ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL MÉTIVIER

Théorèmes limite quotient pour chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 2 (1972), p. 93-105
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_2_93_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 2, 1972, p. 93-105. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorèmes limite quotient pour chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris

par

Michel MÉTIVIER

Laboratoire de Probabilités, Université de Rennes I,
Équipe associée du C. N. R. S. n° 250, Avenue du Général-Leclerc, BP 25 A,
35-Rennes.

SUMMARY. — The paper states and gives a proof of a generalized version of an Orey's ratio limit theorem for recurrent (in the sense of Harris) Markov chains. Namely, for every couple of special fonctions f and g (« special » in the sense of J. Neveu), and any couple of probability measures μ and ν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k\leq n} \mu P^k f}{\sum\limits_{k\leq n} \nu P^k g} = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$$

where λ is the P-invariant measure.

I. — PROBLÈME

On considère le noyau markovien P d'une chaîne récurrente au sens de Harris (X_n) sur un espace d'états (E, β). Le problème auquel nous nous intéressons est celui de l'étude du comportement asymptotique des rapports

$$R^n(\mu, \nu; A, B) = \frac{\sum_{k \leq n} \mu P^k A}{\sum_{k \leq n} \nu P^k B} \tag{1}$$

où A et B sont deux éléments de β ; μ et ν deux probabilités.

Dans son article de 1956 [3], Harris pose la question de savoir si, sous la seule hypothèse de récurrence telle que nous la supposons ici, les rapports $R^n(\mu, \nu; A, B)$ convergent vers $\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}$, λ désignant la mesure invariante, pour tout couple (μ, ν) de probabilités sur (E, β) et pour tout couple (A, B) d'ensembles de mesure λ finie.

Cette question est d'autant plus naturelle que dans le cas de chaînes de Markov, à espace E dénombrable, le résultat analogue a été prouvé par Doeblin en 1938 et Chung en 1954 (voir la bibliographie dans [3]).

Ce problème comporte une réponse simple lorsque la mesure invariante λ est une probabilité. Dans ce cas, on sait (cf. Orey [9]) que, pour tout $A \in \beta$ et toute probabilité μ, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \mu P^k - \lambda \right\| = 0.$$

On en déduit immédiatement que, pour tout $A \in \beta$, tout $B \in \beta$ et tout couple (μ, ν) de probabilités, on a :

$$\lim_{n \to \infty} R^n(\mu, \nu; A, B) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}.$$

Dans le cas où $\lambda(E) = +\infty$, la réponse la plus voisine de la conjecture de Harris a été donnée par Jain dans un article important de 1966 [4].

THÉORÈME DE JAIN. — *Si f et g sont deux fonctions intégrables par rapport à la mesure invariante λ, il existe un ensemble* N, *dépendant de f et g, de mesure nulle pour λ, tel que*

$$\forall (x, y) \quad x \notin N, \quad y \notin N \quad \lim_n R^n(x, y; f, g) = \lim_n \frac{\sum_{k \leq n} P^k f(x)}{\sum_{k \leq n} P^k g(y)} = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$$

Cet énoncé laisse clairement ouverte la question : quand peut-on affirmer que la limite existe pour tout (x, y), ou au moins pour tout x et y n'appartenant pas à un ensemble exceptionnel N, indépendant de f et g?

Des contre-exemples, donnés par Jain lui-même dans son article et par Orey (cf. [9]), montrent que, sous la seule hypothèse de récurrence de Harris, il n'existe pas d'ensemble N, λ-négligeable, indépendant de (f, g), pour tout couple de fonctions f et g λ-intégrables.

On peut néanmoins chercher des classes $\mathscr{C}$ de fonctions λ-intégrables, telles que la limite ait lieu pour tout $(x, y) \in E \times E$ et tout couple $(f, g) \in \mathscr{C}$.

