ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN JACOD

Fonctionnelles multiplicatives et sous-processus des P-processus

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 4 (1971), p. 299-325

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_4_299_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VII, n° 4, 1971, p. 299-325. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Fonctionnelles multiplicatives et sous-processus des P-processus

par

Jean JACOD
Centre de Morphologie mathématique,
35, rue Saint-Honoré, 77-Fontainebleau.

SUMMARY. — Let F_Δ be a subset of the set of all functions from S into E_Δ, where E_Δ is a locally compact space with an isolated point Δ. If $\varphi \in F_\Delta$, we denote by φ^u the value of φ at $u \in S$. Consider a Markov process $X = (\Omega, X_t, P_\varphi)$ with values in F_Δ, such that if $X_s^u(\omega) = \Delta$, we have $X_t^u(\omega) = \Delta$ for all $t \geqslant s$. X is called a *P-process* if it satisfies following condition: for any subset V of S, any family $(A_u)_{u \in V}$ of borelian subsets of E_Δ, $P_\varphi \{ X_t^u \in A_u ; u \in V \}$ depends only on $(\varphi^u ; u \in V)$.

If V is any finite subset of S, the restriction of a P-process to V is a Markov process with values in E_Δ^V, to which we associate a Markov semi-group. We give a characterization for a family of Markov semi-groups on E_Δ^V indexed by finite subsets V of S to be associated to a P-process.

Then we are concerned with killing a P-process. As lifetimes may be different according to different $u \in S$, the situation is more intricated than for ordinary Markov processes. We define multiplicative functionnals. We give a necessary and sufficient condition for these functionnals to be associated to a « good » sub-process. Finally we construct the killed process in case this condition is satisfied.

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier une classe particulière de processus de Markov à valeurs dans un espace fonctionnel. S est un ensemble quelconque appelé ensemble des indices. $(E, \mathscr{E})$ est un espace L. C. D. muni de ses boréliens, auquel on adjoint un point Δ. F_Δ est une partie de E_Δ^S, munie de la tribu-trace induite par $\mathscr{E}_\Delta^{S\otimes}$. Si $\varphi \in F_\Delta$, on note φ^u la valeur de φ au point $u \in S$. Soit $X = (\Omega, X_t, P_\varphi)$ un processus de Markov à valeurs dans $(F_\Delta, \mathscr{F}_\Delta)$, tel que si $X_t^u(\omega) = \Delta$, $X_s^u(\omega) = \Delta$ pour $s \geqslant t$.

Le processus X est appelé un P-processus si pour toute partie V de S, $(A_u)_{u\in V}$ étant une famille de boréliens de E_Δ, $P_\varphi\{X_t^u \in A_u, u \in V\}$ ne dépend que des $(\varphi^u, u \in V)$. Cela implique en particulier que pour toute partie finie ou dénombrable V de S, le processus $(X_t^u, u \in V)_{t\geqslant 0}$ soit markovien.

Le semi-groupe des transitions d'un processus de Markov est remplacé pour un P-processus par une famille de semi-groupes indicée par les parties finies de S. On indique une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle famille soit associée à un P-processus.

Ensuite nous nous intéressons aux tués d'un P-processus qui sont également des P-processus. La situation est différente de celle des processus de Markov ordinaires. En effet les temps de mort $\zeta^u = \inf(t > 0, X_t^u = \Delta)$ sont différents selon les indices u. Il faut d'abord définir les fonctionnelles multiplicatives et examiner leurs relations avec les familles de semi-groupes subordonnés à X. Enfin nous construisons de manière explicite le sous-processus associé à une fonctionnelle multiplicative, lorsque celle-ci est « stricte ».

C'est la formalisation d'un problème de géologie mathématique qui nous a conduit à étudier les P-processus : on veut décrire le déroulement dans le temps d'un processus de sédimentation, dans un domaine $S \subset \mathbb{R}^2$ du plan horizontal. Il s'agit d'une sédimentation marine, et on s'intéresse à la profondeur à laquelle se passe la sédimentation. On appelle X_t^u la profondeur à l'instant t le long de la verticale passant par u. Le déroulement du processus peut se décrire par une équation différentielle du type

$$\frac{\partial X_t^u}{\partial t} = f_u(X_t^u, Y_t) \tag{a}$$

linéaire en X_t^u, où Y_t est une fonction représentant l'intervention des paramètres extérieurs. Ces paramètres étant très nombreux et inaccessibles expérimentalement, il est commode de remplacer la fonction Y_t par un processus stochastique de loi connue.

Avec de bonnes hypothèses sur Y_t et les f_u, le processus $(X_t^u)_{t\geqslant 0}$ solution de (a) est markovien. De même si V est un ensemble fini de points de S, $(X_t^u, u \in V)_{t\geqslant 0}$ est markovien et indépendant des valeurs initiales X_0^u pour $u \notin V$. $\zeta^u = \inf(t > 0, X_t^u = \Delta)$ représente l'instant où la sédimentation cesse le long de la verticale passant par u, et ces instants peuvent être différents selon les verticales (par exemple la sédimentation s'arrête lorsque la profondeur s'annule en un point). Enfin la présence de Y_t assure que pour deux points u et v, les processus $(X_t^u)_{t\geq 0}$ et $(X_t^v)_{t\geq 0}$ ne sont pas indépendants : on n'est pas dans le cas trivial d'une famille de processus de Markov $(X_t^u)_{t\geq 0}$ simplement juxtaposés les uns à côté des autres. Autrement dit $(X_t^u, u \in S)_{t\geq 0}$ est un P-processus. Le traitement précis de ce problème de géologie peut être trouvé dans [*2*].

Je tiens à remercier M. J. Neveu pour les conseils qu'il m'a donnés lors de l'élaboration de ce travail.

I. DÉFINITIONS

$(E, \mathscr{E})$ est un espace L. C. D. muni de ses boréliens, auquel on adjoint un point Δ ; $E_\Delta = E \cup \{ \Delta \}$ et $\mathscr{E}_\Delta$ est la tribu de E_Δ engendrée par $\mathscr{E}$. S est un ensemble quelconque, $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_d$, resp. $\mathscr{S}_q$) est l'ensemble des parties finies (resp. dénombrables, resp. quelconques) non vides de S. $T = [0, \infty]$ et $\mathscr{T}$ désigne les boréliens de T.

F_Δ est une partie de E_Δ^S. Lorsque $V \in \mathscr{S}_q$, F_Δ^V est l'ensemble des restrictions φ^V à V des éléments φ de F_Δ : si $V = \{ u \}$, on écrit F_Δ^u et φ^u. Soient $F = F_\Delta \cap E^S$, $F^V = F_\Delta^V \cap E^V$; il se peut que pour une partie V, F^V soit vide. $\mathscr{F}_\Delta^V$ et $\mathscr{F}^V$ sont les tribus-traces sur F_Δ^V et F^V de $(\mathscr{E}_\Delta)^{V\otimes}$; on écrit $\mathscr{F}_\Delta$ et $\mathscr{F}$ au lieu de $\mathscr{F}_\Delta^S$ et $\mathscr{F}^S$.

Considérons également :

(*i*) un espace Ω muni d'une famille de tribus $(\mathscr{M}_t^V)_{t\in T, V\in\mathscr{S}_q}$; les tribus $\mathscr{M}_t^V$ sont croissantes avec t et V ;

(*ii*) pour tout $t \in T$, une application $\theta_t : \Omega \to \Omega$;

(*iii*) pour tout $t \in T$, une application $X_t : \Omega \to F_\Delta$, telle que si $X_t^u(\omega) = \Delta$, on ait $X_s^u(\omega) = \Delta$ pour tout $s \geq t$;

(*iv*) pour tout $\varphi \in F_\Delta$, une probabilité P_φ sur $(\Omega, \mathscr{M}_\infty^S)$.

