ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE CONZE

Extensions de systèmes dynamiques par des endomorphismes de groupes compacts

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 1 (1972), p. 33-66

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_1_33_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 1, 1972, p. 33-66. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Extensions de systèmes dynamiques par des endomorphismes de groupes compacts

par

Jean-Pierre CONZE (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions le relèvement de certaines propriétés ergodiques des systèmes dynamiques dans les extensions par des groupes compacts (entropie complètement positive, disjonction, ergodicité intrinsèque). Nous donnons également des applications de la méthode des extensions à l'étude de systèmes dynamiques particuliers.

SUMMARY. — In this paper, we shall study the lifting of some ergodic properties of dynamical systems in compact group extensions (completely positive entropy, disjointness, intrinsically ergodic systems).
We give also some applications of the compact group extensions in the study of dynamical systems.

INTRODUCTION

Soient (X, $\mathscr{B}$, m) un espace mesuré, de mesure totale 1, et T une transformation mesurable de cet espace conservant m. Dans de nombreux exemples étudiés en théorie ergodique, l'espace (X, $\mathscr{B}$, m) est également muni d'un groupe compact G d'automorphismes tel que $T(g \cdot x) = \tau(g) \cdot T(x)$, $g \in G$, $x \in X$, où τ est un endomorphisme de G. Le système (X, $\mathscr{B}$, m, T) peut alors être considéré comme une extension du système facteur défini par T sur l'espace des orbites de G dans X.

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications », associée au C. N. R. S.

Plusieurs articles ont été consacrés au relèvement des propriétés ergodiques des systèmes dynamiques dans les extensions (W. Parry [*16*] [*17*], K. Thomas [*14*], l'auteur [*6*]). Le but de cet article, qui prolonge les résultats obtenus par K. Thomas, est de montrer que certaines propriétés liées à l'entropie se conservent par extension.

La première partie est consacrée à des résultats sur les points périodiques des endomorphismes de groupes compacts, qui, outre leur intérêt propre, peuvent jouer un rôle dans certaines questions de théorie ergodique, l'étude des extensions notamment. Nous rappelons également des résultats de S. Iuzvinski [*12*] sur la structure des automorphismes de groupes compacts, qui permettent de ramener le problème des extensions à l'étude de cas particuliers simples.

Dans la deuxième partie, nous montrons que les extensions à spectre continu de systèmes d'entropie complètement positive sont encore d'entropie complètement positive. Ce résultat est dû, dans le cas général, à K. Thomas [*14*]. Nous en avons repris la démonstration, d'une part parce que nous améliorons dans divers cas particuliers les conditions de validité des théorèmes, d'autre part parce que le schéma de la démonstration est repris à plusieurs reprises dans la suite. Nous terminons la deuxième partie par un théorème de relèvement de la disjonction, au sens de H. Furstenberg, qui prolonge l'étude des systèmes d'entropie complètement positive.

La méthode des extensions est appliquée dans la troisième partie à l'étude de systèmes de nature algébrique ou géométrique (transformations affines sur des espaces homogènes, flot géodésique sur l'espace des repères orthonormés d'une variété riemannienne de courbure négative).

Enfin, dans la quatrième partie, nous montrons que, sous certaines hypothèses, les extensions de systèmes intrinsèquement ergodiques [*13*] sont encore intrinsèquement ergodiques. Ce résultat permet d'étendre aux transformations affines de nilvariétés compactes un théorème de K. Berg [*5*] sur les automorphismes de groupes compacts.

§ 1. ENDOMORPHISMES DE GROUPES COMPACTS

A) Points périodiques des endomorphismes de groupes compacts abéliens.

Dans cette section A) nous désignons par G un groupe compact abélien séparable et par τ un endomorphisme surjectif de G. En vue de différentes applications à la théorie ergodique, nous étudions les points périodiques de τ, et nous montrons que ces points sont denses dans G si l'endomorphisme dual de τ satisfait à la condition énoncée dans la définition suivante.

Nous notons X le groupe dual de G et U l'endomorphisme de X dual de τ. S'il n'y a pas d'ambiguité, pour tout sous-groupe H de G invariant par τ, la restriction de τ à H, ou l'endomorphisme quotient de τ sur G/H, sont encore désignés par τ. De même en ce qui concerne U.

DÉFINITION. — On dit que le groupe X, muni de l'endomorphisme U, possède un système fini de U-*générateurs*, si X est un Z(U)-module de type fini, c'est-à-dire s'il existe dans X des éléments $x_1, \ldots, x_n$ en nombre fini tels que tout x dans X s'écrive $x = \Sigma P_i(U)x_i$, les P_i étant des polynômes à coefficients entiers.

PROPOSITION 1.1 (V. A. Rokhlin [*19*]). — Il existe dans G une suite décroissante de sous-groupes H_n invariants par τ tels que $\bigcap_n H_n = \{ e \}$, et tels que le groupe X_n dual de G/H_n possède un système fini de U-générateurs pour tout n.

Démonstration. — Soit $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ la suite dénombrable des éléments de X. Nous prenons pour H_n l'annulateur dans G du plus petit sous-groupe de X contenant $x_1, \ldots, x_n$ et stable par U.

D'après ce résultat, tout système (G, τ) s'obtient comme limite projective d'endomorphismes de groupes dont le dual possède un système fini de U-générateurs.

THÉORÈME 1.1. — Si le dual de G possède un système fini de U-générateurs, il existe dans G une suite finie de sous-groupes invariants par τ, $G_0 = G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k$, tels que la restriction de τ à G_k soit un endomorphisme ergodique surjectif et tels que l'endomorphisme induit par τ dans G_n/G_{n+1} soit d'ordre fini, pour $n = 0, \ldots, k - 1$.

Démonstration. — Définissons par récurrence une suite de sous-groupes de X invariants par U, en posant :

$$X_0 = \{ e \}, \ldots, X_n = \{ x \in X : (U^p x - x) \in X_{n-1}, \text{ pour un entier } p \neq 0 \}.$$

La réunion des X_n est un sous-groupe de X invariant par U, ayant un système fini de U-générateurs (lemme 1.1 ci-dessous). La suite $\{ X_n \}$ est donc stationnaire à partir d'un rang k.

Désignons par G_n le sous-groupe de G annulateur de X_n, $n = 0, \ldots, k-1$. L'endomorphisme U de X/X_k n'ayant pas d'orbite finie non triviale, la restriction de τ à G_k est ergodique. De plus, τ est surjectif sur G_k.

Considérons maintenant les quotients G_n/G_{n+1}. Le groupe dual de G_n/G_{n+1}, X_{n+1}/X_n, a un système fini de U-générateurs. Comme tout élément de X_{n+1} a une orbite finie par U modulo X_n, il existe un entier p ne dépendant que de n tel que U^p soit la transformation identique sur X_{n+1}/X_n. Par dualité, on en déduit le résultat sur $(G_n/G_{n+1}, \tau)$, $n = 0, \ldots, k-1$.

LEMME 1.1 (V. A. Rokhlin [*19*]). — Soient X un groupe abélien, U un endomorphisme de X, et Y un sous-groupe de X invariant par U. Si X possède un système fini de U-générateurs, Y possède un système fini de générateurs relativement à l'endomorphisme induit par U sur Y.

Démonstration. — Z(U) est un anneau noethérien. Donc tout sous-Z(U)-module du Z(U)-module de type fini X est lui-même de type fini.

THÉORÈME 1.2. — Si le dual de G possède un système fini de U-générateurs, l'ensemble des points périodiques de τ est dense dans G (1).

Remarque. — Au cours de la démonstration, nous utiliserons à plusieurs reprises, sans les mentionner, le lemme 1.1 et le résultat suivant :

Considérons un espace compact A sur lequel opère un groupe abélien compact K, l'application $(k, a) \to k \cdot a$ de $K \times A$ dans A étant continue, et une application continue Φ de A dans A telle que l'on ait

$$\Phi(k \cdot a) = \tau k \cdot \Phi(a), \qquad k \in K, \qquad a \in A,$$

où τ est un endomorphisme de K. L'application Φ définit par passage au quotient une application continue $\tilde{\Phi}$ de A/K, l'espace des orbites de K dans A, dans lui-même. Supposons τ ergodique dans K, et les points périodiques de τ et de $\tilde{\Phi}$ denses dans K et A/K respectivement. Alors les points périodiques de Φ sont denses dans A.

Tous les polynômes considérés par la suite sont à coefficients entiers.

Démonstration du théorème :

1) Supposons tout d'abord que, pour des entiers n et $p > 0$, l'on ait $(U^p - I)^n = 0$. Dans ce cas, tout polynôme en U est égal à un polynôme en U de degré inférieur à np. Le groupe X a donc un système fini de générateurs en tant que Z-module. Il en résulte que X est la somme directe d'un groupe fini et d'un groupe isomorphe à Z^k, et par dualité G est le produit d'un groupe fini et d'un tore de dimension k. Soit H_s le sous-groupe de G formé des éléments g de G tels que $sg = e$, $s = 1, 2, \ldots$ Ce sous-

(1) Mentionnons un résultat analogue de R. LAXTON et W. PARRY, dont nous avons eu connaissance après la rédaction de ce texte.

groupe est fini et invariant par τ. Comme de plus, sous nos hypothèses, τ est injectif, les points de H_s sont des points périodiques pour τ. De la densité de la réunion des sous-groupes H_s dans G, on déduit le résultat, dans ce cas particulier.

Dans le cas général, utilisons le théorème 1.1 : il existe dans G un sous-groupe G_1 invariant par τ tel que la restriction de τ à G_1 soit ergodique surjective, et tel que U vérifie sur le dual de G/G_1 la relation $(U^p - I)^n = 0$, pour des entiers n, $p > 0$. D'après ce qui précède, il suffit donc d'étudier le cas où τ est ergodique.

2) Considérons le sous-groupe de torsion X de Y. Soit H l'annulateur de Y dans G. La restriction de τ à H est encore un endomorphisme ergodique surjectif. En effet, si $U^n x - x \in Y$, pour $x \in X$, $n > 0$, on a :

$$0 = p(U^n x - x) = (U^n - I)(px),$$

et x est dans Y d'après l'ergodicité de τ dans G. De même pour la surjectivité. Nous sommes donc amenés à distinguer deux cas, selon que X est de torsion, ou sans torsion. Supposons d'abord X de torsion.

Comme X possède un système fini de U-générateurs, il existe un entier $q > 0$ fixé tel que $qx = 0$, pour tout $x \in X$. Si $q = \prod_p p^{v(p)}$ est la décomposition de q en facteurs premiers, X se décompose en la somme directe des sous-groupes $X_p = \{ x : p^{v(p)}x = 0 \}$, et cette décomposition est invariante par U. On peut donc supposer qu'il existe p premier et $v > 0$ tels que $p^v x = 0$, pour tout $x \in X$.

Soit $Y_1 = \{ x \in X : px = 0 \}$, d'annulateur G_1 dans G. Il existe une décomposition de Y_1 en facteurs directs simples, et la transformation U opère une permutation de ces facteurs, qui est une permutation cyclique infinie, car il n'y a pas d'orbite finie non triviale par U. Le système $(G/G_1, \tau)$ est alors le produit direct d'un automorphisme (bilatère) et d'un endomorphisme (unilatère) de Bernouilli et satisfait à la propriété de densité des points périodiques. Comme la restriction de τ à G_1 est ergodique, on peut raisonner par récurrence sur l'entier v. On obtient ainsi le résultat dans le cas où X est de torsion (Ceci est un cas particulier d'un résultat de S. A. Iuzvinski sur la structure des endomorphismes de groupes compacts totalement discontinus, voir les rappels de la section B), théorème 1.3).