Le premier théorème dans ce sens a été énoncé par Harris [2], sans démonstration. Un théorème de ce type se trouve démontré dans [5], pour une classe $\mathscr{C}$ d'indicateurs d'ensembles (appelés depuis modestes par Meyer). Ces divers résultats sont inclus dans un théorème d'Orey [9] qui considère pour $\mathscr{C}$ l'ensemble des indicateurs d'une classe plus vaste (cf. Brunel [1] pour la preuve de l'inclusion) que celle des ensembles modestes : celle des « D-sets ».

Les « D-sets » d'Orey étant les ensembles dont les indicateurs sont des fonctions « spéciales » au sens de J. Neveu (cf. Brunel [1]), une forme un peu plus générale du théorème d'Orey est obtenue en prenant pour $\mathscr{C}$ l'ensemble des « fonctions spéciales ».

Cet exposé est consacré à l'énoncé et la preuve de cette forme légèrement généralisée du théorème d'Orey.

II. — ÉNONCÉ DU THÉORÈME LIMITE QUOTIENT

1. — Fonctions spéciales.

Nous utilisons systématiquement la théorie des fonctions spéciales due à J. Neveu. Nous revenons constamment au mémoire de ce dernier (cf. [7]) pour les résultats sur les fonctions spéciales.

Nous rappelons seulement quelques notations et définitions utilisées dans [7].

Pour toute fonction β-mesurable h, $0 \leq h \leq 1$, sur E, on note M_h l'opérateur $g \rightsquigarrow h \cdot g$, et simplement M_A si $h = 1_A$.

On note également U_h l'opérateur positif

$$U_h = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(M_{1-h}P)^n$$

On rappelle qu'une fonction f β-mesurable positive, bornée est *appelée spéciale* par J. Neveu si pour toute h, β-mesurable à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\lambda(h) > 0$, la fonction $U_h(f)$ est bornée sur E (Dans tout cet article, λ est la mesure invariante associée au noyau de Harris P).

2. — Théorème principal.

Soient f et g deux fonctions spéciales, intégrables pour la mesure invariante λ. Pour tout couple (μ, ν) de probabilités sur (E, β), *on a :*

$$\lim_{n \to \infty} R_n(\mu, \nu; f, g) = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$$

III. — LEMMES PRÉLIMINAIRES

Nous groupons ici quelques lemmes sur les fonctions spéciales qui nous sont utiles pour la démonstration du théorème.

LEMME 1 (cf. démonstration de la proposition IV-6 de [7]). — *Soit f_0 une fonction ≥ 0 $\| f_0 \| \leq 1$* [1] *et m_0 une mesure positive $\neq 0$ abs. cont. par rapport à la mesure invariante λ telles que $U_{f_0} \geq 1 \otimes m_0$. Alors, pour toute h, telle que $0 \leq h \leq f_0$ et $\int h dm_0 \neq 0$, et pour toute fonction spéciale f on a :*

$$U_h(f) \leq \frac{1}{m_0(h)} \| U_{f_0}(f) \|$$

Démonstration.

$$U_h(f) = \sum_{n \geq 0} (U_{f_0} M_{f_0 - h})^n U_{f_0}(f) \quad \text{(Prop. III-1 de [7]).}$$

Comme

$$\int f_0 d\lambda \geq \int h d\lambda > 0$$

on a $U_{f_0} f_0 = 1$, d'où

$$\begin{aligned}(U_{f_0} M_{f_0 - h})1 &= U_{f_0}(f_0 - h) \\ &= 1 - U_{f_0} h \leq 1 - m_0(h) < 1\end{aligned}$$

[1] On note $\| f \| = \sup_{x \in E} | g(x) |$.