DÉFINITION. — *Le terme*

$$X = (\Omega, (\mathscr{M}_t^V)_{t\in T, V\in\mathscr{S}_q}, (\theta_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, (P_\varphi)_{\varphi\in F_\Delta})$$

est un P-*processus s'il vérifie les axiomes suivants :*

Axiomes de régularité (Ra). — Pour tous $u \in S$, $t \in T$, X_t^u est $(\mathscr{M}_t^u, \mathscr{E}_\Delta)$-mesurable.

(Rb). — L'application $\varphi \rightsquigarrow P_\varphi\{ X_t \in A \}$ de F_Δ dans [0, 1] est $\mathscr{F}_\Delta$-mesurable pour tous $t \in T$, $A \in \mathscr{F}_\Delta$.

Axiome d'homogénéité (H). — Pour tous s, $t \in \mathrm{T}$, $\mathrm{X}_s \circ \theta_t = \mathrm{X}_{t+s}$.

Axiome de compatibilité (C). — Pour tout $\mathrm{V} \in \mathscr{S}_q$, si $\varphi^{\mathrm{V}} = \psi^{\mathrm{V}}$ les probabilités P_φ et P_ψ coïncident sur $\mathscr{M}_\infty^{\mathrm{V}}$.

Axiome de Markov (M). — Pour tous s, $t \in \mathrm{T}$, $\varphi \in \mathrm{F}_\Delta$, $\mathrm{A} \in \mathscr{F}_\Delta$,

$$\mathrm{P}_\varphi \{ \mathrm{X}_{t+s} \in \mathrm{A} \mid \mathscr{M}_t^{\mathrm{S}} \} = \mathrm{P}_{\mathrm{X}_t} \{ \mathrm{X}_s \in \mathrm{A} \}$$

L'axiome (C) permet de définir pour tout $\varphi^{\mathrm{V}} \in \mathrm{F}_\Delta^{\mathrm{V}}$ une probabilité $\mathrm{P}_{\varphi^{\mathrm{V}}}^{\mathrm{V}}$ sur $(\Omega, \mathscr{M}_\infty^{\mathrm{V}})$ comme étant la restriction commune à $\mathscr{M}_\infty^{\mathrm{V}}$ des probabilités P_ψ lorsque $\psi^{\mathrm{V}} = \varphi^{\mathrm{V}}$. Il est clair que *le processus*

$$\mathrm{X}^{\mathrm{V}} = (\Omega, (\mathscr{M}_t^{\mathrm{V}})_{t \in \mathrm{T}}, (\theta_t)_{t \in \mathrm{T}}, (\mathrm{X}_t^{\mathrm{V}})_{t \in \mathrm{T}}, \mathrm{P}_{\varphi^{\mathrm{V}}}^{\mathrm{V}})$$

est un processus de Markov conservatif à valeurs dans $\mathrm{F}_\Delta^{\mathrm{V}}$. De même si on restreint le P-processus X à un sous-ensemble d'indices, on obtient encore un P-processus.

Définissons les temps de mort : $\zeta^u(\omega) = \inf\,(t;\ \mathrm{X}_t^u(\omega) = \Delta \}$ est un $(\mathscr{M}_t^u)$-temps d'arrêt. Si $\mathrm{V} \in \mathscr{S}_d$, $\zeta^{\mathrm{V}}(\omega) = \inf \{ \zeta^u(\omega);\ u \in \mathrm{V} \}$ est un $(\mathscr{M}_t^{\mathrm{V}})$-temps d'arrêt.

Axiome (C'). — Si $\mathrm{V} \in \mathscr{S}$ et si $\varphi^{\mathrm{V}} = \psi^{\mathrm{V}}$, P_φ et P_ψ coïncident sur $\mathscr{M}_\infty^{\mathrm{V}}$.

Condition (A). — Pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\mathscr{M}_t^{\mathrm{S}}$ est engendrée par les tribus $(\mathscr{M}_t^{\mathrm{V}})_{\mathrm{V} \in \mathscr{S}}$.

La condition (A) est notamment vérifiée si $\mathscr{M}_t^{\mathrm{V}}$ est la tribu engendrée par les $(\mathrm{X}_s^u;\ u \in \mathrm{V},\ s \leqslant t)$.

Proposition 1. — *Un processus* X *défini par* (*i*)-(*iv*) *et vérifiant* (A) *est un* P-*processus si et seulement s'il vérifie* (C') *et si pour tout* $\mathrm{V} \in \mathscr{S}$, X^{V} *est markovien.*

Démonstration. — Seule la condition suffisante reste à démontrer. Si $\mathrm{W} \in \mathscr{S}_q$, $\mathscr{M}_{t,0}^{\mathrm{W}} = \cup\,(\mathscr{M}_t^{\mathrm{V}};\ \mathrm{V} \in \mathscr{S},\ \mathrm{V} \subset \mathrm{W})$ est une algèbre engendrant $\mathscr{M}_t^{\mathrm{V}}$ d'après (A). $\mathscr{F}_{\Delta,0}$ est la trace sur F_Δ de l'algèbre des cylindriques de $\mathrm{E}_\Delta^{\mathrm{S}}$ à base mesurable dans l'un des $\mathrm{E}_\Delta^{\mathrm{V}}$ pour $\mathrm{V} \in \mathscr{S}$; $\mathscr{F}_{\Delta,0}$ engendre $\mathscr{F}_\Delta$.

Les axiomes (Ra) et (H) sont clairement vérifiés. Si $\mathrm{W} \in \mathscr{S}_q$ et si $\varphi^{\mathrm{W}} = \psi^{\mathrm{W}}$, les probabilités P_φ et P_ψ coïncident d'après (C') sur les $\mathscr{M}_\infty^{\mathrm{V}}$ pour $\mathrm{V} \in \mathscr{S}$, $\mathrm{V} \subset \mathrm{W}$; elles coïncident donc sur $\mathscr{M}_{\infty,0}^{\mathrm{W}}$, donc sur $\mathscr{M}_\infty^{\mathrm{W}}$ et on a l'axiome (C). Enfin d'après le théorème des classes monotones il suffit de vérifier (Rb) et (M) pour $\mathrm{A} \in \mathscr{F}_{\Delta,0}$. Un tel A est un cylindre de base A_0 dans un $\mathrm{F}_\Delta^{\mathrm{V}}$, et d'après (C') on a

$$\mathrm{P}_\varphi \{ \mathrm{X}_t \in \mathrm{A} \} = \mathrm{P}_{\varphi^{\mathrm{V}}}^{\mathrm{V}} \{ \mathrm{X}_t^{\mathrm{V}} \in \mathrm{A}_0 \}$$

et il suffit d'utiliser le fait que X^{V} est markovien pour obtenir le résultat. ■

COROLLAIRE. — *Un processus* X *défini par* (*i*)-(*iv*) *et vérifiant* (A) *est un* P-*processus si et seulement s'il vérifie* (C') *et si pour tout* $V \in \mathscr{S}$, *sa restriction à* V *est un* P-*processus.*

II. CONSTRUCTION D'UN P-PROCESSUS

II-1. — Étant donné un P-processus X, si $V \in \mathscr{S}$, $\varphi^V \in F_\Delta^V$, $A \in \mathscr{F}_\Delta^V$, $t \geqslant 0$, posons

$$\bar{P}_t^V(\varphi^V, A) = P_\varphi \{ X_t^V \in A \} \tag{1}$$

on obtient ainsi un semi-groupe markovien $(\bar{P}_t^V)_{t \geqslant 0}$ sur $(F_\Delta^V, \mathscr{F}_\Delta^V)$, qui est le semi-groupe des transitions du processus X^V. Réciproquement, à quelles conditions une famille de semi-groupes markoviens $\overline{\mathscr{P}} = (\bar{P}_t^V)_{t \geqslant 0, V \in \mathscr{S}}$ est-elle associée à un P-processus ? Nous ne savons résoudre ce problème que lorsque F_Δ vérifie les axiomes suivants :

Axiome (D). — Pour tout $V \in \mathscr{S}_d$, F_Δ^V est fermée pour la convergence simple dans E_Δ^V.

