ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE CONZE

Entropie des transformations affines et des flots sur les espaces homogènes compacts

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 1 (1972), p. 67-81

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_1_67_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 1, 1972, p. 67-81. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Entropie des transformations affines et des flots sur les espaces homogènes compacts

par

Jean-Pierre CONZE (*)

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe de Lie connexe, Γ un sous-groupe discret de G tel que le quotient G/Γ soit compact, A un automorphisme de G conservant Γ. Considérons la transformation affine de G/Γ définie par : $T(g\Gamma) = aA(g)\Gamma$, $g \in G$, où a est un élément fixé dans G.

Le but de cet article est de calculer l'entropie de la transformation T et de déterminer son facteur de Pinsker. Nous donnons également des conditions pour qu'il existe des transformations affines à spectre continu sur G/Γ, dans le cas où G est résoluble.

SUMMARY. — Let G be a connected Lie group, Γ a discrete sub-group of G such that G/Γ be compact, A an automorphism of G preserving Γ. In this paper, we shall study the affine transformation defined on G/Γ by: $T(g\Gamma) = aA(g)\Gamma$, $g \in G$, where a is a fixed element in G.

We compute the entropy of the transformation T, and determine its Pinsker's factor. We provide also some conditions for the existence of affine transformations with continuous spectrum in the solvable case.

INTRODUCTION

Considérons un groupe de Lie G et un sous-groupe discret Γ de G tel que le quotient G/Γ soit compact. Munissons G/Γ de sa structure borélienne et de la mesure m de masse 1 induite par la mesure de Haar de G. A tout sous-groupe g_t à un paramètre dans G est associé un flot Φ_t sur $(G/\Gamma, m)$ défini par $\Phi_t(g\Gamma) = g_t g\Gamma$, $g \in G$. De même, si a est un élément

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications », associée au C. N. R. S.

de G et A un automorphisme de G conservant Γ, il leur correspond une transformation T, dite affine, de $(G/\Gamma, m)$ définie par $T(g\Gamma) = aA(g)\Gamma$, $g \in G$.

Les systèmes $(G/\Gamma, m, \Phi_t)$, $(G/\Gamma, m, T)$ ainsi obtenus généralisent les systèmes définis par les translations et les transformations affines sur les groupes compacts. Leurs propriétés spectrales ont été étudiées dans une série d'articles, parmi lesquels nous mentionnerons ceux de L. Auslander, L. Green et F. Hahn [*3*], L. Auslander et L. Green [*2*], W. Parry [*10*].

L'existence de champs contractants et dilatants pour les transformations considérées joue, dans cette étude, un rôle important qui est à rapprocher de la méthode des feuilletages transversaux utilisée par Ya. Sinaï [*12*], dans l'étude des propriétés ergodiques de certains systèmes dynamiques classiques (Cf. L. Green [*7*]).

Nous nous proposons dans ce travail de reprendre l'étude des systèmes $(G/\Gamma, m, \Phi_t)$, $(G/\Gamma, m, T)$, en nous plaçant du point de vue de l'entropie et en utilisant à la fois les méthodes spectrales de [*2*] et la théorie des feuilletages transversaux de [*12*].

Dans le paragraphe 1, nous construisons une partition parfaite pour les transformations affines, puis nous calculons l'entropie de ces transformations, généralisant ainsi la formule donnant l'entropie des automorphismes du tore.

Dans le paragraphe 2, nous utilisons ces résultats pour déterminer les tribus de Pinsker des systèmes $(G/\Gamma, m, T)$, et nous donnons des exemples de K-systèmes et de K-flots, parmi les systèmes et les flots étudiés.

Dans le dernier paragraphe, nous montrons qu'étant donné un espace homogène d'un groupe de Lie G résoluble, il ne peut exister une transformation affine à spectre continu sur cet espace que si G est nilpotent.

Les principaux résultats de ce travail ont été exposés dans une note aux *C. R. Ac. Sci.* [*4*]. Depuis la rédaction de cet article, est paru un article de R. Bowen donnant par une méthode différente de celle qui est exposée ici l'entropie des transformations affines d'espaces homogènes compacts (R. Bowen : Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces).

§ 1. FEUILLETAGES CONTRACTANTS ET DILATANTS POUR UNE TRANSFORMATION AFFINE

Considérons un groupe de Lie G que nous supposerons dans toute la suite connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et Γ un sous-groupe discret de G tel que G/Γ soit compact. Mettons sur G la structure riemannienne invariante à droite, obtenue en choisissant un produit scalaire sur g et en le transportant par translations à droite en tout point de G. On en déduit une structure riemannienne sur le quotient G/Γ. D'autre part, il résulte de l'existence du sous-groupe Γ discret à quotient compact dans G, que G est unimodulaire. La mesure de Haar sur G induit sur G/Γ une mesure m, que nous prendrons de masse 1, invariante par l'action de G à gauche sur G/Γ.

Étant donné un automorphisme A de G, tel que $A(\Gamma) = \Gamma$, et un élément a fixe dans G, la transformation $T : g\Gamma \to aA(g)\Gamma$ de G/Γ qui leur est associée est appelée transformation affine (1) de G/Γ. A tout groupe à un paramètre g_t dans G est associé de même un flot Φ_t sur G/Γ défini par $\Phi_t(g\Gamma) = g_t g\Gamma$. Les transformations T, Φ_t, sont des automorphismes, au sens de la théorie de la mesure, de l'espace mesuré obtenu en munissant G/Γ de sa structure borélienne et de la mesure m.

