

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GÉRARD LETAC

Groupe de Stam d'une probabilité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 2 (1972), p. 175-181

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_2_175_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Groupe de Stam d'une probabilité

par

Gérard LETAC

Université de Clermont.

SUMMARY. — The aim of this note is to put in the natural setting of harmonic analysis, the paper from A. J. Stam [3], and by the way to get straighter proofs.

SOMMAIRE. — Cette note cherche à placer une partie du remarquable article de A. J. Stam [3] dans son cadre naturel, celui de l'analyse harmonique et, éventuellement, à simplifier les preuves.

Soit G un groupe abélien localement compact dont la loi est notée additivement, $M(G)$ l'algèbre de Banach des mesures de Radon bornées sur G ($\mu\nu$ note le produit de convolution de μ et ν), $P(G)$ la partie de $M(G)$ formée de mesures positives de masse 1. La mesure ε_x est la masse unité en x .

1. PROPRIÉTÉS DE $V(\mu, x)$

DÉFINITION 1. — Si μ est dans $P(G)$ on pose : $V(\mu, x) = \|\mu(\varepsilon_0 - \varepsilon_x)\|_{M(G)}$. Nous énumérons quelques propriétés de V :

- v 1) $V(\mu, 0) = 0$ et $V(\mu, x) = V(\mu, -x)$
- v 2) $V(\mu, x + y) \leq V(\mu, x) + V(\mu, y)$
- v 3) $V(\mu\nu, x) \leq V(\mu, x)$
- v 4) $V(\mu, x)$ est semi-continue inférieurement (s. c. i.) par rapport à x .

Seule la propriété *v* 4) est moins évidente :

$$V(\mu, x) = \sup \left\{ \left| \int (f(x+y) - f(y))\mu(dy) \right| : \right. \\ \left. f \text{ fonction continue à support compact, } \sup_{y \in G} |f(y)| \leq 1 \right\}.$$

La fonction f étant à support compact est uniformément continue, et donc la fonction $x \mapsto \int f(x+y)\mu(dy)$ est continue. La fonction $V(\mu, x)$ étant le sup d'une famille de fonctions continues est donc s. c. i.

DÉFINITION 2. — Soient μ et μ' dans $P(G)$. On note $\mu' < \mu$ si il existe α dans l'intervalle $(0, 1)$ et μ'' dans $P(G)$ tels que

$$\mu = \alpha\mu' + (1 - \alpha)\mu''$$

(Il est facile [1] de voir que $\mu' < \mu$ est équivalent au fait que μ' est absolument continue par rapport à μ et que la dérivée de Radon-Nicodym $\frac{d\mu'}{d\mu}$ est essentiellement bornée par rapport à μ).

PROPOSITION 1. — $V(\mu, x) < 2$ si et seulement si il existe μ_0 dans $P(G)$ tel que

$$\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2} \mu_0 < \mu.$$

Cette proposition se trouve dans [3] et sa preuve se transpose immédiatement dans le cadre actuel.

2. LE GROUPE $L(\mu)$

DÉFINITION 3. — Si μ est dans $P(G)$, on pose :

$$L(\mu) = \{ x : \lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mu^n, x) = 0 \}$$

On dira que $L(\mu)$ est le groupe de Stam de la probabilité μ . Voici quelques propriétés de $L(\mu)$:

- l 1) $L(\mu)$ est un sous-groupe de G (on utilise *v* 1) et *v* 2))
- l 2) $L(\mu) \subset L(\mu\nu)$ (on utilise *v* 3))
- l 3) $L(\mu^n) = L(\mu)$ pour tout entier positif n .

En effet $V(\mu^n, x)$ est une suite décroissante en n d'après v 3). Donc $L(\mu^n) \subset L(\mu)$; et on utilise l 2).

PROPOSITION 2. — Si μ et ν sont dans $P(G)$ et si $\mu < \nu$, alors $L(\mu) \subset L(\nu)$.

Preuve. — Il existe $\alpha \in [0, 1]$ et $\mu' \in P(G)$ tels que $\nu = \alpha\mu + (1 - \alpha)\mu'$. Alors

$$(*) \quad V(\nu^n, x) \leq \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} V(\mu^k, x)$$

On peut conclure, comme le fait Stam, en considérant un procédé à la Toeplitz. On peut aussi utiliser l'argument suivant :

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par

$$P(X_1 = 0) = \alpha \quad , \quad P(X_1 = 1) = 1 - \alpha.$$

Posons $a(k) = V(\mu^k, x)$. Le second membre de l'inégalité (*) s'écrit

$$E(a(X_1 + \dots + X_n)),$$

où E est le symbole usuel de l'espérance. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre K tel que $k > K$ entraîne $a(k) < \varepsilon$. Désignant par A_n l'événement $\{X_1 + \dots + X_n \leq K\}$, on a, comme $a(k) \leq 2$:

$$E(a(X_1 + \dots + X_n)) \leq 2 \Pr(A_n) + \varepsilon$$

Mais, d'après la loi faible des grands nombres, $X_1 + \dots + X_n \rightarrow \infty$ en probabilité si $n \rightarrow \infty$. Donc $\Pr(A_n) \rightarrow 0$, ce qui achève la preuve.

