \}, X \cup \{ \Delta \} \}$$

est ce processus de branchement démarrant du point $(x_1, \ldots, x_n)$ de E^n, si $E_{(x_1,\ldots,x_n)}[\ \ ]$ est l'espérance mathématique associée à la mesure de probabilité $\check{P}_{(x_1,\ldots,x_n)}$ et si $\check{T}_{\{\Delta\}}$ est le temps d'entrée au point Δ, l'expression

$$\check{P}_t \mathscr{S}(.) = \check{E}.[\mathscr{S}(Y_t) 1_{t < \check{T}_{\{\Delta\}}}]$$

définit un semi-groupe $\check{P}_t$ d'opérateurs sur l'espace $\mathscr{B}(X)$ des fonctions réelles mesurables et bornées sur X. Le second chapitre est entièrement consacré à l'étude de ce semi-groupe. Nous démontrons entre autres que $\check{P}_t$ est solution d'une équation intégrale et que $\check{P}_t$ est un semi-groupe sous-fellerien sur l'espace $C_0(X)$ des fonctions réelles continues sur X et qui tendent vers zéro à l'infini; le processus de branchement étudié au premier chapitre est une réalisation du semi-groupe $\check{P}_t$. En dérivant l'équation intégrale par rapport au temps t à l'origine, nous pouvons espérer exhiber le générateur infinitésimal $\check{A}$ du semi-groupe $\check{P}_t$; cette méthode ne donne de bons résultats que sous la condition que $\frac{1}{t} P_x(T \leqslant t)$ tende uniformément sur E vers une fonction $\lambda(x)$ continue et prolongeable à $\hat{E}$ si t tend vers zéro. Mais indépendamment de cette hypothèse, il est impossible d'obtenir explicitement le générateur infinitésimal $\check{A}$ sur tout son domaine de définition. Néanmoins nous avons pu établir que lorsque p_0 est partout égal à zéro la partie de $C_0(X)$ où $\check{A}$ est explicitement déterminé, est partout dense dans le domaine de définition $\check{\mathscr{D}}$ de $\check{A}$ pour la norme du graphe. Il en résulte que dans ce cas le semi-groupe sous-fellerien $\check{P}_t$ est univoquement déterminé.

Pour finir nous indiquons comment il est possible de lever l'hypothèse de discernabilité en déduisant l'étude du processus de branchement à individus indiscernables de celle du processus de branchement à individus discernables.

*
* *

Ce travail contient l'essentiel d'une thèse de doctorat soutenue à la Vrije Universiteit Brussel le 23 février 1970. Je tiens à remercier M. J. Neveu pour avoir accepté de diriger cette thèse. Je désire aussi remercier M. P. A. Meyer et M. L. Waelbroeck pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches.

I. CONSTRUCTION DU PROCESSUS DE BRANCHEMENT

1. Construction d'un espace probabilisé

Désignons par M^n l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\hat{E}^n$ qui sont continues à droite et qui possèdent en chaque point de $\mathbb{R}^+$ une limite à gauche. Convenons de poser $\hat{E}^0 = \{\delta\}$, où δ est l'état qui exprime l'absence d'individus ; M^0 est donc l'ensemble formé d'une seule fonction, celle qui est constamment égale à δ. Désignons par $\mathscr{A}_t$ la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires $\{X_s : s \leqslant t\}$ et par $\mathscr{A}^{\otimes n}$ et $\mathscr{A}_t^{\otimes n}$ respectivement le produit de n-fois la tribu $\mathscr{A}$ et le produit de n-fois la tribu $\mathscr{A}_t$. Désignons finalement par $(U, \mathscr{U})$ l'espace somme $\sum_{n \geqslant 0} (M^n, \mathscr{A}^{\otimes n})$ et par $\mathscr{U}_t$ la tribu $\sum_{n \geqslant 0} \mathscr{A}_t^{\otimes n}$ sur U.

Soit $u = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ un point de M^m, et posons

$$\begin{aligned} S(u) &= \min \{ T(\omega_1), \ldots, T(\omega_m) \} && \text{si } m \neq 0 \\ &= \infty && \text{si } m = 0 \end{aligned}$$

LEMME 1.1. — S est un temps d'arrêt sur U par rapport à la famille croissante de tribus $\{ \mathcal{U}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$.

Démonstration. — Il est évident que

$$(S \leqslant t) = \sum_{n>0} \bigcup_{i=1}^{n} \{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid T(\omega_i) \leqslant t \} ;$$

posons

$$\begin{aligned} A_k^{(i)} &= M && \text{si } i \neq k \\ &= (T \leqslant t) && \text{si } i = k, \end{aligned}$$

il s'en suit que

$$(S \leqslant t) = \sum_{n>0} \bigcup_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{n} A_k^{(i)} ;$$

comme T est un temps d'arrêt sur M par rapport à la famille de tribus $\{ \mathcal{A}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$, il résulte que $\prod_{k=1}^{n} A_k^{(i)}$ appartient à $\mathcal{A}_t^{\otimes n}$, et donc $(S \leqslant t)$ appartient à $\mathcal{U}_t$, ce qui prouve le lemme.

Nous désignons par $\mathcal{U}_S$ la tribu des événements antérieurs à S, c'est-à-dire

$$\mathcal{U}_S = \{ A \in \mathcal{U} \mid A \cap (S \leqslant t) \in \mathcal{U}_t \text{ pour tout } t \geqslant 0 \} .$$

Nous avons admis qu'à l'instant initial il y ait n ($n \neq 0$) individus localisés aux points $(x_1, \ldots, x_n)$ dans l'espace E. Sur l'espace probabilisable $(U, \mathcal{U})$ nous définissons une mesure de probabilité $P^{(1)}_{(x_1,\ldots,x_n)}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P^{(1)}_{(x_1,\ldots,x_n)} &= P_{x_1} \cdot \ldots \cdot P_{x_n} && \text{sur } M^n \\ &= 0 && \text{sur } \sum_{m \neq n} M^m . \end{aligned}$$

Si $u = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ est un point de M^m ($m \neq 0$), posons

$$J(u) = \{ j \in (1, \ldots, m) \mid S(u) = T(\omega_j) \} ;$$

J(u) est une multi-application définie sur $\sum_{m \neq 0} M^m$. Désignons par $(U, \mathscr{U})^m$ l'espace produit $(U^m, \mathscr{U}^{\otimes m})$. Posons

$$D = \{ u \in U \mid \text{si } u = (\omega_1, \ldots, \omega_s) \text{ alors } T(\omega_i) \neq T(\omega_j) \text{ si } i \neq j \}$$

et

$$D_m = \prod_{i=1}^{m} A_i \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} A_i &= U \text{ si } i < m \\ &= D \text{ si } i = m ; \end{aligned}$$

il est clair que si u appartient à D alors J(u) est un singleton.

$$D_m = \prod_{i=1}^{m} A_i \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} A_i &= U \text{ si } i < m \\ &= D \text{ si } i = m ; \end{aligned}$$

il est clair que si u appartient à D alors J(u) est un singleton.

LEMME 1.2. — Quel que soit l'indice m, l'ensemble D_m est un ensemble mesurable de la tribu $\mathscr{U}^{\otimes m}$.

Démonstration. — Il suffit d'établir que D appartient à $\mathscr{U}$.
Mais

$$D = \sum_{p} \sum_{\sigma \in S_p} \{ (\omega_1, \ldots, \omega_p) \in M^p \mid T(\omega_{\sigma(1)}) < \ldots < T(\omega_{\sigma(p)}) \}$$

où S_p est le groupe symétrique d'ordre p ; donc

$$D = \sum_{p} \sum_{\sigma \in S_p} \bigcap_{i=1}^{p-1} \{ (\omega_1, \ldots, \omega_p) \in M^p \mid T(\omega_{\sigma(i)}) < T(\omega_{\sigma(i+1)}) \} ;$$

comme

$$\begin{aligned} \{ (\omega_1, \ldots, \omega_p) \in M^p \mid T(\omega_j) < T(\omega_k) \} &= \bigcup_{r \text{ rationnel}} \{ (\omega_1, \ldots, \omega_p) \in M^p \mid T(\omega_j) < r < T(\omega_k) \} \\ &= \bigcup_{r \text{ rationnel}} \prod_{s=1}^{p} B_s^{(r)}, \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} B_s^{(r)} &= M \text{ si } s \neq j \text{ et } s \neq k \\ &= (T < r) \text{ si } s = j \\ &= (T > r) \text{ si } s = k, \end{aligned} \end{aligned}$$

et comme toutes les opérations sont dénombrables, il vient que D appartient à $\mathscr{U}$, et le lemme est démontré.

LEMME 1.3. — L'hypothèse $P_x(T = C) = 0$ pour tout C de $\mathbb{R}^+$ et pour tout point x de E, implique que $P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}(D) = 1$.

Démonstration. — Il est évident que

$$P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}(D) = 1 - P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}\left[\bigcup_{i \neq j}((\omega_1, \dots, \omega_n) \in M^n \mid T(\omega_i) = T(\omega_j))\right];$$

d'où il résulte que

$$P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}(D) \geqslant 1 - \sum_{i \neq j} P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}[(\omega_1, \dots, \omega_n) \in M^n \mid T(\omega_i) = T(\omega_j)]$$

et

$$P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}(D) \geqslant 1 - \sum_{i \neq j} \int_{M \times M} 1_{T(\omega_i) = T(\omega_j)} P_{x_i}(d\omega_i) P_{x_j}(d\omega_j);$$

d'après le théorème de Fubini, le second membre de la dernière inégalité est égal à

$$1 - \sum_{i \neq j} \int_M P_{x_i}(d\omega_i) P_{x_j}(\omega_j \mid T(\omega_j) = T(\omega_i)),$$

et compte tenu de l'hypothèse, la dernière expression est égale à 1 ; ceci achève la démonstration du lemme.

Nous avons donc sur l'espace $(U, \mathscr{U})$ une mesure de probabilité $P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}$; d'autre part D appartient à $\mathscr{U}$ et $P^{(1)}_{(x_1,\dots,x_n)}(D) = 1$. Cela nous donne une base d'induction : admettons que nous ayons une mesure de probabilité $P^{(m-1)}_{(x_1,\dots,x_n)}$ sur l'espace produit $(U, \mathscr{U})^{m-1}$ vérifiant $P^{(m-1)}_{(x_1,\dots,x_n)}(D_{m-1}) = 1$. Nous allons construire une mesure de probabilité $P^{(m)}_{(x_1,\dots,x_n)}$ sur l'espace $(U, \mathscr{U})^m$ vérifiant $P^{(m)}_{(x_1,\dots,x_n)}(D_m) = 1$.

Pour la commodité nous admettons que le produit d'un nombre nul de fonctions réelles est égal à 1. D'autre part nous désignons par $\mathscr{E}_x$ la mesure de Dirac concentrée au point x, et par $\theta_t (t \in \mathbb{R}^+)$ les opérateurs de translation sur les trajectoires.

Soit $u = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ un point appartenant à D, et soit $u' = (\omega'_1, \dots, \omega'_r)$ un point appartenant à U ; si $s \neq 0$ nous posons

$$\psi(u, du') = p_{r-s+1}[X_{T-}(\omega_{J(u)})] \prod_{1 \leqslant i < J(u)} \mathscr{E}_{\theta_{S(u)}(\omega_i)}(d\omega'_i)$$
$$\times \prod_{J(u) \leqslant i \leqslant r-s+J(u)} \int_E P_{y_i}(d\omega'_i) q(X_{T-}(\omega_{J(u)}), dy_i) \prod_{r-s+J(u) < i \leqslant r} \mathscr{E}_{\theta_{S(u)}(\omega_{i-r+s})}(d\omega'_i)$$

et si $s = 0$, c'est-à-dire si $u = \delta$, nous posons

$$\begin{aligned}\psi(\delta, \mathrm{A}) &= 1 \text{ si } \delta \text{ appartient à A} \\ &= 0 \text{ si } \delta \text{ n'appartient pas à A.}\end{aligned}$$

Finalement si u appartient à D^c on pose $\psi(u, \mathrm{A}) = 0$ quel que soit A.

La fonction ψ exprime la transition du processus à chaque branchement. Remarquons que $\psi(u, du') = 0$ si $r < s - 1$ car $p_k(x) = 0$ si $k < 0$; d'autre part si $s = 1$ et $r = 0$ nous obtenons $\psi(u, \{\delta\}) = p_0[\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}(\omega)]$. La condition $\psi(\delta, \{\delta\}) = 1$ se justifie par le fait qu'une fois éteint, le processus reste éteint.

LEMME 1.4. — Si la fonction $\mathrm{X}_t(\omega_1)$ à valeurs dans E est mesurable en ω_1 appartenant à M et est continue à droite en t, et si $\mathrm{Z}(\omega_2)$ est une fonction à valeurs réelles non négatives et mesurable en ω_2 appartenant à M, alors $\mathrm{X}_{\mathrm{Z}(\omega_2)}(\omega_1)$ est conjointement mesurable en (ω_1, ω_2).

Démonstration. — Voir Neveu [*23*].

La proposition suivante démontre que $\psi(u, \mathrm{A})$ est une probabilité de transition.

