ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN LARISSE

Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, I

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 2 (1972), p. 107-125
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_2_107_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 2, 1972, p. 107-125. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, I.

par

Jean LARISSE
Euratom-Cetis, Ispra (Varese), Italie.

Introduction

Les marches au hasard unilatères sur les demi-groupes discrets ont été étudiées dans [*6*]. On sait, par exemple, que les classes essentielles des marches à droite (à gauche) s'identifient avec les idéaux minimums à droite (à gauche) du demi-groupe S, que le type de l'état $s \in S$ est le même dans les deux chaînes, que $s \in S$ essentiel à droite et aussi à gauche, entraîne la même périodicité de s dans les deux marches et l'existence d'un idéal minimum complètement simple dans S qui contient s.

Nous nous proposons, ici, de compléter ces résultats et d'étudier dans le même esprit, le cas des marches bilatères. On montrera, en particulier, que l'union des classes essentielles bilatères s'identifie avec l'idéal minimum de S, et, si cet idéal est complètement simple, le nombre de ces classes est un ou deux. Enfin, le type de l'état $s \in S$ est le même dans les trois chaînes, les autres propriétés du cas bilatère étant analogues à celle du cas unilatère.

Un demi-groupe S est un ensemble d'éléments $\{ a, b, c, \ldots \}$ muni d'une loi de composition interne uniforme et associative [*3*]. Nous noterons cette loi multiplicativement sauf indication contraire. Si A est un sous-ensemble non vide de S tel que $A^2 \subseteq A$, on dit que A est un sous-demi-groupe de S. Nous rappelons les notions suivantes que l'on peut trouver dans [*2*].

Un sous-ensemble R de S est un idéal à droite de S si et seulement si $RS \subseteq R$. De manière analogue, un idéal à gauche L de S est tel que $SL \subseteq L$. Si le sous-ensemble I est en même temps idéal à droite et idéal à gauche, on dit que I est un idéal bilatère, ou simplement idéal de S, ce qui équivaut à $SIS \subseteq I$. On vérifie immédiatement que R, L, I sont des sous-demi-groupes de S. Si aucun sous-ensemble de R n'est idéal à droite de S, on dit que R est un idéal minimum à droite de S. De la même manière, on définit un idéal minimum à gauche, et un idéal minimum de S. On démontre que S peut posséder plusieurs idéaux minimums unilatères, mais ne peut posséder qu'un idéal minimum bilatère au plus.

L'intersection de deux idéaux à droite étant un idéal à droite, l'intersection de tous les idéaux à droite contenant un sous-ensemble non vide A de S est un idéal à droite qui est dit engendré par A. Cet idéal existe toujours puisque S lui-même est un idéal à droite contenant A, et on vérifie sans difficultés qu'il est égal à $A \cup AS$. Dans le cas à gauche et bilatère, les définitions sont analogues et ces idéaux sont respectivement $A \cup SA$ et $A \cup AS \cup SA \cup SAS$. Lorsque A se réduit à un élément a, on dit que l'idéal est principal, à droite, à gauche ou bilatère.

— Green définit dans S les classes d'équivalence suivantes : a et b sont dits $\mathscr{R}$-équivalents, ce que l'on note $a\mathscr{R}b$, si et seulement si a et b engendrent le même idéal principal à droite.

— a et b sont $\mathscr{L}$-équivalents si et seulement si a et b engendrent le même idéal principal à gauche : $a\mathscr{L}b$.

— a et b sont ∂-équivalents si et seulement si a et b engendrent le même idéal bilatère : $a\partial b$.

— Les relations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{L}$ commuttent. Leur composition définit la $\mathscr{D}$-classe d'équivalence, c'est-à-dire que a et b sont $\mathscr{D}$-équivalents, $a\mathscr{D}b$, si et seulement si $s \in S$ existe tel que $a\mathscr{R}s$ et $s\mathscr{L}b$, ou, de manière équivalente, s'il existe $s' \in S$ tel que $a\mathscr{L}s'$ et $s'\mathscr{R}b$.

— a et b sont $\mathscr{H}$-équivalents si et seulement si $a\mathscr{R}b$ et $a\mathscr{L}b$: $a\mathscr{H}b$. On a toujours $\mathscr{D} \subseteq \partial$, mais en général $\mathscr{D} \neq \partial$.

Un demi-groupe S est dit simple à droite si S ne possède aucun idéal à droite autre que S lui-même. On démontre [2] que S est simple à droite si et seulement si $aS = S$ pour chaque $a \in S$. Nous résumons dans le lemme qui suit les relations qui existent entre les trois notions d'idéal à droite minimum, d'idéal à droite principal et de demi-groupe simple à droite.

LEMME I.1. — Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) R est un idéal à droite minimum de S.

ii) $R = aS$ pour tout $a \in R$.

iii) R est un idéal principal à droite de S engendré par chacun de ses éléments.

Dans ce cas, R est un sous-demi-groupe simple à droite de S, c'est-à-dire que $R = aR$ pour chaque $a \in R$.

Démonstration. — Nous montrerons que *i*) $\Rightarrow$ *ii*) $\Rightarrow$ *iii*) $\Rightarrow$ *i*).

i) $\Rightarrow$ *ii*). C'est le lemme 2.31 de [2]. En effet, rappelons-le, pour $a \in R$ on a : $(aS)S \subseteq aS$ et $aS \subseteq RS \subseteq R$, ce qui montre que aS est idéal à droite de S contenu dans R, donc nécessairement $aS = R$ pour chaque $a \in R$.

ii) $\Rightarrow$ *iii*). R est un idéal à droite de S et, avec les hypothèses de *ii*), on a $R = aS \cup a$ pour tout $a \in R$.

iii) $\Rightarrow$ *i*). Soient R′ idéal à droite de S contenu dans R et $a \in R'$. On a : $aS \subseteq R'S \subseteq R' \Rightarrow a \cup aS \subseteq R' \Rightarrow R \subseteq R'$. Donc $R = R'$.

Lorsque ces propositions sont vérifiées, on remarque que :

$aR \subseteq aS = R$ et $(aR)S \subseteq aR$ impliquent $aR = R$ pour tout $a \in R$, donc R est un sous-demi-groupe simple à droite de S.

On obtient, sans difficultés, le lemme correspondant au cas à gauche. Dans ce qui suit, nous aurons surtout à appliquer le lemme correspondant au cas bilatère, soit :

LEMME I.2. — Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) I est l'idéal minimum de S.

ii) $I = SaS$ pout tout $a \in I$.

iii) I est l'idéal principal de S engendré par chacun de ses éléments.

Dans ce cas, I est un sous-demi-groupe simple de S, c'est-à-dire que $I = IaI$ pour chaque $a \in I$.