On a donc

$$U_h(f) \leq \sum_{n \geq 0} \| U_{f_0}(f) \| (1 - m_0(h))^n \leq \frac{\| U_{f_0}(f) \|}{m_0(h)}$$

LEMME 2. — *Soit f une fonction spéciale ≥ 0 et λ-intégrable. Pour tout $\alpha > 0$, existe une constante K_α telle que pour toute $h \geq 0$ vérifiant $\lambda(h) \geq \alpha$ et $0 \leq h \leq f$ on ait*

$$U_h f \leq K_\alpha$$

Démonstration. — Soit $\theta < \dfrac{1}{\| f \|}$. D'après la proposition IV-9 de [7], il existe une mesure m_0, équivalente à λ telle que, si nous posons $f_0 = \theta f$ on ait :

$$U_{f_0} \geq 1 \otimes m_0$$

Comme m_0 et λ sont équivalentes, on peut trouver α_0, tel que pour toute $h \leq f$, on ait

$$\int h dm_0 \leq \alpha_0 \Rightarrow \int h d\lambda \leq \frac{\alpha}{\theta}$$

D'où, d'après le lemme 1, pour toute h telle que

$$\int \theta h \cdot d\lambda > \alpha \quad \text{on a} \quad U_h(f) \leq \frac{1}{\theta \alpha_0} \| U_{f_0} f \|. \quad \blacksquare$$

LEMME 3. — *Soit Q un opérateur markovien de Harris, de mesure invariante λ, pour lequel la fonction constante égale à 1 est spéciale.*

Alors, pour toute $h \in H$, non négligeable pour λ, et notant ${}^Q U_h$ le potentiel associé à h et Q :

$$\sum_{k \geq n} Q(M_{1-h}Q)^k 1 \leq \frac{\| {}^Q U_h 1 \|^2}{n+1}$$

Démonstration. — Posons $\| Q_{U_h} \| = a$; on a

$$\sum_{k \geq n} (QM_{1-h})^k Q = (QM_{1-h}) {}^Q U_h$$

Comme la suite $((M_{1-h}Q)^n 1)_{n \in N}$ est décroissante (itérès d'opérateurs sous-markoviens), il en est de même de $Q(M_{1-h}Q)^n 1$ et

$$(n+1)(QM_{1-h})^n 1 = (n+1)(QM_{1-h})^n Q1 \leq \sum_{k \leq n} (QM_{1-h})^k Q1 \leq a$$

d'où

$$\sum_{k\geq n}(QM_{1-h})^kQ1 \leq a(QM_{1-h})^n \leq \frac{a^2}{n+1}$$

LEMME 4. — Soit, comme dans [7], H l'ensemble des fonctions sur E, β-mesurables à valeurs dans [0, 1]. Soient $f \in H$, $h \in H$.

On note λ la mesure invariante pour le noyau markovien de Harris P.

On suppose $\lambda(f\cdot h) > 0$.

On pose :

$$S_f = [f > 0]$$
$$Q = M_{S_f}U_fM_f$$
$$^{Q}U_h = \sum_{k\geq 0} Q(M_{1-h}Q)^k$$

Alors

1° $M_{S_f}U_{h.f}M_f = {}^{Q}U_h$.

2° Si f est spéciale pour P, Q restreint à S_f est un noyau de Harris sur S_f, de mesure invariante $f\cdot\lambda$ et 1_{S_f} est spéciale pour Q.

Démonstration.

1° Par définition

$$^{Q}U_h = \sum_{k\geq 0}(M_{S_f}U_fM_f)(M_{1-h}M_{S_f}U_fM_f)^k$$
$$= M_{S_f}\sum_{k\geq 0}U_f(M_{f-fh}U_f)^kM_f$$

D'après la formule fondamentale de [7], prop. II-1, on a bien

$$^{Q}U_h = M_{S_f}U_{h.f}M_f$$

2° On sait [7], prop. IV-1, que $f\cdot\lambda$ est une mesure invariante pour Q, et que pour toute h telle que $\lambda(f\cdot h) > 0$ on a

$$U_{hf}hf = 1$$

Donc, en vertu du 1° du lemme :

$$(f\cdot\lambda)(h) > 0 \Rightarrow {}^{Q}U_hh = 1_{S_f}$$

Ceci exprime que Q, restreint à S_f, est un noyau de Harris, et, comme, pour toute $h \in \mathrm{H}$, h nulle en dehors de S_f et telle que $(f \cdot \lambda)(h) > 0$ on a

$$^{\mathrm{Q}}\mathrm{U}_h 1_{\mathrm{S}_f} = \mathrm{M}_{\mathrm{S}_f} \mathrm{U}_{h.f} \mathrm{M}_f 1_{\mathrm{S}_f} \leq \mathrm{M}_{\mathrm{S}_f} \mathrm{U}_{h.f} f < +\infty$$