3) Supposons maintenant X sans torsion. Soit $Y = \{ x \in X : P(U)x = 0$, pour un polynôme $P \not\equiv 0 \}$. Le sous-groupe Y est invariant par U, et la restriction de τ à l'annulateur H de Y dans G est ergodique et surjective. Il suffit donc de raisonner successivement sur H et sur G/H, c'est-à-dire

de supposer que X est un Z(U)-module de torsion, ou un Z(U)-module sans torsion.

Plaçons-nous dans le premier cas. Comme X a un système fini de U-générateurs, il existe un polynôme S non identiquement nul tel que $S(U)x=0$, pour tout x dans X. Soit $\prod_j T_j$ la décomposition de S en facteurs irréductibles sur les corps des rationnels. Quitte à multiplier S par un entier, on peut prendre des polynômes T_j à coefficients entiers.

En fait, on peut se borner au cas où S est irréductible. En effet, soit $Y_1 = \{ x \in X : T_1(U)x = 0 \}$, d'annulateur H_1 dans G. La restriction de τ à H_1 est un endomorphisme ergodique surjectif, et il est possible de raisonner par récurrence sur le nombre des facteurs de S.

Sous les conditions satisfaites ici (X est sans torsion sur Z et a un système fini de U-générateurs, $S(U)x = 0$, pour tout $x \in X$, S étant un polynôme irréductible), il existe des éléments $x_1, \ldots, x_i$ dans X tels que toute relation $\Sigma P_i(U)x_i = 0$, avec degré de $P_i <$ degré de S, entraîne que les polynômes P_i sont identiquement nuls. De plus, les éléments x_i sont tels que pour tout x, il existe en entier r et des polynômes P_i de degré $<$ degré S vérifiant $a^r x = \Sigma P_i(U)x_i$, a étant le coefficient de plus haut degré de S.

Considérons un entier q premier avec a et b, le terme constant de S (τ étant surjectif, U est injectif et b est non nul). Le sous-groupe qX est d'indice fini dans X. En effet, il existe des entiers u et b, avec $a^r u + vq = 1$, et tout $x \in X$ s'écrit: $x = u\Sigma P_i(U)x_i + qvx$, les degrés des polynômes P_i étant bornés.

L'annulateur de qX, pour q premier avec a et b, est donc un sous-groupe fini invariant par τ dans G. Pour montrer que les points de ce sous-groupe sont périodiques pour τ, il suffit de vérifier que τ définit un automorphisme sur ce sous-groupe, ou encore que l'application définie par U sur X/qX est surjective.

On peut écrire $bx = UR(U)x$, pour tout x. Si c et d vérifient $cq + db = 1$, on en déduit $x = qcx + UdR(U)x$, ce qui montre que tout x est congru modulo qX à un élément qui est dans l'image de U. Ainsi U est surjective sur le quotient X/qX.

Soit M l'ensemble des entiers q premiers avec a et b. Pour obtenir la densité des points périodiques de τ, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que les annulateurs des sous-groupes qX, $q \in M$, ont une réunion dense dans G. Cette dernière propriété équivaut elle-même à la relation $\bigcap_{q \in M} qX = \{ 0 \}$.

Soit x dans l'intersection des sous-groupes qX, $q \in M$. Pour tout $q \in M$, il existe $y_q \in X$ tel que $x = qy_q$. Il existe alors des entiers r, r_q et des polynômes P_i, $P_{q,i}$ de degré inférieur à degré de S, tels que:

$$a^r x = \Sigma P_i(U)x_i, \qquad a^{r_q} y_q = \Sigma P_{q,i}(U)x_i.$$

D'après les conditions sur les x_i et sur les degrés des polynômes, il en résulte: $a^{r_q}P_i \equiv qa^rP_{q,i}$. Donc q doit diviser les coefficients des polynômes P_i, et, l'ensemble M étant infini, ces polynômes sont identiquement nuls. D'où $x = 0$.

4) Il reste à envisager le cas où X est un Z(U)-module sans torsion. Il existe, dans ce cas, des éléments $x_1, \ldots, x^s$ dans X et un polynôme R tels que pour tout $x \in X$, on ait: $R(U)x = \Sigma P_i(U)x_i$, où les P_i sont des polynômes déterminés de façon unique. En particulier, de $\Sigma P_i(U)x_i = 0$, on déduit $P_i \equiv 0$, pour tout i.

Montrons que $\bigcap_n (U^n - I)X = \{ 0 \}$. Cette relation entraînera par dualité la densité des points périodiques de τ. Soit x un élément de X tel que pour tout n, il existe $y_n \in X$, avec $x = (U^n - I)y_n$. Écrivons:

$$R(U)x = \Sigma P_i(U)x_i, \qquad R(U)y_n = \sum_i P_{n,i}(U)x_i.$$

On en tire:

$$\sum_i P_i(U)x_i = (U^n - I)\sum_i P_{n,i}(U)x_i.$$

Les polynômes $P_i(t)$ doivent être divisibles par $t^n - 1$, pour tout n. On a donc $P_i \equiv 0$, et $x = 0$.

B) Sur la structure des automorphismes de groupes compacts.

Considérons maintenant un groupe compact séparable G et un automorphisme τ de G. Nous rappelons ici des résultats de S. A. Iuzvinski [*12*] concernant la structure du système (G, τ).

Soient Z la composante connexe de l'élément neutre de G et C le centre de Z. Les sous-groupes Z et C sont normaux dans G et strictement invariants par τ. L'étude de l'automorphisme τ de G se ramène à l'étude de la restriction de τ à C, qui est un groupe compact abélien, à l'étude de l'automorphisme induit par τ dans G/Z, qui est un groupe compact totalement discontinu, enfin à l'étude de l'automorphisme induit par τ dans Z/C, qui, d'après la proposition suivante, est un groupe compact connexe de centre trivial. La structure de ces deux derniers automorphismes est donnée par les théorèmes 1.3 et 1.4 ci-dessous.

PROPOSITION 1.1. — Si Z est un groupe connexe compact et C son centre, le groupe Z/C est de centre trivial.

Démonstration. — Le résultat est démontré en particulier dans [*12*]. Nous donnons ici une démonstration élémentaire, qui ne fait pas appel à la structure des groupes compacts.

Le centre de Z/C est de la forme H/C, où H est un sous-groupe normal de Z. Pour tout $h \in \mathrm{H}$ et tout $g \in \mathrm{G}$, l'élément $h^{-1}g^{-1}hg$ est dans C et ne dépend que de la classe de h modulo C. De plus, l'application $h \to h^{-1}g^{-1}hg$ est un homomorphisme de H dans C.

Si α est un caractère de C, l'application $h\mathrm{C} \to \alpha(h^{-1}g^{-1}hg)$ définit donc un caractère de H/C, dont la valeur moyenne sur H/C est 0 ou 1. Comme cette valeur dépend continûment de g et comme G est connexe, elle est égale à 1 identiquement, et $\alpha(h^{-1}g^{-1}hg) = 1$, pour tout caractère α de C. On a donc $hg = gh$, pour tout $h \in \mathrm{H}$ et tout $g \in \mathrm{G}$. Ainsi $\mathrm{H} = \mathrm{C}$ et le centre de Z/C est trivial.

DÉFINITION. — Un automorphisme τ d'un groupe compact G est appelé *automorphisme de Bernoulli*, si G est isomorphe au produit direct d'une suite dénombrable d'exemplaires d'un groupe compact H, et si τ est donné par $\tau(g) = \{ h'_n \}$, où $g \in \mathrm{G}$, $g = \{ h_n \}$, $h_n \in \mathrm{H}$, $n = 0, \pm 1, \ldots, h'_n = h_{n+1}$.

THÉORÈME 1.3 (S. A. Iuzvinski [*12*], voir également K. Thomas [*14*]). — Si G est un groupe compact séparable totalement discontinu et τ un automorphisme de G, il existe dans G une suite décroissante de sous-groupes fermés : $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \supset \mathrm{G}_1 \supset \ldots \supset \mathrm{G}_n \supset \ldots$, ayant les propriétés suivantes : G_n est strictement invariant par τ, G_n est normal dans G_{n-1}, $\bigcap_n \mathrm{G}_n = e$, enfin, ou bien $\mathrm{G}_n/\mathrm{G}_{n+1}$ est fini, ou bien τ induit sur $\mathrm{G}_n/\mathrm{G}_{n+1}$ un automorphisme de Bernoulli.

THÉORÈME 1.4 (S. A. Iuzvinski [*12*]). — Si G est un groupe compact séparable connexe de centre trivial, et τ un automorphisme de G, on peut décomposer (G, τ) en un produit $(\mathrm{G}_1, \tau_1) \times (\mathrm{G}_2, \tau_2)$, où (G_1, τ_1) est un automorphisme de Bernoulli et (G_2, τ_2) un produit direct d'automorphismes de groupes de Lie simples compacts.

§ 2. EXTENSIONS DE SYSTÈMES DYNAMIQUES PAR DES ENDOMORPHISMES DE GROUPES COMPACTS

A) Définitions.

Dans toute la suite, nous supposons donné un espace de Lebesgue $(X, \mathscr{B}, m)$. Rappelons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-tribus de $\mathscr{B}$ et les partitions mesurables de X. A toute partition mesurable ζ de X est associée la tribu $\mathscr{B}_\zeta$ formée des ensembles qui, à un ensemble de mesure nulle près, sont réunion d'éléments de ζ. Inversement, pour toute sous-tribu $\mathscr{B}_1$ de $\mathscr{B}$, il existe une partition ζ telle que $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_\zeta$ (voir, par exemple, V. A. Rokhlin [*20*]).

D'autre part, toute partition mesurable ζ de X définit un espace facteur de $(X, \mathscr{B}, m)$ qui est encore un espace de Lebesgue : les points de cet espace sont les éléments de ζ, et sa structure mesurable est déduite de celle de $(X, \mathscr{B}, m)$ par la projection qui à $x \in X$ fait correspondre l'élément de ζ contenant x. Nous disposons ainsi de trois notions équivalentes : sous-tribu de $\mathscr{B}$, partition mesurable de X, espace facteur.

Soit T une transformation de X, $\mathscr{B}$-mesurable et conservant m. Le quadruplet $(X, \mathscr{B}, m, T)$ constitue un *système dynamique*, que nous noterons simplement (X, T), quand il n'y aura pas d'ambiguité sur le choix de $\mathscr{B}$ et de m.

Si ζ est une partition mesurable de X invariante par T, on notera T/ζ la transformation induite par T sur l'espace facteur associé à ζ. On dira également que T/ζ constitue un système facteur de (X, T).

Supposons donné en outre un groupe compact G d'automorphismes de l'espace $(X, \mathscr{B}, m)$ tel que l'application $(g, x) \to g \cdot x$, de $G \times X$ dans X, soit mesurable quand on munit $G \times X$ du produit de la tribu borélienne de G et de la tribu $\mathscr{B}$, et X de la tribu $\mathscr{B}$. La représentation unitaire de G dans $L^2(X)$ définie par $(U_g f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$, $g \in G$, $f \in L^2(X)$, est alors continue (On a noté $g \cdot x$ l'action d'un élément g de G sur X).

DÉFINITION. — On dit que le système (X, T) est une *extension de type* (G, τ), s'il existe un endomorphisme surjectif τ de G tel que, pour tout $g \in G$, on ait : $T(g \cdot x) = \tau g \cdot Tx$, m-presque partout.