Feuilletages invariants par une transformation affine, par un flot.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de dimension k de $\mathfrak{g}$. En transportant par translations à droite $\mathfrak{h}$ en tout point de G, on obtient un champ de k-plans intégrable, dont les feuilles intégrales sont les orbites du sous-groupe H associé à $\mathfrak{h}$, dans l'action de H à gauche sur G. La projection de ces feuilles sur G/Γ définit un feuilletage Z de dimension k de la variété G/Γ.

Pour que ce feuilletage Z soit invariant par la transformation affine $T : x\Gamma \to aA(x)\Gamma$, il faut et il suffit que la différentielle à l'origine dB_e de l'automorphisme $B : x \to aA(x)a^{-1}$, laisse $\mathfrak{h}$ invariant. La recherche des feuilletages du type précédent invariants par T conduit donc à étudier les sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ invariantes par dB_e.

Dans le cas d'un groupe à un paramètre $g_t = \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, on obtient des feuilletages invariants par $\Phi_t : x\Gamma \to g_t x\Gamma$, en projetant sur G/Γ les orbites dans G des sous-groupes H associés aux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ invariantes par la dérivation adX de $\mathfrak{g}$.

Sous-espaces contractants et dilatants.

Nous notons $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}_\omega$ le sous-espace de $\mathfrak{l}$ formé des vecteurs annulés par une puissance de $(dB_e - \omega I)$ espace réduit à zéro si ω n'est pas valeur propre de dB_e, $\mathfrak{g}_\omega$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé des vecteurs réels de $\mathfrak{l}_\omega + \mathfrak{l}_{\bar{\omega}}$.

---

(1) Pour simplifier certains raisonnements, nous nous bornerons au cas des transformations affines inversibles.

Reprenant des notions introduites par L. Auslander et L. Green [*2*], nous définissons le sous-espace *contractant* de dB_e comme la somme $\mathfrak{h}_c = \bigoplus_{\omega, |\omega| < 1} \mathfrak{g}_\omega$. De même, le sous-espace *dilatant* de dB_e est défini comme $\mathfrak{h}_d = \bigoplus_{\omega, |\omega| > 1} \mathfrak{g}_\omega$. Introduisons également le sous-espace $\mathfrak{h}'_d = \bigoplus_{\omega, |\omega| > 1} \mathfrak{g}_\omega$, sur lequel dB_e est non contractant, et la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ engendrée par $\mathfrak{h}_c$ et $\mathfrak{h}_d$ dans $\mathfrak{g}$.

LEMME 1.1. — L'algèbre $\mathfrak{h}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$, invariant par dB_e. Les sous-espaces $\mathfrak{h}_c$, $\mathfrak{h}_d$, $\mathfrak{h}'_d$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ invariantes par dB_e.

Démonstration. — Le lemme est un résultat de L. Auslander et L. Green ([*2*], corollaire 2.2), adapté au cas des automorphismes.

L'invariance des sous-espaces considérés est évidente. La dernière assertion résulte des relations

$$[\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{l}_\beta] \subseteq \mathfrak{l}_{\alpha\beta} \tag{1}$$

conséquences du fait que dB_e est un automorphisme. Ces relations donnent, en passant aux vecteurs réeles les relations

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \tag{2}$$

Pour montrer que h est un idéal, il suffit de montrer que le crochet d'un vecteur $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $|\alpha| \neq 1$, avec un vecteur $Y \in \mathfrak{g}_\omega$, ω quelconque, est dans $\mathfrak{h}$. En effet, ces vecteurs engendrent respectivement $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$. Si $|\alpha\omega| = 1$, $[X, Y]$ est dans $\mathfrak{h}$, d'après les relations (2). Si $|\alpha| = |\omega|^{-1}$, on a $|\omega| \neq 1$ et Y est déjà dans $\mathfrak{h}$, donc $[X, Y]$ est également dans $\mathfrak{h}$.

Dans le cas d'un groupe à un paramètre $g_t = \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, on reprend les définitions précédentes, en remplaçant dB_e par adX. Ayant défini $\mathfrak{l}_\omega$, $\mathfrak{g}_\omega$, on pose $\mathfrak{h}_c = \bigoplus_{\omega, \mathrm{Re}\,\omega < 0} \mathfrak{g}_\omega$, $\mathfrak{h}_d = \bigoplus_{\omega, \mathrm{Re}\,\omega > 0} \mathfrak{g}_\omega$, et $\mathfrak{h}$ est définie comme la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{h}_c$ et $\mathfrak{h}_d$. Le lemme précédent s'énonce pour les groupes à un paramètre comme pour les automorphismes.

DÉFINITION. — L'idéal $\mathfrak{h}$ correspondant à $g_t = \exp(tX)$ est appelé *idéal instable* associé à X.

A une transformation affine T de G/Γ, à un flot Φ_t induit par un groupe à un paramètre de G, nous associons les feuilletages Z_c, Z_d, Z'_c de G/Γ, correspondants aux sous-algèbres $\mathfrak{h}_c$, $\mathfrak{h}_d$, $\mathfrak{h}'_c$, définies précédemment. Ce sont les feuilletages contractant, dilatant, non dilatant associés à T ou Φ_t. Les feuilletages Z_c, Z_d sont des feuilletages transversaux respectivement contractant et dilatant, au sens de [*12*].