Axiome (E). — Si φ_n est une suite de F_Δ telle que les $W_n = \{ u ; \varphi_n^u = \Delta \}$ décroissent vers W, il existe $\varphi \in F_\Delta$ telle que $W = \{ u ; \varphi^u = \Delta \}$.

Si $F_\Delta = E_\Delta^S$, F_Δ vérifie ces deux axiomes. Lorsque S est un espace topologique, l'ensemble des fonctions boréliennes de S dans E_Δ les vérifie également, mais l'ensemble des fonctions continues ne les vérifie pas.

U et V étant deux parties disjointes de S, si $A \subset F^U$, $B \subset F^V$, on note AB l'ensemble des restrictions φ^{U+V} des φ de F_Δ tels que $\varphi^U \in A$ et $\varphi^V \in B$; AB peut être vide même si A et B ne le sont pas. On note Δ^V la partie de E_Δ^V réduite à la fonction identiquement égale à Δ.

THÉORÈME 1. — *Soient* F_Δ *une partie de* E_Δ^S *vérifiant* (D) *et* (E), et $\overline{\mathscr{P}}$ *une famille des semi-groupes markoviens sur les espaces* $(F_\Delta^V, \mathscr{F}_\Delta^V)$ *indexés par les* $V \in \mathscr{S}$; *pour qu'il existe un* P-*processus* X *relié à* $\overline{\mathscr{P}}$ *par* (1), *il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions :*

(B1) *Pour tous* $\varphi \in F_\Delta$, $V \in \mathscr{S}$, $u \in S - V$, $A \in \mathscr{F}_\Delta^V$, $t \geqslant 0$,

$$\bar{P}_t^{V+\{u\}}(\varphi^{V+\{u\}}, AF_\Delta^u) = \bar{P}_t^V(\varphi^V, A)$$

(B2) *Pour tous* $\varphi \in F_\Delta$ *et* u *tels que* $\varphi^u = \Delta$, $V \in \mathscr{S}$ *tel que* $u \notin V$, $A \in \mathscr{F}_\Delta^V$, $t \geqslant 0$,

$$\bar{P}_t^{V+\{u\}}(\varphi^{V+\{u\}}, A\Delta^u) = \bar{P}_t^V(\varphi^V, A)$$

Soient $W = (F_\Delta)^T$, $X_t(w)$ l'élément de F_Δ représentant la $t^{\text{ième}}$ coordonnée de $w \in W$, θ_t la translation naturelle sur W, $\mathscr{G}_t^V = \sigma(X_s^u;\ u \in V,\ s \leqslant t)$. On note $\mathscr{H}$ la semi-algèbre constituée des intersections finies de parties de la forme $\{ w;\ X_t^u(w) \in A \}$, où $A \in \mathscr{E}_\Delta$. Si $\mathscr{C}$ est la classe des parties de W de la forme $\{ w;\ X_t^u(w) \in K \}$, telles que K soit un compact de E_Δ, on a :

LEMME. — *Si* F_Δ *vérifie* (D), *la classe* $\mathscr{C}$ *est semi-compacte.*

Démonstration. — Soit $C_n = \{ w;\ X_{t_n}^{u_n}(w) \in K_n \}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$ d'intersection vide, et supposons que pour tout n, il existe un w_n dans $\bigcap_{p=1}^{n} C_p$. Chaque K_n étant compact, la méthode classique de la suite diagonale permet de trouver une suite m_p telle que pour tout n, $X_{t_n}^{u_n}(w_{m_p})$ converge lorsque $p \to \infty$ vers un point r_n de K_n. Posons :

$$s_1 = 1, \qquad s_n = \inf (i > s_{n-1}\ ;\ t_i \neq t_{s_{n-1}})$$

Fixons n ; soient $R(n) = \{ u_i;\ t_i = t_{s_n} \}$ et $a(n) = t_{s_n}$. Pour tout $i \in R(n)$, $X_{a(n)}^{u_i}(w_{m_p})$ converge vers r_i, donc $X_{a(n)}^{R(n)}(w_{m_p})$ converge simplement dans $E_\Delta^{R(n)}$. D'après (D) il existe $\varphi_n \in F_\Delta$ telle que si $i \in R(n)$, $\varphi_n^{u_i} = r_i$. φ_0 étant un point quelconque de F_Δ, définissons w par ses coordonnées :

$$X_s(w) = \begin{cases} \varphi_n & \text{si} \quad s = a(n) \\ \varphi_0 & \text{si} \quad s \neq a(n) \quad \text{pour tout} \quad n \end{cases}$$

on a clairement $X_{t_n}^{u_n}(w) = r_n \in K_n$, donc $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite : il existe donc un n tel que l'intersection des n premiers C_p soit vide. ■

Démonstration du théorème. — La condition nécessaire est une conséquence immédiate de (*iii*) et de (C). Réciproquement, supposons que $\overline{\mathscr{P}}$ vérifie (B1) et (B2).

1) Si $\varphi \in F_\Delta$ et $A = \bigcap_{p=1}^{n} \{ w\ ;\ X_{t_p}^{u_p}(w) \in A_p \} \in \mathscr{H}$ avec $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, $V_p = \{ u_p, \ldots, u_n \}$, on définit $P_\varphi(A)$ par :

$$P_\varphi(A) = \int_{\bigcap_{p=1}^{n} \{\varphi_p^{u_p} \in A_p\}} \overline{P}_{t_1}^{V_1}(\varphi^{V_1}, d\varphi_1^{V_1}) \overline{P}_{t_2-t_1}^{V_2}(\varphi_1^{V_2}, d\varphi_2^{V_2}) \ldots \overline{P}_{t_n-t_{n-1}}^{u_n}(\varphi_{n-1}^{u_n}, d\varphi_n^{u_n})$$

la condition de compatibilité (B1) et la propriété des semi-groupes montrent qu'on définit ainsi de manière unique une fonction d'ensemble sur $\mathscr{H}$, additive, positive, telle que $P_\varphi(\phi) = 0$ et que $P_\varphi(W) = 1$.

Soit $\mathscr{D}$ la classe semi-compacte des intersections finies d'éléments de $\mathscr{C}$ et A la partie précédente de $\mathscr{H}$. Pour tous $\varepsilon > 0$, $p \leqslant n$, il existe un compact $K_p^\varepsilon \subset A_p$, avec :

$$P_\varphi\{ w ; X_{t_p}^{u_p}(w) \in A_p - K_p^\varepsilon \} = \bar{P}_{t_p}^{u_p}(\varphi^{u_p}, A_p - K_p^\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

si $K^\varepsilon = \bigcap_{p=1}^{n} \{ x ; X_{t_p}^{u_p}(w) \in K_p^\varepsilon \}$, $K^\varepsilon \in \mathscr{D}$ et $K^\varepsilon \subset A$; on a :

$$P_\varphi(A - K^\varepsilon) \leqslant \sum_{p=1}^{n} P_\varphi\{ w ; X_{t_p}^{u_p}(w) \in A_p - K_p^\varepsilon \} \leqslant \varepsilon$$

donc $P_\varphi(A) = \sup (P_\varphi(K) ; K \subset A, K \in \mathscr{D})$. Cela entraîne que P_φ se prolonge de manière unique en une probabilité sur la tribu $\mathscr{G}_\infty^S$ engendrée par $\mathscr{H}$.