Les ensembles dans $\mathscr{B}$ invariants par G forment une sous-tribu $\tilde{\mathscr{B}}$ qui est alors invariante par T. On note $(X/G, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{m})$ le facteur de $(X, \mathscr{B}, m)$ associé à $\tilde{\mathscr{B}}$. La transformation T définit par passage au quotient une transformation $\tilde{T}$ de $(X/G, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{m})$. On peut considérer que le système $(X, \mathscr{B}, m, T)$

est obtenu par extension de $(X/G, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{m}, \tilde{T})$. En résumé, on dit que (X, T) est une *extension de type* (G, τ) de $(X/G, \tilde{T})$.

DÉFINITION. — Un groupe G de transformations mesurables d'un espace $(X, \mathscr{B}, m)$ opère *ergodiquement* sur une partition mesurable η de X, si G laisse la partition η invariante, et si tout ensemble η-mesurable invariant par G est de mesure 0 ou 1.

PROPOSITION 2.1. — Soient (X, T) une extension de type (G, τ) et η une partition mesurable de X invariante par T. Si G opère ergodiquement sur η, la transformation T/η est isomorphe à une transformation affine α sur le quotient de G par un sous-groupe H : $\alpha(gH) = g_0\sigma(g)H$, où $\sigma(g) = g_0^{-1}\tau(g)g_0$, g_0 fixé dans G, et H est invariant par l'endomorphisme σ.

Démonstration. — Nous construisons une correspondance entre les ensembles de $\mathscr{B}$ η-mesurables et les ensembles boréliens d'un quotient G/H de G, qui fait passer de la mesure m à la mesure induite sur G/H par la mesure de Haar de G et de T/η à une transformation affine α sur G/H.

D'après la continuité de la représentation de G dans $L^2(\eta)$, il existe une base de $L^2(\eta)$ formée de fonctions $f_{i,n}$, telles que pour tout $g \in G$, on ait

$$f_{i,n}(g\cdot x) = \sum_j \lambda_{j,i,n}(g) f_{j,n}(x),$$

où les coefficients $\lambda_{j,i,n}$ sont des fonctions continues de g, en nombre fini pour n fixé. Les fonctions $f_{i,n}$ sont dans $L^\infty(\eta)$. En effet, posons

$$\Phi_{i,n}(x) = \sup\{\, | f_{i,n}(g\cdot x)|,\ g \in G \,\};$$

ces fonctions sont dans $L^2(\eta)$ et invariantes par G, donc constantes.

Soit $\mathscr{M}$ la sous-algèbre de $L^\infty(\eta)$ engendrée par les fonctions $f_{i,n}$ et leurs translatées par les puissances de T. Elle est invariante par T et dense dans $L^2(\eta)$. Sa fermeture $\bar{\mathscr{M}}$ dans $L^\infty(\eta)$ est isométrique à l'algèbre $\mathscr{C}(Z)$ des fonctions continues sur un compact Z, pour les normes uniformes sur $\bar{\mathscr{M}}$ et sur $\mathscr{C}(Z)$. Notons $\hat{f}$ l'image de f. La mesure m sur X/η se transporte en une mesure m' sur Z, et $\hat{f} \to f$ est une isométrie de $\mathscr{M}$, munie de la norme de L^2, dans $L^2(Z, m')$ qui se prolonge en une isométrie de $L^2(\eta)$ sur $L^2(Z)$. D'autre part à T et $x \to g\cdot x$ correspondent des applications continues de Z dans Z : $z \to T'z$, $g \to g\cdot z$. L'application $(g, z) \to g\cdot z$ de $G \times Z$ dans Z est continue. En effet, on a, en notant $g \to U(g)$ la représentation de G dans $L^2(\eta)$ et dans $L^2(Z)$, $\| U(g)f_{i,n} - f_{i,n} \|_\infty \to 0$, $g \to e$, d'après la continuité des coefficients $\lambda_{j,i,n}$, et cette propriété s'étend aux fonctions de $\overline{\mathcal{M}}$. D'où $\| U(g)\hat{f} - \hat{f} \|_\infty \to 0$, $g \to e$, pour toute fonction $\hat{f}$ continue sur Z, ce qui entraîne le résultat compte tenu de la compacité de G et de Z.

Il en résulte que l'espace Z/G des orbites de G dans Z est séparé. Toute fonction continue sur cet espace se relève en une fonction continue sur Z invariante par G, image d'une fonction de $L^2(\eta)$, elle-même invariante par G et donc constante. Ainsi Z/G est réduit à un point, et on peut identifier Z avec le quotient de G par le stabilisateur d'un point de Z; la mesure m' étant invariante par G, elle coïncide avec la mesure induite sur G/H par la mesure de Haar de G. L'hypothèse d'extension de type (G, τ) montre immédiatement qu'à la transformation T/η correspond la transformation affine décrite dans l'énoncé.

COROLLAIRE 2.1. — Si G opère ergodiquement sur une partition η invariante par T et si l'action de G commute avec T, le spectre de T/η est discret.

Démonstration. — La transformation T/η est isomorphe à un quotient de la transformation $g \to g_0 g g_0^{-1}$ de G, qui est une isométrie.

B) Entropie des systèmes dynamiques. Extension des systèmes d'entropie complètement positive.

Pour les notions sur l'entropie utilisées dans la suite, voir V. Rokhlin [*20*], ou W. Parry [*18*]. Nous nous bornons à rappeler quelques définitions et quelques résultats.

L'entropie d'une partition mesurable finie α de X en éléments A_i est définie par $H(\alpha) = -\sum_i m(A_i) \log m(A_i)$. On montre que la suite

$$1/n H(\alpha \vee T\alpha \vee \ldots \vee T^{n-1}\alpha)$$

a une limite, quand n tend vers l'infini, notée $h(\alpha, T)$ (On note $\alpha \vee \beta$ la borne supérieure de deux partitions α et β).

L'entropie de la transformation T est définie par $h(T) = \sup_\alpha h(\alpha, T)$, où α décrit les partitions mesurables finies (ou, ce qui revient au même, d'entropie finie).

Pour tout système (X, T), il existe un plus grand système facteur $T/\Pi(T)$ d'entropie nulle, $\Pi(T)$ étant une partition mesurable de X invariante par T, appelée partition de Pinsker de T. Cette partition peut être définie comme la borne supérieure des partitions finies ζ de X telles que $h(\zeta, \mathrm{T})$ soit nul. Elle coïncide avec la partition de Pinsker du système $(\mathrm{X}, \mathrm{T}^n)$, pour tout $n > 0$. La tribu engendrée par $\Pi(\mathrm{T})$ est appelée tribu de Pinsker de T.

Un système (X, T) est d'*entropie complètement positive*, par définition, si tout système facteur non trivial de (X, T) est d'entropie non nulle, autrement dit si la partition de Pinsker de T est triviale.

Si $\{ \zeta_n \}$ est une suite croissante de partitions mesurables de X invariantes par T, les partitions de Pinsker des restrictions de T aux ζ_n et à la borne supérieure des ζ_n satisfont à la relation :

$$\Pi\left(\mathrm{T}\Big/\bigvee_n \zeta_n\right) = \bigvee_n \Pi(\mathrm{T}/\zeta_n).$$

En particulier, s'il existe dans X une suite croissante de partitions ζ_n, invariantes par T, telles que les systèmes T/ζ_n soient d'entropie complètement positive, alors $\mathrm{T}\Big/\bigvee_n \zeta_n$ est d'entropie complètement positive.

Nous appliquerons ces résultats dans le cas où, (X, T) étant une extension de type (G, τ), il existe dans G une suite décroissante de sous-groupes H_n, invariants par τ, tels que $\bigcap_n \mathrm{H}_n = \{ e \}$. Les partitions ξ_n de X en les orbites de H_n forment une suite croissante de partitions invariantes telles que $\bigvee_n \xi_n = \varepsilon$. Si, pour tout n, $(\mathrm{X}/\mathrm{H}_n, \mathrm{T}) = \mathrm{T}/\xi_n$ est d'entropie complètement positive, il en est de même pour (X, T).

Enfin, mentionnons le résultat de type spectral suivant. Désignons par $\mathrm{L}^2(\Pi(\mathrm{T}))$ le sous-espace de $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ formé des fonctions mesurables par rapport à la tribu de Pinsker de T. Si (X, T), T inversible, est d'entropie non nulle, il a un spectre de Lebesgue dénombrable sur l'orthogonal de $\mathrm{L}^2(\Pi(\mathrm{T}))$.

Dans [*19*], V. A. Rokhlin a montré que les endomorphismes ergodiques de groupes compacts abéliens sont d'entropie complètement positive. Ce résultat a été étendu par S. A. Iuzvinski [*12*] au cas des groupes compacts. Plus généralement, soit (X, T) une extension de type (G, τ) d'un système d'entropie complètement positive. Nous allons montrer (théorème 5.1) que si (X, T) a un spectre continu, il a une entropie complètement positive. Ce résultat, que nous avons obtenu dans des cas particuliers (G abélien, ou τ ergodique) [*6*], est dû dans le cas général à K. Thomas [*14*] (voir également W. Parry [*16*]).

PROPOSITION 2.2. — Soit (X, T) une extension de type (G, τ). La partition de Pinsker $\Pi(T)$ de T est invariante par G. Si τ est ergodique dans G, G opère trivialement sur $\Pi(T)$.

Démonstration. — En utilisant « l'extension naturelle » de (G, τ) nous pouvons nous ramener au cas où τ est un automorphisme. Les résultats du paragraphe 1 permettent de montrer que tout automorphisme d'un groupe compact séparable peut être obtenu par des limites projectives d'extensions successives réalisées à l'aide d'endomorphismes ayant des points périodiques denses. On peut donc supposer, compte tenu des propriétés des partitions de Pinsker rappelées plus haut, que τ a des points périodiques denses.

Si ζ est une partition finie de X telle que $h(\zeta, T) = 0$, et si g est un point fixe de τ, on a $h(g\zeta, T) = h(\zeta, T) = 0$. Donc les points fixes de τ laissent invariante $\Pi(T)$. De même, les points périodiques de τ, de période n, laissent invariante $\Pi(T^n) = \Pi(T)$. D'après la continuité de l'action de G sur $L^2(X)$ et la densité des points périodiques de τ, on en déduit que $\Pi(T)$ est invariante par tous les éléments de G.

Le système $(\Pi(T), T/\Pi(T))$ est une extension de type (G, τ) d'entropie nulle. En changeant de notation, on est donc conduit à démontrer que, si un système (X, T) est une extension de type (G, τ) d'entropie nulle et si τ est ergodique, alors G opère trivialement sur X.

Étant donnés, en général, deux systèmes (Y_1, S_1) et (Y_2, S_2), la partition de Pinsker du produit $(Y_1 \times Y_2, S_1 \times S_2)$ est le produit des partitions de Pinsker de (Y_1, S_1) et de (Y_2, S_2).

Appliquons ce résultat aux systèmes (G, τ) et (X, T). Comme τ est ergodique, (G, τ) est d'entropie complètement positive (de façon évidente quand G est totalement discontinu d'après le théorème 1.3, d'après V. Rokhlin [*19*] dans le cas où G est abélien, d'après S. Iuzvinski [*12*] dans le cas général). D'autre part, on sait que (X, T) est d'entropie nulle. La partition de Pinsker de $(G \times X, \tau \times T)$ est donc égale à $\nu_G \times \varepsilon_X$, où ν_G est la partition triviale de G, et ε_X la partition de X en ses points.