PROPOSITION 1.1. — Si u est fixe dans D, la fonction $\psi(u, \mathrm{A})$ $(\mathrm{A} \in \mathscr{U})$ est une mesure de probabilité sur l'espace $(\mathrm{U}, \mathscr{U})$; si A est fixe dans $\mathscr{U}$, la fonction $\psi(u, \mathrm{A})$ est mesurable en u.

Démonstration. — Admettons que $u = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$ avec $s \neq 0$ soit fixe dans D; on voit dès lors facilement que $\psi(u, \mathrm{A})$ est une mesure de probabilité sur $(\mathrm{U}, \mathscr{U})$ qui est nulle sur $\sum\limits_{r<s-1} \mathrm{M}^r$.

Pour démontrer que $\psi(u, \mathrm{A}')$ est mesurable en u pour tout A' fixe dans $\mathscr{U}$, il suffit de démontrer la mesurabilité de $\psi(u, \mathrm{A}')$ pour tout A' appartenant à $\mathscr{U} \cap \mathrm{M}^r$; en prenant en considération le théorème de la classe monotone (voir par exemple Blumenthal-Getoor [*1*], il suffit même de faire la démonstration pour tout ensemble A' du type $\mathrm{A}'_1 \times \ldots \times \mathrm{A}'_r$ où chaque A'_i appartient à $\mathscr{A}$; sur un tel ensemble $\mathrm{A}'_1 \times \ldots \times \mathrm{A}'_r$ la fonction $\psi(u, \mathrm{A}')$ prend la forme

$$\psi(u, \mathrm{A}'_1 \times \ldots \times \mathrm{A}'_r) = p_{r-s+1}[\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}(\omega_{\mathrm{J}(u)})] \prod_{s \leqslant i < \mathrm{J}(u)} \mathscr{E}_{\theta_{\mathrm{S}(u)}(\omega_i)}(\mathrm{A}'_1)$$
$$\times \prod_{\mathrm{J}(u) \leqslant i \leqslant r-s+\mathrm{J}(u)} \int_{\mathrm{E}} \mathrm{P}_{y_i}(\mathrm{A}'_i) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}(\omega_{\mathrm{J}(u)}), dy_i) \prod_{r-s+\mathrm{J}(u) < i \leqslant r} \mathscr{E}_{\theta_{\mathrm{S}(u)}(\omega_{i-r+s})}(\mathrm{A}'_i) .$$

Il suffit donc d'établir la mesurabilité de chaque facteur de ce produit.

Considérons $A_j^s = \{ (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in M^s \cap D \mid T(\omega_j) < T(\omega_i) \text{ si } i \neq j \}$; comme A_j^s appartient à $\mathscr{A}^{\otimes s}$ et comme $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{s} A_j^s = D$, il suffit d'établir la mesurabilité de ces facteurs sur chaque partie A_j^s; d'abord il faut remarquer que $X_{T-}(\omega_j)$ est mesurable sur A_j^s. Il en résulte que $p_{r-s+1}[X_{T-}(\omega_j)]$ est mesurable sur chaque partie A_j^s. D'autre part comme $q(x, A)$ est une probabilité de transition, il vient que $\int_E P_{y_i}(A_i')q(x, dy_i)$ est mesurable en x ; par conséquent $\int_E P_{y_i}(A_i')q(X_{T-}(\omega_j), dy_i)$ est mesurable sur chaque partie A_j^s.

Finalement $\mathscr{E}_{\theta_{T(\omega_j)}(\omega_i)}(A_i')$ est mesurable sur A_j^s, dès que $\theta_{T(\omega_j)}(\omega_i)$ est mesurable pour la tribu $\mathscr{A}^{\otimes s}$ et cette mesurabilité résulte des considérations suivantes : si $B_1, \ldots, B_m$ sont m boréliens de $\hat{E}$, alors

$$\{ \theta_{T(\omega_j)}(\omega_i) \in (X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_m} \in B_m) \}$$
$$= A_j^s \cap \left[\bigcap_{k=1}^{m} \{ (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in M^s \mid X_{t_k + T(\omega_j)}(\omega_i) \in B_k \} \right],$$

et cet ensemble appartient à $\mathscr{A}^{\otimes s}$ d'après le lemme 1.4. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION 1.2. — L'expression

$$P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}(du_1, \ldots, du_m) = P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m-1)}(du_1, \ldots, du_{m-1})\psi(u_{m-1}, du_m)$$

définit une mesure de probabilité $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}$ sur l'espace $(U, \mathscr{U})^m$ vérifiant la condition $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}(D_m) = 1$.

Démonstration. — Soient A un ensemble de $\mathscr{U}^{\otimes(m-1)}$ et A_m un ensemble de $\mathscr{U}$; alors

$$P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}(A \times A_m) = \int_{D_{m-1} \cap A} P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m-1)}(du_1, \ldots, du_{m-1})\psi(u_{m-1}, A_m)$$

et comme $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m-1)}(D_{m-1}) = 1$, il vient que $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}$ est une mesure de probabilité sur $(U, \mathscr{U})^m$. Démontrons à présent que $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}(D_m) = 1$; il est clair que

$$P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}(D_m) = \int_{D_{m-1}} P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m-1)}(du_1, \ldots, du_{m-1})\psi(u_{m-1}, D) ;$$

il suffit donc d'établir que $\psi(u, D) = 1$ si u appartient à D ; cela revient à démontrer que $\psi(u, D^c \cap M^r) = 0$ pour tout r. Posons

$$A_{i,j}^r = \{ (\omega_1', \ldots, \omega_r') \in M^r \mid T(\omega_i') = T(\omega_j') \} ;$$

il ne reste plus qu'à prouver maintenant que $\psi(u, A_{i,j}^r) = 0$ pour tout r, i et j ; or $\psi(u, A_{i,j}^r)$ peut avoir une des trois formes suivantes :

$$a) \quad \psi(u, A_{i,j}^r) = p_{r-s+1}[X_{T-}(\omega_{J(u)})] \int_{T(\omega_i')=T(\omega_j')} \mathscr{E}_{\theta_{S(u)}(\omega_p)}(d\omega_i')\mathscr{E}_{\theta_{S(u)}(\omega_q)}(d\omega_j')$$

avec $p \neq q$; le second membre est nécessairement égal à zéro, car T est un temps terminal d'où il résulte que $T(\omega_p) \neq T(\omega_q)$ implique que $T(\omega_i') \neq T(\omega_j')$;

$$b) \quad \psi(u, A_{i,j}^r) = p_{r-s+1}[X_{T-}(\omega_{J(u)})] \int_{T(\omega_i')=T(\omega_j')} \mathscr{E}_{\theta_{S(u)}(\omega_p)}(d\omega_i') \times \int_E P_{y_j}(d\omega_j')q(X_{T-}(\omega_{J(u)}), dy_j) ;$$

en appliquant le théorème de Fubini nous obtenons

$$\psi(u, A_{i,j}^r) = p_{r-s+1}[X_{T-}(\omega_{J(u)})] \int_E P_{y_j}[\omega_j' \mid T(\omega_j') = T(\omega_p)]q(X_{T-}(\omega_{J(u)}), dy_j)$$

et le second membre est clairement égal à zéro ;

$$c) \quad \psi(u, A_{i,j}^r) = p_{r-s+1}[X_{T-}(\omega_{J(u)})] \int_{T(\omega_i')=T(\omega_j')} \int_E P_{y_i}(d\omega_i')q(X_{T-}(\omega_{J(u)}), dy_i) \times \int_E P_{y_j}(d\omega_j')q(X_{T-}(\omega_{J(u)}), dy_j) ;$$

en appliquant encore le théorème de Fubini l'intégrale multiple du second membre devient

$$\int_E \int_E \int_M P_{y_i}(d\omega_i')P_{y_j}[\omega_j' \mid T(\omega_j') = T(\omega_i')]q(X_{T-}(\omega_{J(u)}), dy_i)q(X_{T-}(\omega_{J(u)}), dy_j)$$

et cette intégrale est aussi égale à zéro.

La proposition est donc démontrée.

Nous avons sur chaque espace $(U, \mathscr{U})^m$ une mesure de probabilité $P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}$. Ces mesures vérifient la condition de projectivité suivante : si $\pi_s^m (m > s)$ désigne la projection de l'espace U^m sur l'espace U^s, et si A est un ensemble quelconque de $\mathscr{U}^{\otimes s}$, alors

$$P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(s)}(A) = P_{(x_1,\ldots,x_n)}^{(m)}(\pi_s^{m^{-1}}(A)).$$

Le théorème de Ionescu Tulcea (voir Neveu [*18*]) affirme qu'il existe une et une seule mesure de probabilité $P_{(x_1,\dots,x_n)}$ sur l'espace $(U, \mathscr{U})^{\mathbb{N}}$ vérifiant la condition suivante : si π_s désigne la projection de $U^{\mathbb{N}}$ sur U^s et si A appartient à $\mathscr{U}^{\otimes s}$ alors $P^{(s)}_{(x_1,\dots,x_n)}(A) = P_{(x_1,\dots,x_n)}(\pi_s^{-1}(A))$.

En fin de compte nous obtenons l'espace probabilisé

$$(U^{\mathbb{N}}, \mathscr{U}^{\otimes \mathbb{N}}, P_{(x_1,\dots,x_n)}).$$

Comme nous nous intéressons à l'évolution des individus dans chaque composante du produit $U^{\mathbb{N}}$ jusqu'à l'instant du prochain branchement lorsque nous passons à la composante suivante, il est clair que l'information donnée par la tribu $\mathscr{U}^{\otimes \mathbb{N}}$ est trop riche ; il y a donc lieu de remplacer la tribu $\mathscr{U}^{\otimes \mathbb{N}}$ par la sous-tribu plus adaptée $\mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$; le nouvel espace probabilisé $(U^{\mathbb{N}}, \mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}, P_{(x_1,\dots,x_n)})$ va nous permettre de construire le processus de branchement.

2. **Définition du processus de branchement**

Considérons l'espace $X = \sum_{n \geq 0} E^n$ qui est localement compact à base d'ouverts dénombrable. Nous ajoutons à X un point à l'infini Δ de façon à ce que l'espace $\hat{X} = X \cup \{ \Delta \}$ soit compact. Dans toute la suite de ce chapitre W sera l'espace des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\hat{X}$ qui sont continues à droite et qui possèdent en chaque point de $\mathbb{R}^+$ une limite à gauche. L'espace W sera muni de sa tribu produit $\hat{\mathscr{F}}$.

Si $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m, \dots)$ appartient à $U^{\mathbb{N}}$, nous posons

$$S^{(0)}(\bar{u}) = 0, \quad S^{(m)}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{m} S(u_i) \quad \text{et} \quad S^{(\infty)}(\bar{u}) = \lim_{m \to \infty} S^{(m)}(\bar{u}).$$

LEMME 2.1. — Les applications $S^{(m)}(m \in \mathbb{N})$ et $S^{(\infty)}$ définies sur $U^{\mathbb{N}}$ et à valeurs réelles sont mesurables pour la tribu $\mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$.

Démonstration. — Ce lemme se déduit facilement du lemme 1.1 qui affirme que S est un temps d'arrêt sur U par rapport à la famille de tribus $\{ \mathscr{U}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$.

PROPOSITION 2.1. — Il existe une application naturelle mesurable φ de l'espace probabilisable $(U^{\mathbb{N}}, \mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}})$ dans l'espace probabilisable $(W, \hat{\mathscr{F}})$.

Démonstration. — Soit $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_m, \ldots)$ un élément de $U^{\mathbb{N}}$ avec $u_m = (\omega_1^{(m)}, \ldots, \omega_{r_m}^{(m)})$, et considérons

$$A_m^{(t)} = \{ \bar{u} \in U^{\mathbb{N}} \mid S^{(m-1)}(\bar{u}) \leqslant t < S^{(m)}(\bar{u}) \}$$

et

$$A_\infty^{(t)} = \{ \bar{u} \in U^{\mathbb{N}} \mid S^{(\infty)}(\bar{u}) \leqslant t \}.$$

Considérons d'abord l'application $H_t(\bar{u})$ définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H_t(\bar{u}) &= t - S^{(m-1)}(\bar{u}) &\quad \text{sur} \quad & A_m^{(t)} \\ &= t - S^{(\infty)}(\bar{u}) &\quad \text{sur} \quad & A_\infty^{(t)} ; \end{aligned}$$

convenons d'autre part de poser

$$\tilde{X}_t(u_m) = (X_t(\omega_1^{(m)}), \ldots, X_t(\omega_{r_m}^{(m)})) ;$$

l'application $\varphi_t(\bar{u})$ peut être définie comme suit :

$$\text{sur } A_m^{(t)} \quad \text{on pose} \quad \varphi_t(\bar{u}) = \tilde{X}_{H_t(\bar{u})}(u_m)$$

et

$$\text{sur } A_\infty^{(t)} \quad \text{on pose} \quad \varphi_t(\bar{u}) = \Delta ;$$

$\{ \varphi_t(\bar{u}) : t \in \mathbb{R}^+ \}$ appartient bien à l'espace W.

