ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN LARISSE

Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, II

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 2 (1972), p. 127-173
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_2_127_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 2, 1972, p. 127-173.
Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, II.

par

Jean LARISSE
Euratom-Cetis, Ispra (Varese), Italie.

Introduction

Nous savons [8], que $s \in S$ récurrent dans une des marches unilatères ou bilatère, donc dans les deux autres, implique que S possède un idéal minimum complètement simple S(G), où G est le sous-groupe de S dit groupe de représentation de Suschkewitch-Rees. On peut alors se poser le problème suivant : lorsque S possède un tel idéal S(G) et que $s \in S(G)$ est récurrent, que peut-on dire sur la récurrence de G ? On montre que, dans ce cas, G est nécessairement récurrent. Inversement, si on construit un demi-groupe S possédant un S(G) avec G récurrent, cette condition suffit-elle pour assurer la récurrence des $s \in S(G)$? Nous montrons que cette condition suffit lorsque S possède certaines structures algébriques supplémentaires.

Soient A un ensemble générateur d'un demi-groupe S, P(A) une distribution chargeant tout élément de A. Dans une marche unilatère, s ne peut être récurrent que si s appartient à un sous-demi-groupe I de S qui soit idéal minimum complètement simple de S [9].

On sait, d'autre part, que dans ce cas I est une union de groupes disjoints et isomorphes à un même groupe G. Pour cette raison, nous désignerons un tel I par S(G). L'existence d'un s récurrent implique donc l'existence d'un sous-demi-groupe de S qui est un groupe G.

Soient alors B un ensemble générateur de G, et Q(B) une distribution chargeant tout B. On peut se poser le problème de savoir s'il existe des conditions entraînant l'existence de distributions Q(B) définissant des transitions de marches récurrentes à droite sur G, si on sait qu'il existe des distributions P(A) définissant sur S(G) des classes essentielles récurrentes à droite. D'après le théorème I.4, on peut tout aussi bien considérer des marches à gauche ou bilatères. Les résultats démontrés dans un cas, seront valables pour tous les autres cas. Nous pourrons donc choisir, pour les démonstrations, le cas le plus approprié.

Inversement, on peut se demander si l'existence d'un Q(B) définissant des marches récurrentes sur G entraine l'existence d'un P(A) définissant des classes essentielles récurrentes sur S(G).

Afin d'énoncer les théorèmes de manière suffisamment concise, nous conviendrons de dire d'un groupe G qu'il est récurrent s'il existe une marche aléatoire de transitions Q(B), unilatère ou, de manière équivalente, bilatère (théorème I.4), pour laquelle un $g \in G$ (donc tout $g \in G$, puisque G est classe essentielle pour toute marche unilatère), est récurrent. Autrement, nous dirons que G est transitoire. De manière analogue, nous dirons que G est récurrent-positif s'il existe Q(B) tel que $g \in G$ soit récurrent-positif. Cette définition ne s'étend pas aussi aisément aux demi-groupes S, puisque, en général, S n'est pas classe essentielle.

Mais, d'après le théorème I.4, nous pourrons appliquer à une classe essentielle quelconque de S(G) la définition précédente. Nous dirons alors que S possède une classe essentielle récurrente s'il existe une distribution P(A) pour laquelle une marche, à droite par exemple, et définie sur un idéal minimum à droite de S(G), est récurrente. Autrement, nous dirons que S possède une classe essentielle transitoire. La définition relative au cas récurrent-positif est immédiate.

Sous cette forme, nous pouvons énoncer les deux problèmes précédents de la manière suivante :

A) Recherche de conditions pour que G soit récurrent, sachant que S possède une classe essentielle récurrente.

B) Recherche de conditions pour l'existence d'une classe récurrente dans S sachant que G est récurrent.

$P^{(n)}(s)$ désignant toujours la $n^{\text{ième}}$ convolution d'une loi de probabilité P(A), nous ferons d'abord la remarque suivante :

LEMME II.1. — A chaque distribution P(A) chargeant tout A engendrant le demi-groupe S, associons, α étant un nombre réel vérifiant $0 < \alpha < 1$, la fonction

$$\Pi(s) = (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} P^{(n)}(s) \qquad \text{définie sur S.}$$

1° $\Pi(S)$ est une distribution de probabilités chargeant tout S.

2° Le type de l'état s dans une marche, unilatère ou bilatère, est le même, que les transitions soient définies par $P(A)$ ou $\Pi(S)$.

Démonstration.

1° A engendre S implique que n fini positif existe tel que $P^{(n)}(s) > 0$ pour un s arbitraire dans S; donc $\Pi(s) > 0$ pour chaque $s \in S$ parce que $\alpha > 0$. D'autre part,

$$\sum_{s\in S} \Pi(s) = (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \sum_{s \in S} P^{(n)}(s) = 1.$$

2° D'après [*8*], il nous suffira de montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(s) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \Pi^{(n)}(s) < \infty,$$

puis que

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(s) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}(s) = 0.$$

On a:

$$i) \ \Pi^{(\nu)}(s) = (1-\alpha)^{\nu} \Sigma \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \alpha^{n_1-1} P^{(n_1)}(s_{k_1}) \ldots \sum_{n_\nu=1}^{\infty} \alpha^{n_\nu-1} P^{(n_\nu)}(s_{k_\nu}) / s_{k_1} \ldots s_{k_\nu} = s \right\}$$

$$= (1-\alpha)^{\nu} \Sigma \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{n_\nu=1}^{\infty} \alpha^{\sum_{i=1}^{\nu} n_i - \nu} P^{(n_1)}(s_{k_1}) \ldots P^{(n_\nu)}(s_{k_\nu}) / s_{k_1} \ldots s_{k_\nu} = s \right\}.$$

Mais

$$s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_\nu} = (a_{k_1} \ldots a_{k_{n_1}})(a_{k_{n_1+1}} \ldots a_{k_{n_1+n_2}}) \ldots (a_{k_{n_1+n_{\nu-1}+1}} \ldots a_{k_{n_1+\ldots n_\nu}}).$$

La suite $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_N}$ étant donnée, le mot $a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_N} = s$ figure dans chaque expression $\Pi^{(\nu)}(s)$ pour $1 \leqslant \nu \leqslant N$, et ne figure pas dans $\Pi^{(\nu)}(s)$ pour $\nu > N$. Ce mot doit être factorisé sous la forme $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_\nu}$, où la longueur de s_{k_i}, soit $n_i = | s_{k_i} |$, est supérieure ou égale à 1. De plus,

$\sum_{i=1}^{\nu} n_i = \mathrm{N}$. Or $a_{k_1}a_{k_2} \ldots a_{k_\mathrm{N}}$ est factorisable de $\binom{\mathrm{N}-1}{\nu-1}$ manières différentes en ν tels mots s_{k_i}. Donc le produit $p(a_{k_1}) \ldots p(a_{k_\mathrm{N}})$ figure dans chaque expression $\Pi^{(\nu)}(s)$, $1 \leqslant \nu \leqslant \mathrm{N}$, ne figure pas dans $\Pi^{(\nu)}(s)$ pour $\nu > \mathrm{N}$, et est affecté dans $\Pi^{(\nu)}(s)$ du coefficient

$$(1-\alpha)^{\nu}\alpha^{\mathrm{N}-\nu}\binom{\mathrm{N}-1}{\nu-1}.$$

Par conséquent, dans $\sum_{\nu=1}^{\mathrm{N}} \Pi^{(\nu)}(s)$, et aussi dans $\sum_{\nu=1}^{\infty} \Pi^{(\nu)}(s)$, le produit $p(a_{k_1}) \ldots p(a_{k_\mathrm{N}})$, avec $a_{k_1}a_{k_2} \ldots a_{k_\mathrm{N}} = s$ est affecté du coefficient

$$\sum_{\nu=1}^{\mathrm{N}} (1-\alpha)^{\nu}\alpha^{\mathrm{N}-\nu}\binom{\mathrm{N}-1}{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\mathrm{N}-1} (1-\alpha)^{\nu'+1}\alpha^{(\mathrm{N}-1)-\nu}\binom{\mathrm{N}-1}{\nu'} = (1-\alpha); \quad \nu' = \nu - 1,$$

Cette remarque étant valable pour toute suite $a_{k_1}, \ldots, a_{k_\mathrm{N}}$ telle que $a_{k_1} \ldots a_{k_\mathrm{N}} = s$ et tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, on a donc

ii)
$$\sum_{\nu=1}^{\mathrm{N}} \Pi^{(\nu)}(s) \geqslant (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}^{(n)}(s) \qquad \text{pour N fini}$$

et

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Pi^{(\nu)}(s) = (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}^{(n)}(s),$$

puisqu'il est clair que chaque $s = s_{k_1} \ldots s_{k_\mathrm{N}}$ est un produit de $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$ éléments a_{k_i}.

De la dernière égalité on tire

iii)
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Pi^{(\nu)}(s) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}^{(n)}(s) < \infty.$$

De *ii)* on déduit que

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\nu=1}^{\mathrm{N}} \Pi^{(\nu)}(s) = 0 \Rightarrow \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}^{(n)}(s) = 0,$$

ce qui équivaut, d'après les résultats du chapitre I, à

iv) $$\lim_{\nu\to\infty} \Pi^{(\nu)}(s) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P^{(n)}(s) = 0$$

De *i)* il résulte, en mettant en évidence le facteur correspondant à $n_1 = n_2 \ldots n_\nu = 1$, soit $P^{(\nu)}(s)$, que

$$\Pi^{(\nu)}(s) \leqslant P^{(\nu)}(s) + (1-\alpha)^\nu \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \alpha^{\mu-\nu} = P^{(\nu)}(s) + \alpha(1-\alpha)^{\nu-1}$$

donc

v) $$\lim_{\nu\to\infty} P^{(\nu)}(s) = 0 \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} \Pi^{(\nu)}(s) = 0.$$

iv) et *v)* établissent l'équivalence

iv) $$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(s) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}(s) = 0.$$

iii), vi) et l'application du théorème I.4 achèvent la démonstration. ■

Ce lemme montre que l'on peut substituer à la distribution P(A) la distribution Π(S) chargeant tout $s \in S$, sans changer pour autant le type de l'élément s. Puisque S(G) possède au moins un idempotent e et que $\Pi(e) > 0$, nous savons, Chapitre I, que S(G) est la classe essentielle de toute marche bilatère de transitions définies par Π(S). Tenant compte de ce fait, on peut alors énoncer les deux problèmes A) et B) de la façon suivante :

A′) Recherche de conditions entraînant G récurrent sachant que S possède un S(G), classe essentielle bilatère, récurrente.

B′) Recherche de conditions pour l'existence d'une classe essentielle bilatère récurrente S(G), sachant que G est récurrent.

Afin de simplifier les énoncés des théorèmes et propositions, nous conviendrons d'étendre au demi-groupe S les qualificatifs de récurrent positif, récurrent-nul ou transitoire.

Définition II.1. — Nous dirons d'un demi-groupe S qu'il est récurrent-positif, s'il existe une distribution P(A) chargeant tout A engendrant S, telle qu'il existe au moins un $s \in S$ récurrent-positif. Nous dirons de S qu'il est récurrent-nul s'il n'est pas récurrent-positif mais si, dans les mêmes conditions que précédemment, il existe un $s \in S$ récurrent-nul. Enfin, nous dirons que S est transitoire s'il n'est ni récurrent-positif, ni récurrent-nul.

Cette définition diffère de la définition généralement adoptée, qui est, rappelons-la, qu'un ensemble S est récurrent s'il existe une distribution P(A) chargeant tout A engendrant S et définissant les transitions d'une marche dans laquelle chaque état $s \in S$ est visité infiniment souvent avec la probabilité un. Mais lorsque S sera classe essentielle, la définition II.1 coïncidera avec la définition classique, ce qui nous évitera toute contradiction; et, dans le cas général, S récurrent d'après la définition II.1, impliquera toujours l'existence des classes essentielles récurrentes R_i, L_j et S(G) (Chapitre I et lemme II.1).

Nous formaliserons alors de manière définitive les deux problèmes de la manière suivante.

A″) Recherche de conditions entraînant G récurrent sachant que S est récurrent.

B″) Recherche de conditions entraînant S récurrent sachant que G est récurrent.

A) **Recherche de conditions entraînant G récurrent sachant que S est récurrent.**

Soit P(A) une distribution de probabilités chargeant A engendrant S. Nous allons construire sur le sous-ensemble G de S une distribution Q(B) chargeant B engendrant G de sorte que l'existence de $s\ (\in S(G))$ récurrent dans une marche de transitions définies par P(A) implique $g \in G$ récurrent dans une marche de transitions définies par Q(B). De plus, nous montrerons qu'il est possible de construire Q(B) de sorte que s récurrent-positif, nul ou transitoire implique g récurrent-positif, nul ou transitoire respectivement.

Nous poserons $e_{11} = e$ idempotent de $H_{11} = G$. Dans la marche à droite $\{ p_0(e) = 1; P(A) \}$, et, adoptant les notations de [*11*], nous désignerons par T le temps du premier retour sur G, puis nous poserons

$$\Pi_{H_{11}}(e, g) = \Pi(g) = P_e \{ s_T = g; T < \infty \}, \qquad g \in H_{11} = G$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma \{ p_0(e)p(a_{k_1}) \dots p(a_{k_n}) \},$$

la deuxième sommation étant effectuée sur les produits $\prod_{\nu=1}^{n} a_{k_\nu}$ vérifiant

$$i) \qquad \begin{cases} e\prod_{\nu=1}^{m} a_{k_\nu} \notin H_{11} & m < n \\ e\prod_{\nu=1}^{n} a_{k_\nu} = g \in H_{11}. \end{cases}$$

Supposons d'autre part, qu'un observateur au lieu de noter les différents états $u_{1j} = (1\bar{u}j)$ atteints dans la marche à droite $\{ p_0(e) = 1; \mathrm{P(A)} \}$, n'observe que l'indice j, ou encore le représentant $\bar{u}$, dans G, de l'état u_{1j}. Nous définissons ainsi un « processus » dérivé, ou trace, de la marche initiale sur les ensembles J ou G. Il est clair que l'on peut tout aussi bien considérer la trace dans I d'une marche à gauche dans L_1, et, d'une manière générale, la trace dans I, J ou G d'une marche unilatère ou bilatère. Si les états initiaux de cette marche sont dans S(G), la trace est définie dès le premier pas. Dans le cas contraire, la trace n'est définie qu'à partir de l'instant n de première atteinte de S(G). Dans ce qui suit, il nous suffira de supposer que les états initiaux sont dans S(G). Nous donnerons alors de la trace la définition suivante :

DÉFINITION II.2. — On appellera trace Y(n) sur l'ensemble Y(= I, J ou G) de la marche X(n) définie sur le demi-groupe S et d'état initial $s \in \mathrm{S(G)}$, l'image dans Y de X(n) dans l'application $(i\bar{s}j) \to y(= i, j$, ou $\bar{s})$ avec la loi dans Y^{∞} définie par cette application.

D'après cette définition, une suite $\{ y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ dans Y^n est l'image de l'ensemble des réalisations $\{ (i_0\bar{s}_0j_0) \ldots (i_n\bar{s}_nj_n)/(i_k\bar{s}_kj_k) \xrightarrow{\varphi} y_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n \}$ et la probabilité associée à cette suite est

$$ii)\ \mathrm{Prob.}\{ y_0, y_1, \ldots, y_n \} = \Sigma \{ \mathrm{Prob.}\{ (i_0\bar{s}_0j_0) \ldots (i_n\bar{s}_nj_n) \}/\varphi(i_k\bar{s}_kj_k) = y_k;\ 0 \leqslant k \leqslant n \}.$$

Nous allons voir, dans le théorème qui suit, que la trace dans J d'une marche à droite sur un idéal minimum R_1 est une chaîne markovienne apériodique, récurrente-positive, et ceci quel que soit le type de la marche sur R_1. On obtiendra, évidemment, un résultat analogue pour toute marche à droite sur un R_i, $i \in \mathrm{I}$, ou toute marche à gauche sur un L_j, $j \in \mathrm{J}$. Par contre, nous étudierons plus loin le cas Y = G et nous verrons qu'alors la trace n'est plus, en général, une chaîne markovienne.