Autrement dit, le plus grand facteur d'entropie nulle du produit $(G \times X, \tau \times T)$ est le facteur $(G \times X, \tau \times T) \xrightarrow{p} (X, T)$, $p(g, x) = x$, qui coïncide donc avec le facteur $(G \times X, \tau \times T) \xrightarrow{p'} (X, T)$, $p'(g, x) = g \cdot x$. En termes d'algèbres de fonctions, cela signifie que toute fonction φ sur $G \times X$ de la forme $\varphi(g, x) = f(g \cdot x)$, $f \in L^\infty(X)$, ne dépend que de la variable x. On en déduit que toute fonction dans $L^\infty(X)$ est invariante par G.

PROPOSITION 2.3. — Soit (X, T) une extension de type (G, τ) d'un système d'entropie complètement positive, G étant un groupe compact abélien.

Si le système (X, T) a un spectre continu, il est d'entropie complètement positive.

Démonstration. — Nous avons vu dans la proposition précédente que G laisse $\Pi(T)$ invariante. D'autre part, nous pouvons supposer, d'après les résultats du paragraphe 1, soit que τ est ergodique, soit que τ est d'ordre fini. Dans le premier cas, G opère trivialement sur $\Pi(T)$, et comme le facteur $(X/G, \tilde{T})$ est d'entropie complètement positive, $\Pi(T)$ est la partition triviale.

Si τ est d'ordre fini, on peut supposer, quitte à remplacer T par une puissance, que G et T commutent. Mais G opère ergodiquement sur $\Pi(T)$, puisque tout ensemble $\Pi(T)$-mesurable et invariant par G est dans la tribu de Pinsker de $\tilde{T}$ et donc de mesure 0 ou 1. Le corollaire de la proposition 2.1 montre alors que le spectre de $T/\Pi(T)$ est discret. Comme T est à spectre continu, ceci entraîne que $\Pi(T)$ est triviale.

LEMME 2.1. — Soit G un groupe de Lie semi-simple compact. Toute extension ergodique de type (G, τ) d'un système à spectre continu a un spectre continu.

Démonstration. — Il est équivalent de montrer que T ou que T^n, $n > 0$, a un spectre continu. Comme le groupe des automorphismes intérieurs de G est d'indice fini dans le groupe des automorphismes de G, en remplaçant au besoin T par une puissance, on peut supposer que τ est un automorphisme intérieur de G : $\tau g = a^{-1}ga$, où a est un élément fixé dans G.

Soient K le sous-groupe fermé de G engendré par a, et T′ la transformation $x \to a \cdot Tx$. On montre, en faisant opérer K sur $L^2(X)$, que les sous-espaces engendrés par les fonctions propres de T et de T′ dans $L^2(X)$ coïncident. Soient $\mathscr{H}_1$ ce sous-espace, et $\mathscr{A}_1$ la sous-tribu de $\mathscr{A}$ correspondante. Comme G commute avec T′, G laisse stable $\mathscr{H}_1$, et donc opère sur $\mathscr{A}_1$, ergodiquement d'après les hypothèses du lemme.

D'après la proposition 2.1, le système défini par l'action de T sur $\mathscr{H}_1$ est isomorphe à une isométrie ergodique sur un quotient G/H de G. Donc le sous-groupe fermé F engendré par T′ dans le groupe compact des isométries de G/H opère transitivement sur G/H. En transportant la structure du groupe abélien F sur G/H, on obtient sur G/H une structure de groupe topologique compact abélien. Deux caractères distincts de ce groupe définissent des éléments distincts du premier groupe d'homologie de G/H, contrairement à un théorème de T. Frankel [*8*], d'après lequel le premier groupe d'homologie d'un espace homogène d'un groupe de Lie compact semi-simple est trivial.

Donc, nécessairement, G/H est réduit à un point, et T est à spectre continu.

PROPOSITION 2.4. — Soit (X, T) une extension de type (G, T) d'un système d'entropie complètement positive, G étant un groupe de Lie compact semi-simple. Si le système (X, T) est ergodique, il est d'entropie complètement positive.

Démonstration. — On peut, comme dans le lemme, supposer que τ est intérieur, $\tau g = a^{-1}ga$, $a \in G$. Reprenant une méthode due à K. Thomas, nous considérons à nouveau la transformation $T' : x \to a \cdot Tx$. Nous avons vu dans le lemme que T et T′ sont à spectre continu. Comme G et T′ commutent, la partition $\Pi(T')$ est invariante par G, et, T et T′ ayant même quotient d'entropie complètement positive dans X/G, G opère ergodiquement sur $\Pi(T')$. Le corollaire 2.1 montre que $T'/\Pi(T')$ est à spectre discret, ce qui entraîne que $\Pi(T')$ est triviale.

Faisons opérer K sur X. Les transformations T et T′ ayant même quotient dans X/K, le système (X/K, $\tilde{T}$) est d'entropie complètement positive, en tant que facteur de (X, T′). Mais (X, T) est une extension à spectre continu de (X/K, $\tilde{T}$) et K est abélien. La proposition 2.3 montre alors que (X, T) est d'entropie complètement positive.

PROPOSITION 2.5. — Soit (X, T) une extension de type (G, τ) d'un système d'entropie complètement positive, G étant un groupe compact dont la composante connexe neutre a un centre trivial. Si le système (X, T) est totalement ergodique, c'est-à-dire si (X, T^n) est ergodique pour tout $n>0$, il est d'entropie complètement positive.

Démonstration. — D'après les théorèmes de structure du paragraphe 1, il suffit de démontrer la proposition dans les cas particuliers suivants : G est un groupe de Lie simple compact, (G, τ) est un automorphisme de Bernoulli, ou bien enfin G est un groupe fini.

Dans le premier cas, on applique la proposition précédente, dans le deuxième cas la proposition 2.2. Supposons, pour terminer, G fini. Comme G opère ergodiquement sur $\Pi(T)$, $\Pi(T)$ est une partition finie, donc triviale, puisque T est totalement ergodique et permute les éléments de $\Pi(T)$.

THÉORÈME 2.1 (K. Thomas [*14*]). — Soit (X, T) une extension de type (G, τ) d'un système d'entropie complètement positive. Si le système (X, T) a un spectre continu, il est d'entropie complètement positive.

Démonstration. — Soient Z la composante connexe de l'élément neutre de G, et C le centre de Z. D'après la proposition 1.1, Z/C a un centre trivial. En appliquant la proposition 2.5 à l'extension (X/C, T) de (X/G, T) par $(G/C, \tau)$, et la proposition 2.3 à l'extension (X, T) de $(X/C, T)$ par (C, τ), on obtient le résultat.

Remarque. — On retrouve, comme un cas particulier du théorème précédent, le résultat de S. A. Iuzvinski: les endomorphismes ergodiques de groupes compacts sont d'entropie complètement positive. On sait, en effet, que ces transformations ont un spectre continu.

Une application aux propriétés spectrales des K-systèmes

Soient (Y, S) un système dynamique et Φ une application mesurable de Y dans un groupe compact abélien G. Construisons le produit gauche (X, T) de base (Y, S) associé à Φ, défini sur l'espace $X = G \times Y$ par

$$T(g, x) = (\Phi(y)g, Sy).$$

Le système (X, T) est une extension de (Y, S). Remarquons que les fonctions de la forme $\chi(g)f(y)$, où χ est un caractère de G et f une fonction mesurable sur Y solution de l'équation fonctionnelle $\chi(\Phi(y))f(S(y)) = \lambda f(y)$, λ étant une constante de module 1, forment un système total dans le sous-espace de $L^2(X)$ engendré par les fonctions propres de T.

Supposons maintenant (Y, S) d'entropie complètement positive. Il résulte des raisonnements de la proposition 2.3 que le sous-espace de $L^2(X)$ engendré par les fonctions propres de T coïncide avec $L^2(\Pi(T))$, le sous-espace de $L^2(X)$ formé des fonctions mesurables par rapport à la tribu de Pinsker de T. On sait d'autre part que T est à spectre de Lebesgue, et en particulier est mélangeant, sur l'orthogonal de $L^2(\Pi(T))$.

Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cas où G est le groupe K des complexes de module 1. Considérons l'équation fonctionnelle

$$\Phi(y)h(S(y)) = \lambda h(y),$$

où l'inconnue est la fonction $h(y)$. Si pour toute constante λ, cette équation n'a pas de solution mesurable, les fonctions de la forme $(k, y) \to kf(y)$, $f \in L^2(Y)$, sont orthogonales aux fonctions propres de T. On déduit alors de la propriété de mélange de T,

$$\int_Y \Phi(y)\Phi(Sy) \ldots \Phi(S^{n-1}y)\overline{f(y)}f(S^n y)dm(y) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Dans le cas contraire, il existe une fonction f de module 1 et une constante λ de module 1, telles que $\Phi(y)f(S(y)) = \lambda f(y)$. D'après la propriété de mélange de S, qui résulte de l'hypothèse que (Y, S) est d'entropie complètement positive, on a la relation :

$$\lambda^{-n} \int_Y \Phi(y)\Phi(Sy) \ldots \Phi(S^{n-1}y)dm(y) \to \left| \int_Y f(y)dm(y) \right|^2, \qquad n \to \infty.$$

Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. — Soit (Y, S) un système d'entropie complètement positive. Pour toute fonction Φ mesurable sur Y de module 1, l'expression :

$$\left| \int_Y \Phi(y)\Phi(Sy) \ldots \Phi(S^{n-1}y)dm(y) \right|$$

tend vers une limite, pour n tendant vers l'infini. Si l'équation fonctionnelle en h, $\Phi(y)h(S(y)) = \lambda h(y)$ n'a de solution mesurable pour aucune valeur de la constante λ, pour toute fonction f dans $L^2(Y)$ l'expression :

$$\int_Y \Phi(y)\Phi(Sy) \ldots \Phi(S^{n-1}y)\overline{f(y)}f(S^n y)dm(y)$$

tend vers 0, pour n tendant vers l'infini.

Remarque. — L'étude des extensions de systèmes suggère la question suivante : si (Y, S) est un système à spectre de Lebesgue, resp. mélangeant, ses extensions par un groupe compact, sont-elles à spectre de Lebesgue, resp. mélangeantes, quand elles ont un spectre continu ?

Les raisonnements précédents montrent que cette question est reliée à l'étude de la convergence d'expressions du type :

$$\int_Y \Phi(y)\Phi(Sy) \ldots \Phi(S^n y)dm(y),$$

où Φ est une fonction mesurable sur Y, de module 1.

C) **Disjonction et extensions.**

Dans [*9*], H. Furstenberg a introduit la notion de systèmes dynamiques disjoints.

DÉFINITION. — Deux systèmes $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ sont *disjoints* si pour tout système $(Z, \mathscr{C}, \theta, R)$ dont ils sont facteurs (pour des homomorphismes α et β) les tribus $\alpha^{-1}(\mathscr{A})$ et $\beta^{-1}(\mathscr{B})$ sont indépendantes dans $(Z, \mathscr{C}, \theta)$.

Soient Π_X et Π_Y les projections de l'espace $X \times Y$ sur X et Y respectivement. Une condition équivalente à la disjonction est que la mesure sur le produit $(X \times Y, \mathscr{A} \times \mathscr{B})$ invariante par $T \times S$, qui se projette sur μ et ν par Π_X et Π_Y, soit la mesure produit $\mu \times \nu$.

Rappelons deux propriétés de la disjonction démontrées dans [9]. Si deux systèmes sont disjoints, l'un d'eux est d'entropie nulle, et leurs facteurs sont disjoints.

Soit alors $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ un système disjoint d'un système d'entropie strictement positive $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$. Le système $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ est nécessairement d'entropie nulle, et disjoint du plus grand facteur d'entropie nulle, le facteur de Pinsker, de $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$. Montrons la réciproque de ce résultat.

PROPOSITION 2.6. — Pour qu'un système $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ d'entropie nulle soit disjoint d'un système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$, il faut et il suffit qu'il soit disjoint du plus grand facteur d'entropie nulle de $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$.