Démontrons à présent la mesurabilité de φ ; désignons par Y_t les applications coordonnées définies de la façon suivante : si $w = (w_t : t \in \mathbb{R}^+)$ appartient à W alors $Y_t(w) = w_t$; il suffit alors d'établir la mesurabilité des applications $\{ Y_t \circ \varphi : t \in \mathbb{R}^+ \}$; montrons donc que si t est fixe et si $B_1, \ldots, B_r$ sont r boréliens de E, alors $\varphi^{-1}[Y_t \in B_1 \times \ldots \times B_r]$ appartient à la tribu $\mathcal{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$; il est clair que

$$\varphi^{-1}[Y_t \in B_1 \times \ldots \times B_r] = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(t)} \cap \left\{ \bar{u} = (u_1, \ldots, u_m, \ldots) \mid \tilde{X}_{H_t(\bar{u})}(u_m) \in \prod_{k=1}^{r} B_k \right\}.$$

D'après le lemme 2.1 $A_m^{(t)}$ appartient à $\mathcal{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$; d'autre part l'application $\tilde{X}_s(u_m)$ est $\mathcal{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$-mesurable sur l'ensemble $\{ \bar{u} \mid s < S(u_m) \}$; comme $\tilde{X}_s(u_m)$ est continue à droite en s et comme l'application $s = t - S^{(m-1)}(\bar{u})$ est $\mathcal{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$-mesurable et vérifie la double inégalité $0 \leqslant s < S(u_m)$ sur $A_m^{(t)}$, il vient d'après le lemme 1.4 que l'application $\tilde{X}_{H_t(\bar{u})}(u_m)$ est $\mathcal{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$-mesurable sur l'ensemble $A_m^{(t)}$. Par conséquent l'ensemble $\varphi^{-1}\left[Y_t \in \prod_{k=1}^{r} B_k \right] \cap A_m^{(t)}$

appartient à $\mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}$ pour tout $m < \infty$, et lorsque $m = \infty$ alors $\varphi^{-1}\left[Y_t \in \prod_{k=1}^{r} B_k \right] = \emptyset$. La proposition est donc démontrée.

Désignons par $\check{P}_{(x_1,\dots,x_n)}$ la mesure de probabilité sur l'espace $(W, \hat{\mathscr{I}})$, image de la mesure de probabilité $P_{(x_1,\dots,x_n)}$ sur $(U^{\mathbb{N}}, \mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}})$ par l'application φ. L'espace probabilisé $(W, \hat{\mathscr{I}}, \check{P}_{(x_1,\dots,x_n)})$ est l'espace de base du processus de branchement, $\hat{X}$ est l'espace des états et les applications-coordonnées $\{ Y_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$ sont les variables aléatoires. Le processus de branchement

$$\{ (W, \hat{\mathscr{I}}, \check{P}_{(x_1,\dots,x_n)}) ; \{ Y_t : t \in \mathbb{R}^+ \} ; \hat{X} \}$$

est donc complètement défini. Dans la suite nous désignerons par $\check{E}_{(x_1,\dots,x_n)}$ l'espérance mathématique associée à $\check{P}_{(x_1,\dots,x_n)}$.

Considérons sur $\hat{X}$ une application ψ à valeurs entières définie comme suit :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{x}) &= n \qquad \text{si} \qquad \bar{x} \text{ appartient à } E^n \\ &= \infty \qquad \text{si} \qquad \bar{x} = \Delta. \end{aligned}$$

Posons $N_t = \psi \circ Y_t$; nous obtenons un second processus stochastique

$$\{ (W, \hat{\mathscr{I}}, \check{P}_{(x_1,\dots,x_n)}) ; \{ N_t : t \in \mathbb{R}^+ \} ; \mathbb{N} \cup \{ \infty \} \}$$

qui donne à chaque instant t le nombre d'individus dans le processus de branchement. Les trajectoires de ce processus de sauts sont continues à droite. Nous avons trivialement $\check{P}_{(x_1,\dots,x_n)}(N_0 = n) = 1$. Comme nous avons supposé que $p_1(x) = 0$ les branchements se caractérisent par le passage du processus d'une partie E^r de $\hat{X}$ dans une autre partie $E^s (s \neq r)$. Il est donc naturel de définir le premier temps de branchement comme suit : si w appartient à W alors

$$\check{T}_1(w) = \inf \{ t \mid N_0(w) \neq N_t(w) \} .$$

Si $\{ \check{\theta}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$ sont les opérateurs de translation sur les trajectoires, les autres temps de branchement sont définis par récurrence :

$$\check{T}_m(w) = \check{T}_{m-1}(w) + \check{T}_1 \circ \check{\theta}_{\check{T}_{m-1}}(w)$$

Désignons par $\hat{\mathscr{I}}_t$ la tribu sur W engendrée par la famille de variables aléatoires $\{ Y_s : s \leqslant t \}$ et par $\mathscr{N}_t$ la tribu sur W engendrée par la famille de variables aléatoires $\{ N_s : s \leqslant t \}$. Nous avons trivialement l'inclusion $\mathscr{N}_t \subset \hat{\mathscr{I}}_t$.

PROPOSITION 2.2. — Les temps de branchement $\check{T}_m (m \in \mathbb{N})$ sont des temps d'arrêt par rapport à la famille croissante de tribus $\{ \mathcal{N}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$ et donc aussi par rapport à la famille croissante de tribus $\{ \hat{\mathcal{I}}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$.

Démonstration. — $\check{T}_1$ est un temps d'arrêt car

$$(\check{T}_1 \leqslant t) = \sum_n (N_0 = n) \cap \left[\bigcup_{\substack{r \text{ rationnel} \\ \leqslant t}} (N_r \neq n) \right]$$

on démontre alors facilement que les itérés sont aussi des temps d'arrêt.

Désignons par $\hat{\mathcal{I}}_{\check{T}_m}$ la tribu des événements antérieurs à $\check{T}_m$. Si $\bar{u}$ appartient à $U^{\mathbb{N}}$, nous avons trivialement $S^{(m)}(\bar{u}) = \check{T}_m \circ \varphi(\bar{u})$; remarquons encore que $\check{T}_\infty = \lim\limits_{m \to \infty} \check{T}_m$ est aussi un temps d'arrêt. Désignons par $\check{T}_{\{\Delta\}}$ le temps d'entrée du processus de branchement dans $\{ \Delta \}$; nous avons alors la propriété $\check{T}_{\{\Delta\}} = \check{T}_\infty \check{P}_{(x_1,\ldots,x\ )}$-p. s. car

$$\check{P}_{(x_1,\ldots,x_n)}(\check{T}_{\{\Delta\}} = \check{T}_\infty) = P_{(x_1,\ldots,x_n)}(\check{T}_{\{\Delta\}} \circ \varphi = \check{T}_\infty \circ \varphi)$$

et sur $U^{\mathbb{N}}$ on a toujours $\check{T}_{\{\Delta\}} \circ \varphi = \check{T}_\infty \circ \varphi$.

3. Propriétés du processus de branchement

Ce paragraphe est essentiellement consacré à la démonstration du caractère markovien du processus de branchement. Énonçons d'abord un lemme dont la démonstration, très facile, est omise.

LEMME 3.1. — Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus de sous-ensembles d'un espace abstrait Ω_1 et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux tribus de sous-ensembles d'un autre espace abstrait Ω_2 ; admettons que l'on ait les inclusions $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ et que la tribu $\mathcal{B}_2$ soit engendrée par une partition dénombrable de Ω_2 ; nous avons alors l'égalité $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1) \cap (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{B}_2)$.

Désignons par $\mathcal{T}$ la tribu triviale sur l'espace U formée de l'ensemble vide $\emptyset$ et de U. Pour tout indice m nous introduisons les tribus $\mathcal{B}_t^{(m)}$ sur l'espace $U^{\mathbb{N}}$; ces tribus sont définies comme suit : si m et t sont donnés alors

$$\mathcal{B}_t^{(m)} = \bigotimes_{i \geqslant 1} \mathcal{C}_i \quad \text{où } \mathcal{C}_i = \begin{cases} \mathcal{U}_S & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant m \\ \mathcal{U}_t & \text{si } i = m+1 \\ \mathcal{T} & \text{si } i > m+1 \end{cases}$$

Remarquons que dans la tribu $\mathcal{B}_0^{(m)}$ le facteur d'ordre $m+1$ $\mathcal{U}_0$ est la tribu sur U engendrée par la partition dénombrable $\{ M^n : n \geqslant 0 \}$.

LEMME 3.2. — Les tribus $\varphi^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m}$ et $\mathscr{B}_0^{(m)}$ sur $U^{\mathbb{N}}$ vérifient l'inclusion $\varphi^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m} \subset \mathscr{B}_0^{(m)}$.

Démonstration. — Soit A un ensemble de la tribu $\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m}$; si $t_1 < \ldots < t_m$ alors l'ensemble $A \cap (\check{T}_1 = t_1) \cap \ldots \cap (\check{T}_m = t_m)$ appartient à la tribu $\hat{\mathscr{I}}_{t_m}$ et $\varphi^{-1}(A) \cap (S^{(1)} = t_1) \cap \ldots \cap (S^{(m)} = t_m)$ appartient à $\varphi^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{t_m}$; on voit facilement que

$$\varphi^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{t_m} \cap (S^{(1)} = t_1) \cap \ldots \cap (S^{(m)} = t_m) \subset \mathscr{B}_0^{(m)} \cap (S^{(1)} = t_1) \cap \ldots \cap (S^{(m)} = t_m).$$

Comme la tribu $\mathscr{U}_0 \otimes \mathscr{T}^{\otimes\mathbb{N}}$ est engendrée par une partition dénombrable, il vient que l'ensemble $\varphi^{-1}(A)$ appartient à la tribu $\mathscr{P}(U^m) \otimes \mathscr{U}_0 \otimes \mathscr{T}^{\otimes\mathbb{N}}$, où $\mathscr{P}(U^m)$ est la tribu sur U^m formée de tous les sous-ensembles de U^m. D'autre part il résulte de la mesurabilité de φ que l'ensemble $\varphi^{-1}(A)$ appartient à la tribu $\mathscr{U}_S^{\otimes\mathbb{N}}$; par conséquent $\varphi^{-1}(A)$ appartient à la tribu $\mathscr{U}_S^{\otimes\mathbb{N}} \cap (\mathscr{P}(U^m) \otimes \mathscr{U}_0 \otimes \mathscr{T}^{\otimes\mathbb{N}})$, mais cette tribu est égale à la tribu $\mathscr{B}_0^{(m)}$ d'après le lemme 3.1 ce qui achève la démonstration.

Considérons un temps d'arrêt $\check{S}$ sur l'espace W par rapport à la famille croissante de tribus $\{\hat{\mathscr{I}}_t : t \in \mathbb{R}^+\}$, et désignons par $\hat{\mathscr{I}}_{\check{S}}$ la tribu des événements antérieurs à $\check{S}$. Affirmer que le processus de branchement est markovien par rapport à $\check{S}$ revient à démontrer que si Z est une variable aléatoire réelle intégrable sur l'espace $(W, \hat{\mathscr{I}})$, alors

$$\check{E}_{(x_1,\ldots,x_n)}[Z \circ \check{\theta}_{\check{S}} \mid \hat{\mathscr{I}}_{\check{S}}] = \check{E}_{Y_{\check{S}}}[Z] \qquad \check{P}_{(x_1,\ldots,x_n)}\text{-p. s.}$$

Comme l'ensemble $(\check{T}_m \leqslant \check{S} < \check{T}_{m+1})$ appartient à la tribu $\hat{\mathscr{I}}_{\check{S}}$ quel que soit l'indice m, nous pouvons admettre dans la suite de ce paragraphe et sans nuire à la généralité que les inégalités $\check{T}_m \leqslant \check{S} < \check{T}_{m+1}$ sont vérifiées sur tout l'espace W.

Énoncons d'abord un lemme qui sera utile dans la suite; pour une démonstration de ce lemme nous renvoyons le lecteur à [*11*].

LEMME 3.3. — Soit E un espace localement compact à base d'ouverts dénombrable et admettons que E soit l'espace des états d'un processus stochastique $\{(\Omega, \mathscr{A}, P); \{X_t : t \in \mathbb{R}^+\}; E\}$; admettons en plus que dans l'espace de base $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, l'ensemble Ω est formé de toutes les applications de $\mathbb{R}^+$ dans E qui sont continues à droite et qui possèdent en chaque point de $\mathbb{R}^+$ une limite à gauche; $\mathscr{A}$ est la tribu produit sur Ω et les variables aléatoires $\{X_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ sont définies de la façon suivante : si $\omega = (\omega_t : t \in \mathbb{R}^+)$ appartient à Ω alors $X_t(\omega) = \omega_t$. Si T est un temps d'arrêt par rapport à la famille croissante de tribus $\{\mathscr{A}_t : t \in \mathbb{R}^+\}$, ou $\mathscr{A}_t$ est engendrée par les variables aléatoires $\{X_s : s \leqslant t\}$, et si t est une constante positive, alors la tribu $\mathscr{A}_{T+t}$ est engendrée par la tribu $\mathscr{A}_T$ et par les variables aléatoires $\{ X_{T+s} : s \leqslant t \}$.

Si $\bar{u}$ appartient à $U^{\mathbb{N}}$ nous posons $\xi(\bar{u}) = \check{S} \circ \varphi(\bar{u})$.

