ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Sur l'irréductibilité des chaînes de Markov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 3 (1972), p. 249-254
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_249_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 3, 1972, p. 249-254. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur l'irréductibilité des chaînes de Markov

par

J. NEVEU (*)

Laboratoire de Calcul des Probabilités.
9, quai Saint-Bernard. Tour 56, Paris V^e^.

SUMMARY. — Given a transition probability P on a measurable space $(E, \mathscr{F})$ which is m-essentially irreductible with respect to a σ-finite measure m, it is shown that there exists a measurable subset E_0 of E of full m-measure such that $P1_{E_0} \geqslant 1_{E_0}$ for which all measures

$$U(x, .) = \sum_{N^*} P^n(x, .) \quad (x \in E_0)$$

either are disjoint from m or dominate this measure m in the sense of absolute continuity.

Dans un travail antérieur [*1*], nous avons considéré la condition d'irréductibilité suivante pour une probabilité de transition

$$P = \{ P(x, F) ; \ x \in E, \ F \in \mathscr{F} \}$$

définie sur un espace mesurable $(E, \mathscr{F})$: si m est une mesure positive σ-finie sur $(E, \mathscr{F})$, la probabilité de transition P est dite m-irréductible si la série de ses itérées P^n vérifie la condition d'absolue continuité

$$m \ll \sum_{N^*} P^n(x, .) \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S.

($N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$). Cette condition qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{N^*} P^n(x, F) > 0 \qquad \text{pour tout } x \in E \text{ et tout } F \in \mathscr{I}$$

de mesure $m(F) \neq 0$ est manifestement plus restrictive que la condition introduite par la définition suivante.

DÉFINITION 1. — *Si m est une mesure positive σ-finie sur l'espace mesurable* $(E, \mathscr{I})$, *une probabilité de transition* P *définie sur ce même espace est dite m-essentiellement irréductible lorsque*

$$\sum_{N^*} P^n(., F) > 0$$

presque-partout sur $(E, \mathscr{I}, m)$, *pour tout* $F \in \mathscr{I}$ *de mesure* $m(F) \neq 0$.

Dans l'étude de l'irréductibilité ou de l'essentielle irréductibilité d'une probabilité de transition P, on peut toujours supposer que la mesure de base m vérifie l'hypothèse supplémentaire : $mP \ll m$. En effet sinon la mesure m peut être remplacée par exemple par la mesure

$$m^* = \sum_{N} 2^{-n} m' P^n$$

où m' désigne une mesure finie équivalente à m ; cette nouvelle mesure m^* vérifie la relation $m^*P \ll m^*$ et bien que $m \ll m^*$ la probabilité de transition P est irréductible (resp. essentiellement irréductible) pour m^* dès qu'elle l'est pour m.

La définition ci-dessus de l'essentielle irréductibilité est inspirée par la théorie ergodique des opérateurs markoviens définis sur un espace L^1. Il est en effet bien connu que l'hypothèse supplémentaire $mP \ll m$ permet d'associer à P un opérateur linéaire positif de norme 1, soit T, défini sur l'espace $L^1(E, \mathscr{I}, m)$ de telle manière que $(f.m)P = Tf.m$ pour tout $f \in L^1_+(m)$, à condition de désigner par $f.m$ la mesure de densité f par rapport à m. Il est alors facile de vérifier que P est m-essentiellement irréductible si et seulement si

$$\sum_{N^*} T^n f > 0 \qquad \text{p. p. pour tout } f \not\equiv 0 \text{ de } L^1_+(m).$$

Sous cette hypothèse, les résultats classiques de E. Hopf montrent que l'opérateur T est alors soit dissipatif, soit conservatif et ergodique. Dans le premier cas il existe donc une fonction $h : \mathrm{E} \to \mathrm{R}_+$ telle que

$$h > 0 \text{ p. p.}, \sum_{n \geqslant 1} \mathrm{P}^n h < \infty \qquad \text{p. p. pour la mesure } m;$$

dans le second cas par contre, on a $\mathrm{U}_h(h) = 1$ p. p. pour toute fonction $h : \mathrm{E} \to [0, 1]$ qui n'est pas m-négligeable, à condition de définir l'opérateur U_h par $\mathrm{U}_h = \sum_{\mathrm{N}} (\mathrm{PM}_{1-h})^n \mathrm{P}$ (voir [*4*]) [la démonstration de ce dernier résultat se trouve dans [*3*] au moins dans le cas où h est une fonction indicatrice]. On comparera ces résultats avec ceux du théorème 3.5 démontré dans [*4*] (voir aussi [*1*] et [*2*]) sous l'hypothèse plus restrictive de m-irréductibilité de P.