Démonstration. — Nous devons démontrer que la condition est suffisante. Désignons par P la tribu de Pinsker de T dans X. Par hypothèse, le système $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ est disjoint de (X, P, μ, T). Soient $(Z, \mathscr{C}, \theta, R)$ un système et α et β des homomorphismes de ce système sur $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$. Montrons que pour tout couple A, B, de sous-ensembles respectivement dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, on a : $\theta(\alpha^{-1}(A) \cap \beta^{-1}(B)) = \mu(A) \cdot \nu(B)$. Désignons par a (resp. b) la partition de Z en $\alpha^{-1}(A)$ (resp. $\beta^{-1}(B)$) et son complémentaire, par a^- et b^- les partitions $\bigvee_1^\infty R^{-n}a$, $\bigvee_1^\infty R^{-n}b$.

Comme $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ est d'entropie nulle, on a $H(b \mid b^-) = 0$ (Les entropies sont calculées dans Z relativement à la mesure θ). Des propriétés de l'entropie (cf. [20]), on déduit les relations suivantes :

$$H(a \mid a^-) = H(a \mid a^- \vee b).$$

En développant $H(a \vee b \mid a^-)$, on trouve la relation

$$H(a \mid a^-) + H(b \mid a \vee a^-) = H(b \mid a^-) + H(a \mid a^- \vee b),$$

d'où

$$H(b \mid a^-) = H(b \mid a \vee a^-).$$

Cette relation reste vérifiée si l'on remplace a par $R^{-n}a$, pour tout n. On a donc :

$$H(b \mid Ra^-) = H(b \mid a^-) = H(b \mid R^{-1}a^-) = \dots = H(b \mid R^{-n}a^-).$$

Quand n tend vers l'infini,

$$H(b \mid R^{-n}a^-) \quad \text{tend vers} \quad H\left(b \,\middle|\, \bigwedge_n R^{-n}a^-\right).$$

D'où :

$$\mathrm{H}(b \mid \mathrm{R}a^-) = \mathrm{H}\left(b \,\middle|\, \bigwedge_n \mathrm{R}^{-n}a^-\right). \tag{1}$$

La partition $\bigwedge_n \mathrm{R}^{-n}a^-$ est moins fine que la partition de Pinsker de (Z, R), car a est une partition finie : elle est l'image réciproque par α d'une partition P-mesurable. D'après la disjonction de $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}, \nu, \mathrm{S})$ et $(\mathrm{X}, \mathrm{P}, \mu, \mathrm{T})$, il en résulte que les partitions b et $\bigwedge_n \mathrm{R}^{-n}a^-$ sont indépendantes dans $(\mathrm{Z}, \mathscr{C}, \theta)$. La relation (1) s'écrit alors :

$$\mathrm{H}(b \mid \mathrm{R}a^-) = \mathrm{H}(b).$$

Donc, en particulier, b et a sont indépendantes, et les ensembles $\alpha^{-1}(\mathrm{A})$ et $\beta^{-1}(\mathrm{B})$ sont indépendants dans $(\mathrm{Z}, \mathscr{C}, \theta)$.

Il résulte de la proposition que les systèmes d'entropie nulle sont disjoints des systèmes d'entropie complètement positive. Inversement, si un système est disjoint de tout système d'entropie nulle, son plus grand facteur d'entropie nulle doit être disjoint de lui-même, donc est trivial. On a ainsi une caractérisation des systèmes d'entropie complètement positive en termes de disjonction (cf. [*9*]). En ce sens, les résultats qui terminent ce paragraphe peuvent être considérés comme une généralisation des propositions 2.2 à 2.5 et du théorème 2.1.

PROPOSITION 2.7. — Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu, \mathrm{T})$ une extension de type (G, τ) d'un système $(\mathrm{X}/\mathrm{G}, \tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathrm{T}})$ disjoint d'un système $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}, \nu, \mathrm{S})$. Supposons τ d'ordre fini. Si le système $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu, \mathrm{T})$ est à spectre continu, il est disjoint de $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}, \nu, \mathrm{S})$.

Démonstration. — Soit m une mesure sur $(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \mathscr{A} \times \mathscr{B})$, $\mathrm{S} \times \mathrm{T}$-invariante, telle que $\Pi_\mathrm{X} m = \mu$, $\Pi_\mathrm{Y} m = \nu$. Soit m_c la mesure définie sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ par $m_c(f) = \int_\mathrm{G} \int_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}} f(g \cdot x, y) dg dm(x, y)$. D'après la disjonction de $(\mathrm{X}/\mathrm{G}, \tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mathrm{T}})$ et de $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}, \mathrm{S})$, on a $m_c = \mu \times \nu$.

A une fonction mesurable bornée φ sur G, telle que $\int_\mathrm{G} \varphi(g) dg = 1$, associons la mesure $m_\varphi = m * \varphi$, définie par

$$\int_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}} f dm_\varphi = \int_\mathrm{G} \int_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}} f(g \cdot x, y) \varphi(g) dg dm(x, y).$$

D'après l'hypothèse d'extension, on a : $m_\varphi \circ (T \times S) = m_{\varphi\circ\tau}$. D'autre part, il existe $k > 0$ tel que τ^k soit l'identité. Donc m_φ est invariante par $T^k \times S^k$, et, comme elle est absolument continue par rapport à $m_c = \mu \times \nu$, sa densité λ_φ par rapport à cette mesure est invariante par $T^k \times S^k$. Le lemme 2.2 ci-dessous montre que λ_φ ne dépend que de y.

En appliquant la mesure m_φ à une fonction de la seule variable y, on obtient donc :

$$\int_{X\times Y} h(y)dm_\varphi(x, y) = \int_Y h(y)d\nu(y) = \int_Y h(y)\lambda_\varphi(y)d\nu(y).$$

D'où $\lambda_\varphi \equiv 1$, et m_φ est égale à $\mu \times \nu$.

On en déduit l'existence d'au moins un élément g dans G tel que

$$\int_{X\times Y} f(g\cdot x, y)dm(x, y) = \int_{X\times Y} f(x, y)d\mu(x)d\nu(y),$$

pour toute fonction f mesurable sur $X \times Y$. L'invariance de la mesure m par G en résulte, et on a bien $m = m_c = \mu \times \nu$.

Remarque. — La démonstration précédente est analogue à la démonstration donnée par H. Furstenberg du théorème 1.4 de [9].

LEMME 2.2. — Soient (X, μ, T) un système à spectre continu et (Y, ν, S) un système quelconque. Si f est une fonction de $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ invariante par $T \times S$, f ne dépend que de y.

Démonstration. — Soit f une fonction dans $L^2(X \times Y)$. Montrons que, pour toutes fonctions φ et ψ respectivement dans $L^2(X)$ et $L^2(Y)$ avec $\int_X \varphi d\mu = 0$, l'expression $1/(N+1)\sum_0^N \int_{X\times Y} f\circ(T^n \times S^n)\cdot\overline{\varphi}\overline{\psi}d\mu d\nu$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

Il suffit de montrer ce résultat pour une fonction f elle-même décomposée, de la forme $f(x, y) = h(x)k(y)$. Le système (X, μ, T) étant à spectre continu, l'expression $\int_X h\circ T^n\cdot\overline{\varphi}d\mu$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini en dehors d'un ensemble d'entiers de densité nulle. Comme la suite $\int_Y k\circ S^n\cdot\overline{\psi}d\nu$ est bornée, la convergence de

$$1/(N+1)\sum_0^N\left(\int_X h\circ T^n\cdot\overline{\varphi}d\mu\right)\left(\int_Y k\circ S^n\cdot\overline{\psi}d\nu\right)$$

vers 0 en résulte.

Supposons maintenant f invariante par $T \times S$. D'après ce qui précède, f est orthogonale aux fonctions de la forme $\varphi(x)\psi(y)$, avec $\int_X \varphi d\mu = 0$. Donc $f - \int_X f(x, y)d\mu(x)$ est orthogonale aux fonctions décomposées sur $X \times Y$. Elle est identiquement nulle, et f ne dépend que de y.

Remarque. — Comme cas particulier de ce résultat, on retrouve le fait que le produit d'un système à spectre continu par un système ergodique est ergodique (cf. [*9*], § II).

PROPOSITION 2.8. — Soit (X, μ, T) une extension de type (G, τ) d'un système $(X/G, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ disjoint d'un système (Y, ν, S) d'entropie nulle. Si τ est ergodique sur G, (X, μ, T) est disjoint de (Y, ν, S).

Démonstration. — D'après la proposition 2.2, G opère trivialement sur la partition de Pinsker de T. Cette partition est donc le relèvement dans X de la partition de Pinsker de $\tilde{T}$. Le système (Y, ν, S) étant d'entropie nulle, on obtient le résultat en appliquant la proposition 2.6.

THÉORÈME 2.3. — Soit (X, μ, T) une extension de type (G, τ) d'un système disjoint d'un système (Y, ν, S) d'entropie nulle. Si le système (X, μ, T) a un spectre continu, il est disjoint de (Y, ν, S).

Démonstration. — Remarquons que la relation de disjonction est stable par passage aux limites projectives. En appliquant le schéma de la démonstration du théorème 2.1, on se ramène aux cas où τ est d'ordre fini et où τ est ergodique. On utilise alors les propositions 2.7 et 2.8.

§ 3. APPLICATIONS DE LA NOTION D'EXTENSION

A) **Transformations affines sur des quotients de groupes compacts.**

La méthode des extensions s'applique à l'étude des propriétés ergodiques des transformations affines sur certains quotients compacts de groupes topologiques. C'est le cas notamment des quotients de groupes compacts, et des quotients compacts de nilvariétés. En effet, les transformations sur ces espaces homogènes définissent des systèmes qui sont obtenus par extension, ou par une suite d'extensions, à partir du système réduit à un point (voir W. Parry [*16*], pour le cas des nilvariétés).

Ici, nous appliquerons cette méthode à l'étude des transformations affines sur des quotients de groupes compacts. Rappelons d'abord la définition d'une transformation affine :

DÉFINITION. — Soit $X = G/\Gamma$ le quotient d'un groupe G localement compact par un sous-groupe fermé Γ. On appelle transformation affine sur X une transformation de la forme $g\Gamma \to aA(g)\Gamma$, où a est un élément fixé de G et A un endomorphisme surjectif de G tel que $A(\Gamma) \subseteq \Gamma$.

Si l'on suppose que la mesure m induite sur G/Γ par la mesure de Haar de G est invariante par l'action de G à gauche sur G/Γ, cette mesure est invariante par toute transformation affine T. Les propriétés ergodiques de T sont étudiées du point de vue de la mesure invariante m.

THÉORÈME 3.1. — Soit T une transformation affine $g\Gamma \to aA(g)\Gamma$, sur le quotient G/Γ d'un groupe compact séparable G par un sous-groupe fermé Γ. Si le système (X, T) a un spectre continu, il est d'entropie complètement positive. Dans le cas général, la partition de Pinsker $\Pi(T)$ du système (X, T) est la partition de X en classes par un sous-groupe H normal de G.

Démonstration. — Soit τ l'endomorphisme de G défini par $\tau g = aA(g)a^{-1}$. La première assertion résulte du fait que (X, T) est une extension de type (G, τ) et que G opère transitivement sur X.