2) Le processus que nous avons construit possède les propriétés d'un P-processus, sauf (*iii*). Nous allons examiner ce point. Si $V \in \mathscr{S}_q$ et $R \subset T$, soient $\zeta_R^u = \inf (t \in R, X_t^u = \Delta)$, $\Omega_{V,R} = \{ w ; X_t^u(w) = \Delta$ pour $u \in V$, $t \in R$ et $t \geqslant \zeta_R^u(w) \}$ et $\Omega = \Omega_{S,T}$. Si W' est un élément de $\mathscr{G}_\infty^S$ contenant Ω, il existe $V \in \mathscr{S}_d$ et une partie dénombrable dense R de T, telles que W' soit l'intersection de W et d'un cylindre de $E_\Delta^{S \times T}$ de base mesurable dans $(F_\Delta^V)^R$. On va montrer que $\Omega_{V,R} \subset W'$.

Soit $w \in \Omega_{V,R}$. Tout réel t est limite d'une suite décroissante de $s_n \in R$, la suite $V_n = \{ u ; X_{s_n}^u(w) = \Delta \}$ décroît vers un ensemble V et d'après l'axiome (E) il existe $\varphi_t \in F_\Delta$ avec $V = \{ u ; \varphi_t^u = \Delta \}$. Définissons le point w' par ses coordonnées :

$$X_t(w') = \begin{cases} X_t(w) & \text{si } t \in R \\ \varphi_t & \text{si } t \notin R \end{cases}$$

par construction $w' \in \Omega \subset W'$. Comme les coordonnées de w et de w' correspondant à $u \in V$ et à $t \in R$ sont les mêmes, $w \in W'$ également, ce qui montre que $\Omega_{V,R} \subset W'$.

Soient V_n et R_n deux suites de parties finies croissant respectivement vers V et R. D'après (B2) on a $P_\varphi(\Omega_{V_n,R_n}) = 1$. Comme $\lim_{(n)} \downarrow \Omega_{V_n,R_n} = \Omega_{V,R}$, $P_\varphi(W') = 1$ et $P_\varphi^*(\Omega) = 1$.

Les restrictions de θ_t, X_t, $\mathscr{G}_t^V$ et P_φ à Ω, vérifient (*i*)-(*iv*). (C') découle de

(B1) et $(\bar{P}_t^V)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe, donc le processus X^V est markovien. Pour conclure on applique la proposition 1. ■

II-2. **La famille des transitions de X.** — Lorsqu'on a un processus de Markov à valeurs dans E_Δ, on considère en général les transitions sous-markoviennes sur E, et non les transitions markoviennes sur E_Δ. C'est ce que nous allons faire ici: si $V \in \mathcal{S}$ et $\varphi^V \in F^V$, on note $P_t^V(\varphi^V, .)$ la restriction de $\bar{P}_t^V(\varphi^V, .)$ à F^V (F^V est une partie mesurable de F_Δ^V). La condition (B2) entraîne que $(P_t^V)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe sous-markovien sur $(F^V, \mathcal{F}^V)$.

La famille $\mathcal{P} = (P_t^V)_{t\geqslant 0, V\in\mathcal{S}}$ s'appelle la *famille des transitions du* P-*processus* X.

P_t^ϕ n'est pas défini; mais dans toute la suite, nous ferons la convention suivante: si dans une formule P_t^V intervient et si l'ensemble V peut être vide, chaque fois que $V = \phi$ il faut lire 1 à la place de P_t^V,

PROPOSITION 2. — *Si* F_Δ *vérifie* (D) *et* (E), *une famille* $\mathcal{P}$ *de semi-groupes sous-markoviens sur les* $(F^V, \mathcal{F}^V)$ *indexés par les* $V \in \mathcal{S}$ *est la famille des transitions d'un* P-*processus (unique à une équivalence près) si et seulement si elle vérifie la condition:*

(B3) *Pour tous* $U \subset V \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{F}^{V-U}$, $t \geqslant 0$, $\varphi^V \in F^V$,

$$\sum_{H\subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-H)} P_t^{V-H}(\varphi^{V-H}, AF^{U-H}) \geqslant 0. \tag{2}$$

Démonstration. — Si $\mathcal{P}$ est la famille des transitions d'un P-processus, le premier membre de (2) n'est autre que $\bar{P}_t^V(\varphi^V, A\Delta^U)$: la condition (B3) est donc vérifiée, et on voit facilement que la connaissance de $\mathcal{P}$ détermine de manière unique la famille $(\bar{P}_t^V)_{t\geqslant 0, V\in\mathcal{S}}$.

Réciproquement, grâce au théorème 1 il nous reste à prouver que si $\mathcal{P}$ vérifie (B3), on peut construire une famille $\bar{\mathcal{P}}$ de semi-groupes vérifiant (B1) et (B2) et prolongeant $\mathcal{P}$. Soit $V \in \mathcal{S}$; si $\varphi^V \in F_\Delta^V$, $U \subset V$, $A \in \mathcal{F}^{V-U}$, $W = \{u \in V;\ \varphi^u = \Delta\}$, on peut poser:

$$\bar{P}_t^V(\varphi^V, A\Delta^U)$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{H\subset U-W} (-1)^{\operatorname{card}(U-W-H)} P_t^{V-W-H}(\varphi^{V-W-H}, AF^{U-W-H}) & \text{si } W \subset U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on construit ainsi une mesure positive sur $(F_\Delta^V, \mathscr{F}_\Delta^V)$, de masse :

$$\sum_{U\subset V-W} \bar{P}_t^V(\varphi^V, F^{V-W-U}\Delta^{W+U})$$

$$= \sum_{U\subset V-W}\sum_{H\subset U}(-1)^{\mathrm{card}(U-H)}P_t^{V-W-H}(\varphi^{V-W-H}, F^{V-W-H})$$

$$= \sum_{H\subset V-W} P_t^{V-W-H}(\varphi^{V-W-H}, F^{V-W-H}) \sum_{H\subset U\subset V-W} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)}$$

mais la seconde somme est $\sum_{q=0}^{n}(-1)^q C_n^q$; avec $n = \mathrm{card}(V - W - H)$ et $q = \mathrm{card}(U - H)$; cette somme est nulle, sauf si $n = 0$, auquel cas elle égale 1. Donc $\bar{P}_t^V(\varphi^V, F_\Delta^V) = 1$, et $\bar{P}_t^V(\varphi^V, .)$ est une probabilité. Si $\varphi^V \in F^V$ sa restriction à F^V est par construction $P_t^V(\varphi^V, .)$; par construction également (B2) est vérifiée.

Pour prouver (B1) il suffit de montrer que si $u \in V$, $W \subset V - \{u\}$, et et $A \in \mathscr{F}^W$, on a :

$$\bar{P}_t^V(\varphi^V, A\Delta^{V-W-\{u\}}F_\Delta^u) = \bar{P}_t^{V-\{u\}}(\varphi^{V-\{u\}}, A\Delta^{V-W-\{u\}})$$

soit $H = \{v \in V; \varphi^v = \Delta\}$; si $H \cap W \neq \phi$ ou si $u \in H$, cette relation est évidente. Sinon on a, avec $U = V - W - \{u\}$:

$$\bar{P}_t^V(\varphi^V, AF_\Delta^u\Delta^U)$$

$$= \bar{P}_t^{V-H}(\varphi^{V-H}, AF^u\Delta^{U-H}) + \bar{P}_t^{V-H}(\varphi^{V-H}, A\Delta^{U-H+\{u\}})$$

$$= \sum_{K\subset U-H} (-1)^{\mathrm{card}(U-H-K)}P_t^{V-H-K}(\varphi^{V-H-K}, AF^{\{u\}+U-H-K})$$

$$+ \sum_{K\subset U-H+\{u\}} (-1)^{\mathrm{card}(U-H-K+\{u\})}P_t^{V-H-K}(\varphi^{V-H-K}, AF^{\{u\}+U-H-K})$$

$$= \sum_{K\subset U-H} (-1)^{\mathrm{card}(U-H-K)}P_t^{V-H-K-\{u\}}(\varphi^{V-H-K-\{u\}}, AF^{U-H-K})$$

$$= \bar{P}_t^{V-H-\{u\}}(\varphi^{V-H-\{u\}}, A\Delta^{U-H}) = \bar{P}_t^{V-\{u\}}(\varphi^{V-\{u\}}, A\Delta^{V-W-\{u\}})$$

Donc (B1) est vérifiée. Il reste à montrer que $(\bar{P}_t^V)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe.