1_{S_f} est bien spéciale pour Q. ■

LEMME 5. — *Soit f une fonction spéciale, λ-intégrable, $f \in \mathrm{H}$. Soit* Q *le noyau markovien* $\mathrm{M}_{\mathrm{S}_f}\mathrm{U}_f\mathrm{M}_f$ (cf. notations du lemme 4). *Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\exists \mathrm{K} > 0$ tel que*

$$(0 \leq h \leq f,\ h \in \mathrm{H},\ \lambda(f \cdot h) \geq \alpha) \Rightarrow \left\| \sum_{k \geq n} \mathrm{Q}(\mathrm{M}_{1-h}\mathrm{Q})^k 1_{\mathrm{S}_f} \right\| \leq \frac{\mathrm{K}}{n+1}$$

Démonstration. — On sait (lemme 4) que le noyau $\mathrm{Q} = \mathrm{M}_{\mathrm{S}_f}\mathrm{U}_f\mathrm{M}_f$ est un noyau de Harris sur S_f, de mesure invariante associée $f \cdot \lambda$, tel que précisément

$$^{\mathrm{Q}}\mathrm{U}_h = \sum_{k \geq 0} \mathrm{Q}(\mathrm{M}_{1-h}\mathrm{Q})^k$$

On applique alors les lemmes 2 et 3.

LEMME 6. — *Soit f une fonction spéciale λ-intégrable, $f \in \mathrm{H}$. Il existe un processus de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathrm{X}_n)_{n \geq 0}, (\mathrm{P}_x)_{x \in \mathrm{E}})$ admettant* P *pour probabilité de transition, et une suite $(\tau_f^m)_{m>0}$ de temps d'arrêts du processus telle que (en notant comme d'habitude θ l'opérateur de translation)*

$$\tau_f^m = \tau_f^1 \circ \theta_{\tau_f^{m-1}} + \tau_f^{m-1}$$

$$\mathrm{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\tau_f} g(\mathrm{X}_k)\right) = \mathrm{U}_f g(x)$$

pour toute g bornée β-mesurable.

Démonstration. — On construit d'abord un processus de Markov $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, (\tilde{\mathrm{X}}_n)_{n \geq 0}, (\tilde{\mathrm{P}}_x)_{x \in \mathrm{E}}, \tilde{\theta})$ associé à P, et suivant une méthode classique pour la construction des « processus subordonnés » ; on pose :

$$\Omega = \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*} \times \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}^*}$$

$$\mathrm{X}_n((k_p, \tilde{w}_p)_{p \in \mathbb{N}^*}) = \tilde{\mathrm{X}}_{n-(k_0+\ldots+k_{r-1})}(\tilde{w}_r) \text{ où } r = \inf\{j : k_0 + \ldots + k_j \geq n\} \text{ et } k_0 = 0$$

(i. e. : on construit une fonction aléatoire correspondant à l'histoire d'une particule, tuée et aussitôt remplacée, aux instants successifs $\tau_p = k_1 + \ldots + k_p$, se déplaçant entre les instants (τ_p) comme la particule primitive).