THÉORÈME II.1. — Soit $\{ p_0(e) = 1; \mathrm{P(A)} \}$, une marche à droite sur R_1, d'état initial $e_{11} = e \in \mathrm{H}_{11}$.

1° La trace dans l'ensemble J des indices des différentes $\mathscr{H}$-classes de R_1, est un processus markovien apériodique, récurrent-positif, et ceci quel que soit le type de la marche sur R_1.

2° Les retours successifs sur G constituent une marche sur G définie par $\{ p_0(e) = 1; \Pi(\mathrm{G}) \}$.

3° Les classes essentielles des marches unilatères et bilatères sur S et G définies par P(A) et $\Pi(G)$ respectivement sont du même type. De plus, ces classes sont récurrentes-positives si et seulement si G est fini.

Démonstration.

1° De *ii*), nous déduisons que la probabilité initiale de la trace d'une marche sur R_1 de probabilités initiales $P_0(R_1)$ est

iii) $$Q_0(J):\ q_0(j) = \Sigma\,\{\,p_0(s)/s \in H_{1j}\,\},$$

et on a, évidemment

$$q_0(j) \geqslant 0, \qquad \sum_{j\in J} q_0(j) = 1.$$

Montrons que Prob $\{j_n/j_0, j_1 \ldots j_{n-1}\}$ = Prob $\{j_n/j_{n-1}\}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\text{Prob}\,\{j_0, j_1 \ldots j_m\} &= \Sigma\ \text{Prob}\,\{s_0, s_1, \ldots, s_m/s_i \in H_{1j_i};\ 0 \leqslant i \leqslant m\}\\ &= \Sigma\,\{p_0(s_0)m^{(1)}(s_0, s_1)\ldots m^{(1)}(s_{m-1}, s_m)/s_i \in H_{1j_i};\ 0 \leqslant i \leqslant m\}.\end{aligned}$$

On remarque alors que pour $s \in H_{1j}$, $s' \in H_{1j'}$, s^{-1} inverse de s dans H_{1j}, on a $sx = s' \Leftrightarrow s^{-1}sx = s^{-1}s' \Leftrightarrow e_{1j}x = s^{-1}s'$, donc

$$m^{(n)}(s, s') = \Sigma\,\{\,P^{(n)}(x)/e_{1j}x = s^{-1}s'\,\} = m^{(n)}(e_{1j}, s^{-1}s') \quad \text{pour tout} \quad n > 0.$$

Puisque $\bigcup_{s'\in H_{1j}} s^{-1}s' = s^{-1}H_{1j} = H_{1j}$ et ceci quel que soit $s \in R_1$, on trouve que

$$\begin{aligned}\Sigma\,\{m^{(1)}(s, s')/s' \in H_{1j'}\} = \Sigma\,\{m^{(1)}(e_{1j}, s^{-1}s')/s' \in H_{1j'}\} &= \Sigma\,\{m^{(1)}(e_{1j}, s)/s \in H_{1j'}\}\\ = \tilde{m}^{(1)}(j, j'),&\end{aligned}$$

d'où

iv) Prob $\{j_0 \ldots j_m\}$

$$\begin{aligned}&= \Sigma\,\{p_0(s_0)m^{(1)}(s_0, s_1)\ldots m^{(1)}(s_{m-2}, s_{m-1})m^{(1)}(e_{1j_{m-1}}, s_{m-1}^{-1}s_m)/s_i \in H_{1j_i}, 0 \leqslant i \leqslant m\}\\ &= \Sigma\,\{p_0(s_0)m(s_0, s_1)\ldots m^{(1)}(s_{m-2}, s_{m-1})\tilde{m}^{(1)}(j_{m-1}, j_m)/s_i \in H_{1j_i};\ 0 \leqslant i \leqslant m-1\}\\ &= q_0(j_0)m^{(1)}(j_0, j_1)\ldots \tilde{m}^{(1)}(j_{m-1}, j_m).\end{aligned}$$

De

$$\text{Prob}\,\{j_0 \ldots j_m\} = \text{Prob}\,\{j_m/j_0 \ldots j_{m-1}\}\ \text{Prob}\,\{j_0 \ldots j_{m-1}\},$$

on déduira en faisant $m = n - 1$, puis $m = n$ dans *iv*)

v) $$\text{Prob}\,\{j_m/j_0 \ldots j_{m-1}\} = \tilde{m}^{(1)}(j_m, j_{m-1}) = \text{Prob}\,\{j_m/j_{m-1}\}$$

Puisque

$$\tilde{m}^{(1)}(j_m, j_{m-1}) \geqslant 0, \quad \sum_{j'\in J} \tilde{m}^{(1)}(j, j') = \sum_{s\in R_1} m^{(1)}(e_{1j}, s) = 1 \qquad \forall j \in J,$$

on voit que *iii*) et *v*) définissent, par la construction classique, la probabilité initiale et la matrice de transitions d'une chaîne markovienne sur l'espace produit $\prod_{1}^{\infty} \mathrm{J}$.

Cette chaîne est récurrente-positive, parce que pour l'entier r positif tel que $p^{(r)}(e) > 0$, on a

$$\tilde{m}^{(n)}(1, 1) \geqslant \sum_{j \in \mathrm{J}} \tilde{m}^{(n-r)}(1, j) p^{(r)}(e) = p^{(r)}(e),$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}^{(n)}(1, 1) = \infty.$$

De plus, pour chaque n fini positif il y a au moins un $j \in \mathrm{J}$ tel que $\tilde{m}^{(n)}(1, j) > 0$. D'après l'inégalité précédente on a donc $\tilde{m}^{(n+r)}(1, 1) > 0$ pour tout n. Le plus grand commun diviseur de ces n étant un, la chaîne est apériodique.

2° Nous devons montrer d'abord que $\sum_{g \in \mathrm{G}} \Pi(g) = \mathrm{P}_e[\mathrm{T} < \infty] = 1$. Lorsque la marche sur R_1 est récurrente, on peut en donner une preuve immédiate. C'est celle, donnée dans [*11*], dans le cas du groupe abélien. Rappelons-la :

$$1 \geqslant \sum_{g \in \mathrm{G}} \Pi(g) = \mathrm{P}_e[\mathrm{T}_{\mathrm{H}_{11}} < \infty] \geqslant \mathrm{P}_e\{\mathrm{T}_e < \infty\} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ee}^{(k)} = 1,$$

$f_{ee}^{(k)}$ étant la probabilité, partant de e, d'atteindre e au $k^{\text{ième}}$ pas pour la première fois et

$$\mathrm{T}_e = \min\{k/1 \leqslant k \leqslant \infty, s_k = e\} \geqslant \mathrm{T}_{\mathrm{H}_{11}}.$$

Si, au contraire, la marche sur R_1 n'est pas récurrente on remarque que la trace étant toujours une chaîne récurrente, dans la promenade

$$\{p_0(e) = 1;\ \mathrm{P}(\mathrm{A})\}$$

on revient sur G avec la probabilité un, ce qui équivaut à T presque sûrement fini, donc à $\sum_{g \in \mathrm{G}} \Pi(g) = 1$.

Soient maintenant $\{e, g_{v_1}, g_{v_2} \dots g_{v_n} \dots\}$ les éléments de $\mathrm{G} = \mathrm{H}_{11}$

visités dans une réalisation de la marche à droite sur R_1. Les retours successifs sur G forment évidemment une chaîne markovienne et on a

$$\text{Prob.}\{g_{v_v}/e, g_{v_1} \dots g_{v_{n-1}}\} = \text{Prob.}\{g_{v_n}/g_{v_{n-1}}\} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{G}p^{(k)}(g_{v_{n-1}}, g_{v_n})$$

où ${}_{G}p^{(k)}(g_{v_{n-1}}, g_{v_n})$ est la probabilité d'atteindre au $k^{\text{ième}}$ pas g_{v_n} à partir de $g_{v_{n-1}}$ sans entrer dans G aux pas $n < k$. Mais on a aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}_{G}p^{(k)}(g_{v_{n-1}}, g_{v_n}) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{G}p^{(k)}(e, g_{v_{n-1}}^{-1} g_{v_n}) = \Pi(g_{v_{n-1}}^{-1} g_{v_n}),$$

la chaîne est donc une promenade aléatoire de transitions définies par $\Pi(G)$.

3° Considérons alors les retours successifs $\{e, g_{v_1}, g_{v_2} \dots g_{v_{n-1}}, e\}$ dans G d'une réalisation de la marche à droite $\{p_0(e) = 1 ; P(A)\}$ atteignant e en $n \geqslant k$ pas. On a :

$$vi)\quad m^{(n)}(e, e) = \Sigma\{ {}_{G}p^{(n_1)}(e, g_{v_1}) {}_{G}p^{(n_2)}(g_{v_1}, g_{v_2}) \dots {}_{G}p^{(n_k)}(g_{v_{k-1}}, e) / n_1 + \dots n_k = n ; 1 \leqslant k \leqslant n\},$$

puis

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^{(n)}(e, e) = \Sigma\{ {}_{G}p^{(n_1)}(e, g_{v_1}) {}_{G}p^{(k_2)}(e, g_{v_1}^{-1} g_{v_2}) \dots {}_{G}p^{(n_k)}(e, g_{v_{n-1}}^{-1}) / n_i \geqslant 1 ; g_{v_i} \in G,\ 1 \leqslant i \leqslant k ;\ 1 \leqslant k\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^{(n)}(e, e) = \Sigma\left\{ \Pi(g'_{v_1}) \dots \Pi(g'_{v_k}) / \prod_{i=1}^{k} g'_{v_i} = e ;\ 1 \leqslant k \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Pi^{(k)}(e).$$

Les marches $\{p_0(e) = 1 ; P(A)\}$ et $\{p_0(e) = 1 ; \Pi(G)\}$ sont donc en même temps ou récurrentes ou transitoires.

Pour distinguer le cas récurrent-positif du cas récurrent-nul, on déduit de *vi*) les inégalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{N} m^{(n)}(e, e) \leqslant \Sigma\left\{ \sum_{n_1=1}^{N} {}_{G}p^{(k_1)}(e, g_{v_1}) \dots \sum_{n_k=1}^{N} p^{(n_k)}(g_{v_{k-1}}, e) / 1 \leqslant k \leqslant N, g_{v_i} \in G \right\}$$
$$+ {}_{G}p^{(1)}(e, g_{v_1}) \dots {}_{G}p^{(1)}(g_{v_{N-1}}, e),$$
$$\leqslant \Sigma\{\Pi(g_{v_1})\Pi(g_{v_1}^{-1} g_{v_2}) \dots \Pi(g_{v_{k-1}}^{-1}) / 1 \leqslant k < N, g_{v_i} \in G\} + m^{(N)}(e, e).$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{N-1} m^{(n)}(e, e) \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \Pi^{(k)}(e) = \sum_{k=1}^{N-1} \Pi^{(k)}(e, e).$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m^{(n)}(e, e) \leqslant \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Pi^{(k)}(e, e).$$

R_1 récurrent-positif entraîne donc G récurrent-positif.

On sait, d'autre part, que G est récurrent-positif si et seulement si G est fini, parce que la matrice de transitions d'une marche sur un groupe est bistochastique.

Supposons donc, inversement, que G soit fini.

Il existe r fini positif tel que $p^{(r)}(e) > 0$. *De* eS $= R_1$ et de la loi de composition dans S(G) nous déduisons que

$$m^{(n)}(e, g) \geqslant \Sigma \left\{ m^{(n-r)}(e, s) p^{(r)}(e) / s \in \bigcup_{j\in J} (1\bar{g}j) \right\}$$

$$\sum_{g\in G} m^{(n)}(e, g) \geqslant \Sigma \left\{ m^{(n-r)}(e, s) p^{(r)}(e) / s \in \bigcup_{j\in J} \bigcup_{g\in G} (1gj) = R_1 \right\} = p^{(r)}(e).$$

Puisque G est fini

$$\sum_{g\in G} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m^{(n)}(e, g) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{g\in G} m^{(n)}(e, g) \geqslant p^{(r)}(e) > 0.$$

R_1 étant classe essentielle, l'inégalité n'est vérifiée que si toutes les limites sont positives. Donc R_1 est une classe essentielle récurrente-positive.

L'application du théorème I.4 montre alors que les classes essentielles des marches définies par P(A) ou Π(G) sont du même type. ■

Tenant compte de la définition II.1, nous pouvons alors donner du problème A) la solution suivante :

THÉORÈME II.1′. — Si S est récurrent, alors G est récurrent. De plus, S est récurrent-positif si et seulement si G est fini ([1]).

La deuxième partie de ce théorème n'est autre que le théorème 6.1 de [9].

([1]) Ce résultat a aussi été obtenu par M. ROSENBLATT « Semi-Groups » Proceed of a Symp. on Semi-Groups, Acad. Press (1969), ainsi que la partie du théorème I.3 concernant les marches unilatères.

LEMME II.2. — Tout sous-groupe d'un groupe récurrent est récurrent.

Démonstration. — Les retours successifs sur le sous-groupe H de G dans la marche récurrente sur G d'état initial e est ici aussi une marche, la preuve est la même que précédemment. Puisqu'on visite e, élément commun à H et G, infiniment souvent avec probabilité un, on a évidemment la même propriété dans le processus trace. ■

PROPOSITION II.1. — Si G est libre sur plus d'un générateur, S est transitoire.

Démonstration. — Tout groupe de type fini, libre sur plus d'un générateur est transitoire [*7*]. Un groupe libre G sur un système infini de générateur contient nécessairement un sous-groupe H libre et de type fini. H est, en effet, engendré par un nombre fini de générateurs choisis arbitrairement dans l'ensemble infini de générateurs indépendants de G. H est donc transitoire et donc aussi G d'après le lemme II.2. D'après le théorème II.1, S est donc aussi transitoire. ■

PROPOSITION II.2. — Si G est abélien de rang plus que deux, S est transitoire.

Démonstration. — Tout groupe abélien G de rang trois ou plus est transitoire [*3*]. Un groupe abélien de rang infini possède un tel groupe G comme sous-groupe, et donc est transitoire, lemme II.2. Il en est donc de même de S, théorème II.1. ■

B) Recherche de conditions entraînant S récurrent sachant que G est récurrent.

Proposons-nous maintenant le problème inverse de la recherche de conditions entraînant la récurrence d'un demi-groupe S lorsqu'on sait que le groupe G est récurrent.

Soit N le sous-groupe distingué engendré par le sous-ensemble JI de G, J et I étant, rappelons-le, les sous-ensembles d'idempotents de S(G) dans la représentation $I \times G \times J$.

Stoll [*12*] a montré que l'ensemble quotient G/N, dont nous désignerons les éléments par $\{\bar{e}, r_1, r_2, \ldots\}$ est l'image homomorphe maximale de S(G), l'équivalence d'homomorphisme $\mathscr{R}$ étant alors définie par

$s \equiv s'(\mathscr{R})$ si s et s' appartiennent au même sous-ensemble $I \times rN \times J$,

$r \in G/N$; ou encore si $e_{11}se_{11}$ et $e_{11}s'e_{11}$ appartiennent au même complexe rN.

Dans le cas où S ne se réduit pas à S(G), on remarque que

LEMME II.3. — L'application $s \to r$, avec $e_{11}se_{11} \in rN$, est un homomorphisme de S sur G/N.

Démonstration. — On a $e_{11}se_{11} \in R_1SL_1 = R_1L_1 = H_{11} = G$ pour tout $s \in S$. Donc $e_{11}se_{11} \in rN$ pour un $r \in G/N$. Cette relation d'appartenance partitionne donc tout S en classes d'équivalence. Soit $\mathscr{R}'$ la relation d'équivalence associée :

$$s \equiv s'(\mathscr{R}') \quad \text{si} \quad e_{11}se_{11}, \quad e_{11}s'e_{11} \in rN, \quad r \in G/N.$$

Montrons que $\mathscr{R}'$ est compatible avec la loi de composition de S.