Démonstration. — *i*) $\Rightarrow$ *ii*). En effet, pour un $a \in I$, on vérifie que $I' = SaS$ est idéal de S contenu dans I, parce que $S(SaS)S \subseteq SaS$, puis $I' \subseteq SIS \subseteq I$; donc $I' = I$. Puisque le raisonnement vaut pour tout $a \in I$ l'implication suit.

ii) $\Rightarrow$ *iii*). $I = SaS$ pour un $a \in I$ est idéal de S. De plus, $a \in I \Rightarrow aS \subseteq IS \subseteq I$ et aussi $Sa \subseteq I$, donc $I = SaS \cup aS \cup Sa \cup a$. Le raisonnement valant pour chaque $a \in I$ l'implication suit.

iii) $\Rightarrow$ *i*). $I = SaS \cup aS \cup Sa \cup a$ pour tout $a \in I$, en particulier pour $a' \in I'$, I′ étant un idéal de S contenu dans I. Mais alors, $a' \in I' \Rightarrow a'S \subseteq I'S \subseteq I'$ et aussi $Sa' \subseteq I'$ d'une part, $a' \in I' \Rightarrow Sa'S \subseteq I'$ d'autre part. Donc

$$I = Sa'S \cup a'S \cup Sa' \cup a' \subseteq I'$$

ce qui entraîne $I' = I$.

Dans ce cas, $I = IaI$ pour tout $a \in I$, parce que $S(IaI)S \subseteq IaI$ et $IaI \subseteq SaS$ entraînent $IaI = SaS = I$, c'est le corollaire 2.30 de [2]. On notera que I sous-demi-groupe simple de S n'entraîne pas que I soit idéal de S, et, *a fortiori*, idéal minimum de S ; c'est le cas des demi-groupes qui sont unions de groupes [2]. Mais si I sous-demi-groupe simple de S est aussi idéal de S, alors I est idéal minimum de S parce que si $a' \in I'$ idéal de S contenu dans I, on a $I = Ia'I \subseteq SI'S \subseteq I'$ d'où $I = I'$. On peut faire une remarque analogue pour les sous-demi-groupes simples à droite, ou simples à gauche de S.

Donnons-nous une distribution de probabilités P(A) chargeant tous les éléments de A engendrant S, hypothèse que nous supposerons toujours vérifiée dans la suite. Une distribution initiale $P_0(S)$ et P(A) définissent une marche au hasard à droite [5] sur S, si nous convenons de définir la transition de s à s' par $sa = s'$; $s, s' \in S$ et $a \in A$. S'il existe n fini positif tel que $s' \in sA^n$ on dit que s mène à s', ce que l'on note $s \rightsquigarrow s'$. Si $s' \rightsquigarrow s$, on dit que s et s' communiquent : $s \leftrightsquigarrow s'$. La relation $\leftrightsquigarrow$ définit sur l'ensemble des états répétitifs de S, des classes d'équivalence [5]. L'état s étant donné, si $s \rightsquigarrow s'$ implique $s' \rightsquigarrow s$, on dit que s est essentiel. Autrement, c'est-à-dire s'il existe $s' \in S$ tel que $s \rightsquigarrow s'$ et s' ne mène pas à s, on dit que s est inessentiel. La propriété d'un état s d'être essentiel, ou inessentiel, est une propriété que possèdent tous les états de la même classe d'équivalence que s. On dit alors de ces classes qu'elles sont essentielles ou inessentielles suivant que s est essentiel ou inessentiel.

Per Martin Löf [6] a montré que les classes essentielles des marches à droite sur S sont les idéaux minimums à droite de S et réciproquement, résultat qui se déduit du lemme I.1. Définissant les transitions à gauche par $as = s'$, on obtient pour les marches à gauche un résultat analogue : les classes essentielles s'identifient avec les idéaux minimums à gauche.

Convenons alors de définir la transition de s à s' par multiplication simultanée à droite et à gauche de s : $asb = s'$, $a, b \in A$. $\{ P_0(S) ; P(A) \}$ définit une marche bilatère. Dans ce processus, s mène au sous-ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n s A^n$ de S. Ce sous-ensemble n'est pas, en général, un sous-demi-groupe de S. Prenons, par exemple, $A = \{ a, a^{-1} \}$ engendrant le groupe monogène G ; on vérifie que

$$E_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n a A^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-n}^{+n} \{ a^{2k+1} \} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \{ a^{2n+1} \} \qquad \text{et} \qquad E_a E_a \not\subset E_a.$$

Par contre,

$$E_e = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n e A^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^{2n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-n}^{+n} a^{2k} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \{ a^{2n} \}$$

est un sous-groupe de G.

L'ensemble E(s) des états accessibles à partir de s ne dépend que de la classe C à laquelle appartient s. En effet, soit $s' \in C$. On a $s \leftrightsquigarrow s'$ et il existe donc x, $y \in A^m$; x', $y' \in A^{m'}$ tels que $s' = xsy$, $s = x's'y'$. Il suit que

$$E(s) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n s A^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n x's'y' A^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n s' A^n = E(s') = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n xsy A^n \subseteq E(s)$$

d'où $E(s) = E(s')$ pour tout $s' \in C$.

On a $C \subseteq E(s)$. Mais $s \rightsquigarrow s' \Rightarrow s' \rightsquigarrow s$ entraîne $C = E(s)$ et inversement. L'égalité $C = E(s)$ est donc vérifiée si et seulement si C est une classe essentielle.

D'autre part, E(s) est contenu dans un idéal de S. Ceci résulte de

$$E(s) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n s A^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n s \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n = SsS \quad \text{et} \quad S(SsS) \subseteq SsS.$$

Nous allons montrer que l'union des classes essentielles du processus bilatère, lorsque cette union n'est pas vide, n'est autre que l'idéal minimum du demi-groupe S et réciproquement. Pour cela, nous établirons les résultats intermédiaires de la manière suivante :

1° Chaque classe C engendre le même idéal qu'un état $s \in C$.

2° Si $E(s_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n s_0 A^n$ est classe essentielle, donc $E(s_0) = C(s_0)$, alors $E(s'ss'') = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n s'ss'' A^n$ est classe essentielle, $E(s'ss'') = C(s'ss'')$, pour $s \in C(s_0)$, s', $s'' \in S \cup \varnothing$; nous introduisons l'élément vide $\varnothing$ pour tenir compte de sous-ensembles de la forme $C(ss'')$ et $C(s's)$.

3° $I = Ss_0S = \bigcup_{k \in K} C_k$, l'union étant réalisée sur toutes les classes essentielles de S et s_0 étant un état essentiel arbitraire dans S.

4° $I = \bigcup_{k \in K} C_k$ est l'idéal minimum de S.

Inversement, nous établirons que tout $i \in I$, idéal minimum de S, est essentiel dans le processus bilatère défini par P(A).