On définit la loi de probabilité P_x de telle sorte que $f(\mathrm{X}_{k_{r+1}}(w))$ représente la probabilité d'être remplacée de la particule qui, entre τ_r et τ_{r+1}, suit la trajectoire $\tilde{w}_{r+1}$. Introduisons alors la fonctionnelle multiplicative

$$\mathcal{M}_k(\tilde{w}) = \prod_{i=1}^{k}(1 - f(X_i(\tilde{w}))), \qquad \mathcal{M}_0(\tilde{w}) = 1$$

Considérons la famille croissante des tribus cylindriques $\mathcal{F}_n$, de dimension finie dans $\mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*} \times \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}^*}$ et le système projectif de probabilités (P_x^n) définie de la façon suivante :

Soit $N(x, \Phi)$, $x \in E$, Φ-mesurable sur $\mathbb{N} \otimes \tilde{\Omega}$, défini par

$$N(x, \Phi) = \tilde{E}_x\left(\sum_{k>1} \Phi(k, \tilde{w})(\mathcal{M}_{k-1}(\tilde{w}) - \mathcal{M}_k(\tilde{w}))\right)$$

On pose

$$\int \Phi(k_1, \tilde{w}_1) P_x^1(dk_1, d\tilde{w}_1) = N(x, \Phi)$$

et on définit par récurrence les lois $(P_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\int \Phi(k_1, \ldots, k_n; \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n) P_x^n(dk_1, \ldots, d\tilde{w}_n)$$
$$= \int P_x^{n-1}(dk_1, \ldots, dk_{n-1}; \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_{n-1})$$
$$\int N(\tilde{X}_{k_{n-1}}(\tilde{w}_{n-1}); d(k_n, \tilde{w}_n)) \Phi(k_1, \ldots, k_n; \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n)$$

Le théorème classique de Ionescu-Tulcea sur les limites projectives (cf. [8]) montre que la famille (P_x^n) admet une limite projective P_x. Il est plus ennuyeux que difficile de vérifier que l'objet $(\Omega, \mathcal{F}, (P_x), (X_n))$ ainsi construit est un processus de Markov de transition P.

On vérifie qu'on définit un opérateur de translation en posant :

$$\theta((k_p, \tilde{w}_p)_{p\in\mathbb{N}}) = (k'_p, \tilde{w}'_p)_{p\in\mathbb{N}}$$

avec

$$\begin{array}{lll} k'_1 = k_1 - 1 & & \text{si } k_1 > 1 \\ k'_i = k_i & i = 2, \ldots & \\ \tilde{w}'_1 = \tilde{\theta}(\tilde{w}_1) & & \\ \tilde{w}'_i = \tilde{w}_i & i = 2, \ldots & \\ k'_i = k_{i+1} & i = 1, \ldots & \text{si } k_1 = 1 \\ \tilde{w}'_i = \tilde{w}_{i+1} & i = 1, \ldots & \end{array}$$

De la définition des τ_i et de la définition de P_x, résultent aisément les égalités du lemme 6, si l'on pose $\tau_f^i = \tau_i$.

LEMME 7. — *Soit f une fonction spéciale λ-intégrable, $f \in H$. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de parties mesurables de $S_f = [f > 0]$, telle que*

$$\forall i \in I \qquad f \cdot \lambda(C_i) \geq \alpha > 0$$

On note σ_i le temps d'entrée du processus du lemme 6 dans C_i.
Alors, pour toute probabilité initiale μ

$$\lim_{m \to \infty} (1 - \inf_{i \in I} P_\mu[\sigma_i \leq m]) = 0$$

Démonstration. — Soit, comme dans les lemmes précédents,

$$Q = M_{S_f} U_f M_f \quad \text{restreint à} \quad S_f = [f > 0]$$

On a, m_0 étant fixé,

$$\begin{aligned} P_\mu[\sigma_i \leq m] &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m,\ \sigma_i \circ \theta_{\tau_f^1} + \tau_f^1 \leq m] \\ &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m,\ \sigma_i \circ \theta_{\tau_f^1} + \tau_f^1 > m] \\ &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m,\ \sigma_i \circ \theta_{\tau_f^1} + \tau_f^1 > \tau_f^{m_0}] \\ &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - P_\mu\left[\sum_{k < m_0} 1_{C_i}(X_{\tau_f^k + \tau_f^1}) = 0\right] \end{aligned}$$

La propriété forte de Markov donne alors :

$$P_\mu[\sigma_i \leq m] \leq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - E_\mu P_{X_{\tau_f^1}}\left[\sum_{k < m_0} 1_{C_i}(X_{\tau_f^k}) = 0\right]$$