Nous devons montrer que

$$e_{11}se_{11} \in (1rN1) \quad \text{et} \quad e_{11}s'e_{11} \in (1r'N1)$$

entraînent

$$e_{11}ss'e_{11} \in (1rr'N1).$$

Or, $e_{11}s \in e_{11}S = R_1$. Dans $I \times G \times J$, $e_{11}s$ est représenté par

$$(1e_{11}(e_{11}s)e_{11}j) = (1e_{11}se_{11}j),$$

et on a

$$(1e_{11}se_{11}j) \in (1rNj).$$

De même, $s'e_{11} \in Se_{11} = L_1$, donc $s'e_{11}$ est représenté par

$$(ie_{11}(s'e_{11})e_{11}1) = (ie_{11}s'e_{11}1)$$

et on a $(ie_{11}s'e_{11}) \in (ir'Nj)$.

Par suite,

$$e_{11}ss'e_{11} \in (1rNj) \circ (ir'N1) = (1rNjir'N1) = (1rr'N1). \quad \blacksquare$$

LEMME II.4. — Soient θ un homomorphisme d'un ensemble S sur un ensemble S′, A et B des ensembles générateurs de S et S′ respectivement. $\theta(A)$ et $\theta^{-1}(B)$ sont des ensembles générateurs de S′ et S respectivement.

Démonstration. — A engendre S, par suite

$$s = a_{k_1}a_{k_2} \ldots a_{k_n} \quad \text{et} \quad s' = \theta(s) = \theta(a_{k_1}) \ldots \theta(a_{k_n}) = a'_{k_1} \ldots a'_{k_n}.$$

De telles relations existent pour tout $s \in S$ et tout $s' \in S'$ avec n fini ; par conséquent $A' = \theta(A)$ engendre S'. Inversement, on a

$$S = \theta^{-1}(S') = \theta^{-1}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B^n\right]$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\theta^{-1}(B^n)],$$ égalité vraie pour toute application inverse.

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\theta^{-1}(B)]^n$$ parce que θ entraîne l'isomorphisme (i) $S' \simeq S/\mathscr{R}$, $\mathscr{R}$ équivalence d'homomorphisme associée à θ.

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} B'^n.$$

Donc $B' = \theta^{-1}(B)$ engendre S. ■

Soit alors P(A) une distribution de probabilités chargeant tout élément de A engendrant S. La fonction Q(B) définie sur $B = \theta(A)$ par

$$q(b) = \Sigma\,\{\,p(a)/a \in \theta^{-1}(b)\,\}$$

est donc une mesure de probabilités chargeant tout élément de l'ensemble B engendrant S'.

Inversement, soit Q(B) une distribution de probabilités chargeant tout B engendrant S'. La fonction P(A) définie sur $A = \theta^{-1}(B)$ par $p(a_i) = \alpha_i q(b)$, $a_i \in \theta^{-1}(b)$, $\alpha_i > 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ est une distribution de probabilités chargeant tout A engendrant S. Entre les convolutions $P^{(n)}(s)$ et $Q^{(n)}(b)$ on a la relation immédiate

$$i) \qquad Q^{(n)}(b) = \Sigma\,\{\,P^{(n)}(s)/s \in \theta^{-1}(b)\,\}.$$

Appliquant le critère de [9], on voit que la récurrence de s dans la marche de transitions définies par P(A) entraîne celle de b dans la marche de transitions définies par Q(B).

Inversement, si $\theta^{-1}(b)$ est un ensemble fini, i) montre que b récurrent entraîne qu'un $s \in \theta^{-1}(b)$ au moins est récurrent. La même remarque vaut pour la récurrence positive.

LEMME II.5. — Si N, sous-groupe distingué du groupe G, est fini, alors G et G/N admettent des marches du même type.

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de l'égalité i). ■

Dans le cas du demi-groupe A admettant un sous-demi-groupe, idéal minimum complètement simple S(G) on a le

THÉORÈME II.2. — Si le sous-groupe distingué N de G, engendré par JI est fini, S est récurrent-positif, nul ou transitoire si et seulement si G est récurrent-positif, nul ou transitoire respectivement.

Démonstration. — Nous connaissons déjà ce résultat dans le cas récurrent-positif, théorème II.1′. Il nous suffira donc de démontrer l'affirmation dans le cas récurrent-nul. Par application des lemmes II.3 et II.4, *i*) s'écrit, en notant $\bar{e}$ l'élément neutre de G/N

$$Q^{(n)}(\bar{e}) = \Sigma \{ P^{(n)}(s)/e_{11}se_{11} \in N \}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} P^{(r)}(e_{11})P^{(n)}(e_{11})P^{(r)}(e_{11}) &\leqslant P^{(r)}(e_{11})Q^{(n)}(\bar{e})P^{(r)}(e_{11}) \quad \text{pour} \quad P^{(r)}(e_{11}) > 0 \\ &= P^{(r)}(e_{11})\Sigma \{ P^{(n)}(s)/e_{11}se_{11} \in N \} P^{(r)}(e_{11}) \\ &= \Sigma \{ P^{(n+2r)}(s)/s \in N \}. \end{aligned}$$

Lorsque N est fini, ces inégalités montrent que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(e_{11}) = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Q^{(n)}(\bar{e}) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(e_{11}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Q^{(n)}(\bar{e}) = 0.$$

L'application du lemme II.5 achève la démonstration. ■

Examinons maintenant le cas des demi-groupes commutatifs et celui des demi-groupes inverses.

On dit d'un demi-groupe qu'il est commutatif, ou abélien, si $ss' = s's$ pour tout s et s' dans S.

LEMME II.6. — Soit A un sous-ensemble non vide d'un demi-groupe commutatif S. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) A est idéal à droite de S.
ii) A est idéal à gauche de S.
iii) A est idéal bilatère de S.

Si I est idéal minimum de S, I est un sous-demi-groupe complètement simple de S qui se réduit au groupe abélien G.

Démonstration. — *iii*) $\Rightarrow$ *i*) et *iii*) $\Rightarrow$ *ii*) est la définition même de l'idéal bilatère. Par suite de la commutativité de la loi de composition dans S, on a, d'autre part,

$$AS \subseteq A \Leftrightarrow SA \subseteq A \quad \text{donc} \quad i) \Leftrightarrow ii) \Rightarrow iii).$$

Si A est, de plus, idéal minimum de S, A est idéal minimum à droite et aussi à gauche, parce que, dans le cas contraire, il existerait $A'(\subset A)$ idéal unilatère, donc A' idéal bilatère dans A. Par conséquent A idéal minimum de S est complètement simple. Puisque deux idempotents distincts de A complètement simples ne commuttent jamais, A n'est autre que le groupe, abélien, G. ■

PROPOSITION II.3. — Un demi-groupe commutatif S est récurrent si et seulement si S possède un idéal minimum, qui est alors un groupe abélien G, de rang au plus deux.

Démonstration. — S commutatif récurrent implique G commutatif récurrent ([*9*] et théorème II.1) donc G abélien de rang au plus deux [*3*]. Inversement, si S commutatif, possède un idéal minimum, celui-ci est un groupe abélien G, lemme II.6. Si G est de rang deux au plus, G est récurrent [*6*]. Mais alors $N = e$ et par application du théorème II.2, S est récurrent. ■

On dit de deux éléments a et b d'un demi-groupe qu'ils sont inverses, l'un de l'autre, si on a $aba = a$ et $bab = b$. S est un demi-groupe inverse si chaque élément de S a un inverse unique [*5*]. Une définition équivalente est la suivante : S est régulier (c'est-à-dire que l'équation $axa = a$, pour chaque a dans S, a au moins une solution dans S), et deux idempotents quelconques de S commuttent.

PROPOSITION II.4. — Un demi-groupe inverse S est récurrent si et seulement si S possède un idéal minimum complètement simple, qui est alors un groupe G, récurrent.

Démonstration. — Si S possède un S(G), celui-ci est le groupe G [*10*]. Si S est récurrent, G est récurrent ([*9*] et théorème II.1). Inversement si S possède un S(G) (= G) récurrent, S est récurrent d'après le théorème II.2 puisqu'alors $N = e$. ■

Supposons maintenant que l'on observe non pas la marche $\{P_0(S); P(A)\}$ sur le demi-groupe S, mais la trace, au sens de la définition II.2, dans G, c'est-à-dire le « processus » dérivé défini par l'application $(i\bar{s}j) \rightarrow \bar{s}$ avec la loi dans G^∞ définie par cette application. Les remarques que nous avions faites précédemment valent encore dans ce cas, c'est-à-dire que la trace n'est définie qu'à partir de l'instant n de première atteinte de S(G), et il nous suffira, pour les applications ultérieures, d'étudier la trace de marches au hasard sur une classe essentielle, à droite. à gauche ou bilatère. Le problème revient, en fait, à ne considérer que la restriction à $R_i \times R_i$ ($L_j \times L_j$, $C_k \times C_k$) de la matrice de transitions M définie par P(A) sur $S \times S$. Cette restriction est, en général, la matrice de transitions d'une chaîne markovienne. Elle deviendrait celle d'une promenade si, par exemple, on avait $S = R_i$ (resp. L_j).

D'après la définition II.2, la distribution initiale de la trace d'une marche à droite $\{ P_0(R_i) ; P(A) \}$ est :

$$q_0(\bar{u}) = \Sigma \left\{ p_0(u_{ij})/u_{ij} \in \bigcup_j (i\bar{u}j) \right\}$$

sommation qui sera notée dans la suite $\sum_j p_0(u_{ij})$, et la loi de passage de $\bar{u}$ à $\bar{v}$ est donnée par la probabilité

$$m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} = \sum_{j,j'} \{ p_0(u_{ij}) m^{(n)}_{u_{ij}v_{ij'}} / q_0(\bar{u}) \}.$$

Cette probabilité n'est définie que si $q_0(\bar{u}) > 0$. Faisons l'hypothèse, provisoire, que $q_0(\bar{u}) > 0$ pour tout $\bar{u} \in G$. Nous verrons plus loin comment lever cette restriction.

On peut montrer que cette trace n'est, en général, ni une marche ni même une chaîne markovienne. En effet, C. J. Burke et M. Rosenblatt [*2*] ont étudié les propriétés de telles « transitions » dans le cas d'un processus markovien sur un ensemble fini d'états. Nous allons construire une marche à droite X(n) stationnaire et réservible sur l'idéal minimum à droite R_1 d'un demi-groupe complètement simple fini S. Rappelons que cet idéal est la classe essentielle du processus. Par application du théorème 1 de [*2*] nous vérifierons que la condition nécessaire et suffisante pour que Y(n) soit markovien, soit, récrivons-la :

$$\sum_{j'} m^{(1)}_{u_{1j}v_{1j'}} = \text{Prob} \left\{ X(n+1) \in \bigcup_{j'} (1\bar{v}j')/X(n) = u_{1j} \right\} = C_{\bar{u}\bar{v}},$$

constante ne dépendant que de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ pour tout $\bar{u}$ et $\bar{v} \in G \times G$, n'est pas satisfaite.

Définissons S de la manière suivante :

1° $G = \{\bar{e}; \bar{a}\}$, avec la loi de composition associative

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & \bar{e} & \bar{a} \\
\hline
\bar{e} & \bar{e} & \bar{a} \\
\hline
\bar{a} & \bar{a} & \bar{e} \\
\hline
\end{array}
$$

2° $I = J = 2$; $f_2 e_2 = \bar{a}$

3° On vérifie que $A = \{a_{11}; e_{11}; a_{12}; e_{12}; e_{22}\}$ est un ensemble générateur de $S = E \times G \times F$.

L'associativité de la loi de composition dans G entraîne celle de S.

4° Sur A nous définissons la distribution de probabilités :

$$P(A) = \{p(a_{11}) = p;\ p(e_{11}) = s;\ p(e_{12}) = q;\ p(e_{22}) = r;\ p(a_{12}) = t\}.$$

Elle induit la matrice de transitions sur R_1 :

$$
M = \begin{array}{c}
\\ a_{11} \\ e_{11} \\ a_{12} \\ e_{12}
\end{array}
\begin{array}{cccc}
a_{11} & e_{11} & a_{12} & e_{12} \\
\hline
s & p & q+r & t \\
p & s & t & q+r \\
s & p & q & r+t \\
p & s & r+t & q
\end{array}
$$

On vérifie que, pour les valeurs particulières

$$p = s = \frac{1}{5};\quad q = r = \frac{3}{20};\quad t = \frac{3}{10},$$

le vecteur de probabilités initiales

$$V = \left\{ v_1 = \frac{1}{5};\ v_2 = \frac{1}{5};\ v_3 = \frac{3}{10};\ v_4 = \frac{3}{10} \right\}$$

est le vecteur propre à gauche de M, et que $v_i m_{ij} = v_j m_{ji}$ pour tout i et tout j, donc M est réversible, V et M définissent un processus stationnaire et réversible. Mais :

$$\sum_j m_{a_{11}a_{1j}} = m_{a_{11}a_{11}} + m_{a_{11}a_{12}} = q + r + s = \frac{1}{2}$$

$$\sum_j m_{a_{12}a_{1j}} = m_{a_{12}a_{11}} + m_{a_{12}a_{12}} = s + q = \frac{7}{20}.$$

Il en résulte, par application du théorème cité ci-dessus, que la trace n'est pas une chaîne markovienne.

Remarquons que si nous avions construit S de manière à ce que $f_j e_i = \bar{e}$ pour tout i et tout j, nous aurions eu la matrice de transitions sur R_1.

$$M' = \begin{array}{c|cccc|} & a_{11} & e_{11} & a_{12} & e_{12} \\ \hline a_{11} & s & p & q+r & t \\ e_{11} & p & s & t & q+r \\ a_{12} & s & p & q+r & t \\ e_{12} & p & s & t & q+r \\ \hline \end{array}$$

La condition sur les $C_{\bar{u}\bar{v}}$ étant aussi suffisante (corollaire 1 de [*2*]) pour que $Y(n)$ soit markovien quelle que soit la distribution initiale, et puisque :

$$C_{\bar{e}\bar{e}} = C_{\bar{a}\bar{a}} = q + r + s$$
$$C_{\bar{e}\bar{a}} = C_{\bar{a}\bar{e}} = p + t,$$

on voit que la trace est, dans le cas $FE = e$, une chaîne markovienne, et plus exactement une marche au hasard, conformément aux résultats précédents.

Revenons maintenant au cas d'une marche à droite $\{ P_0(R_i); P(A) \}$ sur l'idéal à droite minimum R_i du sous-demi-groupe complètement simple S(G) d'un demi-groupe S. On prendra $R_i = R_1$, ce qui ne nuira pas à la généralité du résultat. Afin de simplifier les notations, on désignera par 1 l'idempotent e_{11} de H_{11} et s_j l'élément s_{1j} de R_1. On posera

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} m^{*(n)}_{\bar{u},\bar{v}} = m^*_{\bar{u},\bar{v}}.$$

Sous l'hypothèse $q_0(\bar{u}) > 0$ pour tout $\bar{u} \in G$, de la définition II.2, et pour un r fini positif tel que $p^{(r)}(1) > 0$, nous tirons les deux inégalités suivantes :

i) $$q_0(\bar{u}) m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} p^{(r)}(1) = \sum_{j,l} \{ p_0(u_j) m^{*(n)}_{u_j v_l} p^{(r)}(1) \} \leqslant \sum_j p_0(u_j) m^{(n+r)}_{u_j,v_1}$$

ii) $$q_0(\bar{u}) m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} \geqslant p_0(u_j) m^{(n)}_{u_j v_1}.$$

Supposons la marche $\{ P_0(R_i); P(A) \}$ transitoire. On sait que dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{(n)}_{u_j v_1} = \frac{f^*_{u_j v_1}}{1 - f^*_{v_1 v_1}} < \frac{1}{1 - f^*_{v_1 v_1}} < \infty \ [4].$$

De *i*) on a

$$q_0(\bar{u})p^{(r)}(1)\sum_{n=0}^{\infty} m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)} < \sum_j \frac{p_0(u_j)}{1 - f^*_{v_1 v_1}} < \infty$$

d'où $m^*_{\bar{u}\bar{v}} < \infty$.