LEMME 3.4. — La fonction $\xi(\bar{u}) - S^{(m)}(\bar{u})$ définie sur $U^{\mathbb{N}}$ est un temps d'arrêt par rapport à la famille croissante de tribus $\{ \mathscr{B}_t^{(m)} : t \in \mathbb{R}^+ \}$; si $\mathscr{B}^{(m)}_{\xi - S^{(m)}}$ est la tribu des événements antérieurs à $\xi - S^{(m)}$, nous avons l'inclusion $\varphi^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{\check{S}} \subset \mathscr{B}^{(m)}_{\xi - S^{(m)}}$.

Démonstration. — Étant donné que $\check{T}_m \leqslant \check{S} < \check{T}_{m+1}$ on voit facilement que

$$(\xi - S^{(m)} \leqslant t) = \bigcup_{\substack{r \text{ rat} \\ \leqslant t}} (\xi - S^{(m)} \leqslant r) \cap (\bar{u} \mid S(u_{m+1}) > r) ;$$

d'autre part $(\xi - S^{(m)} \leqslant r) = \varphi^{-1}(\check{S} \leqslant \check{T}_m + r)$ et cet ensemble appartient à la tribu $\varphi^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m + r}$ car $\check{S}$ est un temps d'arrêt. Mais la tribu $\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m + r}$ est engendrée par la tribu $\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m}$ et par la famille de variables aléatoires $\{ Y_{\check{T}+s} : s \leqslant r \}$ d'après le lemme 3.3. En tenant compte du lemme 3.2 on montre alors facilement que $(\xi - S^{(m)} \leqslant r) \cap (\bar{u} \mid S(u_{m+1}) > r)$ appartient à la tribu $\mathscr{B}_r^{(m)} \cap (\bar{u} \mid S(u_{m+1}) > r)$. Comme l'ensemble $(\bar{u} \mid S(u_{m+1}) > r)$ appartient à la tribu $\mathscr{B}_r^{(m)}$ d'après le lemme 1.1 et comme $r \leqslant t$ il vient que $(\xi - S^{(m)} \leqslant t)$ appartient à $\mathscr{B}_t^{(m)}$ ce qui achève la première partie de la démonstration.

Soit A un ensemble de la tribu $\hat{\mathscr{I}}_{\check{S}}$; par conséquent l'ensemble $A \cap (\check{S} \leqslant \check{T}_m + t)$ appartient à $\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m + t}$ et $\varphi^{-1}(A) \cap (\xi - S^{(m)} \leqslant t)$ appartient à $\varphi^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{\check{T}_m + t}$; d'après la première partie de la démonstration il résulte alors que $\varphi^{-1}(A) \cap (\xi - S^{(m)} \leqslant t)$ appartient à la tribu $\mathscr{B}_t^{(m)}$, d'où la conclusion que $\varphi^{-1}(A)$ appartient à la tribu $\mathscr{B}^{(m)}_{\xi - S^{(m)}}$ des événements antérieurs à $\xi - S^{(m)}$ et le lemme est démontré.

De la démonstration précédente il résulte que $\xi - S^{(m)}(\bar{u})$ ne dépend en fait que des $m + 1$ variables $u_1, \ldots, u_{m+1}$; $\xi - S^{(m)}$ peut donc être considéré comme un temps d'arrêt sur U^{m+1} par rapport à la famille croissante de tribus $\{ \mathscr{U}_S^{\otimes m} \otimes \mathscr{U}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$. Si nous désignons par $\underline{\mathscr{B}}_t^{(m)}$ la tribu $\mathscr{U}_S^{\otimes m} \otimes \mathscr{U}_t$ et par $\underline{\mathscr{B}}^{(m)}_{\xi - S^{(m)}}$ la tribu sur U^{m+1} des événements antérieurs à $\xi - S^{(m)}$ alors on montre facilement que $\mathscr{B}^{(m)}_{\xi - S^{(m)}} = \underline{\mathscr{B}}^{(m)}_{\xi - S^{(m)}} \otimes \mathscr{T}^{\otimes \mathbb{N}}$.

PROPOSITION 3.1. — Le processus de branchement

$$\{ (W, \hat{\mathscr{I}}, \check{P}_{(x_1, \ldots, x_n)}) ; \{ Y_t : t \in \mathbb{R}^+ \} ; \hat{X} \}$$

est fortement markovien ; c'est-à-dire si $\check{S}$ est temps d'arrêt par rapport à la famille croissante de tribus $\{ \hat{\mathscr{I}}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$ qui vérifie $\check{T}_m \leqslant \check{S} < \check{T}_{m+1}$, et si Z est une variable aléatoire réelle intégrable sur l'espace $(W, \hat{\mathscr{I}})$ alors

$$\check{E}_{(x_1,\ldots,x_n)}[Z \circ \check{\theta}_{\check{S}} \mid \hat{\mathscr{I}}_{\check{S}}] = \check{E}_{Y_{\check{S}}}[Z] \quad \check{P}_{(x_1,\ldots,x_n)}\text{-p. s.}$$

Démonstration. — Si A est un ensemble mesurable de $\hat{\mathscr{I}}_{\check{S}}$ nous devons démontrer que

$$\int_A Z \circ \check{\theta}_{\check{S}} d\check{P}_{(x_1,\ldots,x_n)} = \int_A \check{E}_{Y_{\check{S}}}[Z] d\check{P}_{(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Posons $f = Z \circ \varphi$; si $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_p, \ldots)$ appartient à $U^{\mathbb{N}}$ avec $u_{m+1} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ on pose $\tilde{\theta}_t(u_{m+1}) = (\theta_t(\omega_1), \ldots, \theta_t(\omega_r))$ et

$$\tilde{X}_t(u_{m+1}) = (X_t(\omega_1), \ldots, X_t(\omega_r)) ;$$

comme le temps d'arrêt T est un temps terminal on voit facilement que

$$Z \circ \check{\theta}_{\check{S}} \circ \varphi(u_1, \ldots, u_p, \ldots) = f(\tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1}), u_{m+2}, \ldots)$$

Compte tenu du lemme 3.4 et du théorème de Ionescu Tulcea il suffit d'établir que

$$\int_{B \times U^{\mathbb{N}}} f(\tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1}), u_{m+2}, \ldots, u_{m+p}, \ldots) dP_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_p, \ldots)$$
$$= \int_B E_{\tilde{X}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1})}[f] dP^{(m+1)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_{m+1})$$

où B appartient à $\mathscr{B}^{(m)}_{\xi - S^{(m)}}$.

Un certain nombre de considérations bien connues de la théorie de la mesure nous permet d'affirmer qu'il suffit d'établir l'égalité des deux intégrales pour une fonction f qui ne dépend que d'un nombre fini de variables $u_1, \ldots, u_p$; appliquons le théorème de Ionescu Tulcea et le théorème de Fubini à l'intégrale du second membre de l'égalité à démontrer ; nous obtenons

$$\int_{U^p} f(v_1, \ldots, v_p) \left[\int_B dP^{(1)}_{\tilde{X}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1})}(v_1) dP^{(m+1)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_{m+1}) \right]$$
$$\psi(v_1, dv_2) \ldots \psi(v_{p-1}, dv_p).$$

Dans cette intégrale multiple nous considérons l'intégrale suivante

$$\int_B P^{(1)}_{\tilde{X}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1})}(C) dP^{(m)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_m) \psi(u_m, du_{m+1})$$

avec C appartenant à $\mathscr{U}_S$; fixons les valeurs des variables $u_1, \ldots, u_m$.

Comme $\{ u_{m+1} \mid \xi - S^{(m)}(u_1, \ldots, u_{m+1}) \leqslant t \}$ est la section suivant $(u_1, \ldots, u_m)$ de l'ensemble $\{ (u_1, \ldots, u_{m+1}) \mid \xi - S^{(m)}(u_1, \ldots, u_{m+1}) \leqslant t \}$

qui appartient à $\mathscr{B}_t^{(m)}$, cette section appartient à $\mathscr{U}_t$; d'autre part la section suivant $(u_1, \ldots, u_m)$ de l'ensemble B appartient à la tribu $\mathscr{U}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_m,.)}$ des événements antérieurs à $\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots, u_m,.)$ considéré comme temps d'arrêt sur U par rapport à la famille croissante de tribus $\{ \mathscr{U}_t : t \in \mathbb{R}^+ \}$. En explicitant la probabilité de transition $\psi(u_m, du_{m+1})$ nous pouvons appliquer à la précédente intégrale la propriété de Markov sur les trajectoires parcourues par chaque individu ; si nous désignons par $B(u_1, \ldots, u_m)$ la section suivant $(u_1, \ldots, u_m)$ de l'ensemble B, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\int_{B(u_1,\ldots,u_m)} P^{(1)}_{X_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_m,u_{m+1})}(u_{m+1})}(C)\psi(u_m, du_{m+1})$$
$$= \int_{B(u_1,\ldots,u_m)} 1_C \circ \tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1})\psi(u_m, du_{m+1})$$

En tenant compte de cela, l'intégrale multiple devient

$$\int_{U^p} f(v_1, \ldots, v_p)\left[\int_B \varepsilon_{\tilde{\theta}_{\xi - S(m)(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1})}(dv_1)dP^{(m+1)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_{m+1})\right]$$
$$\psi(v_1, dv_2) \ldots \psi(v_{p-1}, dv_p)$$

où ε est la mesure de Dirac.

Appliquons le théorème de Fubini ; cela nous donne

$$\int_{B \times U^p} f(\tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1}), v_2, \ldots, v_p)dP^{(m+1)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_{m+1})$$
$$\psi(\tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1}), dv_2) \ldots \psi(v_{p-1}, dv_p) \ ;$$

T étant un temps terminal on montre aisément que

$$\psi(\tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1}), A) = \psi(u_{m+1}, A)$$

car $\check{T}_m \leqslant \check{S} < \check{T}_{m+1}$.

Nous obtenons finalement

$$\int_{B \times U^p} f(\tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1}), v_2, \ldots, v_p)dP^{(m+p)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_{m+1}, v_2, \ldots, v_p)$$

et moyennant un changement de variables et en tenant compte du théorème de Ionescu Tulcea cette intégrale est égale à

$$\int_{B \times U^{\mathbb{N}}} f(\tilde{\theta}_{\xi - S^{(m)}(u_1,\ldots,u_{m+1})}(u_{m+1}), u_{m+2}, \ldots, u_{m+p}, \ldots)dP_{(x_1,\ldots,x_n)}$$
$$(u_1, \ldots, u_{m+p}, \ldots)$$

ce qui achève la démonstration.

Nous avons construit le processus de branchement en partant de n individus localisés aux points $x_1, \ldots, x_n$ de l'espace E. Il est clair que nous avons en fait n processus de branchement démarrant chacun d'un point x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Nous avons émis l'hypothèse que les individus n'ont aucune interaction ; il est donc normal que les n processus de branchement évoluent indépendamment entre eux. Cette propriété est concrétisée par la proposition suivante.

Proposition 3.2. — Si $A_1, \ldots, A_r$ sont r boréliens de l'espace E, alors

$$\check{E}_{(x_1,\ldots,x_n)}\left[1_{\prod_{k=1}^{r} A_k}(Y_t)\right] = \sum_{0=r_0\leqslant\ldots\leqslant r_n=r} \prod_{j=1}^{n} \check{E}_{(x_j)}\left[1_{\prod_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} A_k}(Y_t)\right]$$

en convenant de poser $\prod_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} A_k = E^0$ si $r_{j-1} = r_j$.