1° Un raisonnement analogue à celui développé ci-dessus montre que pour tout s et s' tel que $s \leftrightsquigarrow s'$, on a

$$I_s = SsS = Sx's'y'S \subseteq I_{s'} \subseteq SxsyS \subseteq I_s,$$

d'où $I_s = SsS = I_c$ pour tout $s \in C$.

D'autre part, $s \in C \subseteq E(s) \subseteq I_s$ entraîne $sI_s \subseteq SI_s \subseteq SsS$, $I_s s \subseteq SsS$ donc $I_s = SsS = SsS \cup sS \cup Ss \cup s$, I_s est donc le plus petit idéal de S contenant chaque $s \in C$, c'est donc l'idéal engendré par C ou par chaque $s \in C$.

2° On a, par définition de la classe essentielle, $C(s_0) = C(s)$ pour tout $s \in C(s_0)$. Montrons alors que si $b \in A$ et $sb \notin C(s)$, le sous-ensemble $C(sb)$ est classe essentielle. Il faut montrer que :

$$sb \rightsquigarrow s' \Rightarrow s' \rightsquigarrow sb.$$

En effet, $sb \rightsquigarrow s' \Rightarrow \exists x,\ y \in A^n$ tels que $xsby = s'$.

Donc $bxsby = bs'$, puis $s \rightsquigarrow bs'$ parce que $bx,\ by \in A^{n+1}$. Mais alors, $bs' \in C(s)$, donc $bs' \rightsquigarrow s$. Par conséquent, $\exists x',\ y' \in A^{n'}$ tels que $x'bs'y' = s$, ce qui entraîne $x'bs'y'b = sb$ puis $s' \rightsquigarrow sb$ parce que $x'b,\ y'b \in A^{n'+1}$.

Le même raisonnement permet d'établir, par récurrence, que $C(sb_1 \dots b_n)$, puis $C(a_m \dots a_1 sb_1 \dots b_n)$, donc $C(s'ss'')$, pour $s \in C(s_0)$, $s',\ s'' \in S \cup \emptyset$, sont classes essentielles.

3° $s \rightsquigarrow s_0 s s_0$, donc s essentiel dans S entraîne $s_0 s s_0 \rightsquigarrow s$, soit $s = xs_0ss_0y$. Par conséquent $s \in Ss_0S = I_{s_0}$, d'où $\bigcup_{k \in K} C_k \subseteq I_{s_0}$, l'union étant réalisée sur toutes les classes essentielles de S.

Réciproquement, tout $i \in I_{s_0}$ est de la forme $i = s's_0s''$; $s',\ s'' \in S$, ce qui entraîne que i est essentiel, d'après le résultat précédent 2°. Donc on a

$$I_{s_0} \subseteq \bigcup_{k \in K} C_k \qquad \text{d'où} \qquad I_{s_0} = I = \bigcup_{k \in K} C_k.$$

4° Il résulte du 2° et du 3° que $SsS = I$ pour chaque $s \in I$. D'après le lemme I.2, I est l'idéal minimum de S.

Inversement, montrons que tout $i \in I$ idéal minimum de S, est essentiel dans le processus bilatère défini par P(A). Il faut montrer que $i \rightsquigarrow i' \Rightarrow i' \rightsquigarrow i$. On a :

$$i \rightsquigarrow i' \Rightarrow i' = s_1 i s_2 \quad \text{pour} \quad s_1,\ s_2 \in A^n, \quad n \text{ entier positif.}$$

Puisque $i' \in I$, d'après le lemme I.2, il existe $x \in A^{n_1}$ et $y \in A^{n_2}$, $x,\ y \in I$ tels que $i = xi'y$.

a) Si $n_1 = n_2$, $i' \rightsquigarrow i$.

b) Si $n_2 - n_1 = h > 0$, on déduit que

$$i = (xs_1)i(s_2y) = (xs_1)^\alpha i(s_2y)^\alpha, \quad \alpha \text{ entier positif.}$$

Mais $x \in \mathrm{I}$ entraîne l'existence de $s'_1 \in \mathrm{A}^{n'_1}$ et $s''_1 \in \mathrm{A}^{n''_1}$ tels que

$$x = s'_1 x s''_1 = s'^{\mu}_1 x s''^{\mu}_1, \qquad \mu \text{ entier positif.}$$

Donc :

$$i = (s'^{\mu}_1 x s''^{\mu}_1 s_1)^{\alpha_1}(xs_1)^{\alpha_2} i(s_2 y)^\alpha\,; \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \qquad 0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant \alpha.$$

On doit vérifier que

$$\alpha_1[n + \mu(n'_1 + n''_1) + n_1] + \alpha_2(n_1 + n) = \alpha(n + n_2),$$

soit

$$\alpha_1\mu(n'_1 + n''_1) = \alpha(n_2 - n_1) = \alpha h, \qquad \text{avec} \qquad \alpha_1 \leqslant \alpha\,;$$

ou encore
$$0 \leqslant \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{h}{\mu(n'_1 + n''_1)} \leqslant 1.$$

Si $\dfrac{h}{n'_1 + n''_1} \leqslant 1$ on fait $\mu = 1$; $h = \alpha_1$; $n'_1 + n''_1 = \alpha$.

Si $\dfrac{h}{n'_1 + n''_1} > 1$ on choisit μ tel que $\dfrac{h}{\mu(n'_1 + n''_1)} \leqslant 1$, et on fait

$$\alpha_1 = h\,; \qquad \alpha = \mu(n'_1 + n''_1).$$

c) Le cas $n_1 - n_2 = h > 0$ se traite de façon analogue.

Nous savons [*6*], que s essentiel dans une chaîne unilatère n'implique pas que s soit essentiel dans l'autre chaîne unilatère. De même s essentiel dans un processus bilatère n'implique pas que s soit essentiel dans un des processus unilatères correspondants. Nous pouvons, par exemple, construire un demi-groupe dénombrable simple qui ne possède aucun idéal minimum unilatère.

Soit Q^+ la partie positive du corps des rationnels [*2*, ex. 8 p. 50]. Définissons sur l'ensemble produit $\mathrm{A} = \mathrm{Q}^+ \times \mathrm{Q}^+$ la loi uniforme et associative $(a, b)\cdot(c, d) = (ac, bc + d)$.

Montrons que A est simple. (a, b) et (c, d) étant donnés, (x, y) et (x', y') dans A existent tels que

$$(x, y)\cdot(a, b)\cdot(x', y') = (c, d),$$

x, y, x', y', sont, en effet, solutions des deux équations

$$\begin{cases} xax' = c \\ yax' + bx' + y' = d. \end{cases}$$

On a donc $A(a, b)A = A$ pour tout $(a, b) \in A$: A est simple, c'est la classe essentielle d'une marche bilatère de transitions définies par P(A) chargeant tout A.