Enveloppe mesurable d'un feuilletage.

Considérons, pour fixer les idées, le feuilletage contractant Z_c. On appelle *enveloppe mesurable* de Z_c, $\nu(Z_c)$, la partition mesurable de G/Γ la plus fine dont les éléments sont réunion de feuilles de Z_c. Cette partition est caractérisée par la propriété suivante : une fonction mesurable sur G/Γ est $\nu(Z_c)$-mesurable si et seulement si elle est invariante par l'action de H_c opérant à gauche sur G/Γ.

En particulier, la partition $\nu(Z_c)$ est la partition triviale de G/Γ, si et seulement si H_c opère ergodiquement sur G/Γ (c'est-à-dire si les seules fonctions mesurables sur G/Γ invariantes par H_c sont les constantes).

Pour toutes les notions concernant l'entropie utilisées dans la suite, voir, par exemple, V. A. Rokhlin [*11*].

THÉORÈME 1.1. — Soit Z_c le feuilletage contractant pour la transformation affine $T : g\Gamma \to aA(g)\Gamma$ de G/Γ. Il existe une partition mesurable ζ de G/Γ, dont presque tout élément est un sous-ensemble ouvert connexe d'une feuille de Z_c, telle que :

1) $\zeta < T\zeta$,

2) $\bigvee_n T^n\zeta = \varepsilon$ (ε étant la partition de G/Γ en ses points)

3) $\bigwedge_n T^n\zeta = \nu(Z_c)$

4) l'entropie conditionnelle $H(T\zeta/\zeta)$ est égale à $\Sigma \log |\omega_i|$, où ω_i décrit les valeurs propres de dB_e de module supérieur à 1.

COROLLAIRE. — La partition de Pinsker de T, $\pi(T)$, est moins fine que $\nu(Z_c)$. En particulier, si H_c opère ergodiquement sur G/Γ, le système $(G/\Gamma, m, T)$ est d'entropie complètement positive.

Démonstration. — D'après [*11*], paragraphe 12, si ζ est une partition croissante ($\zeta < T\zeta$), telle que $\bigvee_n T^n\zeta = \varepsilon$, on a $\Pi(T) \leqslant \bigwedge_n T^n\zeta$. Le corollaire résulte donc des conditions 1), 2), et 3) auxquelles satisfait la partition ζ.

Démonstration du théorème :

Le théorème 1.1 est presque une conséquence immédiate du théorème 5.1 de [*12*] démontré par Ya. Sinaï. En effet, le feuilletage Z_c est pour la transformation T un feuilletage transversal contractant, tel que le définit Sinaï.

Seule la propriété d'ergodicité, utilisée dans la démonstration du théorème 5.1 de [*12*], peut ne pas être satisfaite par T. Mais on montre facilement que cette hypothèse n'est pas nécessaire, pourvu que la restriction de la transformation T à chaque feuille du feuilletage contractant ait une différentielle majorée par un nombre fixe, strictement plus petit que 1. Cette dernière condition est vérifiée par la transformation affine T étudiée ici.

THÉORÈME 1.2. — Soit $T : g\Gamma \to aA(g)\Gamma$ une transformation affine du quotient compact d'un groupe de Lie connexe G par un sous-groupe discret Γ. Soit dB_e la dérivée à l'origine de l'automorphisme $B : g \to aA(g)a^{-1}$ de G. L'entropie du système $(G/\Gamma, m, T)$ est donnée par la formule $h(T) = \Sigma \log |\omega_i|$, où ω_i décrit les valeurs propres de dB_e de module supérieur à 1.

COROLLAIRE. — La partition ζ associée au feuilletage contractant construite dans le théorème 1.1 est une partition parfaite pour la transformation T. En particulier, l'enveloppe mesurable du feuilletage dilatant, $\nu(Z_c)$, coïncide avec la partition de Pinsker $\pi(T)$ du système.

Démonstration. — La partition ζ est croissante ($\zeta < T\zeta$), génératrice $\bigvee_n T^n\zeta = \varepsilon$. Il reste à montrer la relation $\bigwedge_n T^n\zeta = \Pi(T)$. Cette relation résulte du fait que l'entropie conditionnelle $H(T\zeta/\zeta)$ est égale à l'entropie du système, d'après le théorème 1.2 (Cf. [*11*], § 12). La partition ζ est donc une partition parfaite pour le système (Cf. [*11*]). On notera qu'il peut exister des partitions ξ parfaites pour T, dont l'entropie conditionnelle $H(T\xi/\xi)$ soit différente de l'entropie du système.

Remarque. — Dans le cas où G est abélien, G/Γ est un tore, et nous retrouvons par le théorème 1.2 la formule de l'entropie des automorphismes de tores. Dans le cas où G est un groupe nilpotent, on montre facilement que les valeurs propres de dB_e coïncident avec celles de la dérivée à l'origine de l'automorphisme A. On retrouve ainsi la formule donnant l'entropie des transformations affines de nilvariétés compactes, démontrées par W. Parry [*10*].