Démonstration. — Posons $\check{T}_0 = 0$; il est clair que

$$\check{E}_{(x_1,\ldots,x_n)}\left[1_{\prod_{k=1}^{r} A_k}(Y_t)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \check{E}_{(x_1,\ldots,x_n)}\left[1_{\prod_{k=1}^{r} A_k}(Y_t) 1_{\check{T}_i \leqslant t < \check{T}_{i+1}}\right]$$

en se ramenant à l'espace $(U^{\mathbb{N}}, \mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}, P_{(x_1,\ldots,x_n)})$ le second membre de l'égalité précédente devient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} E_{(x_1,\ldots,x_n)}\left[1_{\prod_{k=1}^{r} A_k}(Y_t \circ \varphi) 1_{S^{(i)} \leqslant t < S^{(i+1)}}\right] ;$$

mais $S^{(i)}$ ne dépend que des variables $(u_1, \ldots, u_i)$ et $S^{(i+1)}$ ne dépend que des variables $(u_1, \ldots, u_{i+1})$; en appliquant le théorème de Ionescu Tulcea nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{U^{i+1}} 1_{\prod_{k=1}^{r} A_k}(\tilde{X}_{t-S^{(i)}(u_1,\ldots,u_i)}(u_{i+1})) 1_{S^{(i)} \leqslant t < S^{(i+1)}} (u_1, \ldots, u_{i+1}) dP^{(i+1)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_{i+1}).$$

En explicitant les probabilités de transition $\psi(u, du')$ dans

$$dP^{(i+1)}_{(x_1,\ldots,x_n)}(u_1, \ldots, u_{i+1})$$

et en regroupant les branches provenant de chaque x_i nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{0=r_0\leqslant\ldots\leqslant r_n=r} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_n=i\\ i_j\geqslant 0}} \prod_{j=1}^{n} \int_{U^{i_j+1}} 1_{\prod_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} A_k}(\tilde{X}_{t-S^{(i_j)}(u_1,\ldots,u_{i_j})}(u_{i_j+1}))$$
$$1_{S^{(i_j)}\leqslant t<S^{(i_j+1)}}(u_1, \ldots, u_{i_j+1})dP^{(i_j+1)}_{(x_j)}(u_1, \ldots, u_{i_j+1}).$$

En appliquant une seconde fois le théorème de Ionescu Tulcea et en revenant à l'espace de base $(W, \hat{\mathscr{F}})$ du processus, l'expression précédente devient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{0=r_0\leqslant\ldots\leqslant r_n=r} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_n=i\\ i_j\geqslant 0}} \prod_{j=1}^{n} \check{E}_{(x_j)}\left[1_{\prod_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} A_k}(Y_t)1_{\check{T}_{i_j}\leqslant t<\check{T}_{i_j+1}}\right],$$

et ceci est égal à

$$\sum_{0=r_0\leqslant\ldots\leqslant r_n=r} \prod_{j=1}^{n} \check{E}_{(x_j)}\left[1_{\prod_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} A_k}(Y_t)\right]$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

II. SEMI-GROUPE ET GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL DU PROCESSUS DE BRANCHEMENT

Rappelons que nous désignons par $C_0(X)$ l'espace de Banach des fonctions définies sur $X = \sum_{n\geqslant 0} E^n$, à valeurs réelles, continues et qui tendent vers zéro à l'infini ; cet espace est muni de la norme :

$$\|\mathscr{S}\| = \sup_{\bar{x}\in X} |\mathscr{S}(\bar{x})|$$

si $\mathscr{S}$ appartient à $C_0(E)$. Si $\{ f_r : r = 1, \ldots, k \}$ sont k fonctions appartenant à $C_0(E)$, nous définissons une nouvelle fonction $\bigotimes_{r=1}^{k} f_r$ sur X comme suit :

$$\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(\bar{x}) = \prod_{r=1}^{k} f_r(x_r) \quad \text{si} \quad \bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$$
$$= 0 \qquad \text{si} \quad \bar{x} \text{ appartient à } X \backslash E^k.$$

Il est clair que la fonction $\bigotimes_{r=1}^{k} f_r$ appartient à l'espace $C_0(X)$; désignons par $C_0(E)^{\Sigma\otimes}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions du type

$$\bigotimes_{r=1}^{k} f_r (f_r \in C_0(E),\ k \in \mathbb{N})$$

et par la fonction-indicatrice $1_{\{\delta\}}$; $C_0(E)^{\Sigma\otimes}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach $C_0(X)$. Dans la suite de ce chapitre nous ferons constamment intervenir le semi-groupe fortement continu P_t ainsi que son générateur infinitésimal A et le domaine de définition $\mathscr{D}$ de celui-ci.

Conformément à la notation précédente nous désignons par $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions du type $\bigotimes_{r=1}^{k} f_r$, où chaque f_r appartient à $\mathscr{D}$, et par l'indicatrice $1_{\{\delta\}}$.

En tenant compte de la densité de $\mathscr{D}$ dans $C_0(E)$ et du théorème de Stone-Weierstrass il est très facile à démontrer que l'espace $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$, et par conséquent l'espace $C_0(E)^{\Sigma\otimes}$, est partout dense dans l'espace de Banach $C_0(X)$.

1. Équation intégrale fondamentale du processus de branchement

Considérons la fonction $\bigotimes_{r=1}^{k} f_r$ appartenant à l'espace $C_0(E)^{\Sigma\otimes}$. Il est clair que si x appartient à E, alors

$$\check{E}_{(x)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_t)\right] = \check{E}_{(x)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_t)1_{t<\check{T}_1}\right] + \check{E}_{(x)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_t)1_{\check{T}_1\leqslant t}\right].$$

Il est évident que

$$\check{E}_{(x)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_t)1_{t<\check{T}_1}\right] \begin{aligned} &= 0 \quad \text{si} \quad k \neq 1 \\ &= P_t f \quad \text{si} \quad k = 1. \end{aligned}$$

Occupons-nous à présent du second terme du second membre :

$$\check{E}_{(x)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_t)1_{\check{T}_1\leqslant t}\right] = \int 1_{\check{T}_1\leqslant t}\check{E}_{(x)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_{\check{T}_1\vee t}) \mid \hat{\mathscr{F}}_{\check{T}_1}\right] d\check{P}_{(x)} ;$$

en appliquant la propriété de Markov nous obtenons

$$\int 1_{\check{T}_1 \leqslant t}(w) \check{E}_{Y_{\check{T}_1(w)}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_{t \vee \check{T}_1(w) - \check{T}_1(w)})\right] d\check{P}_{(x)}(w),$$

et cette intégrale est encore égale à

$$\sum_{s=0}^{\infty} \int 1_{\check{T}_1 \leqslant t}(w) 1_{E^s}(Y_{\check{T}_1}(w)) \check{E}_{Y_{\check{T}_1(w)}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_{t \vee \check{T}_1(w) - \check{T}_1(w)})\right] d\check{P}_{(x)}(w).$$

En revenant à l'espace $(U^{\mathbb{N}}, \mathscr{U}_S^{\otimes \mathbb{N}}, P_{(x)})$ et en appliquant le théorème de Ionescu Tulcea, l'intégrale précédente devient :

$$\sum_{s=0}^{\infty} \int 1_{S \leqslant t}(u_1) 1_{E^s}(\tilde{X}_0(u_2)) \check{E}_{\tilde{X}_0(u_2)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_{t \vee S(u_1) - S(u_1)})\right] dP^{(2)}_{(x)}(u_1, u_2)$$

Intégration par rapport à la variable u_2 nous donne

$$\sum_{s=0}^{\infty} E_x\left[1_{T \leqslant t}(\omega) p_s(X_{T-}(\omega)) \int_{E^s} \check{E}_{(y_1, \ldots, y_s)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_{t \vee T(\omega) - T(\omega)})\right] q(X_{T-}(\omega), dy_1) \ldots q(X_{T-}(\omega), dy_s)\right]$$

Remarquons que dans cette somme le terme $s = 1$ est égal à zéro car $p_1(x)$ est toujours égal à zéro ; d'autre part si $k \neq 0$ alors le terme $s = 0$ est aussi égal à zéro, car le processus de branchement une fois éteint reste éteint.

Rappelons que d'après la proposition 3.2 du premier chapitre nous avons si $k \neq 0$:

$$\check{E}_{(y_1, \ldots, y_s)}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r(Y_.)\right] = \sum_{0 = k_0 \leqslant \ldots \leqslant k_s = k} \prod_{j=1}^{s} \check{E}_{(y_j)}\left[\bigotimes_{r=k_{j-1}+1}^{k_j} f_r(Y_.)\right]$$

où

$$\bigotimes_{r=k_{j-1}+1}^{k_j} f_r = 1_{E^0} \quad \text{si} \quad k_{j-1} = k_j.$$

Convenons encore de poser

$$\check{\mathrm{P}}_t\left[\bigotimes_r f_r\right](.) = \check{\mathrm{E}}_{(.)}\left[\bigotimes_r f_r(\mathrm{Y}_t)\right]$$

Nous obtenons alors les équations suivantes :

si $k = 1$:

$$\check{\mathrm{P}}_t[\otimes f](x) = \mathrm{P}_t f(x) + \sum_{s \geqslant 2} \mathrm{E}_x\Bigg[1_{\mathrm{T} \leqslant t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})$$

$$\sum_{r=1}^{s}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \neq r}}^{s} \int \check{\mathrm{P}}_{t \vee \mathrm{T}-\mathrm{T}}[1_{\{\delta\}}](y_j) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_j) . \int \check{\mathrm{P}}_{t \vee \mathrm{T}-\mathrm{T}}[\otimes f](y_r) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_r)\right\}\Bigg]$$

où $\otimes f$ est la fonction sur X qui est égale à f sur E et zéro ailleurs ;

si $k > 1$:

$$\check{\mathrm{P}}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x) = \sum_{s \geqslant 2} \mathrm{E}_x\Bigg[1_{\mathrm{T} \leqslant t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})$$

$$\sum_{0 = k_0 \leqslant \ldots \leqslant k_s = k} \prod_{j=1}^{s} \int \check{\mathrm{P}}_{t \vee \mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=k_{j-1}+1}^{k_j} f_r\right](y_j) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_j)\Bigg],$$

et pour la fonction $1_{\{\delta\}}$ nous obtenons

$$\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x) = \sum_{s \geqslant 2} \mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T} \leqslant t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}) \prod_{j=1}^{s} \int \check{\mathrm{P}}_{t \vee \mathrm{T}-\mathrm{T}}[1_{\{\delta\}}](y_j) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_j)\right]$$
$$+ \mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T} \leqslant t} p_0(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})] ;$$

pour connaître ces équations sur les parties E^n ($n \geqslant 2$) de X, nous appliquons d'abord la proposition 3.2 du premier chapitre ; finalement sur E^0 nous obtenons

$$\check{\mathrm{P}}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](\delta) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq 0$$

et

$$\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](\delta) = 1$$

Dans la suite nous nous référons à ces équations comme à l'équation intégrale fondamentale.

Rappelons que la propriété de Markov implique que $\check{\mathrm{P}}_t$ est un semi-groupe d'opérateurs de l'espace des fonctions réelles mesurables et bornées $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ et que le processus de branchement qui a été construit au premier chapitre est une réalisation de ce semi-groupe.

2. Résolution de l'équation intégrale fondamentale

Dans ce paragraphe nous voulons résoudre l'équation intégrale fondamentale et déterminer le générateur infinitésimal du semi-groupe $\check{\mathrm{P}}_t$; cela n'est possible qu'en introduisant un certain nombre d'hypothèses : nous supposons que pour chaque s fixe la fonction $p_s(x)$ est continue en la variable x, et que la probabilité de transition $q(x, \mathrm{A})$ est un noyau fellerien, c'est-à-dire que $q(x, \mathrm{A})$ transforme les fonctions continues en fonctions continues. Finalement nous admettons que $\frac{1}{t}\mathrm{P}_x(\mathrm{T} \leqslant t)$ tend uniformément sur E lorsque t tend vers zéro vers une fonction $\lambda(x)$ continue sur E et prolongeable au compact $\hat{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \cup \{\infty\}$. Cela se présente par exemple lorsque le semi-groupe P_t est obtenu à partir d'un semi-groupe Q_t d'opérateurs sur $\mathrm{C}_0(\mathrm{E})$ par une fonctionnelle multiplicative du type $e^{-\int_0^t \lambda(\mathrm{X}_s)ds}$ où $\lambda(x)$ est une fonction continue sur E et prolongeable à $\hat{\mathrm{E}}$. En effet si $\mathrm{H}_x[\ \ ]$ désignent les espérances mathématiques associées aux réalisations du semi-groupe Q_t, alors

$$\mathrm{P}_t f(x) = \mathrm{H}_x\big[f(\mathrm{X}_t)e^{-\int_0^t \lambda(\mathrm{X}_s)ds}\big]$$

pour toute fonction f de $\mathrm{C}_0(\mathrm{E})$, d'où l'égalité

$$\frac{1}{t}\mathrm{P}_x(\mathrm{T} \leqslant t) = \frac{1}{t}\mathrm{H}_x\big[1 - e^{-\int_0^t \lambda(\mathrm{X}_s)ds}\big] \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

On en déduit aisément l'inégalité

$$\left|\frac{1}{t}\mathrm{P}_x(\mathrm{T} \leqslant t) - \lambda(x)\right| \leqslant \sup_{s\in[0,t]} \|\mathrm{Q}_s\lambda - \lambda\| + \frac{e^{\mathrm{K}t} - 1}{t} - \mathrm{K}$$

où $\mathrm{K} = \|\lambda\|$, toutes les normes étant prises sur l'espace E. Il en résulte bien que $\frac{1}{t}\mathrm{P}_x(\mathrm{T} \leqslant t)$ tend uniformément sur E vers $\lambda(x)$ lorsque t tend vers zéro.

LEMME 2.1. — $\mathrm{P}_x(\mathrm{T} \leqslant t)$ tend uniformément sur E vers zéro lorsque t tend vers zéro.

Démonstration. — Résulte immédiatement de l'inégalité

$$P_x(T \leqslant t) \leqslant t \,\|\lambda\| + t\varepsilon$$

pour t suffisamment petit.

LEMME 2.2. — Si h est une fonction réelle et continue sur le compactifié $\hat{E}$, alors $\frac{1}{t} E_x[1_{T \leqslant t}(h(X_{T-}) - h(x))]$ tend uniformément sur E vers zéro lorsque t tend vers zéro.

