ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Convergence presque sûre de martingales multivoques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 1 (1972), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 1, 1972, p. 1-7. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Convergence presque sûre de martingales multivoques

par

J. NEVEU

SUMMARY. — An a. s. convergence theorem is proved for martingales which take their values in the closed bounded convex subsets of the (separable) dual of a Banach space.

Un théorème célèbre de Doob affirme que toute martingale réelle $(X_n, n \in N)$ vérifiant $\sup_N E(|X_n|) < \infty$ converge p. s. Ce théorème a pu être étendu aux martingales prenant leurs valeurs dans le dual d'un espace de Banach, si ce dual est séparable, la convergence ayant lieu au sens fort dans ce dual. L'objet de ce travail est de généraliser ce résultat et de montrer comment le théorème de Doob reste valable pour des martingales multivoques prenant leurs valeurs dans les parties convexes, $\sigma(F', F)$-compactes du dual F' d'un espace de Banach F, si ce dual est séparable ; la convergence est entendue au sens de la distance classique de Hausdorff. La notion de martingale multivoque s'est dégagée dans les travaux [*1*] [*6*] et [*7*] ; en particulier [*7, c*] contient plusieurs théorèmes sur la convergence de martingales multivoques filtrantes en relation avec l'équi-intégrabilité.

Le résultat principal de ce travail est le théorème 3 ; nous commençons par quelques rappels indispensables à l'énoncé et à la démonstration de ce théorème.

Soit F' le dual fort, supposé séparable, d'un espace de Banach F (nécessairement séparable). Nous noterons $\mathscr{H}$ la classe des fonctions $\varphi : F \to R$ sous-linéaires (c'est-à-dire convexes et positivement homogènes) et forte-

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités » associée au C. N. R. S.

ment continues. Rappelons qu'une fonction sous-linéaire $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}$ est fortement continue sur F si et seulement si la quantité $\Delta(\varphi) = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\varphi(y)|$ est finie ; cette condition entraîne en effet que

$$(1) \quad \varphi(y_1) - \varphi(y_2) \leqslant \varphi(y_1 - y_2) \leqslant \Delta(\varphi) \| y_1 - y_2 \| \qquad (y_1, y_2 \in \mathrm{F})$$

et cette lipschitzité de la fonction φ assure sa continuité ; inversement une fonction positivement homogène $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}$ ne peut être continue à l'origine sans que $\Delta(\varphi) < \infty$. Nous noterons d'autre part $\mathscr{K}$ la classe des parties convexes de F′ qui sont $\sigma(\mathrm{F}', \mathrm{F})$-compactes ou, ce qui est équivalent, qui sont $\sigma(\mathrm{F}', \mathrm{F})$-fermées et fortement bornées. Le théorème de Hahn-Banach permet, comme il est bien connu, d'établir une bijection entre $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$.

LEMME 1. — *Les applications* $\mathrm{K} \to \varphi_{\mathrm{K}}$ *et* $\varphi \to \mathrm{K}_\varphi$ *de* $\mathscr{K}$ *dans* $\mathscr{H}$ *et de* $\mathscr{H}$ *dans* $\mathscr{K}$ *respectivement qui sont définies ci-dessous sont inverses l'une de l'autre :*

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_{\mathrm{K}}(y) &= \sup_{x \in \mathrm{K}} (y, x) \qquad (y \in \mathrm{F}) ; \\ \mathrm{K}_\varphi &= \{ x : x \in \mathrm{F}' \text{ et } (y, x) \leqslant \varphi(y) \quad \forall y \in \mathrm{F} \} . \end{aligned}$$

Pour tout couple $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ dans $\mathscr{K}$, posons

$$(3) \quad \Delta(\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2) = \max \left[\sup_{\mathrm{K}_1} \inf_{\mathrm{K}_2} \| x_1 - x_2 \| , \sup_{\mathrm{K}_2} \inf_{\mathrm{K}_1} \| x_1 - x_2 \| \right] ;$$

il est facile de vérifier en utilisant le lemme précédent que

$$(4) \quad \Delta(\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2) = \sup_{\|y\| \leqslant 1} | \varphi_{\mathrm{K}_1}(y) - \varphi_{\mathrm{K}_2}(y) |$$