PROPOSITION 3.

$$x \in L\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)$$

Preuve. — Si x est un élément du groupe G d'ordre infini, $V\left(\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n, x\right)$ est égal à la somme des valeurs absolues des coefficients du polynôme $\left(\frac{1+s}{2}\right)^n (1-s)$ que, par application du théorème central limite, Stam montre être équivalente à $\frac{2}{\sqrt{\pi n}}$. Si x est d'ordre fini, $\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n$ tend suivant la topologie faible de $M(G)$, vers la mesure de Haar du sous-groupe

fini H engendré par x . $\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n (\varepsilon_0 - \varepsilon_x)$ tend donc faiblement vers zéro, mais H étant fini, la topologie faible est équivalente à la topologie de la norme sur $M(H)$ et donc $V\left(\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n, x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

3. LES THÉORÈMES PRINCIPAUX

THÉORÈME 1.

$$L(\mu) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : V(\mu^n, x) < 2\}$$

En d'autres termes la suite décroissante $V(\mu^n, x)$ n'a d'autres limites que 0 ou 2.

Preuve. — Si $V(\mu^n, x) < 2$, d'après la proposition 1 il existe $\alpha \in [0, 1]$ et μ_0 et μ_1 dans $P(G)$ tels que :

$$\mu^n = \frac{\alpha}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_x)\mu_0 + (1 - \alpha)\mu_1.$$

Donc $x \in L\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right) \subset L\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\mu_0\right) \subset L(\mu^n) = L(\mu)$, les différentes implications étant justifiées successivement par la proposition 3, l 2), la proposition 2 et l 3).

COROLLAIRE. — $L(\mu)$ est un F_σ .

Preuve. — En effet, $V(\mu^n, x)$ étant décroissante en n , d'après le théorème 1 :

$$L(\mu) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : V(\mu^n, x) \leq 1\}$$

Mais les accolades désignent des fermés puisque d'après v 4), $V(\mu^n, x)$ est s. c. i.

THÉORÈME 2. — Si μ est absolument continue par rapport à ν , alors $L(\mu) \subset L(\nu)$.

Preuve. — Posons $f = \frac{d\mu}{d\nu}$ et

$$c_n = \int \min(f(x), n)\nu(dx)$$

Si n est assez grand, $c_n > 0$ et on peut définir la fonction :

$$f_n = \frac{1}{c_n} \min (f(x), n),$$

ainsi que la mesure μ_n de $P(G)$, absolument continue par rapport à ν , telle que $f_n = \frac{d\mu_n}{d\nu}$. Si n est assez grand, $c_n \geq 1/2$ et donc $f_n \leq 2f$.

Puisque $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ ν -presque partout, en utilisant le théorème de la convergence dominée, on peut affirmer que

$$\|\mu - \mu_n\| = \int |f - f_n| d\nu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

D'après la proposition 2 et la remarque suivant la définition 2), on a $L(\mu_n) \subset L(\nu)$. Il reste seulement à prouver que $L(\mu) \subset \bigcup_n L(\mu_n)$.

Soit $x \in L(\mu)$. Alors il existe k assez grand et fixé tel que $V(\mu^k, x) < 2$. Posons $\varepsilon = 2 - V(\mu^k, x)$. Alors pour tout n :

$$V(\mu_n^k, x) < \|\mu_n^k - \mu^k\| + \|(\mu^k - \mu_n^k)\varepsilon_x\| + V(\mu^k, x);$$

or :

$$\|\mu_n^k - \mu^k\| \leq k \|\mu_n - \mu\|$$

puisque μ_n et μ sont dans $P(G)$. Prenons ensuite n assez grand pour que $2k \|\mu_n - \mu\| < \varepsilon$. Donc $V(\mu_n^k, x) < 2$, ce qui d'après le théorème 1, montre que $x \in L(\mu_n)$ et achève la preuve.

Rappelons qu'une partie C de G est appelée coset s'il existe un sous-groupe H et un point x de G tels que $C = x + H$. On vérifie facilement que si l'intersection d'une famille $(x_\alpha + H_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cosets est non vide, c'est un coset. Cette remarque donne un sens à la définition suivante :

DÉFINITION 4. — Si μ est dans $P(G)$, on pose $C(\mu) = \cap \{ C : C \text{ coset fermé tel que } \mu(C) = 1 \}$.

$C(\mu)$ est donc le plus petit coset fermé qui « supporte » μ .

DÉFINITION 5. — Un élément μ de $P(G)$ est dit fortement apériodique si $C(\mu) = G$.

Si $C(\mu) = x + H$, il est évident que $L(\mu) \subset H$. L'hypothèse de forte apériodicité dans le théorème suivant, qui caractérise le cas où $L(\mu) = H$, n'a donc rien de restrictif.