Inversement, si $m^*_{\bar{u}\bar{v}} < \infty$ pour un couple $\bar{u} \times \bar{v} \in G \times G$, de *ii*) on tire $\sum_{n=0}^{\infty} m^{(n)}_{u_j v_l} < \infty$. La marche sur R_1 est donc transitoire et d'après le résultat précédent $m^*_{\bar{u}\bar{v}} < \infty$ pour tout $\bar{u} \times \bar{v} \in G \times G$.

Nous avons donc montré que les deux affirmations $\{ P_0(R_1); P(A) \}$ est une marche transitoire d'une part, et $m^*_{\bar{u}\bar{v}}$ est fini pour tout $\bar{u} \times \bar{v} \in G \times G$ d'autre part, sont équivalentes. Il suit, évidemment, que cette même marche est récurrente si et seulement si $m^*_{\bar{u}\bar{v}} = \infty$ pour tout $\bar{u} \times \bar{v} \in G \times G$.

Posons alors

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)} = \Pi^*_{\bar{u}\bar{v}}$$

Des deux inégalités *i*) et *ii*) nous tirons

$$iii) \qquad q_0(\bar{u})p^{(r)}(1)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)} \leqslant \sum_j p_0(u_j)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m^{(n+r)}_{u_j v_1}$$

$$iv) \qquad q_0(\bar{u})\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)} \geqslant p_0(u_j)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m^{(n)}_{u_j, v_1}.$$

Supposons $\Pi^*_{\bar{u}\bar{v}} > 0$. Choisissons un sous-ensemble fini J' de J tel que $\Sigma \{ p_0(u_j)/j \notin J' \} < \varepsilon$, $0 < \varepsilon$. De *iii*) nous tirons

$$q_0(\bar{u})p^{(r)}(1)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)} \leqslant \sum_{j \in J'} p_0(u_j)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m^{(n+r)}_{u_j, v_1} + \frac{N+1}{N}\varepsilon,$$

puis

$$q_0(\bar{u})p^{(r)}(1)\Pi^*_{\bar{u}\bar{v}} \leqslant \sum_{j \in J'} p_0(u_j) \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m^{(n+r)}_{u_j, v_1} + \varepsilon.$$

Puisqu'on peut choisir ε arbitrairement petit, on en déduit que

$$\Pi^*_{\bar{u}\bar{v}} > 0 \Rightarrow \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} m^{(n)}_{u_j, v_1} > 0.$$

L'inégalité *iv*) donne l'implication inverse. Puisque R_1 est classe essentielle, on en déduit que la proposition $\{ P_0(R_1); P(A) \}$ est une marche récurrente-positive équivaut à l'inégalité $\Pi^*_{\bar{u}\bar{v}} > 0$ pour tout $\bar{u} \times \bar{v} \in G \times G$.

De plus, dans le cas récurrent-positif, soit $\{ \Pi_{v_l} \}$ la distribution stationnaire de la marche sur R_1. Par application du théorème en moyenne ergodique d'ordre un [*4*], posant :

$$f(s) = 1 \quad \text{si} \quad s \in \bigcup_j (1\bar{v}j)$$
$$= 0 \quad \text{autrement},$$

on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_{l\in J} m^{(n)}_{u_j v_l} = \sum_{l \in J} \Pi_{v_l}.$$

Dès lors,

$$q_0(\bar{u}) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} = \sum_j p_0(u_j) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_l m^{(n)}_{u_j v_l},$$

puis, en choisissant un sous-ensemble fini J' dans J tel que

$$\Sigma \{ p_0(u_j)/j \notin J' \} < \varepsilon, \ 0 < \varepsilon',$$

on en tire

$$\sum_{j\in J'} p_0(u_j) \sum_{l\in J} \Pi_{v_l} \leqslant q_0(\bar{u}) \Pi^*_{\bar{u}\bar{v}} \leqslant \sum_{j\in J'} p_0(u_j) \sum_{l \in J} \Pi_{v_l} + \varepsilon,$$

d'où

$$\Pi^*_{\bar{u}\bar{v}} = \sum_l \Pi_{v_l} = \Pi^*_{\bar{l}}.$$

L'application du lemme de Borel-Cantelli à la suite $\{ m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} \}$ dans le cas transitoire, montre que l'on visite presque sûrement un nombre fini de fois chaque $\bar{v} \in G$. Si la marche est récurrente, on visite presque sûrement un nombre infini de fois chaque $v \in R_1$, ce qui entraîne évidemment la même propriété pour chaque $\bar{v} \in G$.

On peut répéter la même démonstration pour la marche à gauche $\{ P_0(L_1); P(A) \}$ à partir de l'égalité correspondante

$$q_0(\bar{u}) m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} = \sum_{i,i'} \{ p_0(u_{i1}) m^{(n)}_{u_{i_1} v_{i'1}} \}.$$

Dans le cas bilatère, nous savons, théorème I.1, que les classes essentielles C_k sont des sous-ensembles de S(G), et aussi l'image $\overline{C}_k$ de C_k, exemple S(G) = G = groupe monogène du chapitre I. Partant de l'égalité

$$q_0(\bar{u})m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)} = \sum_{i,i',j,j'} p_0(u_{ij})m_{u_{ij}v_{i'j'}}^{(n)}$$

on tire

$$q_0(\bar{u})p^{(r)}(1)m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)}p^{(r)}(1) \leqslant \sum_{j,j} p_0(u_{ij})m_{u_{ij},v_{11}}^{(n+r)}$$

et

$$q_0(\bar{u})m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)} \geqslant \sum_{i,j} p_0(u_{ij})m_{u_{ij}v_{11}}^{(n)}.$$

On peut donner une démonstration analogue à la précédente dans le cas d'une marche bilatère $\{ P_0(C); P(A) \}$ sur une classe essentielle C. Mais puisque l'implication $s \rightsquigarrow s' \Rightarrow s' \rightsquigarrow s$ entraîne $\bar{s} \rightsquigarrow \bar{s}' \Rightarrow \bar{s}' \rightsquigarrow \bar{s}$, l'image $\bar{C}$ de C est un sous-ensemble minimal fermé de G dans le processus trace. On ne doit donc tenir compte que des $m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)}$ pour lesquels $\bar{u}$ et $\bar{v}$ appartiennent à l'image $\bar{C}$ d'une même classe essentielle C.

D'après le théorème I.4, toutes les traces des marches unilatères et bilatères sur les classes essentielles R_i, L_j, C_k joueiront des mêmes propriétés.

Supposons maintenant, que $q_0(\bar{u}) = 0$ pour un $\bar{u} \in G$, c'est-à-dire que $p_0(u_j) = 0$ pour tout $j \in J$. Dans le cas à droite sur R_1, nous savons qu'à partir d'un état initial s on atteindra un u_j en un nombre fini de pas n. Prenant cet instant comme instant initial, on a $q_0(\bar{u}) > 0$ et les résultats précédents s'appliquent à $\bar{u}$. Ceci vaut évidemment pour toutes les autres marches, et moyennant cette convention on peut lever la restriction $q_0(\bar{u}) > 0$ pour tout $\bar{u} \in G$. On a alors démontré le

Théorème II.3. — La trace sur G d'une marche à droite, à gauche ou bilatère sur une classe essentielle R_i, L_j ou C_k respectivement, et de transitions définies par la distribution P(A) est telle que l'on a les équivalences suivantes :

la marche est

i) récurrente-positive $\Leftrightarrow m_{\bar{u}\bar{v}}^{*} = \infty$; $\Pi_{\bar{u}\bar{v}}^{*} = \Pi_{\bar{v}}^{*} > 0$
ii) récurrente-nulle $\Leftrightarrow m_{\bar{u}\bar{v}}^{*} = \infty$; $\Pi_{\bar{u}\bar{v}}^{*} = \Pi_{\bar{v}}^{*} = 0$
iii) transitoire $\Leftrightarrow m_{\bar{u}\bar{v}}^{*} < \infty$,

pour tout $\bar{u} \times \bar{v} \in G \times G$ dans le cas unilatère, tout $\bar{u} \times \bar{v} \in \bar{C} \times \bar{C}$, $\bar{C}$ trace de C dans G, dans le cas bilatère.

En outre, on visite presque sûrement une infinité de fois dans les cas *i*) et *ii*), un nombre fini de fois dans le cas *iii*) chaque état de G dans le cas unilatère, chaque état de $\bar{C}$ dans le cas bilatère.

Donnons maintenant un cas simple où la trace est une marche.

COROLLAIRE II.1. — Si $N = e$, la trace d'une marche sur R_i, L_j ou C_k est une marche de même type.

Démonstration. — Dans le cas $JI = N = e$, on sait, lemme II.3, que l'application $s \to e_{11}se_{11} = \bar{s}$ est un homomorphisme θ de S sur G et que, lemme II.4, $\theta(A)$ engendre G si A engendre S. Dès lors, dans le cas à droite on a

$$\begin{aligned}\sum_{j,1} p_0(u_j)m^{(n)}_{u_jv_1} &= \Sigma\{p_0(u_j)p(a_{k_1})\dots p(a_{k_n})/\bar{a}_{k_1}\dots\bar{a}_{k_n} = \bar{u}^{-1}\bar{v}\}\\ &= \Sigma[q_0(\bar{u})\Sigma\{p(a_{k_1})/e_{11}a_{k_1}e_{11} = \bar{a}_{k_1}\}\dots\Sigma\{p(a_{k_n})/e_{11}a_{k_n}e_{11} = \bar{a}_{k_n}\}\\ &\qquad /\bar{a}_{k_1}\dots\bar{a}_{k_n} = \bar{u}^{-1}\bar{v}].\\ &= q_0(\bar{u})\Sigma\{p^*(\bar{a}_{k_1})\dots p^*(\bar{a}_{k_n})/\bar{a}_{k_1}\dots\bar{a}_{k_n} = \bar{u}^{-1}\bar{v}\}\end{aligned}$$

On en tire que la trace est la marche $\{Q_0; P^*(A)\}$ où $P^*(A)$ est défini par $p^*(a) = \Sigma\{p(a)/e_{11}ae_{11} = \bar{a}\}$, et d'après le théorème précédent cette marche est du type de la marche sur R_1. Le cas à gauche ou bilatère se discute de manière analogue. ■

Nous savons, théorème II.2, que dans le cas $N = e$, S est récurrent-positif, nul ou transitoire si et seulement si G est récurrent-positif nul ou transitoire respectivement. Écartant toutes hypothèses sur N, nous allons montrer, en nous restreignant au cas des demi-groupes qui sont complètement simples, qu'on peut encore décrire des cas où la trace est une marche. On en déduira de nouvelles conditions entraînant la récurrence de S(G) à partir de celle de G.

Considérons une loi produit $P(A) = P_1(I) \times P_2(\bar{A}) \times P_3(J)$. Il est immédiat que si A engendre S(G), $P_1(I)$ et $P_3(J)$ chargent respectivement tout I et tout J. D'autre part, $\bar{A}$ n'engendre pas nécessairement G. En effet soient $I = J = \{1, 2\}$; $A = \{e_{11}; a_{11}; a_{11}^{-1}; e_{22}; b_{22}^{-1}\}$; $[22] = \bar{b}$, G le groupe engendré par $\{\bar{e}, \bar{a}, \bar{a}^{-1}, \bar{b}, \bar{b}^{-1}\}$.

On vérifie que la trace $\bar{A} = \{\bar{e}; \bar{a}; \bar{a}^{-1}; \bar{b}^{-1}\}$ engendre un sous-ensemble de G. Mais A engendre S(G) puisque :

$$\begin{aligned}(2\bar{e}2)\circ(2\bar{e}2) &= (2\bar{b}2)\\ (1\bar{e}1)\circ(2\bar{b}2)\circ(1\bar{e}1) &= (1\bar{b}1)\\ (1\bar{e}1)\circ(2\bar{b}^{-1}2)\circ(1\bar{e}1) &= (1\bar{b}^{-1}1)\end{aligned}$$

d'où (1G1) engendré par $\{a_{11}; a_{11}^{-1}; b_{11}; b_{11}^{-1}\}$.

Puis :

$$(1G1)\circ(2\bar{e}2) = (1G2)$$
$$(2\bar{e}2)\circ(1G1) = (2G1)$$
$$(2G1)\circ(2\bar{e}2) = (2G2)$$

Mais [JI]Ā engendre G dès que A engendre S(G). En effet, on est alors assuré de l'existence de n fini tel que, soit donné $g \in G$ arbitraire que l'on peut toujours mettre sous la forme $g = a^{-1}g'$, $a \in \bar{A}$, on ait :

$$a[j_{k_1}i_{k_2}]a_{k_2} \ldots [j_{k_{n-1}}i_{k_n}]a_{k_n} = g' = ag, \qquad a_{k_\nu} \in \bar{A},$$

donc :

$$[j_{k_1}i_{k_2}]a_{k_2} \ldots [j_{k_{n-1}}i_{k_n}]a_{k_n} = g.$$

Notant $P_{31}(s)$ la convolution $P_3 * P_1(s)$, on voit alors que $Q = P_{31} * P_2$ est une distribution chargeant tout élément d'un ensemble générateur [JI]Ā de G et on a alors la :

Proposition II.5. — La trace des marches dépendant d'une loi produit $P(A) = P_1(I) \times P_2(\bar{A}) \times P_3(j)$ sont des marches de loi $P_{31} * P_2 = Q$, sauf le premier pas qui obéit à la loi trace. De plus, ces marches sont de même type que les marches de loi $P_{31} * P_2$ sur G.

Démonstration. — On a, par exemple, pour les marches à droite sur $R_1 \{ P_0(R_1); P(A) \}$

$$q_0(\bar{u})m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} = \sum_{j,j'} p_0(u_j)m^{(n)}_{u_jv_{j'}} = \sum_{j,j'} \left\{ p_0(u_j)\sum_{\nu=1}^{n} p(a_{k_\nu})/u_j\prod_{\nu=1}^{n} a_{k_\nu} \in \bigcup_{j'}(1\bar{v}j') \right\}$$
$$= \sum_{j,j'} \left\{ p_0(u_j)p_1(i_{k_1})p_2(\bar{a}_{k_1})\prod_{\nu=1}^{n-1}[p_3(j_{k_\nu})p_1(i_{k_{\nu+1}})p_2(\bar{a}_{k_{\nu+1}})]p_3(j') \right.$$
$$\left. /\bar{u}[ji_{k_1}]\bar{a}_{k_1}\prod_{\nu=1}^{n-1}[j_{k_\nu}i_{k_{\nu+1}}]\bar{a}_{k_{\nu+1}} = \bar{v} \right\}.$$

Posant $z_{k_{\nu+1}} = [j_{k_\nu}i_{k_{\nu+1}}]$, puis $z_{k_{\nu+1}}\bar{a}_{k_{\nu+1}} = g_{k_{\nu+1}}$, nous avons :

$$q_0(\bar{u})m^{*(n)}_{\bar{u}\bar{v}} = \sum_{j} p_0(u_j)p_1(i_{k_1})p_2(\bar{a}_{k_1})\prod_{\nu=1}^{n-1} p_{31}(z_{k_{\nu+1}})p_2(\bar{a}_{k_{\nu+1}})$$
$$= \sum_{j} p_0(u_j)p_1(i_{k_1})p_2(\bar{a}_{k_1})\prod_{\nu=1}^{n-1} q(g_{k_{\nu+1}})/\bar{u}[ji_{k_1}]\bar{a}_{k_1}\prod_{\nu=1}^{n-1} g_{k_{\nu+1}} = \bar{v}$$
$$= \sum_{j} p_0(u_j)p_1(i_{k_1})p_2(\bar{a}_{k_1})q^{(n-1)}(g)/\bar{u}[ji_{k_1}]\bar{a}_{k_1}g = \bar{v}$$

La trace des marches $\{ P_0(R_1); P(A) \}$ sont donc des marches de loi $Q = P_{31} * P_2$ sauf le premier pas qui obéit à la loi trace. Pour démontrer la deuxième partie de la proposition, nous pouvons nous restreindre au cas d'une marche $\{ p_0(e_{11}) = 1 ; P(A) \}$, puisque le type du processus ne dépend pas de la distribution initiale. Nous avons alors :

$$m_{\bar{e}\bar{e}}^{*(n)} = \Sigma \{ p_2(\bar{a}_{k_1}) q^{(n-1)}(g) / \bar{a}_{k_1} g = \bar{e} \}$$

Mais :

$$q(\bar{a}_{k_1}) = \sum_{vt = \bar{a}_{k_1}} p_{31}(v) p_2(t) = p_{31}(\bar{e}) p_2(\bar{a}_{k_1}) + \sum_{\substack{vt = \bar{a}_{k_1} \\ v \neq \bar{e}}} p_{31}(v) p_2(t)$$

$$= p_2(\bar{a}_{k_1}) \cdot A + B, \quad A > 0.$$

$p_2(\bar{a}_{k_1}) = \dfrac{q(\bar{a}_{k_1}) - B}{A}$, d'où :

$$m_{\bar{e}\bar{e}}^{*(n)} = \sum_{g \in G} q^{(n-1)}(g^{-1}) \frac{q(g) - B}{A} \leqslant \frac{1}{A} q^{(n)}(\bar{e}).$$

D'autre part, il existe $\omega \in \bar{A}$, donc $p_2(\omega) > 0$, tel que

$$p_2(\omega) q^{(n-1)}(\omega^{-1}) \leqslant m_{\bar{e}\bar{e}}^{*(n)}.$$

Ces deux inégalités achèvent la démonstration de la p_{20} position. ■

Appelons distribution symétrique sur G une distribution telle que $p(g) = p(g^{-1})$ pour tout $g \in G$.