Cette formule permet à son tour de montrer très facilement que Δ est une distance sur $\mathscr{K}$ (distance de Hausdorff) et que l'espace métrique $(\mathscr{K}, \Delta)$ est complet ; par contre $\mathscr{K}$ n'est pas séparable en général. Enfin nous poserons

$$(5) \quad \Delta(\mathrm{K}) = \begin{cases} \Delta[\mathrm{K}, \{ 0 \}] = \sup_{\mathrm{K}} \| x \| \\ \sup_{\|y\| \leqslant 1} | \varphi_{\mathrm{K}}(y) | = \Delta(\varphi_{\mathrm{K}}) \end{cases} \qquad (\mathrm{K} \in \mathscr{K}).$$

Une variable aléatoire (en abrégé v. a.) à valeurs dans $\mathscr{K}$ est par définition une application mesurable de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ dans l'espace métrique $\mathscr{K}$ muni de sa tribu borélienne. Pour une telle v. a. X, les applications $\Delta[\mathrm{X}(.)]$ et $\varphi_{\mathrm{X}(\cdot)}(y)$ $(y \in \mathrm{F})$ de Ω dans R sont des v. a. réelles puisque les fonctions $\Delta(.)$ et $\varphi_{.}(y)$ sont lipschitziennes sur l'espace métrique $\mathscr{K}$; réciproquement il est facile de déduire de la formule (4) et de la séparabilité de l'espace F, que $X : \Omega \to \mathscr{K}$ est mesurable dès que les applications $\varphi_{X(\cdot)}(y)$ $(y \in F)$ le sont. Une v. a. $X : \Omega \to \mathscr{K}$ est dite intégrable si $E[\Delta(X)] < \infty$ et dans ce cas d'après la formule (5), toutes les v. a. $\varphi_X(y)$ sont intégrables; en outre l'application $\varphi(y) = E[\varphi_{X(\cdot)}(y)]$ de F dans R est sous-linéaire et telle que $\sup_{\|y\| \leqslant 1} |\varphi(y)| \leqslant E[\Delta(X)] < \infty$; grâce au lemme 1, il existe donc un élément de $\mathscr{K}$, noté E(X), tel que

$$\varphi_{E(X)}(y) = E[\varphi_X(y)] \qquad \text{pour tout} \qquad y \in F.$$

La définition des espérances conditionnelles est analogue à celle des espérances; elle nécessite cependant un lemme élémentaire dont nous aurons encore besoin ultérieurement.

LEMME 2. — *Si* $y \to Z(y)$ *est une application sous-linéaire de* F *dans* $L^1(\Omega)$ *et si en outre* $E[\sup_{\|y\| \leqslant 1} |Z(y)|] < \infty$, *il existe une v. a. intégrable* X : $\Omega \to \mathscr{K}$ *telle que* $\varphi_X(y) = Z(y)$ p. s. *pour tout* $y \in F$.

Démonstration. — Dans F, soit F_0 un Q-vectoriel, dénombrable et dense (Q désigne la droite des rationnels). Si $\tilde{Z}(., y)$ $(y \in F_0)$ est une v. a. réelle choisie dans la classe d'équivalence $Z(y)$, les applications $y \to \tilde{Z}(\omega, y)$ de F_0 dans R sont alors Q-sous-linéaires et telles que $\sup_{F_0} |\tilde{Z}(\omega, y)| < \infty$ pour un ensemble Ω_0 de ω de probabilité 1 ; pour tous ces ω, les applications précédentes se prolongent par continuité à F en applications sous-linéaires sur F, bornées sur la boule unité de F. Il existe donc pour tout $\omega \in \Omega_0$, un élément $X(\omega) \in \mathscr{K}$ tel que $\varphi_{X(\omega)}(y) = \tilde{Z}(\omega, y)$ si $y \in F_0$; il est alors facile de vérifier que X est mesurable et intégrable et que $\varphi_X(y) = Z(y)$ p. s. pour tout $y \in F$. ■