S'il existe deux éléments distincts (a, b) et (m, n) $\mathscr{R}$-équivalents, on doit avoir :

$$(a, b) \cup (a, b)A = (m, n) \cup (m, n)A,$$

donc nécessairement

$$\begin{cases} (a, b) = (m, n)(x_1, y_1) = (mx_1 ; nx_1 + y_1) \\ (m, n) = (a, b)(x_2, y_2) = (ax_2 ; bx_2 + y_2), \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\begin{cases} a = mx_1 \\ m = ax_2 \\ b = nx_1 + y_1 \\ n = bx_2 + y_2 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ y_2x_1 + y_1 = 0 \\ y_1x_2 + y_2 = 0. \end{cases}$$

Il n'existe donc pas de solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans A. Un calcul analogue montre qu'il n'existe pas non plus d'éléments distincts $\mathscr{L}$-équivalents : chaque $(a, b) \in A$ est une $\mathscr{D}$-classe de la ∂-classe A. Une classe essentielle à droite ne peut être qu'un $(a, b) \in A$ vérifiant

$$(a, b)A = (a, b),$$

cette équation n'ayant pas de solutions dans A, on en déduit qu'il n'existe pas de classes essentielles à droite, et, par un raisonnement analogue, de classes essentielles à gauche.

Par contre, s essentiel à droite implique s essentiel bilatère. En effet, dans ce cas s appartient à un idéal minimum à droite de S [*6*]. Mais l'union des idéaux minimums à droite est l'idéal minimum de S [*2*, ref. Clifford, 1948] ; donc s est essentiel bilatère d'après les résultats précédents. La même remarque vaut si s est essentiel à gauche.

Supposons maintenant que s soit essentiel à droite et aussi à gauche. Alors s appartient à un idéal à droite minimum R et à un idéal à gauche minimum L de S. L'union de tous les idéaux minimums à droite ou de tous les idéaux minimums à gauche est l'idéal minimum I de S [réf. citée ci-dessus]. I est simple (lemme I.2). D'autre part, R est aussi idéal à droite de I, parce que $RI \subseteq RS \subseteq R$. R est, de plus, idéal à droite minimum de I parce que si R′ idéal à droite de I contenu dans R existe, alors R′ étant aussi idéal à droite de S [*2*, théorème 2.35], R ne serait pas minimum. Le même raisonnement montre que L est idéal minimum à gauche de I. I est donc simple, I contient un idéal minimum à droite au moins et un idéal minimum à gauche au moins. Par définition, I est un demi-groupe complètement simple [*2*]. Considéré comme un sous-demi-groupe de S, on peut aussi dire que I est l'idéal minimum complètement simple de S. Inversement, si S possède un idéal minimum complètement simple I, I est l'union des états essentiels à droite et aussi à gauche. Ce résultat de Per Martin Löf [*6*] et ceux que nous avons obtenus précédemment permettent alors d'énoncer le :

THÉORÈME I.1. — Un élément s d'un demi-groupe S est un état essentiel dans une marche à droite, à gauche ou bilatère si et seulement si s appartient à un idéal minimum à droite R, à gauche L ou bilatère I de S. Alors les divers idéaux minimums R_i et L_j sont les classes essentielles des processus unilatères, I est l'union des classes essentielles du processus bilatère.

De plus, s essentiel dans une marche unilatère entraîne s essentiel dans le processus bilatère, s essentiel à droite et aussi à gauche équivaut à I complètement simple.

L'élément $m_d(s, s')$ de la matrice de transitions M_d de la marche à droite est défini par :

$$m_d(s, s') = \Sigma \{ p(a)/sa \} = s', \qquad a \in A.$$

L'élément $m_g(s, s')$ de la matrice de transitions M_g de la marche à gauche est

$$m_g(s, s') = \Sigma \{ p(a)/as \} = s', \qquad a \in A.$$

On définit l'élément de la matrice de transitions M_{dg} du processus bilatère par

$$m_{dg}(s, s') = \Sigma \{ p(a)p(b)/asb \} = s'; \; a, b \in A.$$

On remarquera que, par suite de l'associativité de la loi de composition dans S, on a

$$m_{dg}(s, s') = \sum_{s'' \in S} m_d(s, s'')m_g(s'', s') = \sum_{s'' \in S} m_g(s, s'')m_d(s'', s'),$$

donc M_d et M_g commuttent : $M_{dg} = M_d M_g = M_g M_d$.

D'autre part, on appelle période de l'état s dans la marche définie par la matrice de transitions M, le plus grand commun diviseur des n pour lesquels $m^{(n)}(s, s) > 0$, et on démontre que tous les états d'une même classe essentielle ont la même période [5].

THÉORÈME I.2. — Les classes essentielles bilatères, lorsqu'elles existent, ont la même période μ. Les classes essentielles à droite, ou à gauche, lorsqu'elles existent (ce qui entraîne l'existence d'une classe essentielle bilatère au moins), ont les mêmes périodes ν_d ou ν_g respectivement.

Démonstration. — R étant un idéal à droite minimum de S, on sait [2] que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{R}' = s\mathrm{R}$ est aussi un idéal minimum à droite de S. Il suit alors que $s \in \mathrm{R}_1$; s', $s's \in \mathrm{R}_j$ entraînent $s's\mathrm{R}_1 = s'\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_j$. De

$$m_d^{(n)}(s, s) > 0 \Leftrightarrow s \in s\mathrm{A}^n \Rightarrow s's \in s's\mathrm{A}^n \Leftrightarrow m_d^{(n)}(s's, s's) > 0,$$

et puisque les idéaux minimums à droite sont les classes essentielles des marches à droite, on déduit que la période $\nu_d(s's)$ de $s's$, dans une marche à droite, divise celle de s, soit $\nu_d(s)$. Par récurrence, on démontre que $\nu_d(a_m \ldots a_1 s's)$ divise $\nu_d(s)$, pour $a_i \in \mathrm{A}$. Mais il existe $s_1, s_2 \in \mathrm{R}_1$ vérifiant $s_1(s's) = s_2$ puisque $\mathrm{R}_1\mathrm{S} = \mathrm{R}_1$. Donc pour $a_m \ldots a_1 = s_1$ on a

$$\nu_d(s_2) = \nu_d(s's) = \nu_d(s) = \nu$$

pour chaque $s' \in \bigcup_i \mathrm{R}$:

Le cas à gauche se discute de manière analogue.