Démonstration du théorème :

Soient ω_i les valeurs propres de dB_e de module supérieure à 1. Posons $a = \Sigma \log |\omega_i|$. D'après le théorème 1.1, l'entropie $h(T)$ est minorée par $H(T\zeta/\zeta) = a$. Il suffit donc de démontrer que $h(T)$ est également majoré par a.

Soit η une partition finie de G/Γ en sous-ensembles à bords différentiables par morceaux, de diamètre inférieur à un nombre $\varepsilon > 0$ donné. Désignons par $C_\eta(x)$ l'élément de η contenant x, et par $\partial C_\eta(x)$ sa frontière. Pour tout réel t, soit $F_t = \{ x \in G/\Gamma : \rho(x, \partial C_\eta(x)) < t \}$, où ρ est la distance dans G/Γ.

Il existe une constante K telle que F_t soit de mesure inférieure à Kt^r, $r =$ dimension de G. Soit λ un nombre strictement plus grand que 1, arbitraire. Posons $B_n = T^{-n}F_{\lambda^{-n}} = \{ x \in G/\Gamma : \rho(T^n x, \partial C_\eta(T^n x)) < \lambda^{-n} \}$. On a $m(B_n) = m(T^n B_n) \leqslant K\lambda^{-rn}$. Donc la série $\Sigma m(B_n)$ converge, et le théorème de Borel-Cantelli montre que, pour presque tout x, il existe $n(x) < \infty$, tel que pour $n > n(x)$ on ait $x \notin B_n$. Soit $\delta(x) = \inf_{n \geqslant 0} \rho(T^n x, \partial C_\eta(T^n x))\lambda^n$.

Pour presque tout x, $\delta(x)$ est un nombre strictement positif. En effet, pour presque tout x, cette borne est atteinte, donc $\delta(x) = 0$ entraîne que x appartient à l'ensemble $\bigcup_n T^n \bigcup_{C_\eta} \partial C_\eta$, qui est de mesure nulle.

Notons η_n la partition $\eta \vee T^{-1}\eta \vee \ldots \vee T^{-n+1}\eta$. Si l'on montre que pour presque tout x, l'élément de la partition η_n contenant x est de mesure supérieure à $L\delta(x)^r\lambda^{-2rn}e^{-na}$, où L est une constante non nulle, ne dépendant que de x et de λ, on obtiendra la majoration $h(\eta, T) \leqslant a$. En effet, d'après le théorème de Breimann-Mac Millan, la suite $-1/n \operatorname{Log} m(C_{\eta_n}(x))$ converge dans $L^1(m)$ vers une limite $u(x)$, telle que $\int u(x)dm = h(\eta, T)$. De la majoration $m(C_{\eta_n}(x)) \geqslant L\delta(x)^r\lambda^{-2rn}e^{-na}$, on déduit :

$$h(\eta, T) \leqslant 2r \operatorname{Log}(\lambda) + a.$$

Comme λ peut être pris arbitrairement proche de 1, la majoration $h(\eta, T) \leqslant a$ en résulte.

Considérons maintenant une suite croissante de partitions η_i en éléments à bords différentiables par morceaux dont le diamètre tende vers 0. On obtient : $h(T) = \lim_i h(\eta_i, T) \leqslant a$.

Il reste à démontrer l'assertion concernant la mesure des éléments de η_n. En utilisant les feuilletages Z_d et Z'_c, il est possible de construire, pour tout x tel que $\delta(x) \neq 0$, un voisinage $V(x)$ de x (un « parallélogramme » par rapport aux feuilletages Z_d et Z'_c) ayant les propriétés suivantes :

— la mesure de $V(x)$ est supérieure à $L\delta(x)^r \prod_i |\omega_i|^{-n}\lambda^{-2rn}$, où L est une constante non nulle ne dépendant que de x et de λ,

— le diamètre des images $T^k V(x)$, $0 \leqslant k < n$, reste inférieur à $\delta(x)\lambda^{-n}$.

Le voisinage $V(x)$ est contenu dans $C_{\eta_n}(x)$. En effet, dans le cas contraire, pour un entier k, $0 \leqslant k < n$, $T^k V(x)$ recouperait la frontière de $C_\eta(T^k x)$, et le point $T^k x$ serait à une distance de $\partial C_\eta(T^k x)$ inférieure à $\partial((x)\lambda^{-n}$, contrairement à la définition de $\delta(x)$. On a donc bien

$$m(C_{\eta_n}(x)) \geqslant m(V(x)) \geqslant L\delta(x)^r \lambda^{-2rn} e^{-na}.$$

§ 2. FACTEURS DE PINSKER. K-FLOTS

Étant donné un flot Φ_t sur un espace M, considérons les systèmes engendrés sur M par les transformations Φ_{t_0}, $t_0 \neq 0$ fixé. Si Φ_t est un K-flot, chacun de ces systèmes est un K-système (ou encore un système d'entropie complètement positive, puisque ces deux notions coïncident pour une transformation inversible, d'après un théorème de Rokhlin et Sinaï [*11*]). Démontrons la réciproque de ce résultat, dans le cas où $M = G/\Gamma$ est un espace homogène compact, et Φ_t le flot défini sur G/Γ par un groupe à un paramètre.

THÉORÈME 2.1. — Soient G un groupe de Lie et Γ un sous-groupe discret de G à quotient compact, g_t un groupe à un paramètre dans G. Pour que le flot Φ_t défini par g_t sur G/Γ soit un K-flot, il faut et il suffit que pour un $t_0 \neq 0$, le système défini par la transformation Φ_{t_0} sur G/Γ soit un K-système.