La tribu de Pinsker de T est formée des ensembles dans G invariants à droite par Γ, mesurables par rapport à la partition de Pinsker de la transformation $g \to aA(g)$ de G dans G. Il suffit donc de démontrer la deuxième assertion dans le cas où la transformation affine considérée est définie sur le groupe G lui-même. D'après la proposition 2.2, G laisse invariante par translations à gauche et à droite la partition $\Pi(T)$. Soit H le sous-groupe de G formé des éléments h tels que, pour toute fonction f $\Pi(T)$-mesurable, $f(hg) = f(g)$, pour presque tout g. Le sous-groupe H est fermé normal dans G. D'après la proposition 2.1, $\Pi(T)$ est la partition de G en classes par H.

Pour terminer cette section, montrons que l'existence d'une transformation affine ergodique sur un quotient G/Γ d'un groupe compact impose, sous certaines hypothèses, des conditions au sous-groupe Γ.

THÉORÈME 3.2. — Soient G un groupe compact connexe de dimension topologique finie, et Γ un sous-groupe fermé de G. S'il existe sur G/Γ une transformation affine ergodique, Γ est normal dans G et G/Γ est abélien.

Démonstration. — Soit $T : g\Gamma \to aA(g)\Gamma$ une transformation affine ergodique de G/Γ. Rappelons que d'après les théorèmes de structure des groupes compacts (L. S. Pontryagin [*12*]), G est isomorphe à $(L \times H)/D$, où L est un groupe de Lie compact semi-simple, H un groupe compact abélien connexe, et D un sous-groupe fini central du produit direct $L \times H$.

Montrons que l'automorphisme A laisse invariant le sous-groupe $G_1 = HD/D$. Ce sous-groupe est central dans G et le quotient G/G_1 est isomorphe à L/D_1, D_1 étant la projection de D dans $(L \times H)/H$. Donc G/G_1 est semi-simple connexe. Le sous-groupe $(A(G_1)G_1)/G_1$ est central dans G/G_1 donc discret et, en fait trivial, puisque connexe. Ainsi $A(G_1)$ est contenu dans G_1.

Le quotient $G/G_1\Gamma$ peut être représenté comme le quotient de G/G_1 par le sous-groupe $G_1\Gamma/G_1$. La transformation T définit, par passage au quotient, une transformation affine ergodique de $G/G_1\Gamma$, qui est un espace homogène de groupe de Lie semi-simple connexe compact. En reprenant la démonstration du lemme 2.1, on en déduit $G = G_1\Gamma$. Comme G_1 est central, il en résulte que Γ est normal dans G, et le quotient G/Γ, isomorphe à $G_1/G_1 \cap \Gamma$, est abélien.

Remarques. — La démonstration précédente est à rapprocher d'une démonstration de T. S. Wu [*17*], relative aux transformations affines expansives dans les groupes compacts.

Il est facile de montrer sur des exemples qu'on ne peut supprimer les hypothèses sur la connexité ou sur la dimension topologique.

B) Translations sur des espaces homogènes.

Soient G un groupe de Lie et Γ un sous-groupe fermé de G tel que G/Γ soit compact. A $\{ g_t \}$ groupe à un paramètre dans G est associé le flot Φ_t sur G/Γ défini par $g\Gamma \to g_t g\Gamma$. Si K est un groupe compact de G tel que g_t appartienne au normalisateur de K, le flot $(G/\Gamma, \Phi_t)$ est une extension de type (K, τ_t) de $(K\backslash G/\Gamma, \tilde{\Phi}_t)$, où $K\backslash G/\Gamma$ est l'espace des doubles classes de G à droite par Γ et à gauche par K, et $\tilde{\Phi}_t$ est défini par $Kg\Gamma \to Kg_t g\Gamma$. On a une situation analogue pour la translation $g\Gamma \to g_0 g\Gamma$ définie par un élément g_0 de G appartenant au normalisateur de K.

Exemple : groupe de Lorentz.

Prenons pour G le groupe des matrices 2×2 de déterminant 1 à coefficients complexes, et pour sous-groupe compact K le groupe, isomorphe au groupe des rotations, des matrices de la forme $\begin{pmatrix} e^{iu} & 0 \\ 0 & e^{-iu} \end{pmatrix}$, $u \in R$. Le groupe à un paramètre $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, $t \in R$, commute aux éléments de K. Soit Φ_t le flot associé à g_t sur le quotient compact G/Γ de G par un sous-groupe discret Γ. Le flot Φ_t laisse invariante la mesure m quotient dans G/Γ de la mesure de Haar de G. On note $\tilde{m}$ et $\tilde{\Phi}_t$ le quotient dans $K\backslash G/\Gamma$ de m et Φ_t.

Le système $(G/\Gamma, m, \Phi_t)$ admet l'interprétation géométrique suivante: le groupe G opère isométriquement sur l'espace de Lobatschevski de dimension 3, L, et opère de façon simplement transitive sur l'espace des repères orthonormés de L. On peut donc établir une bijection entre l'espace des repères et le groupe G. Si Γ est un sous-groupe discret de G, tel que G/Γ soit compact, dans cette correspondance le quotient G/Γ est associé à l'espace des repères orthonormés sur la variété X compacte, de courbure négative constante, obtenue en identifiant, modulo les éléments de Γ, les points de L.

Remarquons qu'un vecteur v unitaire tangent en x à X s'identifie à la classe des repères orthonormés en x ayant v comme premier vecteur. De cette façon, le fibré unitaire tangent à X, Y, est représenté par l'espace des doubles classes $K\backslash G/\Gamma$. On montre facilement que le flot $(K\backslash G/\Gamma, \tilde{m}, \tilde{\Phi}_t)$ correspond dans cette représentation au flot géodésique sur Y. Quant au flot $(G/\Gamma, m, \Phi_t)$, il correspond au flot géodésique sur l'espace des repères orthonormés, obtenu par déplacement parallèle des repères le long de la géodésique déterminée par son premier vecteur.

Les propriétés spectrales du flot $(G/\Gamma, m, \Phi_t)$ ont été obtenues par I. M. Gelfand et S. V. Fomin [*10*]. D'autre part, Ya. Sinaï et D. V. Anosov ont étudié du point de vue de l'entropie le flot $(K\backslash G/\Gamma, \tilde{m}, \tilde{\Phi}_t)$. La méthode des extensions donne un moyen d'étendre leurs résultats au flot $(G/\Gamma, m, \Phi_t)$. Plaçons-nous dans le cas d'un système à temps discret, et posons $\Phi = \Phi_{t_0}$, $t_0 \neq 0$.

THÉORÈME 3.3. — Le système $(G/\Gamma, m, \Phi)$ est un K-système.

Démonstration. — On sait que $(G/\Gamma, m, \Phi)$ est à spectre continu (cf. par exemple [*15*]), et que $(K\backslash G/\Gamma, \tilde{m}, \tilde{\Phi})$ est un K-système (par exemple [*22*]). D'après la proposition 2.3 $(G/\Gamma, m, \Phi)$ est donc un K-système.

Remarques. — Dans le cas des flots, la méthode des extensions ne s'applique pas immédiatement. En effet, il na pas été possible, jusqu'à présent, de caractériser les K-flots par une propriété de trivialité de la partition de Pinsker, comme dans le cas des systèmes à temps discret. Par contre, une autre méthode s'applique aux flots Φ_t étudiés ici, et permet de montrer que ce sont des K-flots (voir ci-dessous, et également [*7*]).

L'exemple précédent apparaît, sous son interprétation géométrique, comme un cas particulier d'une classe d'exemples que nous allons décrire.

C) Flot géodésique sur le fibré principal d'une variété riemannienne compacte de courbure négative.

Considérons une variété riemannienne compacte X, et sur X le fibré unitaire tangent Y, et le fibré principal Z, dont la fibre au-dessus d'un point x est constituée par l'espace des repères orthonormés en x. Les points de Z sont repérés par $(x, e_1, \ldots, e_r)$, où $x \in X$ et les e_i forment une base orthonormale (pour la métrique riemannienne sur X) de l'espace tangent en x à X.

Le groupe orthogonal $\mathcal{O}(r)$ de dimension r opère sur Z de la façon suivante : si $A = (a_{ij})$ est une matrice orthogonale $r \times r$, le point $(x, e_1, \ldots, e_r)$ de Z est transformé par A en $\left(x, \sum_i a_{i1}e_i, \ldots, \sum_i a_{ir}e_i\right)$. Les fibrés Z et Y sont munis des mesures m, $\tilde{m}$ définies par $d\tilde{m} = ds \times d\tilde{v}$, $dm = ds \times dv$, où ds est l'élément de volume sur X défini par la métrique riemannienne, et dv, $d\tilde{v}$, sont les éléments de volume sur $\mathcal{O}(r)$ et $S(r-1)$, la sphère de dimension $r-1$.

Notons $\tilde{\Phi}_t$ le flot géodésique sur Y, et Φ_t le flot géodésique sur Z, défini par déplacement parallèle de chaque point $(x, e_1, \ldots, e_r)$ de Z le long de la géodésique déterminée par le point (x, e_1) de Y. Les flots Φ_t et $\tilde{\Phi}_t$ conservent les mesures dm et $d\tilde{m}$. D'autre part, le système (Z, m, Φ_t) apparaît comme une extension de type (G, Id) du système $(Y, \tilde{m}, \tilde{\Phi}_t)$, où $G = \mathcal{O}(r-1)$ est le groupe orthogonal de dimension $r-1$. En effet, faisons opérer le sous-groupe $\mathcal{O}(r-1)$ de $\mathcal{O}(r)$ sur Z de façon que le premier vecteur de chaque repère soit laissé fixe. On obtient une action qui commute avec Φ_t, et l'espace des orbites de G coïncide avec Y.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où X est une variété riemannienne compacte de courbure négative. D'après les résultats de D. V. Anosov [*3*] et Ya. Sinaï [*21*] (voir également [*22*]) le flot géodésique $(Y, \tilde{m}, \tilde{\Phi}_t)$ est un C-flot, et donc il existe une partition mesurable ξ de Y en sous-ensembles ouverts connexes de sous-variétés de dimension $r-1$ de Y telle que :

1) $$\zeta \leqq \tilde{\Phi}_t\zeta, \qquad t \geqq 0$$

2) $$\prod_t \tilde{\Phi}_t\zeta = \varepsilon_Y$$

3) $$\bigwedge_t \tilde{\Phi}_t\zeta = \nu_Y.$$

Ces propriétés expriment que ζ est une partition de K-flot.

De plus, la définition de ζ montre que, si y et y' sont dans un même élément de ζ, $d(\tilde{\Phi}_t y, \tilde{\Phi}_t y') \to 0$, $t \to \infty$, d étant la distance riemannienne dans Y.

THÉORÈME 3.4. — Le flot géodésique sur le fibré principal d'une variété riemannienne compacte de courbure négative est un K-flot.

Démonstration. — Considérons la partition ξ de Z définie de la façon suivante : deux points z et z' de Z sont dans un même élément de ξ si :

1) $\pi(z)$ et $\pi(z')$ sont dans un même élément de ζ, où $\pi : Z \to Y$ est la projection naturelle de Z sur Y.

2) $d(\Phi_t z, \Phi_t z') \to 0$, $t \to \infty$, d étant ici la distance dans Z.

En utilisant les propriétés des feuilles de la partition ζ sur Y, on peut démontrer qu'étant donnés un point z_1 dans Z et un point y_2 dans Y, tel que $\pi(z_1)$ et y_2 soient dans le même élément de la partition ζ, il existe un relèvement z_2 de y_2 dans Z appartenant au même élément de la partition ξ que z_1. En d'autres termes, en désignant par $C_\xi(z)$, resp. $C_\zeta(\pi(z))$, l'élément de ξ contenant $z \in Z$, resp. de ζ contenant $\pi(z) \in Y$, on a :

$$\pi C_\xi(z) = C_\zeta(\pi(z)). \qquad (*)$$

On montre à l'aide de ce résultat que la partition ξ est mesurable. D'autre part, il est clair que ξ est croissante : $\xi \leqq \Phi^t\xi$, $t \geqq 0$, et que ξ est invariante par l'action de $G = \mathcal{O}(r-1)$.