COROLLAIRE II.2. — Si G est récurrent pour toute distribution symétrique sur un ensemble générateur quelconque, alors S(G) est récurrent.

Démonstration. — Considérons la loi produit arbitraire

$$P(A) = P_1(I) \times P_2(\bar{A}) \times P_3(J),$$

posant

$$P'_2[(\bar{A})^{-1}] : p'_2(g^{-1}) = p_2(g), \qquad g \in \bar{A}$$
$$P'_{31}([JI]^{-1}) : p'_{31}([ji]^{-1}) = p_{31}([ji]), \qquad [ji] \in [JI],$$

nous voyons, par application de la proposition II.5, que la loi produit

$$P_1(I) \times P_2 * P'_2 * P'_{31} \{ [\bar{A}](\bar{A})^{-1}[JI]^{-1} \} \times P_3(J),$$

est du type de

$$P_{31} * P_2 * P'_2 * P'_{31} \{ [JI]\bar{A}(\bar{A})^{-1}[JI]^{-1} \} = Q(C)$$

Mais, même si A engendre S(G), entraînant comme nous l'avons vu que $[JI]\bar{A}$ engendre G, il n'est pas vrai que $C = [JI]\bar{A}(\bar{A})^{-1}[JI]^{-1}$ engendre G.

En effet, faisant $[JI] = e$, $\bar{A} = [a, a^{-1}\}$, il suit que $C = \{e; a^2; a^{-2}\}$ n'engendre qu'un sous-groupe du groupe monogène engendré par $\bar{A}$. Supposant alors que $e \in \bar{A}$, il suit que $C \supset [JI]\bar{A}$ et donc engendre G. Nous considérons donc les lois produits P(A) telles que P_2 charge e, ce qui ne nuira pas à la validité du corollaire que nous voulons démontrer.

D'autre part,

$$\begin{aligned} q(c) &= \Sigma\,\{\, p_{31}([ji])p_2(x)p_2'(y)\cdot p_{31}'([j'i'])/[ji]xy[j'i'] = c\,\} \\ &= \Sigma\,\{\, p_{31}([ji])p_2(x)p_2(y^{-1})p_{31}[(j'i']^{-1})/[ji]xy[j'i'] = c\,\} \\ &= \Sigma\,\{\, p_{31}([j'i']^{-1})p_2(y^{-1})p_2'(x^{-1})p_{31}'([ji]^{-1})/[j'i']^{-1}y^{-1}x^{-1}[ji]^{-1} = c^{-1}\} \\ &= q(c^{-1}) \quad \text{pour tout} \quad c \in C. \end{aligned}$$

Par suite de l'hypothèse faite sur le type des marches symétriques sur G, S(G) est récurrent.

Imposons maintenant aux seuls sous-groupes G_n de type fini de G de satisfaire aux conditions du corollaire II.2. La proposition II.5 et une répétition de la construction de Dudley [6] établissent la condition suffisante suivante :

Corollaire II.3. — Si $G = \lim \uparrow G_n$, avec G_n de type fini, récurrent pour toute distribution symétrique sur un ensemble générateur quelconque, alors S(G) est récurrent.

Démonstration. — Nous discuterons la preuve de ce corollaire successivement dans les trois cas suivants :

Cas [JI] fini,
Cas [JI] infini et $|J| < \infty$,
Cas [JI] infini et $|J| = |I| = \infty$.

Dans chacun de ces cas les étapes principales de la démonstration sont les mêmes. Si A engendre S(G) il s'agit de :

1) Définir une suite monotone croissante d'ensembles A_n engendrant une suite, également monotone croissante, de demi-groupes complètement simples S_n tels que

$$A = \lim \uparrow A_n \quad \text{et} \quad S = \lim \uparrow S_n$$

2) construire par récurrence sur chacun de ces A_n une distribution de probabilités $P_n(A_n)$ chargeant tout élément de A_n et définissant les transitions d'une marche récurrente sur S_n ;

3) montrer que la limite pour $n \to \infty$ de $P_n(A_n)$ est une distribution P(A) chargeant tout élément de A et définissant sur S une marche récurrente.

Cas JI *fini*

1) On se donne un ensemble générateur symétrisé B de G et un sous-ensemble fini B_0 de B de la forme

$$B_0 = \{ e, b_1^{\varepsilon_1} \dots b_{\nu_0}^{\varepsilon_{\nu_0}} \} \varepsilon_i = \pm 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \nu_0,$$

tel que B_0 engendre G_0 contenant [JI]. On vérifie que $D_0 = B_0^2[JI]^{-1}$ et $C_0 = [JI]D_0$ engendrent bien G. En effet :

$$e \in B_0 \quad \text{et} \quad e \in [JI]$$

entraînent $D_0 \supset B_0$ donc

i) $$\bigcup_n D_0^n \supset \bigcup_n B_0^n = G_0.$$

Mais il existe k_0 fini tel que

$$[JI]^{-1} \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} B_0^k,$$

donc

ii) $$\bigcup_n D_0^n = \bigcup_n \{ B_0^2[JI]^{-1} \}^n \subset \bigcup_n \left\{ B_0^2 \bigcup_{k=1}^{k_0} B_0^k \right\}^n \subset \bigcup_n B_0^n = G_0.$$

On établit sans difficultés les deux inclusions *i*) et *ii*) dans le cas de C_0. Il suit alors que l'ensemble

$$A_0 = I \times D_0 \times J \quad \text{engendre} \quad S_0 = I \times G_0 \times J.$$

Soient les sous-ensembles suivants définis par récurrence

$$\begin{cases} B_n = B_{n-1} \cup b_{\nu_0+n} \cup b_{\nu_0+n}^{-1} \\ D_n = B_n^2[JI]^{-1} \\ C_n = [JI]D_n \qquad n \geqslant 1, \end{cases}$$

où b_{ν_0+n} est un élément de G_n n'appartenant pas à G_{n-1}. Les remarques qui suivent sont immédiates :

B_n, D_n et C_n engendrent le même groupe G_n,
$A_n = I \times D_n \times J$ engendre le demi-groupe complètement simple,
$S_n = I \times G_n \times J$ et
$\lim \uparrow A_n = A$ engendre $S = I \times G \times J = \lim \uparrow S_n$.

2) Définissons sur S_n la distribution

$$\alpha(I) \times P_{2,n}(B_n) \times \gamma(J)$$

avec

$$\begin{cases} p_{2,n}(x) = (1 - q_n)p_{2,n-1}(x) & \text{si} \quad x \in \mathrm{B}_{n-1} \\ p_{2,n}(b^{\varepsilon}_{\nu_0+n}) = q_n/2, \quad \varepsilon = \pm 1, & 0 < q_n < 1. \end{cases}$$

On note que :

$$xy[ji]^{-1} \in \mathrm{D}_n \Leftrightarrow xy \in \mathrm{D}_n[ji]^{+1} \subset \mathrm{G}_n,$$

donc

iii)
$$\begin{cases} \{x \in \mathrm{G}_n\} \quad \text{et} \quad \{xy[ji]^{-1} \in \mathrm{D}_n\} \Rightarrow \{y \in \mathrm{G}_n\} \\ \{x \notin \mathrm{G}_n\} \quad \text{et} \quad \{xy[ji]^{-1} \in \mathrm{D}_n\} \Rightarrow \{y \notin \mathrm{G}_n\}, \end{cases}$$

de même en intervertissant x et y.

D'autre part :

iv) $b^{\varepsilon_1}_{\nu_0+n+1} \cdot b^{\varepsilon_2}_{\nu_0+n+1}[ji]^{-1} \in \mathrm{D}_n$ au moins pour $\varepsilon_1 = -\varepsilon_1$.

Nous savons, corollaire II.2, que :

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{A}_n) = \alpha(\mathrm{I}) \times \beta_n(\mathrm{D}_n) \times \gamma(\mathrm{J})$$

avec

$$\beta_n(\mathrm{D}_n) = \mathrm{P}_{2,n} * \mathrm{P}'_{2,n} * (\gamma\alpha)',$$

où $(\gamma\alpha)' = \mathrm{P}'_{31}$ de ce corollaire, définit pour tout n fini les transitions d'une marche récurrente sur S_n, puisque C_n engendre aussi G_n ;

iii) et *iv)* entraînent que, pour $d \in \mathrm{D}_{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \beta_n(d) &= \Sigma\{p_{2,n}(x)p'_{2,n}(y)(\gamma\alpha)'([ji]^{-1})/x, y \in \mathrm{B}_n; xy[ji]^{-1} = d \in \mathrm{D}_{n-1}\} \\ &= (1-q_n)^2\Sigma\{p_{2,n-1}(x)p'_{2,n-1}(y)(\gamma\alpha)'([ji]^{-1})/x, y \in \mathrm{B}_{n-1}; d = xy[ji]^{-1} \in \mathrm{D}_{n-1}\} \\ &\quad + (q_n/2)^2\Sigma\{(\gamma\alpha)'([ji]^{-1})/b^{\varepsilon_1}_{\nu_0+n}b^{\varepsilon_2}_{\nu_0+n}[ji]^{-1} = d \in \mathrm{D}_{n-1}\} \\ \beta_n(d) &= (1-q_n)^2\beta_{n-1}(d) + (q_n/2)^2\theta_{n-1}(d) \quad \text{pour} \quad d \in \mathrm{D}_{n-1}. \end{aligned}$$

Pour $d \notin \mathrm{D}_{n-1}$, on peut remarquer, mais cela ne nous sera pas utile pour la suite, que :

$$\begin{aligned} \beta_n(d) &= (1-q_n)(q_n/2)\Sigma\{p'_{2,n-1}(y)(\gamma\alpha)'(ji)^{-1}/y \in \mathrm{B}_{n-1}, b^{\varepsilon}_{\nu_0+n}y[ji] = d \in \mathrm{D}_n - \mathrm{D}_{n-1}\} \\ &= (1-q_n)(q_n/2)\Sigma\{p_{2,n-1}(x)(\gamma\alpha)'(ji)^{-1}/x \in \mathrm{B}_{n-1}; xb^{\varepsilon}_{\nu_0+n}[ji] = d \in \mathrm{D}_n - \mathrm{D}_{n-1}\} \\ &= (q_n/2)^2\Sigma\{(\gamma\alpha)'(ji)^{-1}/b^{\varepsilon_1}_{\nu_0+n}b^{\varepsilon_2}_{\nu_0+n}[ji] = d \in \mathrm{D}_n - \mathrm{D}_{n-1}\} \end{aligned}$$

3) Notons Θ_{n+1} l'opérateur qui, appliqué à $p_n(s)$ définit $p_{n+1}(s)$ pour tout $s \in \mathrm{A}_n$. On a :

v)
$$\begin{aligned} p_{n+1}(s) &= \Theta_{n+1}p_n(s) = \alpha(i) \times \{(1-q_{n+1})^2\beta_n(d) + (q_{n+1}/2)^2\theta_n(d)\} \times \gamma(j) \\ &= (1-q_{n+1})^2p_n(s) + (q_{n+1}/2)^2\alpha(i) \times \theta_n(d) \times \gamma(j). \end{aligned}$$

Nous notons $\prod_{k=1}^{K} \Theta_{n+k}$ l'application successive des opérateurs Θ_{n+1}, $\Theta_{n+2} \ldots \Theta_{n+k}$ à $p_k(s)$, $s \in A_n$. Par suite :

$$p_{n+k}(s) = \prod_{k=1}^{K} \Theta_{n+k} p_n(s).$$

Montrons alors que la limite pour $K \to \infty$ de $p_{n+k}(s)$ existe et est telle que

$$0 < p(s) = \lim_{k \to \infty} p_{n+k}(s) < 1 \quad \text{pour tout} \quad s \in A_n,$$

dès que $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q_{n+k})^2 < \infty$, ou de manière équivalente dès que

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_{n+k} < \infty.$$

Il suffit pour cela de montrer que :

vi) la suite $\{ p_{n+k}(s) \}$ est une suite de Cauchy, et que

vii) $0 < p(s) < 1$.

En effet :

$$p_{n+k+1}(s) - p_{n+k}(s) = (1 - q_{n+k+1})^2 p_{n+k}(s) + (q_{n+k+1}/2)^2 \alpha(i) \times \theta_{n+k}(d) \times \gamma(j) - p_{n+k}(s)$$

$$| p_{n+k+1}(s) - p_{n+k}(s) | \leqslant q_{n+k+1} | p_{n+k}(s)(2 + q_{n+k+1}) + q_{n+k+1}^2 |$$

puisque $\theta_{n+k}(d) \leqslant 4$, la borne étant atteinte si

$$b_{v_0+n+1}^{\varepsilon_1} b_{v_0+n+1}^{\varepsilon_2} \in D_n \quad \text{pour} \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

Donc

$$| p_{n+k+1}(s) - p_{n+k}(s) | \leqslant 4 q_{n+k+1}$$

$$| p_{n+m'}(s) - p_{n+m}(s) | \leqslant 4 \sum_{k=m+1}^{m'} q_{n+k} < 4\varepsilon$$

pour tout m, $m' > N(\varepsilon)$, puisque la série $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n+k}$ converge.