Comme $X_{\tau_f^1} \in S_f$ et

$$\forall x \in S_f \qquad P_x\left[\sum_{k < m_0} 1_{C_i}(X_{\tau_f^k}) = 0\right] = \sum_{n \geq m_0 - 1} Q(M_{E - C_i} Q)^n 1_{C_i}(x)$$

l'hypothèse $\lambda(f.1_{C_i}) > \alpha > 0$, permet, d'après le lemme 5 de trouver m_0 tel que la quantité au second membre de cette égalité soit majorée uniformément par ε. Le lemme 7 en résulte. ■

IV. — PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Le théorème que nous avons en vue résultera du théorème suivant, dont la démonstration suit largement l'idée de la démonstration du théorème d'Orey dans [9].

THÉORÈME. — *Soit f une fonction spéciale intégrable pour λ, et soient μ et ν deux lois de probabilité sur* (E, β) ; *alors*

$$\lim_{n\to\infty} R^n(\mu, \nu; f, f) = 1$$

Démonstration. — On le démontre seulement pour $\nu = \dfrac{f\cdot\lambda}{\int f d\lambda}$ et $0 < f < 1$, le cas général s'y ramenant immédiatement.

Soit $S = [f > 0]$.

Soit $\delta > 0$. On va montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} R^n(\mu, \nu; f, f) \leq 1 + \delta \tag{1}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} R^n(\mu, \nu; f, f) \geq 1 - \delta \tag{2}$$

Introduisons les notations, relatives au processus (X_n) des lemmes précédents

$$H_n(x) = E_x\Big(\sum_{1\leq k\leq n} f(X_k)\Big)$$

$$H_n(\mu) = E_\mu\Big(\sum_{1\leq k\leq n} f(X_k)\Big)$$

$$B_{n,\delta} = \{ x : x \in S \quad H_n(x) \leq (1+\delta)H_n(\nu) \}$$

$$C_{n,\delta} = \{ x : x \in S \quad H_n(x) \geq (1-\delta)H_n(\nu) \}$$

$$h_{n,\delta} = f\cdot 1_{B_{n,\delta}}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} H_n(\nu) = +\infty$, pour n assez grand, on a $H_n(\nu) > 0$ d'où

$$H_n(\nu) \geq \int_{E - B_{n,\delta}} H_n(x)\nu(dx) \geq \nu(E - B_{n,\delta})(1+\delta)H_n(\nu)$$

et par suite, pour tout n assez grand (indépendamment de δ)

$$\frac{1}{\lambda(f)}\lambda(h_{n,\delta}) = \nu(B_{n,\delta}) \geq \frac{\delta}{1+\delta} \tag{3}$$

Pour toute probabilité μ, on a alors, en notant $\tau_{B_{n,\delta}}$ le temps d'entrée du processus dans $B_{n,\delta}$,

$$H_n(\mu) = \int E_x\Big(\sum_{k=1}^{\tau_{B_{n,\delta}}} f(X_k)\Big)\mu(dx) + \int E_x\Big(\sum_{k=(\tau_{B_{n,\delta}}+1\wedge n)}^{n} f(X_k)\Big)$$

En appliquant la propriété de Markov forte au deuxième terme et en utilisant la définition de $B_{n,\delta}$

$$\begin{aligned} H_n(\mu) &\leq E_\mu\left(\sum_{k=1}^{\tau_{B_{n,\delta}}} f(X_k)\right) + \sup_{x\in B_{n,\delta}} H_n(x) \\ &\leq \mu U_{B_{n,\delta}} f + (1+\delta) H_n(\nu) \end{aligned}$$

et, *a fortiori*,

$$H_n(\mu) \leq \mu U_{h_{n,\delta}} f + (1+\delta) H_n(\nu)$$

Le lemme 2 et la relation (3) impliquent alors l'existence d'une constante K_δ telle que, pour tout n assez grand,

$$H_n(\mu) \leq K_\delta + (1+\delta) H_n(\nu) \tag{4}$$

comme

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\nu) = +\infty$$

la relation (1) en résulte.