Pour obtenir que ξ est une partition de K-flot relativement à $\{\Phi_t\}$, nous devons montrer les deux relations suivantes :

(1) $\prod_t \Phi^t\xi = \varepsilon_Z \bmod 0$, où ε_Z est la partition de Z en ses points.

(2) $\bigwedge_t \Phi^t\xi = \nu_Z \bmod 0$, où ν_Z est la partition triviale de Z.

Si deux points z_1 et z_2 sont dans un même élément de $\Phi^t\xi$, pour tout t, $\Phi^{-t}\pi(z_1)$ et $\Phi^{-t}\pi(z_2)$ sont dans un même élément de ζ, pour tout t, et donc $\pi(z_1) = \pi(z_2)$. Mais la condition 2) de la définition de ξ montre alors que z_1 et z_2 coïncident, car la distance entre deux repères de même support sur la variété X reste constante au cours du déplacement parallèle définissant le flot géodésique. On a donc bien la relation (1).

Considérons maintenant un ensemble A formé d'éléments de la partition $\bigwedge_t \Phi^t\xi$. La projection de A sur Y est de mesure 0 ou 1, d'après (*) et la propriété 3) de la partition ζ. Si A est invariant par l'action de G, on a donc $m(A) = 0$ ou 1. Ainsi G opère ergodiquement sur la partition $\bigwedge_t \Phi^t\xi$, et la proposition 2.1 montre que le spectre de $\{\Phi_t\}$ dans $L^2\left(\bigwedge_t \Phi^t\xi\right)$ est discret. Mais on sait, d'après un théorème de L. Green [*11*], que le flot Φ_t est à spectre continu. On a donc la relation (2).

Remarque. — Le flot géodésique sur le fibré principal d'une variété compacte de courbure négative est un exemple de système classique qui est un K-flot, mais n'est pas un C-flot (en dimension supérieure ou égale à 3).

§ 4. EXTENSIONS DE SYSTÈMES INTRINSÈQUEMENT ERGODIQUES

A) Formule d'addition des entropies.

Depuis la formule d'addition des entropies obtenue par S. Iuzvinski [*12*] dans le cas des espaces homogènes de groupes compacts, plusieurs articles ont étendu ce résultat, sous diverses hypothèses, aux extensions de systèmes dynamiques par des endomorphismes de groupes compacts [*14*] [*6*] [*13*]. Le résultat le plus général a été donné par S. Iuzvinski dans un article récent [*13*].

DÉFINITION. — Soit G un groupe compact d'automorphismes d'un espace mesuré $(X, \mathscr{B}, m)$, tel que l'application $(g, x) \to g\cdot x$ de $G \times X$ dans X soit mesurable. On dit que G opère *effectivement* sur $(X, \mathscr{B}, m)$ si, pour tout $g \in G$, $g \neq e$, $m\{x : g\cdot x = x\} = 0$.

On dit que G opère *librement* sur $(X, \mathscr{B}, m)$ si

$$m\{x : g\cdot x = x, \text{ pour un } g \neq e \text{ dans } G\} = 0.$$

Il est clair qu'une action libre est effective. La réciproque est fausse, en général, comme le montre l'exemple du groupe des rotations opérant sur la sphère unité de dimension trois. Par contre les deux notions sont équivalentes dans le cas où G est un groupe compact abélien.

THÉORÈME 4.1 (Iuzvinski [*13*]). — Soit (X, m, T) une extension de type (G, τ) d'un système $(X/G, \tilde{m}, \tilde{T})$. Si G opère librement sur (X, m), on a

$$h(X, T) = h(X/G, \tilde{T}) + h(G, \tau)$$

(formule d'addition des entropies).

Démonstration. — Indiquons brièvement les points essentiels de la démonstration. L'action de G étant libre, il est possible, en utilisant un résultat d'Abramov et Rokhlin [*2*], de représenter le système (X, m, T) comme un produit gauche: $X = Y \times G$, $T(y, g) = (Ty, \varphi(y)\tau g)$, où φ est une application mesurable de l'espace mesuré Y dans G.

A l'aide des résultats du paragraphe 1 sur la structure de τ, on réduit la démonstration de la formule d'addition aux deux cas particuliers suivants:

— G est un groupe de Lie,
— il existe dans G un sous-groupe H fermé tel que $H \subset \tau^{-1}H$ et $\operatorname{Card}(\tau^{-1}H/H) = \infty$.

Dans le premier cas, la formule se démontre comme dans [*12*], en utilisant le fait que G est un groupe rigide (cf. [*12*]).

Dans le deuxième cas, on sait que $h(G, \tau) = \infty$. Nous devons donc vérifier que $h(X, T) = \infty$. Considérons de système $(X/H, T')$ facteur de (X, T) par H. Soit ε' la partition de X/H en ses points. En utilisant la relation de (G, τ)-extension, la décomposition de (X, T) en produit gauche et la condition $\operatorname{Card}(\tau^{-1}H/H) = \infty$, on obtient:

$$h(X/H, T') \geqslant H(\varepsilon' \mid T'^{-1}\varepsilon') = \infty.$$

D'où $h(X, T) = \infty$.

B) Application: systèmes intrinsèquement ergodiques.

Nous nous plaçons maintenant dans un cadre topologique: X est un espace métrique compact, $\mathscr{A}$ est la tribu des boréliens de X, T est une application continue de X sur lui-même. Toutes les mesures considérées sont des mesures boréliennes.

DÉFINITION (B. Weiss [*23*]). — Le système formé d'un espace X et d'une transformation T est dit *intrinsèquement ergodique*, s'il existe une mesure borélienne m invariante par T pour laquelle le système (X, m, T) a une entropie $h(m)$ maximale, et si cette mesure est unique.

La définition précédente introduit une notion topologique, relative au « système topologique » constitué par X et T. On sait qu'étant donnés un espace métrique compact X et une transformation T de X dans lui-même continue, il existe toujours au moins une mesure borélienne sur X invariante par T. Il peut arriver que cette mesure soit unique. Le système (X, T), qui est dit dans ce cas strictement ergodique, est alors *a fortiori* intrinsèquement ergodique. Les rotations ergodiques sur les groupes compacts abéliens sont des exemples de systèmes strictement ergodiques. Les automorphismes ergodiques (algébriques) des groupes compacts abéliens ne sont pas strictement ergodiques, mais sont encore intrinsèquement ergodiques (K. Berg [5]).

Nous allons voir que cette propriété reste valable pour les transformations affines ergodiques des groupes abéliens compacts, où des nilvariétés compactes. Ce résultat est obtenu par la méthode des extensions par des endomorphismes de groupes compacts. Il nous faut d'abord définir ces extensions dans le cas topologique.

DÉFINITION. — Soit G un groupe compact d'homéomorphismes d'un espace métrique compact X, tel que l'application $(g, x) \to g\cdot x$, de $G \times X$ dans X, soit continue. Désignons par X/G l'espace des orbites de G dans X, muni de la topologie quotient, et par $\tilde{T}$ la transformation induite par T sur X/G. On dit que (X, T) est une *extension de type* (G, τ) de $(X/G, \tilde{T})$ s'il existe un endomorphisme surjectif τ de G tel que, pour tout $x \in G$, on ait $T(g\cdot x) = \tau g\cdot Tx$.

Nous supposerons dans la suite que G est séparable, et que l'action de G sur X est libre, dans le sens suivant : pour tout $x \in X$, $g\cdot x = x$ implique $g = e$. L'action de G est alors libre dans le sens de la définition donnée plus haut, pour toute mesure borélienne invariante par T et G sur X, et pour une telle mesure, la formule d'addition des entropies est vérifiée. Enfin remarquons que si G agit librement sur X, pour tout sous-groupe normal H de G, G/H agit librement sur l'espace facteur X/H.

LEMME 4.1 (W. Parry). — Soit (X, T) une extension de type (G, Identité) d'un système $(X/G, \tilde{T})$. Soit m une mesure sur X invariante par T et G, se projetant en une mesure $\tilde{m}$ sur X/G. Si m est T-ergodique, toute mesure invariante par T qui se projette sur X/G en $\tilde{m}$ coïncide avec m.

Démonstration. — Nous reprenons la méthode de la proposition 2.7. Soit μ une mesure invariante par T sur X. Désignons par μ_c la mesure invariante par G définie par

$$\mu_c(f) = \int_{G\times X} f(g\cdot x)d\mu(x)dg,$$

et par μ_φ la mesure associée à une fonction φ borélienne bornée sur G, d'intégrale 1, définie par

$$\mu_\varphi(f) = \int_{G\times X} f(g\cdot x)\varphi(g)d\mu(x)dg.$$

La mesure μ_φ est invariante par T et absolument continue par rapport à μ_c. D'autre part, il est clair que μ_c coïncide avec m. Donc la densité de μ_φ par rapport à m est constante, d'après l'ergodicité de m, et $\mu_\varphi = m$. On conclut la démonstration comme dans la proposition 2.7.

LEMME 4.2 (d'après K. Berg [5]). — Soit (X, m, T) un système dynamique. Si α et β sont deux partitions mesurables invariantes par T, $T^{-1}\alpha \leqslant \alpha$, $T^{-1}\beta \leqslant \beta$, indépendantes, et telles que $h(\alpha, T) < \infty$, pour toute partition γ vérifiant $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma$, et invariante par T, on a : $h(\beta, T) \leqslant h(\gamma, T)$. Si l'on a l'égalité $h(\beta, T) = h(\gamma, T)$, et si la restriction de T à α est d'entropie complètement positive, alors γ est indépendante de α.

Démonstration. — Soient α_n et γ_n deux suites de partitions finies croissant respectivement vers α et γ : $\bigvee_n \alpha_n = \alpha$, $\bigvee_n \gamma_n = \gamma$. On a

$$\bigvee_n (\alpha_n \vee \gamma_n) = \alpha \vee \gamma = \alpha \vee \beta.$$

En utilisant l'inégalité

$$h(\alpha_n \vee \gamma_n, T) \leqslant h(\alpha_n, T) + h(\gamma_n, T)$$

et en passant à la limite (cf. [*20*]), on obtient, compte tenu de l'indépendance de α et β :

$$h(\alpha, T) + h(\beta, T) = h(\alpha \vee \beta, T) \leqslant h(\alpha, T) + h(\gamma, T),$$

d'où $h(\beta, T) \leqslant h(\gamma, T)$.

Supposons maintenant que l'on ait l'égalité $h(\beta, T) = h(\gamma, T)$, et que la restriction de T à α soit d'entropie complètement positive. Supposons également que T soit inversible (il est toujours possible de se ramener à ce cas).