Dans le cas bilatère, supposons que I, idéal minimum de S, contienne plus d'une classe essentielle, et soient s et s_0 deux états de I n'appartenant pas à la même classe essentielle. De $\mathrm{I} = \mathrm{S}s\mathrm{S}$ pour tout $s \in \mathrm{I}$ on déduit que

$$\exists s_1 \in \mathrm{A}^{n_1},\ s_2 \in \mathrm{A}^{n_2},\ n_1 \neq n_2 \Rightarrow s = s_1 s_0 s_2 ;$$

$$s' = xs_1s_0s_2y \in \mathrm{C}(s_0) \text{ pour } x \in \mathrm{A}^{n_x},\ y \in \mathrm{A}^{n_y},\ xs_1,\ s_2y \in \mathrm{A}^n,\ n = n_x + n_1 = n_2 + n_y$$

$$\exists x',\ y' \in \mathrm{A}^{n'} \Rightarrow s_0 = x'xs_1s_0s_2yy' \text{ avec } x', y' \in \mathrm{A}^{n'},\ x'xs_1,\ s_2yy' \in \mathrm{A}^{n+n'},$$

ou encore $s_0 = x'xsyy'$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m_{dg}^{(k)}(s_0, s_0) > 0 \Leftrightarrow s_0 \in \mathrm{A}^k s_0 \mathrm{A}^k &\Rightarrow s \in s_1\mathrm{A}^k x'xsyy'\mathrm{A}^k s_2 \\ &\Rightarrow s \in \mathrm{A}^{k+n+n'} s \mathrm{A}^{k+n+n'} \Leftrightarrow m_{dg}^{(k+n+n')}(s, s) > 0, \end{aligned}$$

la période $\mu(s)$ de s, divise celle, $\mu(s_0)$, de s_0.

Le même raisonnement vaut si s est substitué à s_0 et s_0 à s. On a alors $\mu(s_0) = \mu(s)$. Puisqu'on peut choisir arbitrairement $s \in \mathrm{I}$, on en déduit que toutes les classes essentielles bilatères ont la même période μ. ■

On dit que s est récurrent-positif, récurrent-nul ou transitoire si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^{(n)}(s, s) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} m^{(n)}(s, s) > 0\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^{(n)}(s, s) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} m^{(n)}(s, s) = 0\,;$$

$\sum_{m=1}^{\infty} m^{(n)}(s, s) < \infty$ respectivement. Il en est alors de même pour la suite $m^{(n)}(s_1, s_2)$, s_1 et s_2 appartenant à la classe d'équivalence de s. Si deux états s et s' sont en même temps ou récurrents-positifs, ou récurrents-nuls, ou transitoires, nous dirons que s et s' sont du même type [5]. Il suit alors que les états d'une même classe d'équivalence sont du même type, type que nous définirons comme étant celui de la classe elle-même. Ces définitions valent, évidemment, pour toute marche unilatère ou bilatère.

Per Martin Löf [6] a montré que le type de s est le même dans les chaînes à droite et dans les chaînes à gauche définies par P(A) ; et s est récurrent-positif, récurrent-nul ou transitoire si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}^{(n)}(s) = \infty \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{n}}\, \mathrm{P}^{(n)}(s) > 0\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}^{(n)}(s) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}^{(n)}(s) = 0\,;$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}^{(n)}(s) < \infty$ respectivement, avec

$$\mathrm{P}^{(n)}(s) = \Sigma \left\{ p(a_{k_1}) \ \ldots \ p(a_{k_n}) / a_{k_1} \ \ldots \ a_{k_n} = s\,;\ a_i \in \mathrm{A} \right\}.$$

On a alors le théorème suivant

THÉORÈME I.3. — Les classes essentielles à droite, lorsqu'elles existent, sont du même type. Il en est de même des classes essentielles à gauche ou bilatère.

Démonstration. — De $s_1 \mathrm{R} = \mathrm{R}'$, et de $s_3 \mathrm{R}' = \mathrm{R}$, on tire $s_1 s_3 = s_2$ et $s_3 s_2 = s_4$ pour $s_1, s_2 \in \mathrm{R}'$; $s_3, s_4 \in \mathrm{R}$. On a, d'autre part,

$$m_d^{(n)}(s_1, s_2) \geqslant \mathrm{P}^{(n)}(s_3)\,; \quad m_d^{(n)}(s_3, s_4) \geqslant \mathrm{P}^{(n)}(s_2),$$

d'où on tire

$$\lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} m_d^{(n)}(s_1, s_2) \geqslant \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}^{(n)}(s_3)\,; \quad \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} m_d^{(n)}(s_3, s_4) \geqslant \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}^{(n)}(s_2).$$

Ces deux inégalités montrent que les classes essentielles R et R′ sont en même temps soit récurrentes, soit transitoires. De

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, m_d^{(n)}(s_1, s_2) \geqslant \overline{\lim_{n}}\, P^{(n)}(s_3); \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, m_d^{(n)}(s_3, s_4) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, P^{(n)}(s_2)$$

on déduit que R et R′ sont en même temps soit récurrents-positifs, soit récurrents-nuls.

Dans le cas bilatère, on a, avec r tel que $P^{(r)}(s) > 0$:

$$P^{(r)}(s)m_{dg}^{(n)}(s, s) = \Sigma \{ P^{(n)}(s')P^{(r)}(s)P^{(n)}(s'')/s'ss'' = s \}.$$

Soient $i_1, i_2 \in I$; i_1 et i_2 n'appartenant pas à la même classe essentielle, $i_1 \in A^{r_1}$. D'après le lemme I.2, on sait

$\exists s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 i_1 s_2 = i_2$; $s_1 \in A^{n_1}$, $s_2 \in A^{n_2}$, n_1 et n_2 entiers positifs, $n_1 \neq n_2$.

$\exists s', s'' \in S \Rightarrow i_2 = s' i_2 s'' = s' s_1 i_1 s_2 s''$, $s', s'' \in A^n$, n entier positif. Dès lors,

$$x's's_1 i_1 s_2 s'' y' = i_1' \in C(i_1) \quad \text{pour tout} \quad x' \in A^{n_{x'}} \quad \text{et tout} \quad y' \in A^{n_{y'}}$$

tels que $n_{x'} + n + n_1 = n_{y'} + n + n_2$, et, en particulier, il existe un tel x' et un tel y', que nous désignerons par x et y, si on fait $i_1' = i_1$.

Pour un choix donné de i_1, i_2, s_1, s_2, x et y, on a l'implication

$$s'(s_1 i_1 s_2)s'' = i_2 \Rightarrow xs'(s_1 i_1 s_2)s'' y = i_1 \quad \text{pour tout} \quad s', s'' \in A^n$$

vérifiant $s' i_2 s'' = i_2$ et n entier positif quelconque. On en déduit, en posant $m = n_x + n_1 = n_y + n_2$

$$0 < P^{(r_1)}(i_1)P^{(n_1)}(s_1)P^{(n_2)}(s_2)m_{dg}^{(n)}(i_2, i_2)P^{(n_x)}(x)P^{(n_y)}(y) \leqslant P^{(r_1)}(i_1)m_{dg}^{(m+n)}(i_1, i_1).$$

Le choix de i_1 et i_2 étant arbitraire, on peut établir une inégalité analogue dans laquelle i_1 est substitué à i_2 et i_2 à i_1. Les inégalités étant valables pour tout n entier positif, on obtient les équivalences

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} m_{dg}^{(n)}(i_1, i_1) = \infty \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} m_{dg}^{(n)}(i_2, i_2) = \infty$$
$$\overline{\lim_{n}}\, m_{dg}^{(n)}(i_1, i_1) > 0 \Leftrightarrow \overline{\lim}\, m_{dg}^{(n)}(i_2, i_2) > 0,$$

ce qui prouve le théorème dans le cas bilatère.