On voit facilement qu'il suffit de vérifier la relation des semi-groupes pour $V \in \mathscr{S}$ et $\varphi^V \in F^V$. Si $W \subset V$, $U = V - W$, $A \in \mathscr{F}^W$, on a :

$$\bar{P}_t^V \bar{P}_s^V(\varphi^V, A\Delta^U) = \sum_{H \subset U} \sum_{L \subset H} (-1)^{\text{card}(L-H)} \int P_t^{V-L}(\varphi^{V-L}, d\varphi_1^{V-H} F^{H-L})$$

$$\sum_{K \subset U-H} (-1)^{\text{card}(U-H-K)} P_s^{V-H-K}(\varphi_1^{V-H-K}, AF^{U-H-K})$$

$$= \sum_{L \subset U} \sum_{L \subset M \subset U} (-1)^{\text{card}(U-M)} \int P_t^{V-L}(\varphi^{V-L}, d\varphi_1^{V-M} F^{M-L})$$

$$P_s^{V-M}(\varphi_1^{V-M}, AF^{U-M}) \sum_{R \subset M-L} (-1)^{\text{card}(R)}$$

en posant $M = H + K$ et $R = H - L$; mais on a vu que la dernière somme de l'expression précédente égale 0 ou 1 selon que $M \neq L$ ou $M = L$; il vient donc :

$$= \sum_{L \subset U} (-1)^{\text{card}(U-L)} P_{t+s}^{V-L}(\varphi^{V-L}, AF^{U-L}) = \bar{P}_{t+s}^V(\varphi^V, A\Delta^U)$$

ce qui achève la démonstration. ■

II-3. **Un exemple de P-processus.** — Cet exemple nous est fourni par la géologie mathématique, dont il a été question dans l'introduction. Il convient à la description dans deux dimensions d'une sédimentation lenticulaire. Il nous a été suggéré par G. Matheron.

On prend $S = \mathbb{R}$, et on rapporte le plan $\mathbb{R}^2$ aux axes de coordonnées (u) et (t). On considère une répartition ponctuelle de Poisson dans le plan, de densité uniforme. A chaque point A_i de cette répartition et indépendamment des autres points, on associe deux variables aléatoires indépendantes Y_i et Z_i, de lois respectives indépendantes de i. On construit à partir de A_i comme origine un segment B_i parallèle à l'axe (u), de longueur Y_i.

La parallèle à l'axe (t) passant par le point d'abscisse u rencontre successivement un certain nombre de segments, qu'on peut numéroter $B_1, \ldots, B_n, \ldots$; les cotes de ces segments sont $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ On pose :

$$X_t^u = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T_1 \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i & \text{si } T_n \leqslant t < T_{n+1} \end{cases}$$

Il est trivial de vérifier que le processus $(X_t^u ; u \in S)_{t \geqslant 0}$ ainsi défini est un P-processus. En particulier pour chaque u, $(X_t^u)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (en fait c'est même un processus de Poisson composé).

III. LES FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES

III-1. — Soit X un P-processus et $\mathscr{G}_{t,0}^V = \sigma(X_s^u; u \in V, s \leqslant t)$. Complétons ces tribus de la même manière qu'en [*1*] : $\mathscr{G}_\infty^V$ désigne la tribu complétée de $\mathscr{G}_{\infty,0}^V$ par rapport à la famille $(P_\mu; \mu$ probabilité sur $(F_\Delta, \mathrm{F}_\Delta))$, et $\mathscr{G}_t^V$ la complétée de $\mathscr{G}_{t,0}^V$ dans $\mathscr{G}_\infty^V$ par rapport à la même famille.

DÉFINITION. — *On appelle fonctionnelle multiplicative* (FM) *du* P-*processus* X *une famille* $M = (M_t^V; t \geqslant 0, V \in \mathscr{S})$ *d'applications de* Ω *dans* $[0, 1]$ *vérifiant :*

(FM1) *Pour tous* $t \geqslant 0$, $V \in \mathscr{S}$, M_t^V *est* $\mathscr{G}_t^V$*-mesurable.*

(FM2) *Pour tous* $s, t \geqslant 0$, $V \in \mathscr{S}$, $\varphi \in F_\Delta$, *on a* P_φ-p. s. :

$$M_{t+s}^V = M_t^V M_s^V \circ \theta_t \tag{3}$$

(FM3) *Pour tous* $t \geqslant 0$, $U \subset V \in \mathscr{S}$, $\varphi \in F_\Delta$, *on a :*

$$\sum_{H \subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-H)} E_\varphi \{ M_t^{V-H} 1_{F^{V-H}}(X_t^{V-H}) \mid \mathscr{G}_t^{V-U} \} \geqslant 0 \tag{4}$$

avec la convention que si $V = \phi$, $\mathscr{G}_t^V = \{ \phi, \Omega \}$, $M_t^V 1_F\ (X_t^V) = 1$.

(FM1) et (FM2) signifient que pour tout $V \in \mathscr{S}$, $M^V = (M_t^V)_{t\geqslant 0}$ est une FM du processus X^V. M est dite *continue à droite* si chaque fonctionnelle M^V est continue à droite. Deux fonctionnelles M et N sont dites *équivalentes* si pour tout $V \in \mathscr{S}$, M^V et N^V sont des FM équivalentes du processus X^V. Par exemple si M est une FM de X et si on pose

$$N_t^V = M_t^V 1_{F^V}(X_t^V)$$

la famille $N = (N_t^V; t \geqslant 0, V \in \mathscr{S})$ est une FM de X, équivalente à M.

Exemples. — Soit pour chaque $u \in S$ une FM $(M_t^u)_{t\geqslant 0}$ de X^u. Posons $M_t^V = \prod_{u \in V} M_t^u$; la famille $M = (M_t^V; t \geqslant 0, V \in \mathscr{S})$ vérifie clairement (FM1) et (FM2) ; elle vérifie également (FM3), car on a :

$$\sum_{H \subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-H)} M_t^{V-H} 1_{F^{V-H}}(X_t^{V-H}) = 1_{F^{V-H}}(X_t^{V-U}) M_t^{V-U} \prod_{u \in U} (1 - 1_{F^u}(X_t^u) M_t^u) \geqslant 0$$

Par contre une FM $(M_t)_{t\geq 0}$ du processus de Markov X^S n'est pas en général une FM de X. Pour cela il faut en plus que pour tout $u \in S$, M_t soit $\mathscr{G}_t^u$-mesurable.

(FM2) montre que M_0^V prend presque sûrement les valeurs 0 ou 1. On appelle ensemble des *points permanents* associés à la partie V l'ensemble

$$G_M^V = \{ \varphi \in F_\Delta ; \varphi^V \in F^V, P_\varphi \{ M_p^V = 1 \} = 1 \}.$$

Le P-processus X est dit *normal* si X^S est un processus de Markov normal. Pour cela il faut et il suffit que pour tout $V \in \mathscr{S}$, X^V soit normal.

PROPOSITION 3. — *Si* X *est normal, pour tous* V, $W \in \mathscr{S}$, *on a*

$$G_M^{V\cup W} = G_M^V \cap G_M^W.$$

Dans ce cas si $\varphi \notin G_M^V$, on a $P_\varphi \{ M_0^V = 0 \} = 1$ d'après la loi 0-1.