Pour toute sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ et toute v. a. intégrable $X : \Omega \to \mathscr{K}$, l'application $y \to E^{\mathscr{B}}[\varphi_X(y)]$ vérifie les hypothèses du lemme précédent et il existe donc une v. a. $\mathscr{B}$-intégrable à valeurs dans $\mathscr{K}$ que nous noterons $E^{\mathscr{B}}(X)$ telle que $\varphi_{E^{\mathscr{B}}(X)}(y) = E^{\mathscr{B}}(\varphi_X(y)]$ pour tout $y \in F$. Enfin étant donné une suite croissante $(\mathscr{B}_n, n \in N)$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$ dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une suite $(X_n, n \in N)$ de v. a. à valeurs dans $\mathscr{K}$ sera appelée une martingale intégrable si évidemment :

a) X_n est $\mathscr{B}_n$-mesurable et intégrable, quel que soit $n \in N$;
b) $X_n = E^{\mathscr{B}_n}[X_{n+1}]$ pour tout $n \in N$.

Voici alors le résultat principal de ce travail.

THÉORÈME 3. — *Soit* $(X_n, n \in N)$ *une martingale intégrable définie sur l'espace* $[(\Omega, \mathscr{A}, P) ; (\mathscr{B}_n, n \in N)]$ *et à valeurs dans l'espace métrique* $\mathscr{K}$ *des parties convexes,* $\sigma(F', F)$ *compactes du dual* F' *supposé séparable d'un* *espace de Banach* F. *La condition de Doob* $\sup_{N} E[\Delta(X_n)] < \infty$ *suffit alors à entraîner l'existence d'une v. a. intégrable* $X_\infty : \Omega \to \mathscr{K}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty}$ *p. s.* $\varphi_{X_n}(y) = \varphi_{X_\infty}(y)$ *pour tout* $y \in F'$. *En outre si* X_∞ *prend p. s. ses valeurs dans une partie séparable de* $\mathscr{K}$, *nous avons* $\lim_{n\to\infty}$ *p. s.* $\Delta(X_n, X_\infty) = 0$.

Démonstration. — Pour tout $y \in F$, la suite $(\varphi_{X_n}(y), n \in N)$ est une martingale intégrable réelle; grâce à la séparabilité de F, la suite

$$\{ \Delta(X_n) = \sup_{\|y\| \leqslant 1} | \varphi_{X_n}(y) |, n \in N \}$$

est alors une sous-martingale positive. L'hypothèse du théorème précédent et le théorème de Doob classique entraînent l'existence et l'intégrabilité des limites p. s. $Z(y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(y)$ $(y \in F)$ et $U = \lim_{n\to\infty} \Delta(X_n)$: en outre $| Z(y) | \leqslant U \| y \|$. Comme l'application $y \to Z(y)$ de F dans $L^1(\Omega)$ est manifestement sous-linéaire, le lemme 2 établit l'existence d'une v. a. intégrable $X_\infty : \Omega \to \mathscr{K}$ telle que

$$\varphi_{X_\infty}(y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(y) \text{ p. s.} \qquad \text{pour tout} \qquad y \in F.$$

Pour continuer nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 4. — *Étant donné une famille dénombrable de sous-martingales réelles intégrables* $(U_n^i, n \in N)$ $(i \in I)$ *vérifiant la condition* $\sup_n E[\sup_i (U_n^i)^+] < \infty$, *les limites p. s.* $U_\infty^i = \lim_{n\to\infty} U_n^i$ *existent et nous avons :*

$$\sup_I U_n^i \to \sup_I U_\infty^i \textit{ p. s. lorsque } n \to \infty.$$

Les sous-martingales $(U_n^i, n \in N)$ $(i \in I)$ satisfont toutes à la condition de Doob $\sup_N E[(U_n^i)^+] < \infty$ grâce à l'hypothèse; l'existence et l'intégrabilité des limites p. s. U_∞^i est donc assurée par le théorème de Doob. La suite $(U_n = \sup_I U_n^i, n \in N)$ est aussi une sous-martingale telle que $\sup_N E(U_n^+) < \infty$ par hypothèse, de sorte que la limite p. s. $U_\infty = \lim_n U_n$ existe et est intégrable. Il est clair que $U_\infty \geqslant \sup_I U_\infty^i$ p. s.; montrons que $E[U_\infty] \leqslant E[\sup_I U_\infty^i]$ ce qui suffira à établir que $U_\infty = \sup_I U_\infty^i$ p. s.