THÉORÈME I.4. — P(A) étant donnée, chaque s est du même type dans les trois marches à droite, à gauche et bilatère que définit P(A). De plus

1) s est transitoire si s n'appartient pas à un sous-demi-groupe de S

qui soit idéal minimum complètement simple de S, et, en particulier, si s est essentiel d'un côté et non de l'autre.

2) s est récurrent ou transitoire dans le cas contraire et alors les classes essentielles des marches unilatères et bilatères sont du même type.

Démonstration. — On sait que s inessentiel est nécessairement transitoire quelle que soit la marche considérée [5]. Si s est récurrent unilatère, s est essentiel à droite et aussi à gauche, donc s appartient à l'idéal minimum complètement simple I de S [6]. L'inégalité *i*) $0 < P^{(r)}(s) m_{dg}^{(n)}(s, s) \leqslant P^{(2n+r)}(s)$ montre que s transitoire unilatère implique s transitoire bilatère, il suit alors de la remarque précédente que si $s \notin I$, s est transitoire unilatère donc aussi transitoire bilatère.

Supposons alors $s \in I$. Nous avons toujours le résultat précédent *i*). Inversement, si s est transitoire bilatère, nous savons que [5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{dg}^{(n)}(s, s) = \frac{1}{1 - f_{ss}^*}\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} m_{dg}^{(n)}(s', s) = \frac{f_{s's}^*}{1 - f_{ss}^*}$$

$f_{s's}^{(n)}$ = probabilité d'atteindre s pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ pas à partir de s, et $f_{s's}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{s's}^{(n)}$. On a donc

$$\sum_{a \in A} p(a) \frac{f_{as}^*}{1 - f_{ss}^*} = \sum_{a \in A} p(a) \sum_{n=1}^{\infty} m_{dg}^{(n)}(a, s) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(2n+1)}(s) < \frac{1}{1 - f_{ss}^*} < \infty.$$

Mais tous les $s \in I$ sont transitoires dans le processus bilatère, théorème I.3, en particulier il en est ainsi de $s' = sb \in IS = I$, $b \in A$. De l'inégalité

$$P^{(2n+1)}(s') \geqslant P^{(2n)}(s) p(b) > 0$$

et du fait que $\sum_{n=0}^{\infty} P^{(2n+1)}(s') < \infty$ on déduit que $\sum_{n=1}^{\infty} P^{(2n)}(s) < \infty$ donc on a $\sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(s) < \infty$ et s est transitoire unilatère.

Il reste à montrer que

$$\lim_{n \to \infty} m_{dg}^{(n)}(s, s) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} P^{(n)}(s) = 0.$$

D'après l'inégalité *i*)

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)}(s) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P^{(2n+r)}(s) = 0 \Rightarrow \lim_{n} m_{dg}^{(n)}(s, s) = 0.$$

Inversement,

$$\lim_{n\to\infty} m_{dg}^{(n)}(s, s) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m_{dg}^{(n)}(s, s') = 0$$

pour tout s' dans la même classe essentielle que s, en particulier pour $s' = sss$. Alors,

$$m_{dg}^{(n)}(s, s') \geqslant \mathrm{P}^{(n)}(s)\mathrm{P}^{(n)}(s), \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} m_{dg}^{(n)}(s, s') = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P^{(n)}(s) = 0$$

On a donc établi que si s appartient à un sous-demi-groupe I de S qui soit idéal minimum complètement simple de S, s est du même type pour toute marche unilatère ou bilatère définie par la distribution P(A). Mais $\mathrm{I} = \bigcup_i \mathrm{R}_i = \bigcup_j \mathrm{L}_j$, s appartient donc à une classe essentielle bilatère et aussi à l'intersection d'une classe essentielle à droite et d'une classe essentielle à gauche. Il suit des théorèmes I.1 et I.3 que toutes ces classes sont du même type. Enfin, il est bien connu que Z étant le groupe des entiers relatifs, le groupe produit Z × Z, qui est un demi-groupe complètement simple, est récurrent ; c'est l'exemple de la marche au hasard dans l'espace euclidien à deux dimensions avec

$$p(x = 1) = p(x = -1) = p(y = 1) = p(y = -1) = 1/2 \ [4].$$

Par contre, dans le cas du demi-groupe complètement simple I = Z × Z × Z, on sait qu'il n'existe aucune distribution chargeant un ensemble générateur de I, pour laquelle un $s \in \mathrm{I}$ soit récurrent [*1*]. ■

On pourra remarquer que si S possède un idéal minimum I et un élément idempotent e avec $e \in \mathrm{A}$, il n'y a qu'une classe essentielle dans le processus bilatère. Il suffit de montrer que de $i_0 \in \mathrm{I}$ on peut atteindre tout $i \in \mathrm{I}$. En effet, on a

$$i = s_1 e i_0 e s_1 = s_1(e)^{\alpha_1} i_0 (e)^{\alpha_2} s_2$$

pour un i arbitraire, avec

$$s_1 \in \mathrm{A}^{n_1}, \quad s_2 \in \mathrm{A}^{n_2};$$

α_1, α_2 entiers positifs quelconques.

On vérifie alors que $i_0 \rightsquigarrow i$ dans les trois cas suivants :

a) $n_1 = n_2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.
b) $n_2 - n_1 = h > 0$; $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 1 + h$.
c) $n_1 - n_2 = h > 0$; $\alpha_2 = 1 + h$, $\alpha_1 = 1$.

Si $s \in \mathrm{I}$ idéal minimum complètement simple de S, on sait que $\nu_d = \nu_g = \nu$ [*6*]. De plus, μ divise ν, ceci résulte immédiatement de l'inégalité

$$m_{dg}^{(n)}(s, s) \geqslant m_d^{(n)}(s, s) m_g^{(n)}(s, s) > 0.$$

D'autre part, on pourra aussi noter que

$$s \text{ récurrent-positif} \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} m_d^{(n)}(s, s) > 0 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{(n)}(s) > 0,$$

$$s \text{ récurrent-nul} \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} m_d^{(n)}(s, s) = 0 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{(n)}(s) = 0.$$

La première équivalence de chacune de ces deux propositions est bien connue [5]. Pour démontrer la deuxième, on remarque que, pour m entier positif tel que $P^{(m)}(s) > 0$, et de

$$P^{(n)}(s) \geqslant P^{(m)}(s) m_d^{(n-m)}(s, s),$$

on tire

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{(n)}(s) \geqslant P^{(m)}(s) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m_d^{(n)}(s, s),$$

donc s récurrent-positif entraîne $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{(n)}(s) > 0$.