Démonstration. — Soient $H \in \mathscr{S}$, $u \in S - H$, $K = H + \{ u \}$,

$$f_H(\omega) = 1_{F^H}(X_0^H(\omega))M_0^H(\omega),$$

la fonction f_K définie de la même manière, et $A = \{ \omega ; f_H(\omega) < f_K(\omega) \}$. Les fonctions f_H et f_K étant $\mathscr{G}_0^K$-mesurables et X étant normal, la loi 0-1 entraîne que pour tout $\varphi \in F_\Delta$, $P_\varphi(A)$ égale 0 ou 1. Mais (4) appliquée à $V = K$, $U = \{ u \}$, $t = 0$ s'écrit :

$$E_\varphi \{ f_H - f_K \mid \mathscr{G}_0^H \} \geq 0$$

donc $P_\varphi(A) = 0$ et $P_\varphi \{ f_H \geq f_K \} = 1$. Si $\varphi \in G_M^K$, on a $X_0^K = \varphi^K \in F^K$, P_φ-p. s. et $P_\varphi \{ f_K = 1 \} = 1$; donc $P_\varphi \{ f_H = 1 \} = 1$ et $\varphi \in G_M^H$. On a donc montré que $G_M^K \subset G_M^H$ et il en découle immédiatement que $G_M^{V\cup W} \subset G_M^V \cap G_M^W$.

Inversement montrons que $\bigcap_{u\in K} G_M^u \subset G_M^K$, par récurrence sur $n = \mathrm{card}(K)$. Cette propriété est triviale pour $n = 1$; supposons-la vraie pour $n - 1$, avec $n \geq 2$. Soient $u, v \in K$ et $\varphi \in \bigcap_{u\in K} G_M^u$; dans ce cas $X_0^K \in F^K$, P_φ-p. s. et la relation (4) appliquée à $V = K$, $U = \{ u, v \}$ et $t = 0$ s'écrit :

$$E_\varphi \{ M_0^{K-U} - M_0^{K-\{u\}} - M_0^{K-\{v\}} + M_0^K \mid \mathscr{G}_0^{K-U} \} \geq 0$$

mais par hypothèse φ appartient à G_M^{K-U}, à $G_M^{K-\{u\}}$ et à $G_M^{K-\{v\}}$; l'inégalité précédente s'écrit alors :

$$E_\varphi \{ M_0^K \mid \mathscr{G}_0^{K-U} \} - 1 \geq 0$$

donc $M_0^K = 1$, P_φ-p. s. et $\varphi \in G_M^K$. Par conséquent on a bien $\bigcap_{u\in K} G_M^u \subset G_M^K$ et il en découle que $G_M^V \cap G_M^W \subset G_M^{V\cap W}$. ∎

III-2. **Famille de transitions engendrée par une fonctionnelle multiplicative.** — Soit M une FM de P-processus X, de transitions $\mathscr{P} = (P_t^V)_{t \geq 0, V \in \mathscr{S}}$. Pour tous $V \in \mathscr{S}$, $t \geq 0$, $A \in \mathscr{F}^V$ et $\varphi^V \in F^V$, posons :

$$Q_t^V(\varphi^V, A) = E_\varphi \{ 1_A(X_t^V) M_t^V \}$$

M^V étant une FM de X^V, on obtient ainsi un semi-groupe sur $(F^V, \mathscr{F}^V)$; la famille $\mathscr{Q} = (Q_t^V)_{t \geq 0, V \in \mathscr{S}}$ s'appelle la *famille des transitions engendrée par* M. Comme dans [*1*] on pourrait montrer que deux FM engendrent la même famille de transitions si et seulement si elles sont équivalentes.

Remarquons que Q_0^V n'est pas toujours égale à l'identité. En fait si X est normal on a $Q_0^V(\varphi^V, .) = \delta_{\varphi^V}(.) 1_{G_M}(\varphi^V)$.

DÉFINITION. — *La famille de transitions* $\mathscr{Q}$ *est subordonnée à la famille de transitions* $\mathscr{P}$ *si elle vérifie les conditions* (B3) *et* (B4) :

(B4) *Pour tous* $t \geq 0$, $V \in \mathscr{S}$, $\varphi^V \in F^V$, $A \in \mathscr{F}^V$,

$$Q_t^V(\varphi^V, A) \leq P_t^V(\varphi^V, A).$$

PROPOSITION 4. — *Si* M *est une* FM *du* P-*processus* X *de transitions* $\mathscr{P}$ *et si* M *engendre la famille* $\mathscr{Q}$, $\mathscr{Q}$ *est subordonnée à* $\mathscr{P}$.

Démonstration. — (B4) est une conséquence immédiate de la définition de $\mathscr{Q}$ et du fait que $M_t^V \leq 1$. Pour obtenir (2) il suffit de prendre l'espérance du premier membre de (4), multiplié par la fonction $1_A(X_t^{V-U})$, où A est un ensemble quelconque de $\mathscr{F}^{V-U}$. Cela prouve (B3). ■

Nous allons maintenant montrer une réciproque, lorsqu'est vérifiée la condition suivante :

Condition (F). — X vérifie cette condition si, pour tout $t > 0$, toute partie dénombrable J de $[0, t]$ contenant t et tout $V \in \mathscr{S}$, la complétée dans $\mathscr{G}_\infty^V$ de la tribu $\sigma(X_s^u ; u \in V, s \in J)$ par rapport à la famille $(P_\mu ; \mu$ probabilité sur $(F_\Delta, \mathscr{F}^\Delta))$ est $\mathscr{G}_t^V$.

Cette condition est la transposition de [*1*; III-2-2] ; elle est remplie par exemple lorsque les X_t^u sont continues à droite en t. Donnons un résultat préliminaire :

PROPOSITION 5. — *Soient* $W \in \mathscr{S}$ *et* $R_i = (R_i^V ; V \subset W)_{i=1,2}$ *deux familles de mesures de transition sur les* $(F^V, \mathscr{F}^V)$; *si la première vérifie* (2) *pour tous* $U \subset V = W$, $A \in \mathscr{F}^{W-U}$, $\varphi^W \in F^W$ *et la seconde pour tous* $U \subset V \subset W$, $A \in \mathscr{F}^{V-U}$, $\varphi^V \in F^V$, *la famille* $R = (R_1^V R_2^V ; V \subset W)$ *vérifie* (2) *pour tous* $U \subset V = W$, $A \in \mathscr{F}^{W-U}$, $\varphi^W \in F^W$.

Démonstration. — Soient $U \subset W$, $\varphi^W \in F^W$, $A \in \mathscr{F}^{W-U}$; lorsque $H \subset U$ et $L \subset U - H$, $W - H - L \subset W - H$, donc

$$\sum_{L \subset U-H} (-1)^{\operatorname{card}(U-H-L)} R_2^{W-H-L}(\varphi^{W-H-L}, AF^{U-H-L}) 1_{F^L}(\varphi^L)$$

est une fonction positive de φ^{W-H}. En appliquant (2) à R_1, avec $V = W$ et $U = H$, on obtient :

$$0 \leqslant \sum_{H \subset U} \int \sum_{K \subset H} (-1)^{\operatorname{card}(H-K)} R_1^{W-K}(\varphi^{W-K}, d\varphi_1^{W-K}) 1_{F^{H-K}}(\varphi_1^{H-K})$$
$$\sum_{L \subset U-N} (-1)^{\operatorname{card}(U-H-L)} R_2^{W-H-L}(\varphi_1^{W-H-L}, AF^{U-H-L}) 1_{F^L}(\varphi_1^L)$$
$$= \sum_{M \subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-M)} \sum_{K \subset M} \int R_1^{W-K}(\varphi^{W-K}, d\varphi_1^{W-K}) 1_{F^{M-K}}(\varphi_1^{M-K})$$
$$R_2^{W-M}(\varphi_1^{W-M}, AF^{U-M}) \sum_{K \subset H \subset M} (-1)^{\operatorname{card}(H-K)}$$
$$= \sum_{M \subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-M)} R_1^{W-M} R_2^{W-M}(\varphi^{W-M}, AF^{U-M})$$

cette dernière égalité car $\sum_{K \subset H \subset M} (-1)^{\operatorname{card}(H-K)}$ égale 0 ou 1 selon que $K \neq M$ ou $K = M$. ■