Soit $(I_p, p \in N)$ une suite de parties finies de I croissant vers I lorsque $p \nearrow \infty$. L'application $n, p \to E[\sup_{I_p} U_n^i]$ définie sur N^2 est croissante en n et en p; elle est bornée dans R par hypothèse puisque

$$\sup_{n,p} E[\sup_{I_p} U_n^i] = \sup_N E[\sup_I U_n^i] \leqslant \sup_N E[\sup_I (U_n^i)^+] < \infty ;$$

il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ deux entiers n_ε et p_ε tels que

$$\sup_{\mathrm{N}} \mathrm{E}\,[\sup_{\mathrm{I}} \mathrm{U}_n^i] \leqslant \varepsilon + \mathrm{E}\,[\sup_{\mathrm{I}_p} \mathrm{U}_n^i] \quad \text{si} \quad n \geqslant n_\varepsilon \quad \text{et} \quad p \geqslant p_\varepsilon.$$

Appliquons alors le lemme de Fatou à la suite des v. a. r. positives $(\sup_{\mathrm{I}} \mathrm{U}_n^i - \sup_{\mathrm{I}_p} \mathrm{U}_n^i,\ n \in \mathrm{N})$ qui converge p. s. vers $\mathrm{U}_\infty - \sup_{\mathrm{I}_p} \mathrm{U}_\infty^i$; nous trouvons ainsi, si p est choisi $\geqslant p_\varepsilon$, que

$$\mathrm{E}[\mathrm{U}_\infty - \sup_{\mathrm{I}_p} \mathrm{U}_\infty^i] \leqslant \liminf_{n \to \infty} \mathrm{E}\,[\sup_{\mathrm{I}} \mathrm{U}_n^i - \sup_{\mathrm{I}_p} \mathrm{U}_n^i] \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons ainsi établi que $\mathrm{E}(\mathrm{U}_\infty) \leqslant \mathrm{E}\,[\sup_{\mathrm{I}} \mathrm{U}_\infty^i]$ et le lemme est donc démontré.

Soit maintenant Q un élément fixé de $\mathscr{K}$. Appliquons le lemme précédent aux sous-martingales positives $\{\,|\,\varphi_{\mathrm{X}_n}(y) - \varphi_{\mathrm{Q}}(y)\,|\,,\ n \in \mathrm{N}\,\}$ correspondant à des y variant dans un sous-ensemble dénombrable dense D de la boule unité de F ; nous trouvons ainsi que

$$\Delta[\mathrm{X}_n(.), \mathrm{Q}] = \sup_{\mathrm{D}} |\,\varphi_{\mathrm{X}_n}(y) - \varphi_{\mathrm{Q}}(y)\,| \underset{\text{p.s.}}{\rightarrow} \sup_{\mathrm{D}} |\,\varphi_{\mathrm{X}_\infty}(y) - \varphi_{\mathrm{Q}}(y)\,| = \Delta[\mathrm{X}_\infty(.), \mathrm{Q}]$$

lorsque $n \to \infty$ puisque $\sup_{\mathrm{N}} \mathrm{E}[\Delta(\mathrm{X}_n, \mathrm{Q})] \leqslant \Delta(\mathrm{Q}) + \sup_{\mathrm{N}} \mathrm{E}[\Delta(\mathrm{X}_n)] < +\infty$. Si la v. a. X_∞ prend p. s. ses valeurs dans une partie séparable $\mathscr{K}_0$ de $\mathscr{K}$, il est alors possible de trouver un événement négligeable Ω_0 en dehors duquel