THÉORÈME 3. — Si μ de $P(G)$ est fortement apériodique, alors $L(\mu) = G$ si et seulement si il existe un entier positif n et une mesure ν absolument continue par rapport à la mesure de Haar de G tels que $\nu \prec \mu^n$.

Preuve. — Il est assez surprenant que la partie « seulement si » de la preuve soit la plus brève. La méthode de Stam se transpose mot à mot dans le cadre actuel et nous ne démontrerons donc ici que la partie « si ».

Sans perte de généralité, compte tenu de 1) 3) et de la proposition 2), on peut supposer μ absolument continue par rapport à la mesure de Haar dx de G . La convolution de deux fonctions de $L^1(G)$ étant continue, on peut supposer continue la densité de μ .

Posons $f_n = \frac{d(\mu^n)}{dx}$. Alors

$$V(\mu^n, x) = \int |f_n(y) - f_n(y - x)| dy$$

est une fonction continue de x (voir [2]), et d'après le théorème 1, $L(\mu)$ est un sous-groupe ouvert de G ; $H = G/L(\mu)$ est un groupe discret et la mesure μ' induite par μ sur H est purement atomique. Si H comprend plus d'un élément, μ ayant été supposé fortement apériodique, il existe deux éléments distincts h_1 et h_2 de H tels que $\mu'(h_1)$ et $\mu'(h_2)$ soient non nuls. Si $\mu'(h) \neq 0$, définissons μ_h comme la restriction de μ au coset h multipliée par $1/\mu'(h)$. H étant discret, à densité continue, on peut écrire

$$\mu = \sum_{h \in H} \mu_h \mu'(h).$$

Mais μ_{h_1} et μ_{h_2} étant absolument continues, il existe x_1 dans h_1 et x_2 dans h_2 tels que

$$\|\mu_{h_1} - \mu_{h_2} \varepsilon_{x_1 - x_2}\| = 2 - \alpha < 2 \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\mu'(h_1) \leq \mu'(h_2)$. Posons alors

$$\mu''_{h_1 + x_1 - x_2} = \mu_{h_2} \varepsilon_{x_1 - x_2}$$

$$\begin{aligned} V(\mu, x_1 - x_2) &\leq \sum_{\substack{h \in H \\ h \neq h_1}} \|\mu_h \mu'(h) - \mu''_{h_1} \mu'(h + h_2 - h_1)\| \\ &+ \|\mu_{h_1} \mu'(h_1) - \mu''_{h_1} \mu'(h_2)\| \\ &\leq 2 - \mu'(h_1) - \mu'(h_2) + \mu'(h_1) \|\mu_{h_1} - \mu''_{h_1}\| + \|\mu''_{h_1}\| \|\mu'(h_1) - \mu'(h_2)\| \\ &= 2 - \mu'(h_1) - \mu'(h_2) + \mu'(h_1)(2 - \alpha) + \mu'(h_2) - \mu'(h_1) \\ &= 2 - \alpha \mu'(h_1) < 2 \end{aligned}$$

Donc $x_1 - x_2 \in L(\mu)$, ce qui contredit le fait que H ait plus d'un point et montre que $L(\mu) = G$.

COROLLAIRE. — Si μ est purement atomique, soit $x + H$ le plus petit coset contenant l'ensemble de ses atomes. Alors $L(\mu) = H$.

Preuve. — Soit G_d le groupe G muni de la topologie discrète. L'application identité de $M(G_d)$ dans $M(G)$ conservant la norme, on a donc $L(\mu) = L(\mu\varepsilon_{-x}) \subset H$. Comme $\mu\varepsilon_{-x}$ est concentrée dans H , cette dernière mesure est fortement apériodique par rapport au groupe H discret et évidemment absolument continue par rapport à sa mesure de Haar. Le théorème 1 permet alors de conclure.

4. REMARQUES

Dans [4] Wiener et Young construisent une mesure fortement apériodique μ sur les réels telle que $V(\mu, x) = 2, \forall x \neq 0$. On peut se demander s'il existe une mesure fortement apériodique μ telle que $V(\mu^n, x) = 2, \forall x \neq 0, \forall n$, autrement dit telle que $L(\mu) = \{0\}$. Il est vraisemblable qu'il en existe, mais à la connaissance de l'auteur, aucun exemple n'a été construit, et l'exemple de Wiener et Young semble difficile à tester (*).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. LETAC, *Problèmes de Probabilité*. Presses Universitaires de France, 1970, problème n° 70.
- [2] W. RUDIN, *Fourier Analysis on Groups*. Interscience, p. 3.
- [3] A. J. STAM, On shifting iterated convolutions I, *Compositio Mathematica.*, vol. 17, 1966, p. 268-280.
- [4] N. WIENER et R. C. YOUNG, The total variation of $g(x+h) - g(x)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 35, 1933, p. 327-340.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1971.

(*) *Note sur épreuve* : Guy FOURT, de l'Université de Clermont, a récemment construit une telle mesure dans \mathbb{R} (« Existence de mesures à puissances singulières à toutes leurs translatées », *C. R. Acad. Sci.*, février 1972), ainsi que dans $D_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.