THÉORÈME 2. — *Soit* X *un* P-*processus de transititions* $\mathscr{P}$, *normal et vérifiant* (F), *et* $\mathscr{Q}$ *une famille de transitions subordonnée à* $\mathscr{P}$; *il existe une FM* M *de* X *qui engendre* $\mathscr{Q}$; *si pour tous* $V \in \mathscr{S}$ *et* $\varphi^V \in F^V$, *on a* $\mathscr{G}_{t+}^V = \mathscr{G}_t^V$ *et la fonction de* t : $Q_t^{V}1(\varphi^V)$ *est continue à droite en* $t = 0$, *cette FM peut être prise continue à droite.*

Démonstration. — Soit $V \in \mathscr{S}$. Appelons X'^V le processus à valeurs dans l'ensemble F^V auquel on adjoint un point à l'infini δ^V, défini sur Ω par

$$X_t'^V(\omega) = \begin{cases} X_t^V(\omega) & \text{si} \quad t < \zeta^V(\omega) \\ \delta^V & \text{sinon} \end{cases}$$

Le processus X'^V est markovien et admet $(P_t^V)_{t \geqslant 0}$ pour semi-groupe de transitions ; il est normal et vérifie la condition [*1*, III-2-2] ; le semi-groupe $(Q_t^V)_{t \geqslant 0}$ lui est subordonné, donc il existe une FM $M^V = (M_t^V)_{t \geqslant 0}$ de X'^V qui engendre ce semi-groupe. On sait que si $t \geqslant \zeta^V(\omega)$, $M_t^V(\omega) = 0$.

La famille $M = (M_t^V)_{t \geq 0, V \in \mathscr{S}}$ vérifie (FM1) par construction. Si $\varphi^V \in F^V$, (3) est vérifiée car M^V est une FM de X'^V. Si $\varphi^V \in F_\Delta^V - F^V$, comme le processus X^V est normal on a $X_0^V \in F_\Delta^V - F^V$ et $X_0'^V = \delta^V$, P_φ-p. s.; donc donc $M_t^V = 0$ pour tout $t \geq 0$, et (3) est vérifiée. On a donc (FM2).

Pour prouver (FM3) il suffit de montrer, d'après le théorème de convergence monotone, que pour tous $U \subset W \in \mathscr{S}$, $\varphi \in F_\Delta$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n = t$, $A_i \in \mathscr{F}^{W-U}$, on a :

$$(5) \qquad E_\varphi\left\{\prod_{i=1}^{n} 1_{A_i}(X_{t_i}^{W-U}) \sum_{H \subset U} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)} M_t^{W-H} 1_{F^{W-H}}(X_t^{W-H})\right\} \geq 0$$

On va montrer (5) par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, le premier membre de (5) est identique au premier membre de (2), si on remplace $\mathscr{P}$ par $\mathscr{Q}$ et V par W. Supposons (5) vérifiée pour $n - 1$, et posons :

$$R_1^V(\varphi^V, B) = E_\varphi\left\{\prod_{i=1}^{n-1} 1_{A_i}(X_{t_i}^{W-U}) M_{t_{n-1}}^V 1_B(X_{t_{n-1}}^V)\right\}$$
$$R_2^V(\varphi^V, B) = Q_{t-t_{n-1}}^V(\varphi_V, B)$$

les deux familles $R_i = (R_i^V\,;\ V \subset W)$ vérifient les hypothèses de la proposition 5, donc l'inégalité (5) découle de cette proposition et de ce que le premier membre de (5) égale :

$$E_\varphi\left\{\prod_{i=1}^{n-1} 1_{A_i}(X_{t_i}^{W-U}) \sum_{H \subset U} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)} M_{t_{n-1}}^{W-H} 1_{F^{U-H}}(X_{t_{n-1}}^{U-H}) \right.$$
$$\left. E_{X_{t_{n-1}}}\{ 1_{A_n}(X_{t-t_{n-1}}^{W-U}) M_{t-t_{n-1}}^{W-H} 1_{F^{U-H}}(X_{t-t_{n-1}}^{U-H}) \}\right\}$$
$$= \sum_{H \subset U} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)} R_1^{W-H} R_2^{W-H}(\varphi^{W-H}, A_n F^{U-H})$$

Donc (FM3) est vérifiée, et il est clair que M engendre $\mathscr{Q}$. Sous les hypothèses finales du théorème, chaque FM M^V peut être prise continue à droite, d'où le résultat. ∎

III-3. **Prolongement d'une fonctionnelle multiplicative.**

DÉFINITION. — *On appelle fonctionnelle multiplicative complète de* X *une famille* $M_d = (M_t^V,\ t \geq 0,\ V \in \mathscr{S}_d)$ *d'applications de* Ω *dans* [0, 1] *vérifiant* (FM3) *et :*

(FM4) *Pour tous* $t \geq 0$, $V \in \mathscr{S}_d$, M_t^V *est* $\mathscr{G}_t^V$*-mesurable.*

(FM5) *Pour tous* $s, t \geqslant 0$, $V \in \mathscr{S}_d$, $\varphi \in F_\Delta$, *on a* P_φ-p. s. *la relation* (3).

(FM6) *Pour tous* $t \geqslant 0$, $V \in \mathscr{S}_d$, $\varphi \in F_\Delta$, *toute suite* $V_n \in \mathscr{S}$ *croissant vers* V,

$$\lim_{(n)} M_t^{V_n} 1_{F^{V_n}}(X_t^{V_n}) = M_t^V 1_{F^V}(X_t^V) \qquad P_\varphi\text{-p. s.}$$

Il est clair que $M_d^V = (M_t^V)_{t \geqslant 0}$ est une FM de X^V pour tout $V \in \mathscr{S}_d$. On dit que M_d et N_d sont équivalentes si pour tout $V \in \mathscr{S}_d$, M^V et N^V sont des FM équivalentes de X^V.

PROPOSITION 6. — *Une FM se prolonge de manière unique, à une équivalence près, en une FM complète.*

Démonstration. — Soit M une FM de X et N la FM équivalente définie par $N_t^V = M_t^V 1_{F^V}(X_t^V)$. (4) appliquée à V et $U = \{ u \}$ s'écrit :

$$N_t^{V - \{u\}} \geqslant E_\varphi \{ N_t^V \mid \mathscr{G}_t^{V - \{u\}} \}$$

donc si $V \subset W \in \mathscr{S}$, $N_t^V \geqslant E_\varphi \{ N_t^W \mid \mathscr{G}_t^V \}$. Soit alors $V \in \mathscr{S}_d$ et V_n une suite de $\mathscr{S}$ croissant vers V. La suite $N_t^{V_n}$ est une surmartingale bornée relativement aux tribus $\mathscr{G}_t^{V_n}$, elle converge donc P_φ-p. s. pour tout $\varphi \in F_\Delta$ vers une variable aléatoire M_t^V qui est $\mathscr{G}_t^V$-mesurable.