Démonstration. — On voit aisément que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{2^n - 1} 1_{\frac{it}{2^n} < T \leqslant \frac{(i+1)t}{2^n}}\left(h\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right) = 1_{T \leqslant t}(h(X_{T-}) - h(x))$$

et que

$$\left|\frac{1}{t} \sum_{i=0}^{2^n - 1} E_x\left[1_{\frac{it}{2^n} < T \leqslant \frac{(i+1)t}{2^n}}\left(h\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right| \leqslant$$

$$\left|\frac{1}{t} \sum_{i=0}^{2^n - 1} E_x\left[\left(1_{\frac{it}{2^n} < T \leqslant \frac{(i+1)t}{2^n}} - \frac{t}{2^n} \lambda\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right)\right)\left(h\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|$$

$$+ \sum_{i=0}^{2^n - 1} \frac{1}{2^n} \left|E_x\left[\lambda\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right)\left(h\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|.$$

Le second terme du second membre de cette inégalité est inférieur à

$$\sum_{i=0}^{2^n - 1} \frac{1}{2^n} \left| E_x\left[\lambda\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right) h\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right) - \lambda(x)h(x)\right]\right| + \sum_{i=0}^{2^n - 1} \frac{1}{2^n} \,|h(x)|\, \left| E_x\left[\lambda\left(X_{\frac{it}{2^n}}\right) - \lambda(x)\right]\right|$$

qui est lui-même inférieur à

$$\sup_{s \in [0,t]} \|\hat{P}_s \lambda h - \lambda h\| + \|h\| \sup_{s \in [0,t]} \|\hat{P}_s \lambda - \lambda\|,$$

les normes étant prises sur E ; rappelons que $\hat{P}_t$ est le semi-groupe sur $C(\hat{E})$ obtenu à partir du semi-groupe P_t en ajoutant à l'espace des états E le point à l'infini comme état-piège du processus. Nous pouvons en conclure que le second terme du second membre de l'inégalité tend uniformément sur E et indépendamment de n vers 0 lorsque t tend vers zéro.

Occupons nous à présent du premier terme du second membre de l'inégalité ; il est inférieur à

$$\left|\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{2^n} \mathrm{E}_x\left[\left(1_{\frac{it}{2^n}<\mathrm{T}\leqslant\frac{(i+1)t}{2^n}} - \frac{t}{2^n}1_{\frac{it}{2^n}<\mathrm{T}}\lambda\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right)\right)\left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|$$
$$+\left|\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{2^n} \mathrm{E}_x\left[\frac{t}{2^n}1_{\mathrm{T}\leqslant\frac{it}{2^n}}\lambda\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right)\left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|.$$

Mais

$$\left|\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{2^n} \mathrm{E}_x\left[\frac{t}{2^n}1_{\mathrm{T}\leqslant\frac{it}{2^n}}\lambda\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right)\left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|$$

est inférieur à $2\,\|\lambda\|\;\|h\|\,\mathrm{P}_x(\mathrm{T}\leqslant t)$ qui tend uniformément sur E vers zéro lorsque t tend vers zéro.

Quant à

$$\left|\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{2^n} \mathrm{E}_x\left[\left(1_{\frac{it}{2^n}<\mathrm{T}\leqslant\frac{(i+1)t}{2^n}} - \frac{t}{2^n}1_{\frac{it}{2^n}<\mathrm{T}}\lambda\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right)\right)\left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|$$

il est égal à

$$\left|\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{2^n} \mathrm{E}_x\left[1_{\frac{it}{2^n}<\mathrm{T}}\left(1_{0<\mathrm{T}\leqslant\frac{t}{2^n}}\circ\theta_{\frac{it}{2^n}} - \frac{t}{2^n}\lambda\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right)\right)\left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|$$

car T est un temps terminal.

Appliquons à cette expression la propriété de Markov, ce qui donne

$$\left|\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{2^n} \mathrm{E}_x\left[1_{\frac{it}{2^n}<\mathrm{T}}\left(\mathrm{P}_{\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}}\left(\mathrm{T}\leqslant\frac{t}{2^n}\right) - \frac{t}{2^n}\lambda\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right)\right)\left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x)\right)\right]\right|$$

car $\mathrm{P}_x(\mathrm{T}=0)=0$ en tout point x de E ; et ceci est inférieur à

$$\sum_{i=0}^{2^n}\frac{1}{2^n}2\,\|h\|\left\|\frac{1}{\frac{t}{2^n}}\mathrm{P}_.\left(\mathrm{T}\leqslant\frac{t}{2^n}\right) - \lambda(.)\right\|$$

où les normes sont toujours prises sur E car si $\frac{it}{2^n} < \mathrm{T}(\omega)$ alors $\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}(\omega)$ appartient à E ; comme la dernière expression est majorée par

$$2 \| h \| \sup_{s \in [0,t]} \left\| \frac{1}{s} \mathrm{P}.(\mathrm{T} \leqslant s) - \lambda(.) \right\|,$$

elle tend vers zéro lorsque t tend vers zéro, et cette convergence est indépendante de n.

Nous pouvons donc conclure que

$$\left| \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{2^n - 1} \mathrm{E}_x \left[1_{\frac{it}{2^n} < \mathrm{T} \leqslant \frac{(i+1)t}{2^n}} \left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x) \right) \right] \right|$$

tend vers zéro uniformément sur E et indépendamment de n lorsque t tend vers zéro.

Par conséquent si ε est un nombre positif arbitrairement petit il existe t_ε tel que

$$\left| \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{2^n - 1} \mathrm{E}_x \left[1_{\frac{it}{2^n} < \mathrm{T} \leqslant \frac{(i+1)t}{2^n}} \left(h\left(\mathrm{X}_{\frac{it}{2^n}}\right) - h(x) \right) \right] \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad t \leqslant t_\varepsilon$$

quel que soit la valeur de n et le point x dans E ; pour chaque $t \leqslant t_\varepsilon$ nous pouvons passer à la limite sur n car les hypothèses du théorème de la convergence dominée sont vérifiées ; nous obtenons

$$\left| \frac{1}{t} \mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T} \leqslant t}(h(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}) - h(x))] \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t \leqslant t_\varepsilon$$

indépendamment de x dans E, ce qui achève la démonstration.

Proposition 2.1. — Le semi-groupe $\check{\mathrm{P}}_t$ est fortement continu sur l'espace $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})$.

Démonstration. — La démonstration comprend différentes parties

1) Soit une fonction réelle, mesurable et essentiellement bornée $\mathscr{S}$ sur X ; l'expression

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{E}_x \left[1_{\mathrm{T} \leqslant t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}) \int_{\mathrm{E}^s} \check{\mathrm{P}}_{t \vee \mathrm{T} - \mathrm{T}}[\mathscr{S}](y_1, \ldots, y_s) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1) \ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_s) \right]$$

est majorée en valeur absolue par

$$\text{ess. sup} \, | \mathscr{S} | \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T} \leqslant t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})]$$

qui est égale à

$$\text{ess. sup}\,|\mathcal{S}|\,\mathrm{P}_x(\mathrm{T} \leqslant t)$$

et ceci tend uniformément sur E vers zéro lorsque t tend vers zéro ;

2) Soit la fonction $1_{\{\delta\}}$; considérons l'expression $\check{\mathrm{P}}_t(1_\delta] - 1_\delta$ et analysons la sur les différentes parties de X en tenant compte de l'équation intégrale fondamentale :

sur E^0

$$\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](\delta) - 1_{\{\delta\}}(\delta) = 0$$

sur E^1

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x) - 1_{\{\delta\}}(x) &= \check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x)\\ &= \sum_{s \geqslant 0}\Big[\mathrm{E}_x\ 1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^s}\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}[1_{\{\delta\}}](y_1, \ldots, y_s)\\ &\qquad q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1)\ \ldots\ q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_s)\Big] + \mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_0(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})]\end{aligned}$$

sur $\mathrm{E}^n (n > 1)$

$$\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x_1, \ldots, x_n) - 1_{\{\delta\}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x_i)$$

d'après la première partie de la démonstration il résulte alors que $\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}] - 1_{\{\delta\}}$ tend uniformément sur X vers zéro si t tend vers zéro.

3) Soit la fonction $\otimes f$ de $\mathrm{C}_0(\mathrm{E})^{\Sigma\otimes}$; rappelons que $\otimes f = f$ sur E et $\otimes f = 0$ sur $\mathrm{X}\backslash\mathrm{E}$; analysons $\check{\mathrm{P}}_t[\otimes f] - \otimes f$ sur les différentes parties de X en tenant toujours compte de l'équation intégrale fondamentale :

sur E^0

$$\check{\mathrm{P}}_t[\otimes f](\delta) - \otimes f(\delta) = 0$$

sur E^1

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{P}}_t[\otimes f](x) - \otimes f(x) &= \mathrm{P}_t f(x) - f(x)\\ &\quad + \sum_{s\geqslant 2}\mathrm{E}\Big[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^s}\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}[\otimes f](y_1, \ldots, y_s)\\ &\qquad q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1)\ \ldots\ q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_s)\Big]\end{aligned}$$

sur $\mathrm{E}^n (n > 1)$

$$\check{\mathrm{P}}_t[\otimes f](x_1, \ldots, x_n) - \otimes f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r=1}^{n}\Big\{\prod_{\substack{j=1\\ \neq r}}^{n}\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x_j)\check{\mathrm{P}}_t(\otimes f)(x_r)\Big\}$$

la première et la seconde partie de la démonstration nous permettent de conclure que $\check{P}_t[\otimes f] - \otimes f$ tend uniformément sur X vers zéro si t tend vers zéro ;

4) Soit la fonction $\bigotimes_{r=1}^{k} f_r \, (k > 1)$ appartenant à $C_0(E)^{\Sigma\otimes}$;

$$\check{P}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right] - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r$$

prend d'après l'équation intégrale fondamentale les formes suivantes sur les différentes parties de X :

sur E^0

$$\check{P}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](\delta) - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r(\delta) = 0$$

sur E^1

$$\check{P}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x) - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r(x) = \check{P}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x)$$

$$= \sum_{s\geqslant 2} E_x\left[1_{T\leqslant t} p_s(X_{T-}) \int_{E^s} \check{P}_{t\vee T-T}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](y_1, \ldots, y_s) \right.$$
$$\left. q(X_{T-}, dy_1) \ldots q(X_{T-}, dy_s)\right]$$

sur $E^n (n > 1, n \neq k)$

$$\check{P}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x_1, \ldots, x_n) - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \check{P}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x_1, \ldots, x_n) = \sum_{0=k_0\leqslant\ldots\leqslant k_n=k} \prod_{j=1}^{n} \check{P}_t\left[\bigotimes_{r=k_{j-1}+1}^{k_j} f_r\right](x_j) ;$$

sur E^k

$$\check{P}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x_1, \ldots, x_k) - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r(x_1, \ldots, x_k)$$
$$= \prod_{j=1}^{k} \check{P}_t[f_j](x_j) - \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j) + \sum_{0=k_0\leqslant\ldots\leqslant k_n=k} \prod_{j=1}^{k} \check{P}_t\left[\bigotimes_{r=k_{j-1}+1}^{k_j} f_r\right](x_j) ;$$
$$\exists j \quad \text{tel que} \quad k_{j-1} = k_j$$

on s'aperçoit immédiatement que $\check{\mathrm{P}}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right] - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r$ tend uniformément sur chaque partie E^n de X vers zéro lorsque t tend vers zéro ; un raisonnement combinatoire simple nous montre alors que nous avons convergence uniforme sur tout l'espace X.

5) Le semi-groupe $\check{\mathrm{P}}_t$ est donc fortement continu à l'origine sur $\mathrm{C}_0(\mathrm{E})^{\Sigma\otimes}$; comme le semi-groupe $\check{\mathrm{P}}_t$ est à contraction et comme $\mathrm{C}_0(\mathrm{E})^{\Sigma\otimes}$ est partout dense dans l'espace de Banach $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})$ on démontre facilement que $\check{\mathrm{P}}_t$ est fortement continu en chaque point de $\mathbb{R}^+$ sur tout l'espace $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})$.

La proposition suivante nous donne le générateur infinitésimal $\check{\mathrm{A}}$ du semi-groupe $\check{\mathrm{P}}_t$ sur l'espace $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$.