Sous ces hypothèses, il existe une partition mesurable d'entropie finie α_0 génératrice dans α, c'est-à-dire telle que la partition engendrée par α_0 et ses images par T, $(\alpha_0)_T$, soit égale à α. Posons

$$(\alpha_0)_T^- = \bigvee_0^\infty T^{-n}\alpha_0.$$

En utilisant la formule de Pinsker (cf. [*20*]), on obtient, pour toute partition finie γ_0 moins fine que γ :

$$\begin{aligned} h(\alpha \vee \beta, T) = h(\beta, T) + h(\alpha, T) = h(\alpha \vee \gamma, T) &\leqslant h(\gamma, T) + H(\alpha_0 \mid (\alpha_0)_T^- \gamma) \\ = h(\beta, T) + H(\alpha_0 \mid (\alpha_0)_T^- \gamma) &\leqslant h(\beta, T) + H(\alpha_0 \mid (\alpha_0)_T^- \gamma_0), \end{aligned}$$

d'où $H(\alpha_0 \mid (\alpha_0)_T^- \gamma_0) = H(\alpha_0 \mid (\alpha_0)_T^-)$, relation équivalente à :

$$H(\gamma_0 \mid (\alpha_0)_T^-) = H(\gamma_0 \mid T(\alpha_0)_T^-)$$

En appliquant cette formule successivement à γ_0, $T\gamma_0, \ldots, T^k\gamma_0$, on en déduit, pour tout entier k,

$$H(\gamma_0 \mid T^{-k}(\alpha_0)_T^-) = H(\gamma_0 \mid (\alpha_0)_T) = H(\gamma \mid \alpha). \tag{1}$$

Comme la restriction de T à α est d'entropie complètement positive, on a $\bigwedge_k T^{-k}(\alpha_0)_T^- = \nu$, partition triviale de X. En passant à la limite dans la relation (1), on obtient donc :

$$H(\gamma_0) = H(\gamma_0 \mid \alpha),$$

ce qui exprime que γ_0 est indépendante de α. Mais γ_0 est une partition finie moins fine que γ, quelconque. Donc γ et α sont indépendantes.

NOTATION. — Dans la suite, on notera $h(T/\mu)$ l'entropie de la transformation T, calculée par rapport à une mesure invariante μ.

THÉORÈME 4.2. — Soit (X, T) une extension de type (G, τ) d'un système (X/G, $\tilde{T}$) intrinsèquement ergodique. Soit m le relèvement dans X de l'unique mesure $\tilde{m}$ sur X/G, invariante par $\tilde{T}$ et d'entropie maximale. Si m est T-ergodique, en particulier si τ est ergodique, (X, T) est intrinsèquement ergodique.

Démonstration. — Nous reprenons les idées de la démonstration donnée par K. Berg [5] pour le cas des automorphismes de groupes compacts.

Considérons l'espace $G \times X$ muni de la tribu des boréliens et du produit de la mesure de Haar sur G, notée ν, et d'une mesure μ sur X invariante par T.

La transformation $(g, x) \to (\tau g, Tx)$ définit sur $G \times X$ un système dynamique, dont (G, τ) et (X, T) sont facteurs pour les projections $(g, x) \xrightarrow{\Pi_1} g$, $(g, x) \xrightarrow{\Pi_2} x$, et dont (X, T) est également facteur pour la projection $(g, x) \xrightarrow{p} g \cdot x$, d'après l'hypothèse de (G, τ)-extension.

L'image par p de la mesure $\nu \times \mu$ dans X est la mesure notée μ_c définie dans le lemme 4.1. Désignons par α, β, γ les partitions mesurables de $G \times X$, associées aux tribus $\mathscr{G}$, image réciproque par Π_1 de la tribu des boréliens de G, et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_c$, images réciproques respectivement par Π_2 et p de la tribu des boréliens de X.

Les partitions α et β sont indépendantes. D'autre part, l'égalité $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma$, résulte de l'égalité des tribus $\mathscr{G} \vee \mathscr{B}$ et $\mathscr{G} \vee \mathscr{B}_c$, que l'on obtient en observant que la projection Π est $\mathscr{G} \vee \mathscr{B}_c$-mesurable. Enfin, on a $h(\alpha, \tau \times T) = h(\tau) < \infty$.

On peut donc appliquer la première partie du lemme 4.2 aux partitions α, β, γ et à la transformation $\tau \times T$. On obtient la majoration

$$h(\beta, \tau \times T) \leqslant h(\gamma, \tau \times T).$$

Mais ces entropies sont respectivement égales à $h(T/\mu)$ et à $h(T/\mu_c)$. On a donc $h(T/\mu) \leqslant h(T/\mu_c)$.

Comme μ_c est invariante par G, sa projection $\tilde{\mu}_c$ dans X/G vérifie $h(\tilde{T}/\tilde{\mu}_c) \leqslant h(\tilde{T}/\tilde{m})$, et la formule d'addition des entropies donne :

$$h(T/\mu_c) = h(\tau) + h(\tilde{T}/\tilde{\mu}_c) \leqslant h(\tau) + h(\tilde{T}/\tilde{m}) = h(T/m).$$

D'où l'inégalité $h(T/\mu) \leqslant h(T/m)$, qui montre que m donne à T son entropie maximale (On notera que dans cette première partie de la démonstration, on n'a pas supposé m T-ergodique).

Supposons maintenant que m soit T-ergodique. En utilisant les résultats du paragraphe 1, on constate qu'il suffit de démontrer le théorème dans les cas particuliers suivants : τ est ergodique, τ est l'identité, G est un groupe fini, enfin G est un groupe de Lie simple compact.

Nous devons montrer que, pour toute mesure μ invariante par T sur X, l'égalité $h(T/\mu) = h(T/m)$ implique $\mu = m$.

Cette égalité implique d'abord que $\mu_c = m$. En effet, d'après la formule d'addition des entropies, on a $h(\tilde{T}/\tilde{\mu}_c) = h(\tilde{T}/\tilde{m})$. D'où, $(X/G, \tilde{T})$ étant intrinsèquement ergodique, $\tilde{\mu}_c = \tilde{m}$. Comme μ_c est invariante par G, ceci prouve que $\mu_c = m$.

D'autre part, l'égalité $h(T/\mu) = h(T/m)$ se traduit pour le système $(G \times X, \tau \times T)$ par la relation $h(\beta, \tau \times T) = h(\gamma, \tau \times T)$. En effet, d'après ce qui précède, on a :

$$h(T/\mu) \leqslant h(T/\mu_c) \leqslant h(T/m) = h(T/\mu).$$

D'où

$$h(\beta, \tau \times T) = h(T/\mu) = h(T/\mu_c) = h(\gamma, \tau \times T).$$

Dans le cas où τ est ergodique, le système (G, τ) est d'entropie complètement positive (S. Iuzvinski [*12*]). Donc la restriction de $\tau \times T$ à α, qui est isomorphe à (G, τ), est d'entropie complètement positive. D'après la deuxième partie du lemme 4.2, α et γ sont indépendantes. Si F et E sont deux ensembles mesurables quelconques dans G et dans X, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{B}_c$ étant indépendantes, on a :

$$(\nu \times \mu)(\Pi_1^{-1}(F) \cap p^{-1}(E)) = \nu(F) \cdot \mu_c(E) = \nu(F) \cdot m(E).$$

Donc les mesures $\nu \times \mu$ et $\nu \times m$ coïncident sur $\mathscr{G} \vee \mathscr{B}_c = \mathscr{G} \vee \mathscr{B}$. Il en résulte que μ et m sont égales.

Quand τ est l'identité, on obtient le résultat en appliquant le lemme 4.1.

Quand G est fini, la mesure $\mu_c = m$ est obtenue comme somme des translatées par les éléments de G de la mesure μ. La mesure μ est donc absolument continue par rapport à m. Étant invariante par T, elle coïncide avec m.

Supposons enfin que G soit un groupe de Lie simple compact. Comme dans la démonstration de la proposition 2.4, on se ramène au cas où T et G commutent, c'est-à-dire au cas où τ est l'identité. Le résultat est à nouveau une conséquence du lemme 4.1.

COROLLAIRES

1) Les transformations affines ergodiques de quotients de groupes compacts définissent des systèmes intrinsèquement ergodiques.

2) Soit $X = G/\Gamma$ un quotient compact d'un groupe de Lie nilpotent G par un sous-groupe discret Γ. Si T est une transformation affine ergodique de X, le système (X, T) est intrinsèquement ergodique.

Ce travail fait partie d'une thèse de doctorat, entreprise sous la direction de M. Jacques NEVEU, à qui je tiens à exprimer ma vive reconnaissance.

Je tiens également à remercier M. M. André AVEZ et Léon GREEN qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail, et M. Jacques DIXMIER qui a accepté de me donner un second sujet de thèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. M. ABRAMOV, Automorphismes métriques à spectre quasi-discret. *Izv. Ak. N.*, t. **26**, 1962, p. 513-530.

[2] L. M. ABRAMOV et V. A. ROKHLIN, Entropie des produits gauches de transformations. *Vest. Len. G. Un.*, n° 7, 1962, p. 5-13.

[3] D. V. ANOSOV, Flots géodésiques sur les variétés riemanniennes de courbure négative. *Trud. Mat. Inst. Steklova*, t. **90**, 1967.

[4] L. AUSLANDER and L. W. GREEN, G-induced flows. *Amer. J. Math.*, t. **88**, 1966, p. 615-625.

[5] K. BERG, Convolution of invariant measures, maximal entropy. *Math. Syst. Theory*, t. 3, n° 2, 1969, p. 146-151.

[6] J.-P. CONZE, Extensions de systèmes dynamiques par des endomorphismes de groupes compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **268**, 1969, p. 1369-1372.

[7] J.-P. CONZE, Entropie des transformations affines et des flots sur les espaces homogènes compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **270**, 1970, p. 547-548.

[8] Th. FRANKEL, Homologie and flows on manifolds. *Ann. Math.*, t. **65**, n° 2, 1957, p. 331-339.
[9] H. FURSTENBERG, Disjointness in ergodic theory. *Math. Syst. Theory*, t. **1**, n° 1, 1967, p. 1-50.
[10] I. M. GELFAND et S. V. FOMIN, Spectre du flot géodésique sur les espaces de courbure négative constante. *Usp. Mat. N.*, t. **7**, n° 1, 1952, p. 118-137.
[11] L. W. GREEN, Pythagorean group and ergodic flows. *B. A. M. S.*, t. **72**, 1966, p. 44-49.
[12] S. A. IUZVINSKI, Propriétés métriques des endomorphismes de groupes compacts. *Izv. Ak. N.*, t. **29**, vol. 6, 1965, p. 1295-1328.
[13] S. A. IUZVINSKI, Propriétés métriques des endomorphismes sur les espaces homogènes de groupes compacts. *Izv. Ak. N.*, t. **35**, 1971, p. 78-82.
[14] K. THOMAS, Ergodic theory of G-spaces. Thesis, Un. of Warwick, 1969.
[15] C. C. MOORE, Ergodicity of flows on homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, vol. **88**, 1966, p. 154-178.
[16] W. PARRY, Ergodic properties of affine transformations and flows on nilmanifolds. *Amer. J. Math.*, vol. **91**, n° 3, 1969, p. 757-771.
[17] W. PARRY, Compact abelian group extensions of discrete dynamical systems. *Zeit. f. Warsch.*, vol. **13**, 1969, p. 95-113.
[18] W. PARRY, *Entropy and generators in ergodic theory*, Benjamin, 1969.
[19] V. A. ROHKLIN, Propriétés métriques des endomorphismes de groupes compacts abéliens, *Izv. Ak. N. Ser. Mat.*, t. **28**, n° 4, 1964, p. 867-874.
[20] V. A. ROKHLIN, Leçons sur l'entropie. *Usp. Mat. N.*, t. **22**, n° 5, 1967, p. 1-56.
[21] Ya. G. SINAÏ, Systèmes dynamiques à spectre de Lebesgue dénombrable II. *Izv. Ak. N. Ser. Mat.*, t. **30**, 1966, p. 15-68.
[22] D. V. ANOSOV et Ya. G. SINAÏ, Sur des systèmes différentiables ergodiques. *Usp. Mat. N.*, t. **22**, n° 5, 1967, p. 107-172.
[23] B. WEISS, Intrinsically ergodic systems. *B. A. M. S.*, vol. **76**, n° 6, 1970.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 1971).