Démonstration. — Le théorème résulte du théorème 1.2 et d'un théorème dû à Ya. Sinaï (théorème 5.2 [*12*]). En utilisant ce résultat, il est possible de construire une partition ζ de G/Γ en sous-ensembles ouverts des feuilles du feuilletage contractant Z_c telle que :

$$\zeta \leqslant \Phi_t \zeta, \qquad t \geqslant 0.$$

$$\bigvee_t \Phi_t \zeta = \varepsilon$$

$H(\Phi_{t_0}\zeta \mid \zeta) = h(\Phi_{t_0})$ (d'après la formule donnant l'entropie d'un flot).

On a donc $\bigwedge_t \Phi_t \zeta = \bigwedge_n \Phi_{nt_0} \zeta = \Pi(\Phi_{t_0})$ (Cf. [*11*]). Si Φ_{t_0} définit un K-système, on a $\Pi(\Phi_{t_0}) = \nu$, et les propriétés de ζ montrent que Φ_t est un K-flot.

THÉORÈME 2.2. — Soit T une transformation affine, resp. Φ_t un flot, sur un espace compact G/Γ, quotient d'un groupe de Lie connexe par un sous-groupe discret. Considérons le sous-groupe normal H de G engendré par les sous-groupes H_c, H_d associés aux sous-algèbres contractante et dilatante de T, resp. Φ_t. Le facteur de Pinsker de T est égal au facteur $(G/\overline{H\Gamma}, T_1)$ de $(G/\Gamma, T)$, où T_1 est la transformation quotient de T dans $G/\overline{H\Gamma}$. En particulier, si $\overline{H\Gamma} = G$, $(G/\Gamma, T)$ est un K-système. Dans le cas d'un flot Φ_t, si $\overline{H\Gamma} = G$, $(G/\Gamma, \Phi_t)$ est un K-flot.

Démonstration. — D'après le théorème précédent, il suffit de traiter le cas des transformations affines.

Le système $(G/\overline{H\Gamma}, T_1)$ est un facteur de $(G/\Gamma, T)$ pour la projection $p : g\Gamma \to g\overline{H\Gamma}$. Montrons qu'il est d'entropie nulle. L'espace $G/\overline{H\Gamma}$ est isomorphe au quotient $(G/H)/(\overline{H\Gamma}/H)$. La différentielle à l'origine de l'automorphisme $gH \to aA(g)a^{-1}H$ de G/H a toutes ses valeurs propres de module 1. En utilisant le théorème 2.1, ou plus simplement le théorème de Kouchnirenko [*1*], on en déduit que $(G/\overline{H\Gamma}, T_1)$ est d'entropie nulle.

Ainsi, le système $(G/\overline{H\Gamma}, T_1)$ est un facteur du facteur de Pinsker de T. Inversement, soit $\Pi(T)$ la partition de Pinsker de $(G/\Gamma, T)$, et soit f une fonction bornée sur G/Γ, mesurable pour la tribu engendrée par $\Pi(T)$. Relevons la fonction f en une fonction $\tilde{f}$ bornée mesurable sur G invariante par l'action de Γ à droite sur G. Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $\tilde{f}$ est invariante par $\overline{H\Gamma}$.

D'après le corollaire du théorème 1.1, $\Pi(T)$ est moins fine que la partition $\nu(Z_c)$. Il en résulte que les éléments de $\Pi(T)$ sont fixes dans l'action de H_c à gauche sur G/Γ. De même, ils sont fixes sous l'action de H_d sur G/Γ, donc sous l'action du sous-groupe normal H engendré par H_c et H_d.

La fonction f, étant $\Pi(T)$-mesurable, est invariante par H. Comme H est normal, on a : $\tilde{f}(xh\gamma) = \tilde{f}(xhx^{-1}x\gamma) = \tilde{f}(x)$, $h \in H$, $\gamma \in \Gamma$ (on notera que les égalités sont satisfaites pour presque tout x, mais il est possible de remplacer $\tilde{f}$ par une fonction qui lui est presque partout égale, et qui est partout invariante par H). Pour conclure que $\tilde{f}$ est invariante par $\overline{H\Gamma}$, on utilise le résultat suivant, démontré dans [*2*].

LEMME 2.1. — Si f est une fonction borélienne bornée sur un groupe localement compact G, l'ensemble des $g \in G$ tels que $f(xg) = f(x)$, pour presque tout x, est fermé dans G.

Remarques :

1) Dans la démonstration du théorème, nous n'avons pas utilisé le corollaire du théorème 1.2. On sait qu'en fait, d'après ce corollaire,

$\nu(Z_c) = \nu(Z_d) = \Pi(T)$. Toute fonction mesurable sur G/Γ invariante par H_c provient donc d'une fonction mesurable sur G invariante par $\overline{H\Gamma}$.

2) D'après le théorème précédent, le facteur de Pinsker d'une transformation affine d'espace homogène compact est, non seulement un facteur au sens de la théorie de la mesure, mais aussi un facteur au sens topologique, et également au sens algébrique.