PROPOSITION 2.2. — Le générateur infinitésimal $\check{\mathrm{A}}$ du semi-groupe $\check{\mathrm{P}}_t$ est donné sur l'espace $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ par les formules suivantes :

1) pour la fonction $1_{\{\delta\}}$ nous obtenons :

sur E^0 $\quad \check{\mathrm{A}}[1_{\{\delta\}}](\delta) = 0$

sur E^1 $\quad \check{\mathrm{A}}[1_{\{\delta\}}](x) = p_0(x)\lambda(x)$

sur $\mathrm{E}^n (n > 1)$ $\quad \check{\mathrm{A}}[1_{\{\delta\}}](x_1, \ldots, x_n) = 0$

2) pour la fonction $\bigotimes_{r=1}^{k} f_r (f_r \in \mathscr{D}$ et $k \geqslant 1)$ nous avons

sur E^0 $\quad \check{\mathrm{A}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](\delta) = 0$

sur E^1

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{A}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x) &= \mathrm{A}f(x) && \text{si} \quad k = 1\\ &= \lambda(x)p_k(x)\prod_{r=1}^{k}\int f_r(y)q(x, dy) && \text{si} \quad k > 1\end{aligned}$$

sur $\mathrm{E}^n (n \leqslant k + 1)$

$$\check{\mathrm{A}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\left\{\prod_{r=1}^{j-1} f_r(x_r)\check{\mathrm{A}}\left[\bigotimes_{r=j}^{j+k-n} f_r\right](x_j)\prod_{r=j+1}^{n} f_{r+(k-n)}(x_r)\right\}$$

où

$$\check{\mathrm{A}}\left[\bigotimes_{r=j}^{j+k-n} f_r\right](x_j)\begin{cases} = \lambda(x_j)p_{k-n+1}(x_j)\displaystyle\prod_{r=j}^{j+k-n}\int f_r(y)q(x_j, dy) & \text{si} \quad n < k \\ = \mathrm{A}f_j(x_j) & \text{si} \quad n = k \\ = p_0(x_j)\lambda(x_j) & \text{si} \quad n = k+1 \end{cases}$$

sur $\mathrm{E}^n (n > k + 1)$

$$\check{\mathrm{A}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Démonstration. — La démonstration comprend différentes parties :

1) Soit la fonction $\displaystyle\bigotimes_{r=1}^{k} f_r$ de $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ avec $k \geqslant 2$; alors

$$\frac{1}{t}\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_k(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^k}\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](y_1,\ldots,y_k)q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1)\ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_k)\right]$$

tend uniformément sur E vers $\lambda(x)p_k(x)\displaystyle\prod_{r=1}^{k} f_r(y)q(x, dy)$ si t tend vers zéro ; en effet

$$\left|\frac{1}{t}\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_k(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^k}\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](y_1, \ldots, y_k)q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1)\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots\ q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_k)\right] - \lambda(x)p_k(x)\prod_{r=1}^{k}\int_{\mathrm{E}} f_r(y)q(x, dy)\right|$$

est majoré par

$$\frac{1}{t}\left|\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_k(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^k}\left\{\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](y_1, \ldots, y_k) - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r(y_1, \ldots, y_k)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left. q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1)\ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_k)\right]\right| + \frac{1}{t}\left|\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_k(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\prod_{r=1}^{k}\int f_r(y)q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy)\right]\right.$$
$$\left. - t\lambda(x)p_k(x)\prod_{r=1}^{k}\int f_r(y)q(x, dy)\right| ;$$

le premier terme tend uniformément sur E vers zéro lorsque t tend vers zéro car il est majoré par

$$\frac{1}{t}\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_k(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\sup_{(y_1,\ldots,y_k)\in\mathrm{E}^k}\left|\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k}f_r\right](y_1,\ldots,y_k)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\bigotimes_{r=1}^{k}f_r(y_1,\ldots,y_k)\right|\right]$$

qui tend uniformément sur E vers zéro si t tend vers zéro d'après la proposition 2.1 ; dans le second terme nous posons

$$h(x)=p_k(x)\prod_{j=1}^{k}\int f_j(y_j)q(x,dy_j),$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{t}\,|\,\mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T}\leqslant t}h(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})]-t\lambda(x)h(x)\,|$$

et ceci est majoré par

$$\left|\frac{1}{t}\mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T}\leqslant t}(h(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})-h(x))]\right|+\|h\|\left|\frac{1}{t}\mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T}\leqslant t}]-\lambda(x)\right|\;;$$

comme $h(x)$ est une fonction continue, il résulte du lemme 2.2 que la dernière expression tend uniformément sur E vers zéro avec t.

2) Soit la fonction $\bigotimes_{r=1}^{k}f_r$ de $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ avec $k\geqslant 1$; alors

$$\frac{1}{t}\sum_{\substack{s\geqslant 2\\ \neq k}}\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^s}\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k}f_r\right](y_1,\ldots,y_s)q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-},dy_1)\right.$$
$$\left.\ldots\,q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-},dy_s)\right]$$

tend uniformément sur E vers zéro si t tend vers zéro ; en effet cette somme est majorée en valeur absolue par

$$\frac{1}{t}\sum_{\substack{s\geqslant 2\\ \neq k}}\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t}p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\sup_{(y_1,\ldots,y_s)\in\mathrm{X}\setminus\mathrm{E}^k}\left|\check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k}f_r\right](y_1,\ldots,y_s)\right|\right]$$

qui tend uniformément sur E vers zéro si t tend vers zéro d'après la proposition 2.1.

3) Pour une raison analogue la somme

$$\frac{1}{t}\sum_{s\geq 2} \mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leq t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}) \int_{\mathrm{E}^s} \check{\mathrm{P}}_{t\vee \mathrm{T}-\mathrm{T}}[1_{\{\delta\}}](y_1, \ldots, y_s) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1) \ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_s)\right]$$

tend uniformément sur E vers zéro lorsque t tend vers zéro.

4) Considérons la fonction $1_{\{\delta\}}$ et analysons $\frac{1}{t}\{ \check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}] - 1_{\{\delta\}} \}$ sur les différentes parties de X :

sur E^0 nous avons trivialement

$$\frac{1}{t}\{ \check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](\delta) - 1_{\{\delta\}}(\delta) \} = 0 ;$$

sur E^1 nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x) &= \frac{1}{t}\mathrm{E}_x[1_{\mathrm{T}\leq t} p_0(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})] \\ &+ \frac{1}{t}\sum_{s\geq 2} \mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leq t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}) \int_{\mathrm{E}^s} \check{\mathrm{P}}_{t\vee \mathrm{T}-\mathrm{T}}[1_{\{\delta\}}](y_1, \ldots, y_s) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1) \right. \\ &\left. \ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_s)\right] ; \end{aligned}$$

le premier terme tend uniformément sur E vers $\lambda(x)p_0(x)$ d'après le lemme 2.2, et le second terme tend uniformément sur E vers zéro avec t d'après 3) ; sur $\mathrm{E}^n(n > 1)$ nous avons

$$\frac{1}{t}\check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{t}\prod_{i=1}^{n} \check{\mathrm{P}}_t[1_{\{\delta\}}](x_i)$$

qui tend uniformément sur E vers zéro avec t.

5) Considérons la fonction $\bigotimes_{r=1}^{k} f_r$ de $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ avec $k \geq 1$ et analysons l'expression $\frac{1}{t}\left\{ \check{\mathrm{P}}_t\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right] - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r \right\}$ sur les différentes parties de X :

sur E^0 elle est trivialement égale à zéro ;
sur E^1 nous obtenons :

$$\text{si } k = 1 : \quad \frac{1}{t}\{ \mathrm{P}_t f(x) - f(x) \} + \sum_{s\geq 2} \frac{1}{t}\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leq t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}) \int_{\mathrm{E}^s} \check{\mathrm{P}}_{t\vee \mathrm{T}-\mathrm{T}} [\otimes f](y_1, \ldots, y_s) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1) \ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_s)\right]$$

et ceci tend vers Af uniformément sur E d'après 2);

si $k > 1$: $\frac{1}{t}\sum_{\substack{s\geqslant 2\\ \neq k}} \mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t} p_s(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^s} \check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](y_1, \ldots, y_s)\right.$
$\left. q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1) \ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_s)\right] + \frac{1}{t}\mathrm{E}_x\left[1_{\mathrm{T}\leqslant t} p_k(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-})\int_{\mathrm{E}^k} \check{\mathrm{P}}_{t\vee\mathrm{T}-\mathrm{T}}\right.$
$\left.\left[\bigotimes_{r=1}^{k} f_r\right](y_1, \ldots, y_k) q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_1) \ldots q(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}, dy_k)\right]$

qui tend uniformément sur E vers

$$\lambda(x)p_k(x)\prod_{r=1}^{k}\int f_r(y)q(x, dy) \quad \text{d'après 1) et 2)};$$

sur E^n nous avons

$$\frac{1}{t}\left\{\sum_{0=k_0\leqslant\ldots\leqslant k_n=k}\ \prod_{j=1}^{n}\check{\mathrm{P}}_t\left[\bigotimes_{r=k_{j-1}+1}^{k_j} f_r\right](x_j) - \bigotimes_{r=1}^{k} f_r(x_1, \ldots, x_n)\right\}$$

si $n > k + 1$ il faut nécessairement que parmi les indices

$$\{0 = k_0 \leqslant \ldots \leqslant k_n = k\}$$

il y ait au moins deux fois deux indices égaux; il résulte alors clairement de 4) que l'expression tend uniformément sur E^n vers zéro avec t; cette convergence est même uniforme sur $\sum_{n>k+1} \mathrm{E}^n$; si $n = k + 1$ tous les termes de la somme tendent uniformément sur E^n vers zéro sauf ceux pour lesquels tous les indices de $\{0 = k_0 \leqslant \ldots \leqslant k_n = k\}$ excepté deux sont différents entre eux; nous avons donc convergence vers

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\prod_{r=1}^{j-1} f_r(x_r)p_0(x_j)\lambda(x_j)\prod_{r=j+1}^{n} f_{r-1}(x_r)\right\};$$

si $n = k$ tous les termes de la somme tendent uniformément sur E^n vers zéro sauf ceux pour lesquels les indices de $\{0 = k_0 \leqslant \ldots \leqslant k_n = k\}$ sont tous différents; un raisonnement combinatoire simple montre alors que nous avons convergence uniforme vers

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\prod_{r=j}^{j-1} f_r(x_r)\mathrm{A}f(x_j)\prod_{r=j+1}^{n} f_r(x_r)\right\};$$

si $n \leqslant k-1$ tous les termes de la somme tendent uniformément sur E^n vers zéro sauf ceux pour lesquels dans la suite d'indices $\{0 = k_0 \leqslant \ldots \leqslant k_n = k\}$ nous avons $k_j = k_{j-1}+1$ pour tous les indices j excepté d'un seul ; nous avons donc convergence vers

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \prod_{r=1}^{j-1} f_r(x_r) \check{A}\left[\bigotimes_{r=j}^{j+k-n} f_r \right](x_j) \prod_{r=j+1}^{n} f_{r+k-n}(x_r) \right\}$$

où $\check{A}\left[\bigotimes_{r=j}^{j+k-n} f_r \right](x_j)$ est donné par 5).

Chaque solution $\check{P}_t$ de l'équation intégrale fondamentale est un semi-groupe qui est fortement continu sur l'espace $C_0(X)$. Le générateur infinitésimal $\check{A}$ de $\check{P}_t$ est univoquement déterminé sur l'espace $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ et est donné par la proposition 2.2. La proposition suivante montre que lorsque $p_0 \equiv 0$ la connaissance de $\check{A}$ sur l'espace $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ suffit à déterminer univoquement le semi-groupe $\check{P}_t$.

Énonçons d'abord un lemme qui est la traduction probabiliste d'une proposition démontrée dans [7] et [8].

LEMME 2.3. — Si P_t est un semi-groupe fellerien sur l'espace de Banach $C_0(E)$, si A est son générateur infinitésimal et $\mathscr{D}$ le domaine de définition de A, alors

$$P_t^{\otimes n}\left[\bigotimes_{r=1}^{n} f_r \right] = \bigotimes_{r=1}^{n} P_t f_r \quad \text{pour tout} \quad \bigotimes_{r=1}^{n} f_r \text{ de } C_0(E)^{\otimes n}$$

définit un semi-groupe fellerien $P_t^{\otimes n}$ sur l'espace $C_0(E^n)$. Le générateur infinitésimal A_n du semi-groupe $P_t^{\otimes n}$ prend sur l'espace $\mathscr{D}^{\otimes n}$ la forme suivante

$$A_n\left(\bigotimes_{r=1}^{n} f_r \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\bigotimes_{r=1}^{j-1} f_r \right) \otimes Af_j \otimes \left(\bigotimes_{r=j+1}^{n} f_r \right)$$

D'autre part pour tout $\lambda > 0$ l'image de l'espace $\mathscr{D}^{\otimes n}$ par l'application $\lambda I - A_n$, I étant l'application identique, est partout dense dans l'espace de Banach $C_0(E^n)$.

PROPOSITION 2.3. — Admettons que p_0 soit partout égale à zéro ; quel que soit $\lambda > 0$, l'image de l'espace $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ par l'application $\lambda I - \check{A}$, où I est l'application identique, est partout dense dans l'espace $C_0(X)$.

Démonstration. — Considérons une fonction $\mathscr{S}$ sur l'espace X telle que la restriction de $\mathscr{S}$ à une partie E^n de X appartienne à $C_0(E^n)$ et telle que $\mathscr{S}$ soit égale à zéro en dehors de cette partie E^n. Il est clair que l'espace vectoriel engendré par les fonctions de ce type est partout dense dans $C_0(X)$; il suffit donc d'établir qu'une fonction du type $\mathscr{S}$ peut être approché d'aussi près qu'on veut et uniformément sur X par des fonctions de l'espace image $(\lambda I - \check{A})\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$.

Admettons d'abord que $n > 0$; fixons un nombre positif ε ; nous voulons construire une fonction $\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_k} \bigotimes_{r=1}^{k} g_r^{(j,k)} + \mu 1_{\{\delta\}}$ appartenant à $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ tel que la fonction

$$\psi = \mathscr{S} - (\lambda I - \check{A})\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_k} \bigotimes_{r=1}^{k} g_r^{(j,k)} + \mu 1_{\{\delta\}}\right)$$

vérifie $\|\psi\| \leqslant \varepsilon$.

Si $k > n$ nous choisissons $g_r^{(j,k)} = 0$ de façon à avoir $\psi = 0$ sur $\sum_{m>n} E^n$.