Observons d'autre part que l'hypothèse d'essentielle irréductibilité d'une probabilité de transition P par rapport à une mesure m est strictement moins restrictive que l'hypothèse d'irréductibilité. Par exemple à toute transformation ponctuelle mesurable θ de l'espace $(\mathrm{E}, \mathscr{I}, m)$ qui préserve la mesure m et qui est ergodique, la formule $\mathrm{P}(x, .) = \varepsilon_{\theta(x)} (x \in \mathrm{E})$ associe une probabilité de transition qui est m-essentiellement irréductible si l'espace de mesure $(\mathrm{E}, \mathscr{I}, m)$ n'a pas d'atomes; dans ce cas en effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$, la mesure $\sum_{\mathrm{N}^*} \mathrm{P}^n(x, .)$ est portée par l'orbite dénombrable $(\theta^n(x), n \in \mathrm{N}^*)$ du point x et elle est donc étrangère à la mesure m que nous avons supposé sans atome.

Voici alors le résultat principal de cette note.

PROPOSITION 2. — *Soit* $(\mathrm{E}, \mathscr{I})$ *un espace mesurable séparable muni d'une mesure positive et σ-finie m. Soit* P *une probabilité de transition sur* $(\mathrm{E}, \mathscr{I})$ *telle que* $m\mathrm{P} \ll m$. *Si* P *est m-essentiellement irréductible, deux cas seulement sont possibles :*

a) *ou bien il existe une partie mesurable* E_1 *de* E, *telle que* $m(\mathrm{E}_1^c) = 0$, *que* $\mathrm{P}1_{\mathrm{E}_1} \geqslant 1_{\mathrm{E}_1}$, *et que*

$$m \ll \sum_{\mathrm{N}^*} \mathrm{P}^n(x, .) \qquad \textit{pour tout } x \in \mathrm{E}_1;$$

b) *ou bien il existe une partie mesurable* E_2 *de* E *telle que* $m(\mathrm{E}_2^c) = 0$, *que* $\mathrm{P}1_{\mathrm{E}_2} \geqslant 1_{\mathrm{E}_2}$ *et que*

$$m \perp \sum_{\mathrm{N}^*} \mathrm{P}^n(x, .) \qquad \textit{pour tout } x \in \mathrm{E}_2.$$

L'inégalité $P1_{E_1} \geqslant 1_{E_1}$ assure que la trace P′ de la probabilité de transition P sur l'espace mesurable $(E_1, E_1 \cap \mathscr{F})$ est une probabilité de transition et que les itérées de P′ sur E_1 sont les traces sur E_1 des itérées P^n de $P(n \in N^*)$. Dans le cas (*a*) envisagé dans la proposition ci-dessus, la trace de P sur E_1 est donc une probabilité de transition irréductible pour la mesure m restreinte à E_1.

Démonstration. — Commençons par introduire le sous-ensemble A de E défini par

$$A = \{ x : m \ll U_\theta(x, .) \}$$

où U_θ est, pour tout réel $\theta \in [0, 1[$, le noyau positif défini sur $(E, \mathscr{F})$ par

$$U_\theta(x, F) = \sum_{N^*} (1 - \theta)^n P^n(x, F) ;$$

il est clair que la définition de A ne dépend pas du θ choisi.

Montrons que A est mesurable en nous fixant un $\theta \neq 0$; pour un tel θ les mesures $U_\theta(x, .)$ $(x \in E)$ sont finies. Nous pourrons supposer aussi, en la remplaçant éventuellement par une mesure équivalente, que la mesure m est finie. Choisissons alors une sous-algèbre de Boole $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ qui soit dénombrable et qui engendre $\mathscr{F}$; désignons ensuite par $\mathscr{G}_n$ $(n \in N^*)$ les classes dénombrables

$$\mathscr{G}_n = \left\{ G : G \in \mathscr{G}, m(G) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Or pour toute mesure positive et finie μ sur $(E, \mathscr{F})$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $m \ll \mu$ sur $\mathscr{F}$,

b) pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que $m(G) \leqslant \varepsilon$ dès que G est un ensemble de $\mathscr{G}$ vérifiant $\mu(G) \leqslant \delta(\varepsilon)$,

c) $\inf_{\mathscr{G}_n} \mu(G) > 0$, pour tout $n \in N^*$.

Il en résulte immédiatement que

$$A = \bigcap_{N^*} \{ x : \inf_{\mathscr{G}_n} U_\theta(x, G) > 0 \}$$

et la mesurabilité de A est donc claire.