EXEMPLES

1) *Transformations affines de nilvariétés compactes.*

Considérons une nilvariété compacte N/Γ, quotient d'un groupe de Lie N nilpotent connexe et simplement connexe par un sous-groupe discret Γ, et une transformation affine $T : x\Gamma \to aA(x)\Gamma$, de N/Γ. W. Parry a démontré dans [*10*] que le système $(N/\Gamma, T)$ est d'entropie complètement positive si la transformation affine T_1 induite par T sur le tore $N/N'\Gamma$ (où N' est le groupe dérivé de N) est à spectre continu. Retrouvons ce résultat par la méthode du théorème 2.1.

Il nous suffit de démontrer qu'une transformation affine T d'entropie nulle, c'est-à-dire, ici, telle que dA_e ait toutes ses valeurs propres de module 1, n'est à spectre continu que si N est réduit à l'élément neutre.

Dans le cas où N est abélien, la transformation dA_e qui a ses valeurs propres de module 1, a en fait des valeurs propres racines de l'unité (propriété des matrices à coefficients entiers). Donc T ne peut être à spectre continu que si N est réduit à l'élément neutre.

Dans le cas général, considérons le groupe dérivé N' de N. On sait que le produit $N'\Gamma$ est fermé dans N. Le quotient $N/N'\Gamma$ est un tore sur lequel T induit une transformation affine à spectre continu. D'après ce qui précède, on a nécessairement $N = N'\Gamma$, ce qui n'est possible que si N est réduit à l'élément neutre.

Remarque. — D'après le théorème démontré au paragraphe 3, le résultat s'étend aux quotients compacts de groupes résolubles : si G est un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe et Γ un sous-groupe fermé de G à quotient compact, toute transformation affine à spectre continu de G/Γ est d'entropie complètement positive.

2) *Groupes à un paramètre associé à un élément réellement régulier.*

Donnons d'abord une définition (cf. [5]), qui reprend en la modifiant une notion introduite par L. Auslander et L. Green [*2*]. Considérons un élément X dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et l'idéal instable $\mathfrak{h}$ associé à X dans $\mathfrak{g}$. Nous dirons que X est *réellement régulier* si $\mathfrak{h}$ est de dimension maximum parmi tous les idéaux instables associés aux éléments de $\mathfrak{g}$. Les éléments réellement réguliers d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ forment un ouvert non vide de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, cet ouvert est dense dans $\mathfrak{g}$ (Dans le cas général, cet ouvert n'est pas dense.)

On montre ([5]) que, pour tout élément X réellement régulier dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ par le radical $\mathfrak{r}$ n'a pas de facteur compact, le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par l'idéal instable de X est une algèbre résoluble de type (R). En passant aux groupes, on en déduit le résultat suivant :

LEMME 2.2. — Soit X un élément réellement régulier dans l'algèbre $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie connexe et simplement connexe G. Supposons que le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ par son radical n'ait pas de facteur compact. Si H est le sous-groupe normal de G associé à l'idéal instable de X, G/H est un groupe résoluble (de type (R)).

THÉORÈME 2.3. — Soient G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, Γ un sous-groupe discret de G à quotient compact, $g_t = \exp(tX)$ un groupe à paramètre dans G, avec X réellement régulier dans l'algèbre de Lie de G. Supposons le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ par son radical sans facteur compact. Alors le flot Φ_t défini par g_t sur G/Γ est un K-flot, si et seulement s'il est à spectre continu. En particulier, si G est un groupe semi-simple sans facteur compact, pour tout flot Φ_t défini sur G/Γ par un groupe $\exp(tX)$ avec X réellement régulier, Φ_t est un K-flot.

Démonstration. — D'après le théorème 2.2, on obtiendra le théorème en montrant la relation $G = \overline{H\Gamma}$, où H est le sous-groupe normal de G défini dans le théorème 2.2. Le quotient $G/\overline{H\Gamma}$ est isomorphe à $(G/H)/(\overline{H\Gamma}/H)$. Le lemme 2.2 montre que G/H est un groupe résoluble. D'autre part G/H est un groupe connexe, simplement connexe, et $\overline{H\Gamma}/H$ est un sous-groupe à quotient compact de G/H. Nous pouvons supposer que $\overline{H\Gamma}/H$ ne contient aucun sous-groupe connexe normal non trivial de G/H.

Posons $R = G/H$, $K = \overline{H\Gamma}/H$. On peut appliquer à R et K la théorie de G. D. Mostow [9] (voir les rappels au § 3). Si N est le plus grand sous-groupe normal connexe nilpotent de R, ou le groupe dérivé de R si R est nilpotent, le produit KN est fermé dans R, et le quotient R/KN est un tore non trivial, pourvu que R soit lui-même non trivial. Le groupe g_t définit sur R/KN un flot ψ_t de translations qui est à spectre discret. Mais $(R/KN, \psi_t)$ est un facteur de $(G/\Gamma, \psi_t)$, et doit être à spectre continu. Donc $G = \overline{H\Gamma}$.

Dans le cas où G est semi-simple, le quotient G/H, qui doit être résoluble d'après le lemme 2.2, est nécessairement trivial.

3) *Groupes semi-simples.*

THÉORÈME 2.4. — Soient G un groupe de Lie simple, Γ un sous-groupe discret de G à quotient compact, T une translation définie sur G/Γ par un élément a fixé dans G, Φ_t un flot défini sur G/Γ par un groupe à un paramètre de G. Le système $(G/\Gamma, T)$ est alors soit un K-système, soit d'entropie nulle. De même, le flot $(G/\Gamma, \Phi_t)$ est soit un K-flot, soit d'entropie nulle.