Avant de prouver l'inégalité (2), nous montrons d'abord qu'en raison de l'inégalité (4), le complémentaire de $C_{n,\delta}$ ne peut pas être trop gros :

$$\begin{aligned} H_n(\nu) &= \int_{C_{n,\delta}} H_n(x)\nu(dx) + \int_{E-C_{n,\delta}} H_n(x)\nu(dx) \\ &\leq [K_\delta + (1+\delta)H_n(\nu)]\nu(C_{n,\delta}) + (1-\delta)H_n(\nu)\nu(E - C_{n,\delta})] \end{aligned}$$

Pour tout n tel que $K_\delta \leq \delta H_n(\nu)$ on a donc

$$\nu(C_{n,\delta}) \geq \frac{1}{3} \tag{5}$$

En utilisant la propriété de Markov forte, on peut écrire

$$\begin{aligned} H_{n+m}(\mu) &= E_\mu\left(\sum_{k=1}^{n+m} f(X_k)\right) \\ &\geq E_\mu\left[1_{[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m]} \sum_{k=\tau_{C_{n,\delta}}+1}^{n+\tau_{C_{n,\delta}}} f(X_k)\right] \\ &\geq E_\mu(1_{[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m]} H_n(X_{\tau_{C_{n,\delta}}})) \\ &\geq E_\mu(1_{[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m]} \inf_{y\in C_{n,\delta}} H_n(y)) \\ &\geq (1-\delta) H_n(\nu)\cdot P_\mu[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m] \end{aligned}$$

D'après le lemme 7, il est possible de choisir m assez grand pour que (cf. (5) ci-dessus)

$$K_\delta \leq \delta H_n(\nu) \Rightarrow P_\mu[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m] \geq (1 - \delta)$$

Pour tout n assez grand, on a donc :

$$H_n(\mu) + m \geq H_{n+m}(\mu) \geq (1 - \delta)^2 H_n(\nu)$$

et par suite

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{H_n(\mu)}{H_n(\nu)} \geq (1 - \delta)^2$$

ce qui prouve (2).

FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME LIMITE QUOTIENT

Le théorème d'Orey généralisé que nous avons en vue se déduit aisément du théorème précédent.

Si f et g sont deux fonctions spéciales telles que $\lambda(f) > 0$ et $\lambda(g) > 0$, posons

$$h = f - \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)} g$$

La fonction $|h|$ est spéciale avec $\int h d\lambda = 0$

On a

$$H_n(\mu, f) - \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)} H_n(\mu, g) = \sum_{k=1}^{n} \mu P^k h$$

D'après le théorème de [7], corollaire V-5, les sommes $\sum_{k=1}^{n} \mu P^k h$ sont bornées, d'où immédiatement le théorème, puisque $\lim_{n \to \infty} H_n(\mu, g) = +\infty$. ■

RÉFÉRENCES

[1] A. Brunel, Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **19**, 1971, p. 323-329.

[2] T. E. Harris, Recurrent Markov processes. *Ann. Math. Statistics*, § 26, 1955, p. 152-153.

[3] T. E. Harris, The existence of stationary measures for certain Markov processes. *Proc. Third Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab.*, vol. **II**, 1956, p. 113-124.

[4] N. C. Jain, Some limit theorems for a general Markov process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **6**, 1966, p. 206-223.

[5] MÉTIVIER, Existence of an invariant measure and an Ornstein's ergodic theorem. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. **40**, n° 1, 1969, p. 79-96.
[6] MEYER, Solutions de l'équation de Poisson dans le cas récurrent. Séminaire de Strasbourg, 1969, p. 1070.
[7] NEVEU, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *A paraître*.
[8] NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des Probabilités*. Masson.
[9] OREY, Limit theorems for Markov chain transition probability function. *Lecture Notes*. University of Minneapolis.

Manuscrit reçu le 26 octobre 1971.