D'autre part, il résulte du fait que $p_n(s) > 0$, et de v) :

$$0 < p(s) < \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q_{n+k})^2 p_n(s) < 1.$$

Le raisonnement précédent vaut pour tout n fini. Considérant un $S_{n_0} = I \times G_{n_0} \times J$ arbitraire, les considérations précédentes permettent de définir sur tout $s \in A$ engendrant $S = I \times G \times J$ la fonction $p(s)$:

$$P(A): \; p(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \Theta_{n_0+k} p_{n_0}(s) \quad \text{si} \quad s \in A_{n_0}.$$

Il nous reste à montrer que

$$viii) \qquad \sum_{s \in A} p(s) = 1.$$

$$ix) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(s) = \infty.$$

Pour cela, il nous suffira de répéter la construction de Dudley [6]. Adoptant les notations de cet auteur, nous posons $s^{(0)}((k, w)$ la marche récurrente sur S_{n_0}, d'état initial e_{11} et de transitions définies par $P_{n_0}(A_{n_0})$. On peut choisir N_0 de sorte que

$$\sum_{k=1}^{N_0} \Pr\,(s^{(0)}(k, w) = e_{11}) > 1,$$

et $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \ldots > 0$ de sorte que

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - Q_{1j})^{2N_0} \sum_{k=1}^{N_0} \Pr\,(s^{(0)}(k, w) = e_{11}) > 1.$$

Étant donnés les $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}, Q_{11} \ldots Q_{n-1,1} \ldots$ on choisit N_n de sorte que

$$\sum_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} \Pr\,(s^{(n)}(k, w) = e_{11}) > 1,$$

puisque $s^{(n)}(k, w)$ est une marche récurrente pour tout n fini, et $Q_{n1}, Q_{n2} \ldots$ positifs tels que

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - Q_{1j})^{2N_n} \sum_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} \Pr\,(s^{(n)}(k, w) = e_{11}) > 1.$$

Posons $q_n = \min (Q_{1n} \ldots Q_{nn}, r_n)$ où les r_n sont des nombres positifs inférieurs à un, tels que

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 - r_n)^2 \text{ converge.}$$

$$\prod_{k=n_0}^{\infty}(1 - r_k)^2 = \prod_{k=n_0}^{\infty}(1 - r_k)^2 \sum_{s\in A_{n_0}} p_{n_0}(s) \leqslant \prod_{k=n_0}^{\infty}(1 - q_k)^2 \sum_{s\in A_{n_0}} p_{n_0}(s)$$

$$\leqslant \prod_{k=n_0+1}^{\infty} (1 - q_k)^2 \sum_{s\in A_{n_0}} p_{n_0}(s) < \sum_{s\in A_{n_0}} \prod_{k=1}^{\infty} \Theta_{n_0+k} p_{n_0}(s) < 1,$$

$$\lim_{n_0\to\infty} \prod_{k=n_0}^{\infty}(1 - r_k)^2 = 1 = \lim_{n_0\to\infty} \sum_{s\in A_{n_0}} p(s) = \sum_{s\in A} p(s) = 1,$$

P(A) est donc bien une distribution chargeant tout élément de A, définissant les transitions de la marche $s(k, w)$ sur S, la distribution conditionnelle

$$\Pr \{ s(k, w) \in S_{n_0};\ k = 0, 1 \ldots K \}$$

étant, dans notre cas,

$$\Sigma\left\{ \prod_{i=1}^{k} p(s_{v_i}) \Big/ \prod_{i=1}^{k} s_{v_i} \in S_{n_0},\ 1 \leqslant k \leqslant K \right\}$$

$$= \Sigma\left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \Theta_{n_0+k} \prod_{i=1}^{k} p_{n_0}(s_{v_i}) \Big/ \prod_{i=1}^{k} s_{v_i} \in S_{n_0},\ 1 \leqslant k \leqslant K \right\} = \prod_{i=1}^{k} \sum_{s_i \in S_{n_0}} \prod_{k=1}^{\infty} \Theta_{n_0+n} p_{n_0}(s_i)$$

Mais,

$$\sum_{j=N_{n-1}+1}^{N_n} \Pr (s(j, w) = e_{11}) \geqslant \sum_{j=N_{n-1}+1}^{N_n} \{ \Pr (s(j, w) = e_{11}/s(k, w) \in S_n ; 0 \leqslant k \leqslant j ; \forall j) \}$$

$$= \sum_{j=N_{n-1}+1}^{N_n} \prod_{k=1}^{\infty} \Theta_{n+k} \Pr (s^{(n)}(j, w) = e_{11})$$

$$\geqslant \sum_{j=N_{n-1}+1}^{N_n} \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 - q_k)^2 \Pr (s^{(n)}(j, w) = e_{11})$$

$$\geqslant \prod_{k=n+1}^{\infty} (1-q_k)^{2N_n} \sum_{j=N_{n-1}+1}^{N_n} \Pr(s^{(n)}(j, w) = e_{11})$$

$$\geqslant \prod_{k=n+1}^{\infty} (1-Q_{nk})^{2N_n} \sum_{j=N_{n-1}+1}^{N_n} \Pr(s^{(n)}(j, w) = e_{11})$$

$$\geqslant 1, \text{ d'après le choix des } Q_{nk},$$

et ainsi $\sum_{j=1}^{\infty} \Pr(s(j, w) = e_{11}) = \infty.$

Cas JI *infini et* $|J| < \infty$

Nous identifions l'ensemble I à celui des entiers positifs et nous posons $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ (nous écrirons quelquefois i_n au lieu de n).

1) Définissons B_n sous-ensemble fini symétrisé de B engendrant $G_n \supset [JI_{n'}]$ et contenant e, puis,

$$\begin{cases} D_n^{n'} = B_n^2[JI_{n'}] \\ C_n^{n'} = [JI_{n'}]D_n^{n'} \\ A_n^{n'} = I_{n'} \times D_n^{n'} \times J \\ S_n^{n'} = I_{n'} \times D_n^{n'} \times J. \end{cases}$$

les remarques *i*) et *ii*) sont encore valables ici c'est-à-dire que B_n, $D_n^{n'}$ et $C_n^{n'}$ engendrent G_n. Nous devons maintenant définir une suite $\{S_n^{n'}\}$ de demi-groupes complètement simples. Pour cela nous pouvons toujours définir

$$B_{n+1} = B_n \cup b_{n+1} \cup b_{n+1}^{-1} \quad \text{où} \quad b_{n+1}^{\varepsilon} \notin G_n,$$

comme dans le premier cas.

Mais pour définir $S_n^{n'+1}$, c'est-à-dire pour adjoindre la $\mathcal{R}$-classe $R_{n'+1}$, nous devons nous assurer que $G_n \supset [JI_{n'+1}]$. Si cette condition est vérifiée alors

$$S_n^{n'+1} = I_{n'+1} \times G_n \times J$$

est bien complètement simple. Autrement, nous devons au préalable définir B_n, $B_{n+1} \ldots B_{n_1}$, n_1 fini, tels que $G_{n_1} \supset [JI_{n'+1}]$.

$S = I \times G \times J$ étant donné, nous pouvons donc, d'une manière au moins, définir les suites

$D_n^{n'}$, $C_n^{n'}$, $A_n^{n'}$ et $S_n^{n'}$ de sorte que les $S_n^{n'}$ soient toujours complètement simples.

Nous remarquons que nous pouvons indexer ces suites au moyen de l'indice $m = n + n'$, et nous avons:

$$\mathrm{B} = \lim_{n} \uparrow \mathrm{B}_n$$
$$\mathrm{D} = \lim_{m=n+n'} \uparrow \mathrm{D}_n^{n'}$$
$$\mathrm{A} = \lim_{m=n+n'} \uparrow \mathrm{A}_n^{n'}$$
$$\mathrm{S} = \lim_{m=n+n'} \uparrow \mathrm{S}_n^{n'}$$

2) La distribution

$$\alpha_{n'}(\mathrm{I}_{n'}) \times \mathrm{P}_{2,n}(\mathrm{B}_n) \times \gamma(\mathrm{J})$$

chargeant tout élément de $\mathrm{I}_{n'} \times \mathrm{B}_n \times \mathrm{J}$ étant donnée, définissons sur $\mathrm{A}_n^{n'}$

$$\mathrm{P}_n^{n'}(\mathrm{A}_n^{n'}) = \alpha_{n'} \times \mathrm{P}_{2,n} * \mathrm{P}'_{2,n} * (\gamma\alpha_{n'}) \times \gamma = \alpha_{n'} \times \beta_n^{n'} \times \gamma.$$

Si $\mathrm{G}_n \supset [\mathrm{JI}_{n'+1}]$ définissons sur $\mathrm{I}_{n'+1} \times \mathrm{B}_n \times \mathrm{J}$ la distribution $\alpha_{n'+1} \times \mathrm{P}_{2,n} \times \gamma$ avec

$$\begin{cases} \alpha_{n'+1}(i) = (1 - q_n^{n'+1})\alpha_{n'}(i) \quad \text{si} \quad i \in \mathrm{I}_{n'} \qquad 0 < q_n^{n'+1} < 1. \\ \alpha_{n'+1}(i_{n'+1}) = q_n^{n'+1}\,; \end{cases}$$

puis sur $\mathrm{A}_n^{n'+1}$

$$\mathrm{P}_n^{n'+1}(\mathrm{A}_n^{n'+1}) = \alpha_{n'+1} \times \mathrm{P}_{2,n} * \mathrm{P}'_{2,n} * (\gamma\alpha_{n'+1})' \times \gamma = \alpha_{n'+1} \times \beta_n^{n'+1} \times \gamma.$$

Par application du corollaire II.2, $\mathrm{P}_n^{n'}$ définit les transitions d'une marche récurrente sur $\mathrm{S}_n^{n'}$ pour tout n et n' finis. De plus

$$\begin{aligned}
\beta_n^{n'+1}(d) &= \Sigma\{p_{2,n}(x)p'_{2,n}(y)(\gamma\alpha_{n'+1})'([ji]^{-1})/xy[ji]^{-1} = d \in \mathrm{D}_n^{n'+1}, x, y \in \mathrm{B}_n\,; \\
&\qquad\qquad\qquad [ji] \in [\mathrm{JI}_{n'+1}] \\
&= (1 - q_n^{n'+1})\Sigma\{p_{2,n}(x)p'_{2,n}(y)(\gamma\alpha_{n'})(ji)/xy[ji]^{-1} = d \in \mathrm{D}_n^{n'+1}, \\
&\qquad\qquad\qquad x, y \in \mathrm{B}_n;\ [ji] \in [\mathrm{JI}_{n'}] \\
&\quad + q_n^{n'+1}\Sigma\{p_{2,n}(x)p'_{2,n}(y)\gamma'(ji_{n'+1})^{-1}/xy[ji_{n'+1}]^{-1} = d \in \mathrm{D}_n^{n'+1}; \\
&\qquad\qquad\qquad x, y \in \mathrm{B}_n;\ [ji_{n'+1}] \in [\mathrm{JI}_{n'+1}] \\
\beta_n^{n'+1}(d) &= (1 - q_n^{n'+1})\beta_n^{n'}(d) + q_n^{n'+1}\theta_n^{n'}(d).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p_n^{n'+1}(s) &= (1 - q_n^{n'+1})\alpha_{n'}\{(1 - q_n^{n'+1})\beta_n^{n'}(d) + q_n^{n'+1}\theta_n^{n'}(d)\} \times \gamma \\
&= (1 - q_n^{n'+1})^2 p_n^{n'}(s) + (1 - q_n^{n'+1})\alpha_{n'}q_n^{n'+1}\theta_n^{n'}(d) \times \gamma \quad \text{pour} \quad s \in \mathrm{I}_{n'} \times \mathrm{D}_n^{n'} \times \mathrm{J}.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, définissons le nouvel opérateur qui, appliqué à $p_n^{n'}(s)$ définit $p_n^{n'+1}(s)$ par $\chi_{n'+1}$ et avec les mêmes conventions nous écrirons

$$p_n^{n'+K}(s) = \prod_{k=1}^{K} \chi_{n'+k} p_n^{n'}(s).$$

Mais pour un k fini, il arrivera que $G_n \not\supset [JI_{k+1}]$. Nous sommes alors ramené au cas JI fini, et nous introduisons les éléments de G dans B_n, en définissant les distributions au moyen de l'opérateur Θ. Il suit donc que

$$p_{n+K}^{n+K'}(s) = \prod_{x+y=1}^{K+K'} \Phi_{n+x}^{n'+y} p_n^{n'}(s),$$

avec

$$\Phi_{n+x}^{n'+y} = \Theta_{n+x}^{n'+y}$$

si dans la suite des $\{ S_n^{n'} \}$ on a la succession $S_{s+x-1}^{n'+y}, S_{n+x}^{n'+y}$,

$\Phi_{n+x}^{n'+y} = \chi_{n+x}^{n'+y}$ si au contraire, dans cette même suite on a $S_{n+x}^{n'+y-1}$, $S_{n+x}^{n'+y}$.

Montrons alors que la limite

$$\lim_{k+k' \to \infty} p_{n+k}^{n'+k'}(s) = p(s) < 1$$

existe pour tout $s \in I_{n'} \times G_n \times J$ dès que

$$\prod_{x+y=1}^{\infty} (1 - q_{n+x}^{n'+y})^2 < \infty.$$

Comme précédemment, il suffit de montrer que la suite $\{ p_{n+k}^{n'+k'} \}$ est une suite de Cauchy et que $0 < p(s) < 1$.

En effet :

$$p_{n+x}^{n'+y}(s) - p_{n+x}^{n'+y-1}(s) = [(1 - q_{n+x}^{n'+y})^2 - 1] p_{n+x}^{n'+y-1}(s) + (1 - q_{n+x}^{n'+y}) q_{n+x}^{n'+y} \alpha_{n'+y-1} \theta_{n+x}^{n'+y-1}(d)\gamma$$

Mais $\theta_n^{n'}(d) \leqslant 1$, par suite,

$$| p_{n+x}^{n'+y}(s) - p_{n+x}^{n'+y-1}(s) | \leqslant 4 q_{n+x}^{n'+y}$$

$$| p_{n+m}^{n'+m'}(s) - p_{n+x}^{n'+y}(s) | \leqslant 4 \sum_{z+t=x+y}^{m+m'} q_{n+z}^{n'+t} < \varepsilon$$

dès que $m + m'$, $x + y > N(\varepsilon)$.

3) Dès lors, un choix des $q_{n+x}^{n'+y}$ identique à celui décrit dans le cas JI

fini, avec $m = n + x + n' + y$ comme indice de cette suite, montre que

viii) $$\sum_{s \in A} p(s) = 1,$$

ix) la marche de transitions définies par

$$P(A): \; p(s) = \prod_{x+y=1}^{\infty} \Phi_{n+x}^{n'+y} p_n^{n'}(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in D_n^{n'}$$

est récurrente.

Cas [JI] *infini et* $|I| = |J| = \infty$

La démonstration est la même que la précédente avec l'adjonction des $\mathscr{L}$-classes comme opération supplémentaire.

1) On définit B_n sous-ensemble symétrisé de B contenant e et engendrant $G_n \supset [J_{n''} I_{n'}]$, puis

$$\begin{cases} D_n^{n',n''} = B_n^2 [J_{n''} I_{n'}] \\ C_n^{n',n''} = [J_{n''} I_{n'}] D_n^{n',n''} \\ A_n^{n',n''} = I_{n'} \times D_n \times J_{n''} \\ S_n^{n',n''} = I_{n'} \times G_n \times J_{n''}. \end{cases}$$

La suite des $\{ S_n^{n',n''} \}$ se construit en raisonnant comme précédemment. On peut définir alors une suite au moins, indexée avec l'indice $m = n + n' + n''$, et on vérifie que

$$\begin{cases} \underset{n}{B} = \lim\limits_{n} \uparrow B_n \\ D = \lim\limits_{m=n+n'+n''} \uparrow D_n^{n',n''} \\ A = \lim\limits_{m=n+n'+n''} \uparrow A_n^{n',n''} \\ S = \lim\limits_{m=n+n'+n''} \uparrow S_n^{n'+n''}. \end{cases}$$

2) La distribution

$$P_n^{n',n''+1}(A_n^{n',n''+1}) = \alpha(I_{n'}) \times \beta_n^{n',n''+1} \times \gamma(J_{n''+1}) = \alpha_{n'} \times \beta_n^{n',n''+1} \times \gamma_{n''+1}$$

se définit à partir de $P_n^{n',n''}$ par

$$\begin{aligned} \gamma_{n''+1}(j) &= (1 - q_n^{n',n''+1}) \gamma_{n''}(j) \quad \text{si} \quad j \in J_{n''} \\ \gamma_{n''+1}(j_{n''+1}) &= q_n^{n',n''+1} \qquad 0 < q_n^{n',n''+1} < 1. \end{aligned}$$

On sait que les $P_n^{n',n''}$ sont récurrents pour n, n', n'' finis. On définit l'opérateur $\zeta_{n''+1}$ par

$$p_n^{n',n''+1}(s) = \zeta_{n''+1} p_n^{n',n''}(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in A_n^{n',n''}.$$

On pose ensuite

$$p(s) = \prod_{x+y+z=1}^{\infty} \Phi_{n+x}^{n'+y,n''+z} p_n^{n',n''}(s), \qquad s \in A_n^{n',n''}.$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \Phi_{n+x}^{n'+y,n''+z} &= \Theta_{n+x} \text{ si dans la suite } \{ S_n^{n',n''} \} \text{ on a} \dots S_{n+x-1}^{n'+y,n''+z}, S_{n+x}^{n'+y,n''+z} \\ &= \chi_{n'+y} \text{ si dans la suite on a } S_{n+x}^{n'+y-1,n''+z}, S_{n+x}^{n'+y,n''+z} \\ &= \xi_{n''+z} \text{ si on a } S_{n+x}^{n'+y,n''+z-1}, S_{n+x}^{n'+y,n''+z}. \end{aligned}$$

La limite pour $x + y + z \to \infty$ de $\prod_{x+y+z=1}^{\infty} \Phi_{n+x}^{n'+y,n''+z} p_n^{n',n''}(s)$ existe dès que $\prod_{x+y+z=1}^{\infty} (1 - q_{n+x}^{n'+y,n''+z})^2 < \infty$; la démonstration est identique à celle du cas précédent.