Démonstration. — Il suffit, d'après le théorème 2.1, de raisonner sur le système $(G/\Gamma, T)$, où T est la translation $g\Gamma \to ag\Gamma$.

Si la dérivée de l'automorphisme $g \to aga^{-1}$ a toutes ses valeurs propres de module 1, le système $(G/\Gamma, T)$ est d'entropie nulle, d'après le théorème de Kouchnirenko, ou le théorème 1.2. Dans le cas contraire, l'idéal engendré dans l'algèbre de Lie de G par les sous-algèbres contractante et dilatante associées à T est non trivial. Comme G est simple, on en conclut que cet idéal coïncide avec toute l'algèbre de G. On obtient le résultat à l'aide du théorème 2.2.

Remarque. — Si G est un groupe semi-simple, connexe et simplement connexe, et Γ un sous-groupe discret de G à quotient compact, tel que, pour tout G_i de la décomposition de G en groupes simples, $G_i\Gamma$ soit dense dans G, le résultat du théorème précédent est encore valable : tout groupe de translations opérant sur G/Γ définit un système qui est soit d'entropie nulle, soit un K-système.

§ 3. TRANSFORMATIONS AFFINES SUR LES QUOTIENTS DE GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

L'existence de transformations affines à spectre continu sur le quotient compact d'un groupe de Lie G est liée dans certains cas à la structure algébrique de G. C'est ce que nous allons montrer dans le cas où G est résoluble.

Rappelons d'abord une série de résultats dus à G. D. Mostow [9]. Considérons un groupe de Lie R résoluble, connexe et simplement connexe, et un sous-groupe fermé Γ de R tel que R/Γ soit compact. Il existe alors sur R/Γ une mesure m de masse 1, invariante par R.

Dans toute la suite, nous supposerons que Γ ne contient pas de sous-groupe normal connexe propre de R. Soit N le plus grand sous-groupe connexe nilpotent normal dans R. Alors, le produit ΓN est fermé et la composante connexe de l'élément neutre dans Γ est un sous-groupe normal de N, [9].

THÉORÈME 3.1. — Soit $T : g\Gamma \to aA(g)\Gamma$, $g \in G$, une transformation affine de R/Γ. Si T a un spectre continu, le groupe R est nilpotent.

Démonstration. — Nous reprenons un raisonnement de N. Jacobson [*8*]. Soient $\mathfrak{r}$ l'algèbre de Lie de R et $\mathfrak{l}$ l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{r}$. Remarquons que $\mathfrak{r}$ est nilpotente si et seulement si $\mathfrak{l}$ est nilpotente.

Soit dA l'automorphisme de $\mathfrak{l}$ dérivé de A. Pour tout ω complexe, notons $\mathfrak{l}_\omega$ le sous-espace de $\mathfrak{l}$ formé des vecteurs annulés par une puissance de $(dA - \omega I)$. On a

$$\mathfrak{l} = \otimes_\omega \mathfrak{l}_\omega, \qquad \text{et} \qquad [\mathfrak{l}_\lambda, \mathfrak{l}_\omega] \subseteq \mathfrak{l}_{\lambda\omega} \tag{1}$$

pour tout couple λ, ω (voir § 1, lemme 1.1).

Désignons par $\mathfrak{n}$ l'idéal nilpotent maximal de $\mathfrak{r}$, et par $\mathfrak{n}_1$ son complexifié. Si x est un vecteur caractéristique de dA correspondant à une valeur propre qui n'est pas racine de l'unité, d'après les relations (1), adx est une dérivation nilpotente. D'autre part, pour tout $x \in \mathfrak{n}_1$, adx est nilpotente. Enfin, si adx est nilpotente pour tout $x \in \mathfrak{l}_\omega$, pour tout ω, on montre que adx est nilpotente pour tout x dans $\mathfrak{l}$, et donc que $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Lie nilpotente. Il en résulte que si l'on suppose que $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{n}_1$, il existe un vecteur x caractéristique pour dA, de valeur propre racine de l'unité, n'appartenant pas à $\mathfrak{n}_1$.

L'algèbre de Lie du sous-groupe N est $\mathfrak{n}$. Comme la composante connexe de Γ est contenu dans N, la composante connexe du produit $N\Gamma$ coïncide avec N, et l'algèbre de Lie de $N\Gamma$ est également $\mathfrak{n}$. L'algèbre de Lie du tore $R/N\Gamma$ s'obtient donc comme quotient de $\mathfrak{r}$ par $\mathfrak{n}$.

Si le groupe R n'est pas nilpotent, on a $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{n}$, le tore $R/N\Gamma$ n'est pas trivial, et l'automorphisme quotient de A dans R/N a une valeur propre racine de l'unité. La transformation affine quotient de T dans $R/N\Gamma$ ne peut avoir un spectre continu, et T elle-même n'est pas à spectre continu.

Remarque. — La démonstration précédente montre que la transformation obtenue en prenant le quotient dans R/Γ d'un automorphisme de R laissant Γ invariant ne peut être ergodique que si R est un groupe nilpotent.