$$\Delta[\mathrm{X}_n(\omega), \mathrm{Q}] \to \Delta[\mathrm{X}_\infty(.), \mathrm{Q}] \qquad \forall \mathrm{Q} \in \mathscr{K}_0$$

lorsque $n \to \infty$; en prenant $\mathrm{Q} = \mathrm{X}_\infty(\omega)$, nous trouvons ainsi que $\Delta[\mathrm{X}_n(\omega), \mathrm{X}_\infty(\omega)] \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $\omega \notin \Omega_0$, ce qui établit le théorème. ■

Le corollaire suivant est maintenant très simple à établir.

COROLLAIRE 5. — *Pour toute martingale intégrable* $(\mathrm{X}_n,\ n \in \mathrm{N})$ *à valeurs dans* $\mathscr{K}$, *les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une v. a. intégrable* $\mathrm{X} : \Omega \to \mathscr{K}$ *telle que* $\mathrm{X}_n = \mathrm{E}^{\mathscr{B}_n}(\mathrm{X})$ *pour tout* $n \in \mathrm{N}$;

2) *La suite de v. a. réelles* $\{\,\Delta(\mathrm{X}_n),\ n \in \mathrm{N}\,\}$ *est équi-intégrable ;*

3) $\sup_{\mathrm{N}} \mathrm{E}[\Delta(\mathrm{X}_n)] < \infty$ *et il existe une v. a.* $\mathrm{X}_\infty : \Omega \to \mathscr{K}$ *intégrable telle que* $\lim_{n \to \infty} \varphi_{\mathrm{X}_n}(y) = \varphi_{\mathrm{X}_\infty}(y)$ *dans* L^1, *pour tout* $y \in \mathrm{F}'$.

Lorsque la condition (3) *est réalisée, nous avons* $\mathrm{X}_n = \mathrm{E}^{\mathscr{B}_n}(\mathrm{X}_\infty)$ *pour tout* $n \in \mathrm{N}$.

Démonstration (1) $\Rightarrow$ (2). — Par hypothèse $\varphi_{X_n}(y) = E^{\mathscr{B}_n}[\varphi_{X_0}(y)]$ pour tout $n \in N$ et tout $y \in F$; la formule (5) entraîne alors que $\Delta(X_n) \leqslant E^{\mathscr{B}_n}[\Delta(X)]$. Mais la martingale réelle $(E^{\mathscr{B}_n}[\Delta(X)], n \in N)$ est équi-intégrable puisque $\Delta(X) \in L^1$; la suite de v. a. r. positives $(\Delta(X_n), n \in N)$ l'est donc *a fortiori.*

(2) $\Rightarrow$ (3). — Si la suite $(\Delta(X_n), n \in N)$ est équi-intégrable, elle est bornée dans L^1 et le théorème 3 montre donc que lim p. s. $\varphi_{X_n}(y) = \varphi_{X_\infty}(y)$ pour une v. a. intégrable X_∞ ; comme $|\varphi_{X_n}(y)| \leqslant \|y\| \Delta(X_n)$, les martingales $(\varphi_{X_n}(y), n \in N)$ sont équi-intégrables et elles convergent donc aussi dans L^1 vers leurs limites p. s.

(3) $\Rightarrow$ (1). — Puisque la martingale réelle $(\varphi_{X_n}(y), n \in N)$ converge dans L^1 vers $\varphi_{X_\infty}(y)$ elle coïncide avec la suite $(E^{\mathscr{B}_n}[\varphi_{X_\infty}(y)], n \in N)$. Il s'ensuit bien par définition que $X_n = E^{\mathscr{B}_n}[X_\infty]$ pour tout $n \in N$. ■