Montrons ensuite que $A^c = \{ x : m \perp U_\theta(x, .) \}$. Le second membre de cette égalité ne dépendant en fait pas de θ, nous établirons cette égalité par un $\theta > 0$. A cet effet considérons un état $x \in E$ tel que la mesure $U_\theta(x, .)$

ne soit pas étrangère à la mesure m. L'équation résolvante $U_0 = U_\theta + \theta U_\theta U_0$ entraîne alors pour toute partie mesurable F non négligeable de $(E, \mathscr{I}, m)$ que

$$U_0(x, F) \geqslant \theta \int U_\theta(x, dy) U_0(y, F) > 0$$

car la fonction $U_0(., F)$ est strictement positive m-presque partout grâce à l'hypothèse d'essentielle irréductibilité. Nous avons ainsi établi que $m \ll U_0(x, .)$, c'est-à-dire que $x \in A$.

Démontrons que $U_0 1_A = 0$ sur A^c; cela entraînera que $1 - P1_{A^c} = P1_A = 0$ sur A^c et donc que $P1_{A^c} \geqslant 1_{A^c}$. Pour cela choisissons un état $x \in E$ tel que $U_0(x, A) > 0$. La définition de l'ensemble A entraînant que $U_\theta(., F) > 0$ sur A pour toute partie mesurable F de $(E, \mathscr{I}, m)$ qui n'est pas négligeable, l'équation résolvante $U_0 = U_\theta + \theta U_0 U_\theta$ nous permet cette fois d'écrire que

$$U_0(x, F) \geqslant \theta \int_A U_0(x, dy) U_\theta(y, F) > 0 \qquad \text{car } U_0(x, A) > 0.$$

Cela montre que $m \ll U_0(x, .)$, c'est-à-dire que $x \in A$, dès que $U_0(x, A) > 0$; aussi $U_0 1_A = 0$ sur A^c. En outre $m(A)$ ou $m(A^c)$ doit être nul car si $m(A) \neq 0$, l'essentielle irréductibilité de P entraîne que $U_0(x, A) > 0$ p. p. $[m]$ et donc d'après l'égalité $U_0 1_A = 0$ sur A^c que nous venons de démontrer, que $m(A^c) = 0$.

Deux cas sont donc possibles. Ou bien $m(A) = 0$ et dans ce cas en posant $E_2 = A^c$, nous déduisons de ce qui précède que les propriétés (*b*) de la proposition sont vérifiées par cet ensemble E_2. Ou bien $m(A^c) = 0$; dans ce cas nous posons $E_1 = \{ U_0(., A^c) = 0 \}$ et vérifions que cet ensemble jouit des propriétés (*a*) de la proposition. La condition d'absolue continuité $mP \ll m$ entraîne que $mU_0 \ll m$ et donc que

$$\int m(dx) U_0(x, A^c) = 0$$

puisque par hypothèse $m(A^c) = 0$; cela montre déjà que $m(E_1^c) = 0$. L'inégalité $PU_0 \leqslant U_0$ entraîne d'autre part que

$$\int P(x, dy) U_0(y, A^c) = 0 \qquad \text{si } x \in E_1 ;$$

par conséquent $P(x, E_1^c) = 0$ si $x \in E_1$ et ceci montre que $P1_{E_1} \geqslant 1_{E_1}$. Enfin comme $U_0(., A) = 0$ sur A^c et que $U_0(., E) = +\infty$ partout, il est clair que $E_1 \subset A$ et cela achève la démonstration. ■

Voici une application immédiate de la proposition 2 ci-dessus et de la proposition 3.5 [*4*].

COROLLAIRE 3. — *Soit m une mesure positive σ-finie et soit* P *une probabilité de transition définies sur l'espace mesurable séparable* $(E, \mathscr{I})$. *Supposons que* $mP \ll m$ *et que l'opérateur* T *sur* $L^1(m)$ *associé à* P *soit conservatif et ergodique. Supposons en outre l'existence d'un ensemble mesurable* G *non-négligeable (pour m) tel que les mesures* $\sum_{N^*} P^n(x, .)$ $(x \in G)$ *ne soient pas disjointes de m. Alors il existe une partie mesurable* E_0 *de* E *vérifiant* $m(E_0^c) = 0$ *et* $P1_{E_0} \geqslant 1_{E_0}$, *telle que la restriction de* P *à* E_0 *vérifie la condition de récurrence de Harris.*

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. DUFLO, Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles. *Bull. Soc. Math.*, t. **98**, 1970, p. 127-163.

[*2*] N. JAIN and B. JAMISON, Contribution to Doeblin's theory of Markov processes. *Zeits. f. Wahrsch.*, t. **8**, 1967, p. 19-40.

[*3*] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités.* Masson, 2e éd., 1970.

[*4*] J. NEVEU, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *Ann. Inst. Fourier*, 1972.

(Manuscrit reçu le 22 février 1972).