Cas des groupes nilpotents :

Dans le cas d'un quotient compact N/Γ d'un groupe de Lie nilpotent N par un sous-groupe fermé, les résultats de [*3*] montrent qu'il existe toujours des transformations affines sur N/Γ qui soient ergodiques, en l'occurence certaines translations. Nous allons voir qu'il existe, cependant, des quotients compacts de groupes nilpotents ne portant pas de transformations affines à spectre continu.

Rappelons qu'une algèbre de Lie est dite *caractéristiquement nilpotente* si toutes ses dérivations sont nilpotentes. Soit $\mathfrak{n}$ une telle algèbre. La composante connexe de l'identité dans Aut $\mathfrak{n}$ est un groupe de Lie nilpotent, dont tous les éléments sont des automorphismes unipotents, d'indice fini dans Aut $\mathfrak{n}$. Par conséquent tout automorphisme de $\mathfrak{n}$ a une puissance unipotente et ses valeurs propres sont racines de l'unité.

Dans l'étude des quotients compacts de groupes de Lie nilpotents, il suffit de considérer les quotients par des sous-groupes discrets (voir les rappels de [3], chap. I). D'autre part, si N est le groupe nilpotent associé à une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$, pour que N contienne des sous-groupes discrets à quotients compacts, il faut et il suffit que dans une base convenable les constantes de structure de $\mathfrak{n}$ soient rationnelles.

Considérons alors une algèbre de Lie caractéristiquement nilpotente, satisfaisant à la condition de rationnalité des constantes de structure. Le groupe nilpotent associé à cette algèbre, N, possède des sous-groupes Γ discrets à quotients compacts, et les quotients N/Γ ne portent aucune transformation affine à spectre continu. En effet, si N' est le groupe dérivé de N, une transformation affine de N/Γ induit sur $N/N'\Gamma$ une transformation, qui ne peut être à spectre continu (on sait que $N'\Gamma$ est fermé dans N, et le quotient $N/N'\Gamma$ est un tore non trivial.)

Un exemple d'algèbre de Lie caractéristiquement nilpotente, à constantes de structure rationnelles dans une base convenable, de dimension 8, a été construit par J. Dixmier et W. Lister [6].

Remarque. — Il existe des espaces homogènes de groupes de Lie non nilpotents portant des automorphismes ergodiques, à spectre continu. Considérons un groupe de Lie G semi-simple et un sous-groupe discret de G à quotient compact. Montrons que l'étude des transformations affines de G/Γ se ramène à l'étude des translations sur cet espace.

Soit A un automorphisme de G. Quitte à remplacer A par une puissance, on peut supposer que A est intérieur : $A(g) = aga^{-1}$, a étant un élément fixé dans G. Pour que A conserve Γ, il faut, et il suffit, que a soit dans le normalisateur de Γ. Mais on sait que Γ est d'indice fini dans son normalisateur (A. Weil [13]). En remplaçant à nouveau A par une puissance, on se ramène au cas où a est dans Γ. La transformation A définit alors sur G/Γ une translation.

Si nous prenons pour groupe G le groupe SL(2, R), nous pouvons trouver dans tout sous-groupe discret à quotient compact Γ de G des éléments hyperboliques (c'est-à-dire des éléments tels que les valeurs propres de la matrice associée soient réelles et distinctes). La translation définie par un élément hyperbolique sur G/Γ est ergodique, à spectre continu, et engendre même un K-système (cf. § 2).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] D. V. ANOSOV et Ya. G. SINAÏ, Sur des systèmes différentiables ergodiques. *Usp. Mat. N.*, t. **22**, 1967, n° 5.

[*2*] L. AUSLANDER and L. GREEN, G-induced Flows. *Amer. J. Math.*, vol. **88**, 1966, p. 43-60.

[*3*] L. AUSLANDER, L. GREEN and F. HAHN, Flows on homogeneous spaces. *Ann. of Math. Studies*, n° 53, 1963.

[*4*] J.-P. CONZE, Entropie des flots et des transformations affines sur les espaces homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **270**, 1970, p. 547-548.

[*5*] J.-P. CONZE, Idéaux instables et représentations ergodiques des groupes de Lie *(à paraître)*.

[*6*] J. DIXMIER and W. LISTER, Derivations of nilpotent Lie algebras. *Proc. A. M. S.*, vol. **8**, 1957, p. 155-158.

[*7*] L. GREEN, *Transversal to a flow*. Topological Dynamics, Benjamin, 1968.

[*8*] N. JACOBSON, A note on automorphisms and derivations of Lie algebras. *Proc. A. M. S.*, vol. **6**, 1955, p. 281-283.

[*9*] G. D. MOSTOW, Factor spaces of solvable groups. *Ann. of Math.*, vol. **60**, 1954, p. 1-27.

[*10*] W. PARRY, Ergodic properties of affine transformation and flows on nilmanifolds. *Amer. J. of Math.*, vol. **91**, n° 3, 1969, p. 757-771.

[*11*] V. A. ROKHLIN, Leçons sur l'entropie. *Usp. Mat. N.*, t. **22**, n° 5, 1967, p. 1-56.

[*12*] Ya. G. SINAÏ, Systèmes dynamiques à spectre de Lebesgue dénombrable. *Izv. Ak. N. Ser. Mat.*, t. **30**, 1966, p. 15-68.

[*13*] A. WEIL, On discrete subgroups of Lie groups II. *Ann. of Math.*, vol. **75**, 1962.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 1971).