3) Enfin un choix des $q_n^{n',n''}$ semblable à celui que nous avons décrit montre que

$$\sum_{s \in A} p(s) = 1,$$

et que la marche de transitions définies par

$$P(A) \colon p(s) = \prod_{x+y+z=1}^{\infty} \Phi_{n+x}^{n'+y,n''+z} p_n^{n',n''}(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in D_n^{n',n''}$$

est récurrent, ce qui achève la démonstration. ■

PROPOSITION II.6. — Si G est abélien, S(G) est récurrent si et seulement si G est de rang deux au plus.

Démonstration. — Si S(G) est récurrent, G est récurrent d'après le théorème II.1, donc de rang deux au plus [*3*]. Inversement, G abélien de rang au plus deux est la limite d'une suite monotone croissante de sous-groupes finiment engendrés, récurrents pour toute distribution symétrique sur un ensemble quelconque d'éléments générateurs [*6*], donc S(G) est récurrent par application du corollaire II.3. ■

Puisqu'un groupe localement fini est, par définition, tel que toute partie finie engendre un groupe fini, le même corollaire II.3 montre que

PROPOSITION II.7. — Si G est localement fini, S(G) est récurrent.

On peut, d'ailleurs, donner, de cette proposition, une preuve directe ne faisant pas intervenir la construction du corollaire II.3. Pour cela, nous exposerons d'abord une démonstration, que le professeur H. Kesten a bien voulu nous communiquer, de la récurrence de G, puis nous l'étendrons à S(G).

Remarque 1. — G localement fini est récurrent.

Démonstration. — Il faut montrer que l'on peut définir une distribution de probabilités P(A), chargeant tout élément d'un ensemble générateur $A = \{ g_\nu^{\varepsilon_\nu} \}$, $\varepsilon_\nu = \pm 1$, d'un groupe localement fini G, telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(e) = \infty.$$

Soit G_1 un sous-groupe fini de G, dont nous désignerons le nombre des éléments distincts par $|G_1|$, sous-groupe engendré par

$$A_1 = \{ g_0^{\varepsilon_0}, g_1^{\varepsilon_1} \dots g_{k_0+1}^{\varepsilon_{k_0+1}} \}, \quad \varepsilon_\nu = \pm 1, \quad k_0 \text{ fini},$$

Soit la distribution

$P_1(A_1) = \{ p_1(g_\nu^{\varepsilon_\nu}) \}$ chargeant tout élément de A_1.

On sait que:

$$\lim_{n\to\infty} p_1^{(n)}(e) = \frac{1}{|G_1|}.$$

Donc n_1 fini existe tel que:

$$p_1^{(n)}(e) \geqslant \frac{3}{4}\frac{1}{|G_1|} \quad \text{dès que} \quad n > n_1.$$

Soit $A_2 = A_1 \cup g_{k_0+2} \cup g_{k_0+2}^{-1}$ engendrant G_2 fini. Définissons

$$\begin{aligned} P_2(A_2):\ & p_2(g) = p_1(g) \quad \text{si} \quad g \in A_1 - g_{k_0+1} - g_{k_0+1}^{-1} = A_0 \\ & p_2(g_{k_0+1}^{\varepsilon}) = (1 - \varepsilon_1)p_1(g_{k_0+1}^{\varepsilon}) \\ & p_2(g_{k_0+2}^{\varepsilon}) = \varepsilon_1 p_1(g_{k_0+1}^{\varepsilon}), \qquad 0 < \varepsilon_1 < 1. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$P_2^{(n)}(e) \geqslant (1 - \varepsilon_1)^n p_1^{(n)}(e) \geqslant \frac{3}{4}(1 - \varepsilon_1)^n \frac{1}{|G_1|} \quad \text{dès que} \quad n > n_1.$$

Choisissons $\varepsilon_1 > 0$ de sorte que

$$\frac{3}{4}(1 - \varepsilon_1)^n \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad n_1 < n \leqslant n_1 + |G_1| = n_2,$$

il suit

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} p_2^{(n)}(e) \geqslant \frac{1}{2}$$

Ayant ainsi défini $P_\nu(A_\nu)$, A_ν engendrant G_ν, on construit

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(A_{\nu+1}) \;:\; p_{\nu+1}(g) &= p_\nu(g) \quad \text{si} \quad g \in A_\nu - g_{k_0+\nu} - g_{k_0+\nu}^{-1} \\ p_{\nu+1}(g_{k_0+\nu}^{\varepsilon}) &= (1 - \varepsilon_\nu) p_\nu(g_{k_0+\nu}^{\varepsilon}) \\ p_{\nu+1}(g_{k_0+\nu+1}^{\varepsilon}) &= \varepsilon_\nu p_\nu(g_{k_0+\nu}^{\varepsilon})\,; \end{aligned}$$

puis on choisit $\varepsilon_\nu > 0$ tel que

$$\frac{3}{4}(1 - \varepsilon_\nu)^n \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad n_\nu < n \leqslant n_\nu = |\,G_\nu\,| = n_{\nu+1},$$

d'où il suivra que

$$\sum_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} p_{\nu+1}^{(n)}(e) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Mais $A = \bigcup_\nu A_\nu$. Posant :

$$p(g) = p_\nu(g) \quad \text{si} \quad g \in A_{\nu-1},$$

on a :

$$\sum_{g \in A_{\nu-2}} p_{\nu-1}(g) + (1 - \varepsilon_{\nu-1})[p_{\nu-1}(g_{k_0+\nu-1}) + p_{\nu-1}(g_{k_0+\nu-1}^{-1})] < \sum_{g \in A_{\nu-1}} p_\nu(g)$$

$$= \sum_{g \in A_{\nu-1}} p(g) < 1.$$

$$\sum_{g \in A_{\nu-1}} p_{\nu-1}(g) - \varepsilon_{\nu-1}[p_{\nu-1}(g_{k_0+\nu-1}) + p_{\nu-1}(g_{k_0+\nu-1}^{-1})] < \sum_{g \in A_{\nu-1}} p(g) < 1$$

$$1 - \varepsilon_{\nu-1} < \sum_{g \in A_{\nu-1}} p(g) < 1.$$

Passant à la limite $\nu \to \infty$, et puisque $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varepsilon_{\nu-1} = 0$ par construction, on a :

$$\sum_{g \in A} p(g) = 1\,;$$

donc $P(A) = \{ p(g) \}$ est une distribution chargeant tout élément de A, et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(e) \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=n_\nu+1}^{n_\nu+|G_\nu|} p_\nu^{(n)}(e) = \infty.$$

Remarque 2. — Si G est localement fini, S(G) est récurrent.

Démonstration. — Soit $A = I \times B \times J$ un ensemble générateur de $S = I \times G \times J$ où B pourra être pris comme ensemble engendrant G. Il faut construire une distribution de probabilités $P(A) = \alpha(I) \times \beta(B) \times \gamma(J)$, chargeant tout élément de A, telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(e_{11}) = \infty.$$

Nous identifierons l'ensemble I à celui des entiers positifs, et nous poserons

$I'_0 = \{ 1, 2 \dots i_0 - 1 \}$
$I_0 = \{ 1, 2 \dots i_0 \}$
$I_1 = \{ 1, 2 \dots i_0 + 1 = i_1 \}$, $i_0 > 1$, à cela près quelconque; les définitions de J'_0, J_0, J_1, j_0 et j_1 sont analogues aux précédentes.

Puisque [JI] n'est pas nécessairement fini, la première étape de la construction devra être un sous-demi-groupe complètement simple de la forme

$$S_0 = I_0 \times G_{\mu_1} \times J_0,$$

G_{μ_1} étant un sous-groupe fini de G engendré par $B_{\mu_1} = \{ b_0^{\varepsilon}, b_1^{\varepsilon_1} \dots b_{\mu_1}^{\varepsilon_{\mu_1}} \}$. μ_1 fini, $\varepsilon_k = \pm 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant \mu_1$, et $G_{\mu_1} \supset [J_1 I_1]$.

$A_0 = I_0 \times B_{\mu_1} \times J_0$ engendre donc S_0, et

$$P_0 = P_0(A_0) = \alpha_0(I_0) \times \beta_1(B_{\mu_1}) \times \gamma_0(J_0) = \alpha_0 \times \beta_1 \times \gamma_0,$$

distribution chargeant tout élément de A_0, définit les transitions d'une marche récurrente positive sur S_0 fini. On sait [*8*], que

$$\lim_{n \to \infty} p_0^{(n)}(e_{11}) = \frac{\pi_0 \pi'_0}{|G_{\mu_1}|}; \quad \pi_0 = \sum_{a \in R_1} p_0(a), \quad \pi'_0 = \sum_{a \in L_1} p_0(a).$$

Par suite n_1 fini existe tel que

$$p_0^{(n)}(e_{11}) \geqslant \frac{3}{4} \frac{\pi_0 \pi'_0}{|G_{\mu_1}|} \quad \text{dès que} \quad n > n_1.$$

Définissons alors sur $A_1 = I_1 \times B_{\mu_1} \times J_1$, engendrant $J_1 = I_1 \times G_{\mu_1} \times J_1$, la distribution $P_1 = \alpha_1 \times \beta_1 \times \gamma_1$ avec:

$$\begin{cases} \alpha_1(i) &= \alpha_0(i) \quad \text{si} \quad i \in I'_0 \\ \alpha_1(i_0) &= (1 - \varepsilon_1)\alpha_0(i_0) \\ \alpha_1(i_1) &= \varepsilon_1 \alpha_0(i_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(j) &= \gamma_0(j) \quad \text{si} \quad j \in J'_0 \\ \gamma_1(j_0) &= (1 - \varepsilon_1)\gamma_0(j_0) \\ \gamma_1(j_1) &= \varepsilon_1 \gamma_0(j_0), \qquad 0 < \varepsilon_1 < 1. \end{cases}$$

Si I est fini, on fait $I_0 = I$ et la construction ne concerne que les trois dernières égalités (remarques analogues si J est fini). On a

$$p_1^{(n)}(e_{11}) \geqslant (1 - \varepsilon_1)^{2n} p_0^{(n)}(e_{11}) \geqslant \frac{3}{4}(1 - \varepsilon_1)^{2n} \frac{\pi_0 \pi'_0}{|G_{\mu_1}|} \quad \text{dès que} \quad n > n_1.$$

Choisissons ε_1 de sorte que

$$\frac{3}{4}(1 - \varepsilon_1)^{2n} \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad n_1 < n \leqslant n_1 + \left[\frac{|G_{\mu_1}|}{\pi_0 \pi'_0}\right] = n_2,$$

où $[x]$ désigne l'entier immédiatement supérieur à x.

On a:

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} p_1^{(n)}(e_{11}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

A l'étape suivante de la construction nous devons introduire R_{i_2} et L_{j_2}. Si $G_{\mu_1} \supset [J_2 I_2]$ la construction est exactement identique à la précédente. Mais il arrivera nécessairement pour un ν_2 fini que $G_{\mu_1} \not\supset [J_{\nu_2} I_{\nu_2}]$. Après avoir défini

$$A_{\nu_2 - 1} = I_{\nu_2 - 1} \times B_{\mu_1} \times J_{\nu_2 - 1},$$
$$S_{\nu_2 - 1} = \alpha_{\nu_2 - 1} \times \beta_1 \times \gamma_{\nu_2 - 1}, \quad P_{\nu_2 - 1} = \alpha_{\nu_2 - 1} \times \beta_1 \times \gamma_{\nu_2 - 1},$$

les paramètres $0 < \varepsilon_{k'} < 1$, $1 \leqslant k' \leqslant \nu_2 - 1$, il faudra ajouter à B_{μ_1} les éléments $b_{\mu_1 + k'} 1 \leqslant k \leqslant \mu_2 - \mu_1$, μ_2 fini, que l'on pourra d'ailleurs prendre égaux aux $[ji] \in [J_{\nu_2} I_{\nu_2}]$ tels que $[ji] \notin G_{\mu_1}$.

On posera:

$$B_{\mu_1 + k} = B_{\mu_1 + k - 1} \cup b_{\mu_1 + k} \cup b^{-1}_{\mu_1 + k} \qquad 1 \leqslant k \leqslant \mu_2 - \mu_1,$$

B_{μ_2} engendrant $G_{\mu_2} \supset [I_{\nu_2} I_{\nu_2}]$, et on définira

$$P^1_{\nu_2 - 1}(A^1_{\nu_2 - 1}) = \alpha_{\nu_2 - 1} \times \beta^1_1(B_{\mu_1 + 1}) \times \gamma_{\nu_2 - 1}$$

avec

$$\begin{cases} \beta_1^1(b) &= \beta_1(b) \quad \text{si} \quad b \in B_{\mu_1} - b_{\mu_1} - b_{\mu_1}^{-1}. \\ \beta_1^1(b_{\mu_1}^{\varepsilon}) &= (1 - \varepsilon_{\nu_2 - 1}^1)\beta_1(b_{\mu_1}^{\varepsilon}) \\ \beta_1^1(b_{\mu_1+1}^{\varepsilon}) &= \varepsilon_{\nu_2-1}^1 \beta_1(b_{\mu_1}^{\varepsilon}). \end{cases}$$

$A_{\nu_2-1}^1$ engendre $S_{\nu_2-1}^1$ fini et

$$\lim_{n\to\infty} p_{\nu_2-1}^{1(n)}(e_{11}) = \frac{\pi_{\nu_2-1}\pi'_{\nu_2-1}}{|G_{\mu_1+1}|}\,; \quad \pi_{\nu_2-1} = \sum_{a\in R_1} p_{\nu_2-1}^1(a), \quad \pi'_{\nu_2-1} = \sum_{a\in L_1} p_{\nu_2-1}^1(a).$$

Un raisonnement identique aux précédents montre que l'on peut définir $\varepsilon_{\nu_2-1}^1$ tel que :

$$\sum_{n=n_{\nu_2-1}+1}^{n_{\nu_2-1}^1} p_{\nu_2-1}^{1(n)}(e_{11}) \geqslant \frac{1}{2}, \quad n_{\nu_2-1}^1 = \left[\frac{|G_{\mu_2+1}|}{\pi_{\nu_2-1}\pi'_{\nu_2-1}}\right] + n_{\nu_2-1}$$

Passant aux étapes suivantes on définit les distributions $P_{\nu_2-1}^k(A_{\nu_2-1}^k)$, les paramètres $\varepsilon_{\nu_2-1}^k$, $n_{\nu_2-1}^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant \mu_2 - \mu_1$, et à partir de $k = \mu_2 - \mu_1$ la construction est celle du début de la démonstration.

On remarque alors que l'on peut indexer les distributions P_x^y, les ensembles générateurs A_x^y, les demi-groupes S_x^y, les paramètres ε_x^y et n_x^y au moyen de l'indice unique $m = x + y$. Cet indice croît d'une unité à chaque étape de la construction. La suite du raisonnement est semblable à celle de la remarque 1.

On a $A = \lim_n \uparrow A_n$, et pour chaque $m \geqslant 0$

i) $\displaystyle\lim_{m'\to\infty} p_{m'}(s) = p_m(s) = p(s)$ pour tout $s \in A_{m-1}$;

ici, $A_{-1} = I_0 \times B_{\mu_1-1} \times J_0$, $B_{\mu_1-1} = \{ b_0^{\varepsilon}, b_1^{\varepsilon_1} \dots b_{\mu_1-1}^{\varepsilon_{\mu_1-1}} \}$.

Considérons la fonction $P(A) = \{ p(s)/s \in A \}$ ainsi définie sur A. On a vu que pour définir $P_{m+1}(A_{m+1})$ à partir de $P_m(A_m)$ deux cas se présentent.