Si s est récurrent-nul, on sait que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m_d^{(n)}(s', s) = 0$ pour tout $s' \in S$ [5]. De

$$P^{(n)}(s) = \sum_{a\in A} p(a) m_d^{(n-1)}(a, s) \quad \text{puis} \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{(n)}(s) = \sum_{a\in A} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m_d^{(n-1)}(a, s)$$

on déduit alors que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{(n)}(s) = 0$.

Lorsqu'on se limite aux demi-groupes S possédant un idéal minimum complètement simple, on obtient des résultats plus précis sur les classes essentielles et les périodes des marches.

Explicitons, pour cela, la structure algébrique de ces idéaux. Il en existe plusieurs définitions équivalentes [2]:

i) S(G) est un idéal minimum de S qui possède au moins un idéal minimum à droite de S et au moins un idéal minimum à gauche de S. C'est la définition à laquelle nous a conduit l'étude de ce chapitre.

ii) S(G) est un idéal minimum de S possédant un élément idempotent primitif au moins, c'est-à-dire que si e et f sont deux idempotents de S(G), l'équation $ef = fe = e$ n'est vérifiée que si $e = f$.

Ces définitions conduisent au résultat suivant lequel S(G) est une $\mathscr{D}$-classe et aussi une ∂-classe, union des idéaux minimums à droite R_i, $i \in I$, ou des idéaux minimums à gauche L_j, $j \in J$: $S(G) = \bigcup_i R_i = \bigcup_i L_j$. Les $\mathscr{H}$-classes sont des groupes isomorphes et alors S(G) est aussi union de groupes: $S(G) = \bigcup_{i,j} H_{ij}$. Choisissons un de ces groupes, $H_{i_0j_0}$ par exemple, puis pour chaque $i \in I$ un $r_i \in H_{ij_0}$, pour chaque $j \in J$ un $q_j \in H_{i_0j}$. A cela près, les r_i et q_j sont arbitraires. On vérifie que $q_jr_i \in H_{i_0j_0}$. Soient $s \in H_{ij}$, $\bar{s} = gsg \in H_{i_0j_0} = G$, avec g idempotent de $H_{i_0j_0}$. On démontre, et c'est la représentation de Suschkewitch-Rees, que l'application $s \to r_i \times \bar{s} \times q_j$ est un isomorphisme de S(G) sur le demi-groupe $\bigcup_{i \in I} r_i \times H_{i_0j_0} \times \bigcup_{j \in J} q_j$ dont la loi de composition est définie par

$$(r_i \times \bar{s} \times q_j) \circ (r_{i'} \times \bar{s}' \times q_{j'}) = (r_i \times \bar{s}q_jr_{i'}\bar{s}' \times q_{j'}).$$

On vérifie que cette application envoie l'idempotent de H_{ij} sur l'élément $(r_i \times [q_jr_i]^{-1} \times q_j)$.

Dans la suite, nous identifierons les ensembles I et J avec celui des entiers positifs et nous prendrons toujours $i_0 = j_0 = 1$. Les résultats obtenus dans le cas particulier $H_{11} = G$ seront évidemment valables pour tout autre choix de $H_{ij} = G$.

D'autre part, nous simplifierons, avec A. Tortrat [7], la représentation précédente en prenant r_i idempotent de H_{i1}, q_j idempotent de H_{1j}. Posant $E = \bigcup_i r_i$, $F = \bigcup_j q_j$, $r_1 = q_1 = e_{11}$ idempotent de H_{11}, on voit que $Fe_{11} = Ee_{11} = e_{11}$, puis $s = e_{11}se_{11}$. Dans la représentation $E \times G \times F$ les idempotents r_i et q_j sont alors $(r_i \times e \times e_{11})$, $(e_{11} \times e \times q_j)$ que nous noterons suivant les cas par e_{i1}, $(1 \times e \times 1)$ ou simplement i d'une part, e_{1j}, $(1 \times e \times j)$ ou j d'autre part. Dans la notation $e_{i1} = i$, $e_{1j} = j$, l'idempotent de H_{ij} sera simplement $(i[ji]^{-1}j)$.

Un élément s de S sera noté suivant le cas par s_{ij} ou $(i \times \bar{s} \times j)$, un ensemble $\{ s_k \}$, $k \in K$ par $\{ s_{i_kj_k} \}$ *ou* $(i_k\bar{s}_kj_k)$, une suite $\{ s_{k_\nu} \}$ $\nu = 1, 2, \ldots$ par $\{ s_{i_{k_\nu}j_{k_\nu}} \}$ ou $\{ (i_{k_\nu}\bar{s}_{k_\nu}j_{k_\nu}) \}$. Quelquefois des notations plus simples seront adoptées, nous prendrons toujours le soin de les préciser au préalable.

Lemme I.3. — Les classes essentielles bilatères de S(G) sont de la forme $G_k = I \times \bar{C}_k \times J$, $k \in K$ et $\bar{C}_k$ trace de C_k dans $G = H_{11}$.

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de la remarque suivante : pour chaque $i \in \mathrm{I}$ et $j \in \mathrm{J}$, il existe n_1 et n_2 entiers positifs finis tels que $p^{(n_1)}(e_{i1}) > 0$, $p^{(n_2)}(e_{1j}) > 0$, donc $p^{(n_1 n_2)}(e_{i1}) > 0$, $p^{(n_1 n_2)}(e_{1j}) > 0$, et, d'autre part, $(i\bar{e}1) \circ (i'\bar{s}j') \circ (1\bar{e}j) = (i\bar{s}j)$; $i, i' \in \mathrm{I}$; $j, j' \in \mathrm{J}$. Par conséquent

$$(i'\bar{s}j') \rightsquigarrow (i\bar{s}j), \ \forall (i'\bar{s}j') \in \mathrm{C}_k, \ \forall i \in \mathrm{I}, \ \forall j \in \mathrm{J} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{C}_k = \mathrm{I} \times \bar{\mathrm{C}}_k \times \mathrm{J}. \ \blacksquare$$

ν étant la période commune des marches unilatères, on sait ainsi définir sur R_1, classe essentielle d'une marche à droite, les sous-classes cycliques $\mathrm{C}_d(r)$, $r = 0, 1, \ldots, \nu - 1$: choisissant e_{11} comme état initial, on a

$$m_d^{(n)}(e_{11}, s) > 0 \ \Rightarrow \ n = k\nu + r(s),$$

k entier positif, $r(s)$ entier positif ou nul vérifiant $0 \leqslant r(s) \leqslant \nu - 1$ et défini par s. Tous les $s \in \mathrm{R}_1$ tels que $r(s) = r$ forment alors la sous-classe cyclique $\mathrm{C}_d(r)$. Les sous-ensembles $\mathrm{C}_d(r)$, $r = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ forment une partition de R_1 et on passe presque sûrement d'un $s \in \mathrm{C}(r)$ à un $s \in \mathrm{C}(r')$, $r' \equiv 1 + r \pmod{\nu}$ en une étape. Il est clair que l'on peut tout aussi bien définir les sous-classes cycliques d'une marche à droite sur un R_i, à gauche sur un L_j : $\mathrm{C}_g(r)$, $r = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ et bilatère sur un C_k : $\mathrm{C}_{dg}(r)$, $r = 0, 1, \ldots, \mu - 1$.