Nous terminerons par une remarque et un exemple. Pour un espace de Banach G de dimension *finie*, une martingale intégrable $(X_n, n \in N)$ à valeurs dans l'espace $\mathscr{K}$ des parties convexes compactes de G est toujours essentiellement p. s. convergente, au sens où il existe au moins une martingale intégrable réelle $(f_n, n \in N)$ telle que la martingale $(X_n - f_n, n \in N)$ [obtenue par translation des ensembles $X_n(\omega)$ de $-f_n(\omega)$] soit p. s. convergente. En effet il suffit de choisir la martingale réelle $(f_n, n \in N)$ telle que $f_n \in X_n$ p. s. pour tout $n \in N$, ce qui est toujours possible; alors la suite

$$\{ \varphi_{X_n - f_n}(y) = \varphi_{X_n}(y) - (f_n, y), n \in N \}$$

est une martingale intégrable réelle *positive*, donc p. s. convergente, quel que soit $y \in G'$. Comme G est de dimension finie, il est facile d'en déduire que la martingale $\{ X_n - f_n, n \in N \}$ converge p. s. dans $\mathscr{K}$. Ce résultat ne s'étend pas en dimension infinie comme le montre l'exemple suivant.

Exemple: Sur l'espace $[(\Omega, \mathscr{A}, P); (\mathscr{B}_n, n \in N)]$, soit $[(\xi_n^p, n \in N), p \in N]$ une suite de martingales intégrables réelles positives. La formule

$$X_n(.) = \{ x = (x^p, p \in N) : |x^p| \leqslant \xi_n^p(.) \}$$

définit alors une martingale intégrable à valeurs dans les parties convexes, faiblement compactes de l'espace de Hilbert $l^2(N)$ pourvu que les v. a. réelles positives

$$\Delta(X_n) = \sqrt{\sum_{p \in N} (\xi_n^p)^2} \qquad (n \in N)$$

soient intégrables; cela se vérifie facilement après avoir remarqué que

$$\varphi_{X_n(\cdot)}(y) = \sum_{p \in N} |y^p| \, \xi_n^p(.) \qquad \text{si} \qquad y = (y^p, p \in N) \in l^2(N).$$

D'autre part les martingales positives $(\xi_n^p, n \in \mathrm{N})$ $(p \in \mathrm{N})$ convergent nécessairement p. s. vers des v. a. intégrables réelles positives $\xi_\infty^p (p \in \mathrm{N})$ respectivement ; mais la formule

$$X_\infty(.) = \{ x = (x^p, p \in \mathrm{N}) : | x^p | \leqslant \xi_\infty^p \}$$

ne définit pas nécessairement pour presque tout ω, une partie convexe faiblement compact de $l^2(\mathrm{N})$ car il peut se faire que la v. a. $\sqrt{\sum_{p \in \mathrm{N}} (\xi_\infty^p)^2}$ ne soit pas finie p. s. (ni *a fortiori* intégrable), même si les v. a. $\Delta(X_n)$ sont intégrables $(n \in \mathrm{N})$. Il est donc possible que la martingale intégrable $(X_n, n \in \mathrm{N})$ (ni aucune de ses translatées) ne converge pas presque partout.

Je remercie M. VALADIER de m'avoir signalé une erreur dans la première rédaction de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CASTAING, Sur les multi-applications mesurables. *Cahier de R. O.*

[2] S. D. CHATTERJI, Martingale convergence and the Radon Nikodym theorem in Banach spaces. *Math. Scand.*, t. **22**, 1968, p. 21-41.

[3] L. HORMANDER, Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. *Arkiv for Math.*, t. **3**, 1954, p. 181-186.

[4] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités.* Masson, 2^e^ édition, 1970.

[5] F. SCALORA, Abstract martingale convergence theorems. *Pacific J. Math.*, t. **11**, 1961, p. 347-374.

[6] M. VALADIER, Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **266**, 1968, p. 14-16.

[7, a] B. VAN CUTSEM, Espérances conditionnelles d'une multi-application à valeurs convexes compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **269**, 1969, p. 212-214.

[7, b] — Martingales de multi-applications à valeurs convexes compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **269**, 1969, p. 429-432.

[7, c] — Thèse, Grenoble, 1971.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1971 et revu le 6 décembre 1971).