1^er^ *cas.* — On adjoint à B_μ engendrant G_μ les deux éléments g et g^{-1}, les ensembles I_x et J_x restant inchangés. On a donc

si $s \in A_{m-1}$, $p_{m+1}(s) = p_m(s)$;
si $s = i \times \bar{s} \times j \in A_m - A_{m-1}$, $p_{m+1}(s) = (1 - \varepsilon_m)p_m(s)$,

et à chacun des $s = i \times \bar{s} \times j \in A_m - A_{m-1}$, on fait correspondre biunivoquement $s' = i \times g \times j \in A_{m+1}$ puis on définit

$$P_{m+1}(s') = \varepsilon_m p_m(s).$$

Par suite,

$$\sum_{s\in A_{m-1}} p_m(s)+(1-\varepsilon_m)\Sigma\{p_m(s)/s\in A_m-A_{m-1}\}<\sum_{s\in A_m} p_{m+1}(s)=\sum_{s\in A_m} p(s) \text{ d'après } i)$$
$$<\sum_{s\in A_{m+1}} p_{m+1}(s)=1.$$

Ces inégalités peuvent encore s'écrire

$$ii) \quad 1>\sum_{s\in A_m} p(s)>\sum_{s\in A_m} p_m(s)-\varepsilon_m\Sigma\{p_m(s)/s\in A_m-A_{m-1}\}>1-\varepsilon_m>1-2\varepsilon_m.$$

2[e] *cas.* — On adjoint à $S_m = I_z \times G_\mu \times J_z$, $I_z = 1, 2 \ldots i_{z-1}, i_z$, $J_z = 1, 2 \ldots j_{z-1}j_z$ les $\mathscr{R}$-classe et $\mathscr{L}$-classe R et L. Il est clair que z et μ sont des entiers fonctions de m, bien définis dans la construction. Il ne sera pas nécessaire de les préciser davantage. On a

si $s\in A_{m-1}\cdot P_{m+1}(s)=p_m(s)$
si $s\in A_m-A_{m-1}\cdot P_{m+1}(s)=(1-\varepsilon_m)p_m(s)$, si, en outre $s\in i_z\times G_\mu\times J_{z-1}=C_1$
ou $s\in I_{z-1}\times G\times j_z=C_2$
$=(1-\varepsilon_m)^2p_m(s)$, si, en outre $s\in I_z\times G\times j_z=C_3$.

Dès lors,

$$\sum_{s\in A_{m-1}} p_m(s)+(1-\varepsilon_m)^2\Sigma\{p_m(s)/s\in C_1\cup C_2\cup C_3\}<\sum_{s\in A_m} p_{m+1}(s)=\sum_{s\in A_m} p(s) \text{ par } i)$$
$$<\sum_{s\in A_{m+1}} p_{m+1}(s)=1,$$

ce qu'on écrit encore

$$iii) \qquad 1>\sum_{s\in A_m} p(s)>\sum_{s\in A_m} p_m(s)-2\varepsilon_m=1-2\varepsilon_m.$$

Puisque $\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m = 0$, des inégalités *ii)* et *iii)* on tire, en passant à la limite

$$\sum_{s\in A} p(s) = 1.$$

i) définit donc bien une distribution chargeant tout A engendrant S.

D'autre part, par construction

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(e_{11}) > \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=n_m+1}^{n_m} p_m^{(n)}(e_{11}) > \lim_{M\to\infty} M\frac{1}{2} = \infty,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Cas particulier $S(G) = G/N \times T$

Considérons le cas où [JI] est dans le centre de G. On sait qu'alors le sous-groupe engendré par [JI] est abélien, donc normal [*1*] ; soit N ce sous-groupe. Désignons par T le sous-demi-groupe complètement simple $I \times N \times J$. Si $N = G$, on est ramené au cas abélien étudié ci-dessus. On supposera donc $N \neq G$ et on a le :

LEMME II.7. — Les deux propositions suivantes sont équivalentes

i) [JI] est dans le centre de G.

ii) S admet la représentation $G/N \times T$, avec comme loi de composition $s_1 s_2 = (r_1 \times r_2) \times (t_1 \circ t_2)$.

Démonstration. — Si [JI] est dans le centre de G, il résulte immédiatement de la relation

$$\begin{aligned}(i[j'i']j)\circ(i\bar{x}j) &= (i[j'i'][ji]\bar{x}j) = (i\bar{x}[ji][j'i']j)\\ &= (i\bar{x}j)\circ(i[j'i']j),\end{aligned}$$

que $(i[JI]j)$ est dans le centre de H_{ij}. Prenant

$$\begin{aligned}s_{ij} &= (i\bar{s}j) = (1rnj)\\ s_{i'j'} &= (i'\bar{s}'j') = (i'r'n'j'),\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}s_{ij}s_{i'j'} &= (irnj)\circ(i'r'n'j') = (irn[ji']r'n'j')\\ &= (irr'n[ji]n'j') = rr' \times (in[ji']nj')\\ &= rr' \times (inj)\circ(i'n'j')\end{aligned}$$

et *ii*) est vérifié.

Inversement supposant *ii*) on a

$$s_{ij}s_{ij'} = rr' \times (in[ji']n'j') = (irr'n[ji']n'j').$$

Mais on sait que

$$s_{ij}s_{i'j'} = (irn[ji']r'n'j),$$

donc $$rr'n[ji']n' = rn[ji']r'n'$$

puis

$$r'n[ji'] = n[ji']r'.$$

En particulier, pour $[ji'] = e$ on a $r'n = nr'$ pour tout $n \in \mathrm{N}$, $r \in \mathrm{G/N}$. Mais on peut choisir comme élément r' tout $g \in r'\mathrm{N}$, donc $gn = ng$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Il suit alors que N est donc le centre de G et par conséquent [JI]. ■

Il nous reste à étudier le processus produit $r \times t$. Soient A_1 et A_2 des ensembles générateurs de G/N et T respectivement. De la représentation $\mathrm{S(G)} = \mathrm{G/N} \times \mathrm{T}$, on déduit la relation :

$$(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)^n = \mathrm{A}_1^n \times \mathrm{A}_2^n.$$

Si $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ engendre S(G), cela implique que pour chaque $r \in \mathrm{G/N}$ et chaque $t \in \mathrm{T}$, il existe n fini tel que $r \in \mathrm{A}_1^n$ et $t \in \mathrm{A}_2^n$. Inversement, si un tel n existe, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ engendre S(G). Soient alors $\mathrm{P}_1(\mathrm{A}_1)$ et $\mathrm{P}_2(\mathrm{A}_2)$, des distributions de probabilités chargeant respectivement tout élément de A_1 et A_2. Si $s_{ij} = r \times t_{ij}$, posons :

$$q(s_{ij}) = p_1(r) \times p_2(t_{ij})\,;$$

on vérifie aisément que :

$$q^{(n)}(s_{ij}) = p_1^{(n)}(r) \times p_2^{(n)}(t_{ij}) \quad \text{pour tout } n \text{ fini positif.}$$

La fonction $\mathrm{Q}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) = \{\, q(s_{ij}) = p_1(r) \times p_2(t_{ij})/r \in \mathrm{A}_1\,;\ t_{ij} \in \mathrm{A}_2 \,\}$ est une distribution de probabilités définissant sur S(G) les transitions d'une marche au hasard, la $n^{\text{ième}}$ transition étant donnée, à partir de $\mathrm{P}_1(\mathrm{A}_1)$ et $\mathrm{P}_2(\mathrm{A}_2)$, par l'égalité précédente.

Considérons $\{\, p_0(e) = 1\,;\ \mathrm{P}_1(\mathrm{A}_1) \,\}$, une marche sur G/N de période d_1 $\{\, p_0(e_{11}) = 1\,;\ \mathrm{P}_2(\mathrm{A}_2) \,\}$ une marche à droite sur la $\mathscr{R}$-classe R_1 de T et de période d_2. Ces deux processus définissent sur la $\mathscr{R}$-classe R_1 de S(G) la promenade $\{\, p_0(e_{11}) = 1\,;\ \mathrm{Q}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) \,\}$. Pour atteindre avec une probabilité positive $s_{1j} = r \times t_{1j}$, il faut et il suffit que n fini existe, vérifiant

$$n = md_1 + a_1 = m'd_2 + a_2,$$

m, m', a_1 et a_2 sont des entiers positifs ou nuls, a_1 est défini par r et $0 \leqslant a_1 < d_1$; de même $a_2 = a_2(t_{1j})$ et $0 \leqslant a_2 < d_2$. Lorsque r parcourt G/N, $a_1(r)$ prend toutes les valeurs, entières, dans l'intervalle $0,\ d_1 - 1$; de même pour $a_2(t_{1_j})$ et l'intervalle $0,\ d_2 - 1$ quand t_{1j} parcourt R_1 [*4*].

Il suit que l'égalité

$$md_1 - md_2 = a_2 - a_1,$$

doit être vérifiée pour toute valeur entière de $a_2 - a_1$ telle que

$$- d_1 < a_2 - a_1 < d_2.$$

Mais le plus grand commun diviseur de d_1 et d_2 devant aussi diviser chacune des valeurs possibles de $a_2 - a_1$, donc en particulier $a_2 - a_1$ et $a_2 - a_1 + 1$, ne peut être que 1 : d_1 et d_2 sont donc premiers entre eux. Choisissant r et t tels que $a_1 = a_2 = 0$, l'égalité précédente s'écrit

$$md_1 = m'd_2,$$

ce qui se vérifie si et seulement si $m = kd_2$, $m = kd_1$, k entier positif ou nul. La période de la marche $\{ p_0(e_{11}) = 1; \mathrm{Q}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) \}$ est donc $d_1 d_2$.

On peut remarquer que $e \in \mathrm{G/N}$ suffit pour que $d_1 = 1$. De même, si au moins un idempotent de chaque $\mathscr{L}$-classe de T figure dans A_2, on aura $d_2 = 1$. En effet, soit D l'ensemble des idempotents de T et D′ un sous-ensemble de D tel que $\mathrm{L}_j \cap \mathrm{D}' \neq \emptyset$ pour chaque $j \in \mathrm{J}$. Prenons $\mathrm{A}_2 = \mathrm{T} - (\mathrm{D} - \mathrm{D}')$. A_2 engendre évidemment T, puisqu'on a soit $\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{H}_{ij} = \mathrm{H}_{ij}$, soit $\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{H}_{ij} = \mathrm{H}_{ij}$ diminué de son idempotent, et alors $(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{H}_{ij}) \times (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{H}_{ij}) = \mathrm{H}_{ij}$. Dans la marche à droite $\{p_0(e_{11}) = 1;\ \mathrm{P}_2(\mathrm{A}_2)\}$, pour chaque $t_{1j} \in \mathrm{R}_1$ et un n correspondant suffisamment grand, on a :

$$m^{(n+1)}_{e_{11},t_{1j}} \geqslant m^{(n)}_{e_{11},t_{1j}} p(d_{ij}) > 0 \quad \text{pour} \quad d_{ij} \in \mathrm{D}'.$$

Pour un tel $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, chacune des marches unilatères ou bilatères est donc apériodique d'après les résultats du chapitre I.

Proposition II.8. — 1) Si G/N ou T est transitoire, S est transitoire.

2) Si G/N ou T est récurrent positif, S est du type de T ou G/N respectivement.

3) Si G/N et T sont récurrents nuls, S peut admettre, en général, une marche récurrente nulle, ou transitoire.

Démonstration. — On notera 1 l'idempotent de H_{11} et e celui de G/N. On a

$$q^{(n)}(1, 1) = m_1^{(n)}(e, e) m_2^{(n)}(1, 1)$$

1) Supposons T transitoire,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n)}(1, 1) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} m_2^{(n)}(1, 1) < \infty$$

et de même si G/N est transitoire.

2) Soit G/N récurrent positif, d_1 et d_2 les périodes respectives des marches sur G/N et T respectivement, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} q^{(nd_1d_2)}(1, 1) &= \lim_{n\to\infty} m_1^{(nd_1d_2)}(e, e) \lim_{n\to\infty} m_2^{(nd_1d_2)}(1, 1) \\ &= \Pi(e) \lim_{n\to\infty} m_2^{(nd_1d_2)}(1, 1), \end{aligned}$$

$\{\Pi(g)\}$ distribution stationnaire sur G/N, donc

$$\sum_{n=0}^{N} q^{(nd_1d_2)}(1, 1) \sim \sum_{n=0}^{N} m_2^{(nd_1d_2)}(1, 1) \quad \text{pour} \quad N \to \infty.$$

Mais pour toute matrice de transitions irréductible, on a

$$m^{(2n+1)d}(s_0, s_1) \geqslant m^{(2nd)}(s_0, s_0)m^{(d)}(s_0, s_1) \geqslant m^{(2n-1)d}(s_0, s_2)m^{(d)}(s_2, s_0)m^{(d)}(s_0, s_1)$$

pour un choix toujours possible de s_0, s_1, s_2, non nécessairement distincts, tels que $m^{(d)}(s_2s_0) = 0$, $m^{(d)}(s_0s_1) > 0$, d étant la période du processus. Donc les séries

$$\sum_{n=0}^{N} m^{(2nd)}(s, s), \quad \sum_{n=0}^{N} m^{(2n+1)d}(s, s), \quad \sum_{n=0}^{N} m^{(nd)}(s, s)$$

se comportent de la même manière pour $N \to \infty$.

Le même raisonnement appliqué aux suites $m^{(2nd)}(s_0s_0)$ et $m^{(2n+1)d}(s_0s_0)$ montre qu'il en est de même pour les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{(4n+k)d}(s_0s_0), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Puis, de proche en proche, on montre que le résultat vaut pour les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{(kn+k_0)}(s, s), \quad k \text{ fini} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant k_0 < k.$$

Donc $\sum_{n=0}^{N} m^{(nd)}(s, s)$ se comporte comme $\sum_{n=0}^{N} m^{(nkd)}(s, s)$ lorsque $N \to \infty$ et ceci pour tout k fini positif. Cette remarque achève la démonstration du 2).

3) On sait que le groupe additif des entiers relatifs Z admet une marche récurrente nulle ou transitoire, de même que le groupe produit $G = Z \times Z$ isomorphe au groupe abélien libre de rang deux. D'après la proposition II.6, pour $G = Z \times Z$, $N = Z$, S(G) admet une marche récurrente. Mais pour $G = Z \times Z \times Z$ transitoire [3], $N = Z$, on a $G/N = Z \times Z \times e$ récurrent nul, T récurrent nul et S(G) transitoire. ■

Les propositions II.6 et II.8 donnent le

Corollaire II.4. — Si G/N est d'index fini et N abélien, S(G) est récurrent si et seulement si le rang de N est au plus deux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Livre II. Herman, 1958.
[2] C. J. BURKE et M. ROSENBLATT, A markovian function of a Markov chain. *The Annals of Math. Statistics*, vol. **29**, n° 4, 1958.
[3] K. L. CHUNG et W. I. H. FUSCHS, On the distribution of values of sums of random variables. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, n° 6, 1951.
[4] K. L. CHUNG, *Markov Chains with Stationary Transition Probability*. Springer Verlag, 1967.
[5] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, Algebraic Theory of Semi-groups. *Amer. Math. Soc.*, 1961.
[6] R. M. DUDLEY, Random walks on abelian groups. *Proceed. Amer. Math. Soc.*, 1962.
[7] E. B. DYNKIN and M. B. MALYUTOV, Random walk on groups with finite number of generators. *Soviet Maths.*, vol. **2**, 1962.
[8] J. LARISSE, Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, I. *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, t. **8**, n° 2, 1972, p. 107-125.
[9] PER MARTIN LÖF, Probability theory on discrete semi-groups. *Z. Wahrscheinlichkeistheorie*, t. **4**, 1965.
[10] G. B. PRESTON, Inverse semi-groups with minimal right ideals. *Jour. London Math. Soc.*, vol. **29**, 1954.
[11] F. SPITZER, *Principles of random walk*. D. van Nostrand Co. Inc., 1964.
[12] R. R. STOLL, Homomorphisms of a semi-group onto a group. *Amer. J. Math.*, vol. **23**, 1953.

Manuscrit reçu le 13 novembre 1971.