LEMME I.4. — Les sous-classes cycliques d'une marche à droite sur R_1 sont de la forme $\mathrm{C}_d(r) = 1 \times \bar{\mathrm{C}}_d(r) \times \mathrm{J}$; $r = 0, \ldots, \nu - 1$, $\bar{\mathrm{C}}_d(r)$ trace de $\mathrm{C}_d(r)$ dans G. Un résultat analogue vaut pour une marche à gauche sur L_1 :

$$\mathrm{C}_g(r) = \mathrm{I} \times \bar{\mathrm{C}}_g(r) \times 1,$$

et pour une marche bilatère sur C_k : $\mathrm{C}_{dg}(r) = \mathrm{I} \times \bar{\mathrm{C}}_{dg}(r) \times \mathrm{J}$, $r = 0, \ldots, \mu - 1$.

Démonstration. — On a $p^{(n_1)}(e_{1j}) > 0$, donc $p^{(\nu n_1)}(e_{1j}) > 0$ pour un n_1, puis $m_d^{(n+\nu n_1)}(e_{11}, s) \geqslant m_d^{(n)}(e, g) p^{(\nu n_1)}(e_{1j})$ avec $g = (1\bar{g}1)$, $s = (1\bar{g}j)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} n = m\nu + r(g) \ \Rightarrow \ n + n_1\nu &= m'\nu + r(s) \\ &= (m + n_1)\nu + r(g) \end{aligned}$$

d'où

$$r(s) = r(g) \pmod{\nu}$$

et par conséquent, $\mathrm{C}_d(r) = 1 \times \bar{\mathrm{C}}_d(r) \times \mathrm{J}$.

Le cas à gauche se démontre de manière analogue. Dans le cas bilatère il suffit d'écrire que pour $p^{(n_1)}(e_{i1}) > 0$, $p^{(n_2)}(e_{1j}) > 0$, on a

$$m_{dg}^{(n + n_1 n_2 \mu)}(e_{11}, s) \geqslant p^{(n_1 n_2 \mu)}(e_{i1}) m_{dg}^{(n)}(e, g) p^{(n_1 n_2 \mu)}(e_{1j}),$$

et les implications analogues aux précédentes montrent que

$$\mathrm{C}_{dg}(r) = \mathrm{I} \times \bar{\mathrm{C}}_{dg}(r) \times \mathrm{J}.$$

THÉORÈME I.5. — Le nombre K des classes essentielles bilatères de l'idéal minimum complètement simple S(G) d'un demi-groupe S est égal à 2 ou 1 et la période bilatère μ, à $\nu/2$ ou ν suivant que la période unilatère ν est paire ou impaire.

Démonstration. — Considérons tout d'abord les ν sous-classes cycliques $C(r)$ d'une marche à droite de période ν sur un groupe G, marche d'état initial $e(\in C(0))$. Soient $g_i \in C(r_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, et $g = g_1 g_2 \ldots g_n \in C(r)$. De

$$m^{(k_1 + \cdots k_n)}(e, g) \geqslant m^{(k_1)}(e, g_1) m^{(k_2)}(g_1, g_1 g_2) \ldots m^{(k_n)}(g_1 \ldots g_{n-1}, g)$$
$$= m^{(k_1)}(e, g_1) m^{(k_2)}(e, g_2) \ldots m^{(k_n)}(e, g_n),$$

on obtient $r_1 + r_2 + \ldots r_n \equiv r \pmod{\nu}$.

D'autre part, dans une marche à gauche sur G, d'état initial e, et de $g = e g_1 g_2 \ldots g_n = g_1 \ldots g_n e$, vrai pour tout $g \in G$ on voit que

$$C_d(r) = C_g(r) = C(r), \qquad r = 0, 1, \ldots, \nu - 1.$$

D'après les lemmes I.3 et I.4, on peut donc se restreindre à $H_{11} = G$ pour calculer K et μ. Si, dans le processus bilatère on a

$$g = g' g g'' \quad \text{avec} \quad g \in C(r)\,; \quad g', g'' \in C(r_1), \quad g \in C(r_0)$$

on en tire

i) $r \equiv r_0 + 2r_1 \pmod{\nu}$.

En d'autres termes, à partir de $g_0 \in C(r_0)$ on peut atteindre dans ce processus tous les $g \in C(r)$, r vérifiant *i)*, et seulement ces g. On vérifie alors que si ν est pair, $\nu = 2\nu'$, de $r_0 = 0$ on peut atteindre chaque r pair, par conséquent $\nu = 2\nu' \equiv 0 \pmod{\nu}$, donc seulement ces r, et on a $\mu = \nu' = \nu/2$. De r_0 impair on n'atteindra que les r impairs. Dans ce cas $K = 2$. Par contre, si ν est impair, $\nu = 2\nu' + 1$, de $r_0 = 0$ on atteint chaque r pair donc $2\nu' + 2 = \nu + 1 = 1 \pmod{\nu}$ puis chaque r impair et donc $2\nu' + 1 = \nu = 0 \pmod{\nu}$. Dans ce cas $K = 1$, et la période μ n'est autre que $2\nu' + 1 = \nu$. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] K. L. CHUNG and W. H. J. FUCHS, On the distribution of values of sums of random variables. *Mem. Am. Math. Soc.*, Nb6, 1951.

[*2*] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, The Algebraic Theory of Semigroups. *Am. Math. Soc.*, vol. **I**, 1961.

[*3*] P. DUBREIL et M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Leçons d'Algèbre Moderne*. Dunod, 1964.

[4] W. FELLER, *An introduction to Probability Theory and its Applications*. J. Wiley and Sons, vol. **I**, 1964.

[5] P. L. HENNEQUIN et A. TORTRAT, *Théorie des probabilités et quelques applications*. Masson, 1965.

[6] PER MARTIN LÖF, Probability on discrete semi-groups. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **4**, 1965.

[7] A. TORTRAT, Lois tendues μ sur un demi-groupe topologique complètement simple X. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **6**, 1966.

Manuscrit reçu le 13 novembre 1971.