Sur E^n la fonction ψ prend la forme suivante :

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{S}(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{s_n}\Big[\lambda g_1^{(j,n)}(x_1) \ldots g_n^{(j,n)}(x_n)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} g_1^{(j,n)}(x_1) \ldots g_{i-1}^{(j,n)}(x_{i-1}) A g_i^{(j,n)}(x_i) g_{i+1}^{(j,n)}(x_{i+1}) \ldots g_n^{(j,n)}(x_n)\Big]$$

D'après le lemme 2.3 nous pouvons choisir s_n et les fonctions $g_r^{(j,n)}$ de façon à ce que $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ soit en valeur absolue inférieure à ε, uniformément sur E^n.

Sur E^{n-1} la fonction ψ prend la forme suivante :

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -(\lambda I - \check{A})\left[\sum_{j=1}^{s_n} \bigotimes_{r=1}^{n} g_r^{(j,n)}\right](x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$-(\lambda I - \check{A})\left[\sum_{j=1}^{s_{n-1}} \bigotimes_{r=1}^{n-1} g_r^{(j,n-1)}\right](x_1, \ldots, x_{n-1}) ;$$

posons

$$-(\lambda I - \check{A})\left(\sum_{j=1}^{s_n} \bigotimes_{r=1}^{n} g_r^{(j,n)}\right)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) ;$$

il est clair que $\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ appartient à l'espace $C_0(E^{n-1})$; par un raisonnement analogue au précédent nous pouvons déterminer s_{n-1} et les fonctions $g_r^{(j,n-1)}$ de façon à ce que $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ soit uniformément sur E^{n-1} inférieure à ε en valeur absolue.

Nous pouvons continuer de la sorte ; finalement nous avons fixé $s_n, \ldots, s_2$ et les fonctions $g_r^{(j,n)}, \ldots, g_r^{(j,2)}$; posons

$$-(\lambda \mathrm{I} - \check{\mathrm{A}})\left[\sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{s_k} \bigotimes_{r=1}^{k} g_r^{(j,k)}\right](x) = \varphi_1(x);$$

sur E la fonction ψ est de la forme

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - (\lambda \mathrm{I} - \check{\mathrm{A}})\left[\sum_{j=1}^{s_1} g_1^{(j,1)}\right](x)$$

et nous pouvons donc déterminer la fonction $\sum_{j=1}^{s_1} g_1^{(j,1)}$ dans $\mathscr{D}$ de façon à avoir $|\psi(x)| \leqslant \varepsilon$ uniformément sur E ; finalement sur E^0 $\psi(\delta) = -\lambda\mu$ et nous choisissons $\mu = 0$; la fonction

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_k} \bigotimes_{r=1}^{k} g_r^{(j,k)}$$

vérifie donc

$$\left\| \mathscr{S} - (\lambda \mathrm{I} - \check{\mathrm{A}})\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_k} \bigotimes_{r=1}^{k} g_r^{(j,k)}\right) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Admettons maintenant que $n = 0$; nous choisissons les $g_r^{(j,k)}$ égales à zéro de façon à ce que ψ soit égale à zéro sur $\sum_{m>0} E^m$; sur E^0 nous avons $\psi(\delta) = \mathscr{S}(\delta) - \lambda\mu$; nous posons donc $\mu = \dfrac{\mathscr{S}(\delta)}{\lambda}$ et par conséquent ψ est égale à zéro sur tout l'espace X. Ceci achève la démonstration.

Nous ignorons si la proposition précédente reste vraie lorsque p_0 n'est pas identiquement égale à zéro.

Considérons les résolvantes

$$\check{\mathrm{R}}_\lambda \mathscr{S} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \check{\mathrm{P}}_t \mathscr{S} dt$$

du semi-groupe $\check{\mathrm{P}}_t$.

Lorsque $\mathscr{S}$ appartient à $C_0(X)$ alors $\check{R}_\lambda \mathscr{S}$ appartient à $\mathscr{B}(X)$. Admettons maintenant que $\mathscr{S} = (\lambda I - \check{A})(\psi)$ où ψ appartient à $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$; dans ces conditions on a :

$$\check{R}_\lambda(\lambda I - \check{A})\psi = \psi$$

car $\check{P}_t$ est fortement continu sur $C_0(X)$.

Comme $(\lambda I - \check{A})\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ est dense dans $C_0(X)$ et comme $\| \check{R}_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\lambda}$, nous pouvons étendre $\check{R}_\lambda$ à l'espace $C_0(X)$.

Les résolvantes sont donc des opérateurs de l'espace $C_0(X)$. La formule d'inversion de Hille, valable sur $C_0(X)$, nous donne

$$\check{P}_t \mathscr{S} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{t} \check{R}_{\frac{n}{t}} \right)^n \mathscr{S}$$

pour tout $\mathscr{S}$ appartenant à $C_0(X)$, d'où il résulte que $\check{P}_t \mathscr{S}$ appartient à $C_0(X)$.

Il en résulte donc que lorsque p_0 est partout égale à zéro, l'unique solution de l'équation intégrale fondamentale est un semi-groupe sous-fellerien $\check{P}_t$ sur $C_0(X)$ dont le processus de branchement construit au premier chapitre est une réalisation ; le semi-groupe $\check{P}_t$ est univoquement déterminé par la connaissance de $\check{A}$ sur l'espace $\mathscr{D}^{\Sigma\otimes}$ (proposition 2.2).

3. Le semi-groupe du processus de branchement symétrisé

L'étude du processus de branchement que nous avons entreprise est basée sur l'hypothèse de discernabilité des individus. Comme les particules élémentaires ne sont presque jamais discernables, cette étude ne couvre pas les processus de création de masse de la physique corpusculaire. Les japonais N. Ikeda, M. Nagasawa et S. Watanabe ont étudié dans [*13*] les processus de branchement à particules indiscernables. Pour diverses raisons les processus de branchement à particules discernables, que nous avons prudemment appelées des individus, peuvent présenter davantage qu'un intérêt intrinsèque ; d'abord nous estimons que leur étude permettra d'aborder plus facilement les processus de branchement à individus régis par des lois markoviennes différentes. D'autre part il est possible de déduire le semi-groupe du processus de branchement à individus indiscernables de celui du même processus à individus discernables. Voyons brièvement comment.

Désignons par S_n le groupe des permutations sur $(1, \ldots, n)$; sur l'espace E^n nous considérons la relation d'équivalence définie comme suit : $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ s'il existe σ appartenant au groupe symétrique S_n tel que $y_1 = x_{\sigma(1)}, \ldots, y_n = x_{\sigma(n)}$. Désignons par $E^{(n)}$ l'ensemble des classes d'équivalence correspondantes. Les espaces $E^{(n)}$ et donc l'espace $\sum_{n=0}^{\infty} E^{(n)}$, sont localement compacts à base d'ouverts dénombrable. L'espace $C_0(E^{(n)})$ s'identifie à l'espace des fonctions symétriques en les variables $(x_1, \ldots, x_n)$ qui appartiennent à $C_0(E^n)$; de cette façon $C_0(E^{(n)})$ est un sous-espace de Banach de $C_0(E^n)$ et $C_0\left(\sum_{n\geq 0} E^{(n)}\right)$ est un sous-espace de Banach de $C_0(X)$. Désignons par $C_0(E)^{\Sigma\overline{\otimes}}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions du type $f^{\otimes n} = f \otimes \ldots \otimes f$ (n fois) avec f appartenant à $C_0(E)$ et n appartenant à N, et par la fonction $1_{\{\delta\}}$. On établit aisément que $C_0(E)^{\Sigma\overline{\otimes}}$ est partout dense dans l'espace de Banach $C_0\left(\sum_{n\geq 0} E^{(n)}\right)$.

PROPOSITION 3.1. — *Le semi-groupe $\check{P}_t$ transforme les fonctions de l'espace $C_0\left(\sum_{n\geq 0} E^{(n)}\right)$ en des fonctions symétriques.*

Démonstration. — Considérons d'abord une fonction du type $f^{\otimes r}$ appartenant à $C_0(E)^{\Sigma\overline{\otimes}}$.

$$\check{P}_t[f^{\otimes r}](x_1, \ldots, x_n) = \check{E}_{(x_1,\ldots,x_n)}[f^{\otimes r}(Y_t)],$$

et en tenant compte de la proposition 3.2 du premier chapitre nous obtenons

$$\sum_{\substack{r_1+\ldots+r_n=r \\ r_j\geq 0}} \prod_{j=1}^{n} \check{E}_{(x_j)}[f^{\otimes r_j}(Y_t)]$$

où $f^{\otimes r_j} = 1_{\{\delta\}}$ si $r_j = 0$.

Si σ appartient à S_n, la dernière expression est égale à

$$\sum_{\substack{r_1+\ldots+r_n=r \\ r_j\geq 0}} \prod_{j=1}^{n} \check{E}_{(x_{\sigma(j)})}[f^{\otimes r_j}(Y_t)] = \check{P}_t[f^{\otimes r}](x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Par conséquent $\check{P}_t[f^{\otimes r}](x_1, \ldots, x_n)$ est symétrique en les variables

$(x_1, \ldots, x_n)$. La proposition résulte alors de la densité de $C_0(E)^{\Sigma\otimes}$ dans $C_0\left(\sum_{n\geqslant 0} E^{(n)}\right)$.

Il résulte de la proposition précédente que nous pouvons considérer le semi-groupe $\check{P}_t$ restreint à l'espace $C_0\left(\sum_{n\geqslant 0} E^{(n)}\right)$ comme le semi-groupe dont le processus de branchement à individus indiscernables est une réalisation.

BIBLIOGRAPHIE

R. M. Blumenthal, R. K. Getoor

[1] *Markov Processes and Potential Theory.* Academic Press, New York and London, 1968.

R. Cairoli

[2] Sur les produits de semi-groupes de transition et leurs réalisations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **261**, 1965, p. 619-622.

[3] Sur les fonctions séparément excessives. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **261**, 1965, p. 4323-4326.

[4] *Produits de semi-groupes de transition et produits de processus.* Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, vol. XV, fasc. 4, 1966.

P. Courrège, P. Priouret

[5] *Recollements de Processus de Markov.* Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, vol. XIV, 1965, p. 275-377.

F. Delbaen, J. Haezendonck

[6] Sur le générateur infinitésimal du produit tensoriel de deux semi-groupes fortement continus d'opérateurs sur un espace de Banach. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **270**, 1970, p. 1006-1008.

[7] Produit tensoriel de semi-groupes et application à la théorie des processus stochastiques. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, t. XXII, fasc. 4, 1970.

J. Deny

[8] *Notions sur les semi-groupes d'opérateurs linéaires.* Cours de troisième cycle, Orsay, 1963.

E. B. Dynkin

[9] *Markov processes*, I et II. Springer Verlag, Berlin, 1965 (Traduction anglaise de Markovskie Protsessy, Fizmatgiz, Moscow, 1963).

J. Haezendonck

[10] Construction d'un processus de branchement continu discernable. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **267**, 1968, p. 940-942.

J. Haezendonck, F. Delbaen

[11] *Caractérisation de la tribu des événements antérieurs à un temps d'arrêt pour un processus stochastique.* Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, 5e série, t. LVI, 1970.

E. Hille, R. S. Philips

[12] Functional Analysis and semi-groupes. *Amer. Math. Soc. Publ.*, t. **31**, 1957.

N. Ikeda, M. Nagasawa, S. Watanabe

[13] On branching Markov processes. *Proc. Japan Acad.*, t. **41**, 1965, p. 816-821.

[14] Fundamental equations of branching Markov processes. *Proc. Japan Acad.*, t. **42**, 1966, p. 252-257.
[15] A construction of Markov processes by piecing out. *Proc. Japan Acad.*, t. **42**, 1966, p. 370-375.
[16] A construction of branching Markov processes. *Proc. Japan Acad.*, t. **42**, 1966, p. 380-384.
[17] Transformation of branching Markov processes. *Proc. Japan Acad.*, t. **42**, 1966, p. 719-724.
[18] On branching semi-groups I, II. *Proc. Japan Acad.*, t. **42**, 1966, p. 1016-1021 ; t. **42**, 1966, p. 1022-1026.
K. Ito, H. Mackean Jr.
[19] *Diffusion processes and their sample paths.* Springer Verlag, Berlin, 1965.
P. A. Meyer
[20] Probabilités et Potentiel. *Actualités scientifiques et industrielles.* Hermann, Paris, 1966, p. 1318.
[21] Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. **12**, 1962, p. 123-230.
J. E. Moyal
[22] Discontinuous Markov processes. *Acta Math. Upsala*, t. **98**, 1957, p. 221-264.
J. Neveu
[23] *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson et Cie, Paris, 1964.
[24] *Théorie des semi-groupes de Markov.* University of Calif. Publications in Statistics, t. **2**, 1958, p. 319-394.
B. A. Sevast'Yanof
[25] Branching stochastic processes for particles diffusing in a bounded domain with absorbing barriers. *Theory Prob. Applications*, t. **3**, 1958, p. 111-126 (traduction anglaise).
[26] Extinction conditions for branching stochastic processes with diffusion. *Theory Prob. Applications*, t. **6**, 1961, p. 253-263 (traduction anglaise).
M. Silverstein
[27] Markov processes with creation of particles. *Zeit. für Warschein.*, t. **9**, 1968, p. 235-257.
V. Skorokhod
[28] Branching diffusion processes. *Theory Prob. Applications*, t. **9**, 1964, p. 492-497 (traduction anglaise).

(Manuscrit reçu le 1er février 1972).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1859*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6407. 7-1972.