Si W_n est une autre suite de $\mathscr{S}$ croissant vers V, la surmartingale $N_t^{W_n}$ converge P_φ-p. s. vers une variable aléatoire Z. Posons $n_1 = 1$ et

$$n_{2p} = \inf(n; W_n \supset V_{n_{2p-1}}) \qquad U_{2p} = W_{n_{2p}}$$
$$n_{2p+1} = \inf(n; V_n \supset W_{n_{p2}}) \qquad U_{2p+1} = V_{n_{2p+1}}$$

l'entier n_p est fini pour tout p, et la suite U_p croît vers V ; la surmartingale $N_t^{U_n}$ converge p. s. vers une variable aléatoire Z'. Mais $N_t^{U_{2p}}$ converge verz Z et $N_t^{U_{2p+1}}$ vers M_t^V, donc $P_\varphi \{ Z \neq Z' \neq M_t^V \} = 0$. La famille

$$M_d = (M_t^V ; t \geqslant 0, V \in \mathscr{S}_d)$$

vérifie donc (FM6).

Il est clair que M_d prolonge M, donc vérifie (FM3). Par passage à la limite on voit qu'elle vérifie (FM4) et (FM5). Enfin l'unicité du prolongement découle de (FM6). ■

Remarque. — On ne peut pas en général étendre M aux parties $V \in \mathscr{S}_q$. En effet si $V \in \mathscr{S}_q$ et si $\mathscr{S}(V)$ désigne l'ensemble des parties finies non vides de V, la famille $(N_t^W)_{W \in \mathscr{S}(V)}$ constitue une surmartingale bornée indicée par l'ensemble filtrant à droite $\mathscr{S}(V)$. On sait que pour tout φ elle admet une limite $M_t^{V,\varphi}$ dans $L^1(P_\varphi)$, et qu'il existe une suite V_n de $\mathscr{S}(V)$ telle que $N_t^{V_n}$ converge P_φ-p. s. vers $M_t^{V,\varphi}$. Mais cette suite dépend de φ, ainsi que la limite $M_t^{V,\varphi}$.

Si M engendre $\mathcal{Q}$, la FM complète M_d qu'on vient de construire engendre une famille de transitions $\mathcal{Q}_d$ indicée par les parties $V \in \mathcal{S}_d$. (FM6) se traduit par la relation suivante :

(B5) *Pour tous* $V \in \mathcal{S}_d$, $\varphi^V \in F^V$, $t \geqslant 0$, $W \in \mathcal{S}$ *tel que* $W \subset V$, $A \in \mathcal{F}^W$, *pour toute suite* V_n *de* $\mathcal{S}$ *croissant vers* V *et telle que* $W \subset V_n$, *on a*

$$\lim_{(n)} Q_t^{V_n}(\varphi^{V_n}, AF^{V_n - W}) = Q_t^V(\varphi^V, AF^{V-W})$$

ce qui définit de manière unique $\mathcal{Q}_d$ à partir de $\mathcal{Q}$.

D'autre part $\mathcal{Q}$ vérifie (B3), elle est donc la famille des transitions d'un P-processus Y, auquel on associe par (1) une famille de semi-groupes $(\bar{Q}_t^V)_{t \geqslant 0}$ sur les $(F_\Delta^V, \mathcal{F}_\Delta^V)$. Si $V \in \mathcal{S}_d$, $F^V \in \mathcal{F}_\Delta^V$ et on peut considérer pour tout $\varphi^V \in F^V$ la restriction de $\bar{Q}_t^V(\varphi^V, .)$ à $(F^V, \mathcal{F}^V)$: on obtient ainsi un semi-groupe qui, comme on le vérifie facilement, est défini à partir de $\mathcal{Q}$ par (B5).

Remarque. — Si la condition (F) est vérifiée pour tout $V \in \mathcal{S}_q$, on a une autre méthode pour construire la complétée M_d de M. En effet la démonstration du théorème 2 vaut pour chaque $V \in \mathcal{S}_d$, ce qui permet de construire une FM M^V de X'^V ; la famille M_d ainsi obtenue est la complétée de M. Par contre même si $\mathcal{Q}$ peut s'étendre aux parties non dénombrables de S, cette méthode ne permet pas de construire une FM M^V du processus X'^V lorsque $V \notin \mathcal{S}_d$, car $\{ \varphi^V \} \notin \mathcal{F}_\Delta^V$ et la condition [*1*, III-2-2) n'est pas vérifiée pour ce processus.

III-4. **Fonctionnelles multiplicatives strictes.**

DÉFINITION. — *Une FM est dite stricte si* (FM3) *est remplacée par la condition plus forte :*

(FM7) *Pour tous* $t \geqslant 0$, $U \subset V \in \mathcal{S}$, $\varphi \in F_\Delta$, *on a* P_φ-p. s.

$$\sum_{H \subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-H)} M_t^{V-H} 1_{F^{V-H}}(X_t^{V-H}) \geqslant 0 \tag{6}$$

Les exemples du paragraphe III-1 sont des FM strictes. Il existe des FM qui ne sont pas strictes. Lorsque deux FM sont équivalentes, l'une est stricte si et seulement si l'autre l'est aussi.

Soit $\mathcal{Q}$ une famille de transitions subordonnée à $\mathcal{P}$. On dit que la famille $(q_t^V ; t \geqslant 0, V \in \mathcal{S})$ de fonctions sur les $F^V \times F^V$ est une famille de densités si d'une part elles sont $\mathcal{F}^V \otimes \mathcal{F}^V$-mesurables, et si d'autre part pour tous

$t \geqslant 0$, $V \in \mathscr{S}$, $\varphi^V \in F^V$, $q_t^V(\varphi^V, .)$ est une densité de $Q_t^V(\varphi^V, .)$ par rapport à $P_t^V(\varphi^V, .)$. On sait qu'il existe au moins une telle famille.

DÉFINITION. — *Une famille de transitions* $\mathscr{Q}$ *est strictement subordonnée à* $\mathscr{P}$ *si elle est subordonnée à* $\mathscr{P}$ *et si toute famille de densités vérifie*

(B6) *Pour tous* $t \geqslant 0$, $V \in \mathscr{S}$, $\varphi^V \in F^V$, *on a*

$$\sum_{H \subset U} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)} q_t^{V-H}(\varphi^{V-H}, .) \geqslant 0 \qquad P_t^V(\varphi^V, .)\text{-p. s.} \tag{7}$$

PROPOSITION 7. — *Soit* X *un* P-*processus et* M *une FM de* X *engendrant* $\mathscr{Q}$; $\mathscr{Q}$ *est strictement subordonnée à* $\mathscr{P}$ *si et seulement si* M *est stricte.*

Indiquons d'abord une application immédiate de la proposition 5. Soient $W \in \mathscr{S}$ et $B_i = (B_i^V ; V \subset W)_{i=1,2}$ deux familles de réels telles que l'inégalité

$$\sum_{H \subset U} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)} B_i^{V-H} \geqslant 0 \tag{8}$$

soit vérifiée pour tout $U \subset V = W$ par la première et pour tous $U \subset V \subset W$ par la seconde ; la famille $B = (B_1^V B_2^V ; V \subset W)$ vérifie (8) pour tous $U \subset V = W$.

Démonstration. — Condition nécessaire : pour vérifier (FM7) il suffit de montrer que si $U \subset W \in \mathscr{S}$, $t_1 < \ldots < t_n = t$, $A_i \in \mathscr{F}^W$, $\varphi^W \in F^W$, on a :

$$E_\varphi \left\{ \sum_{H \subset U} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)} M_t^{W-H} \prod_{i=1}^{n} 1_{A_i}(X_{t_i}^W) \right\} \geqslant 0. \tag{9}$$

Nous allons montrer (9) par récurrence sur n. Posons pour $V \subset W$:

$$B_1^V = 1_{A_1}(X_{t_1}^W) q_{t_1}^V(X_0^V, X_{t_1}^V)$$

$$B_2^V(\varphi) = E_\varphi \left\{ M_{t-t_1}^V \prod_{i=2}^{n} 1_{A_i}(X_{t_i}^W) \right\}$$

lorsque $n = 1$, le premier membre de (9) est

$$E_\varphi \left\{ \sum_{H \subset U} (-1)^{\mathrm{card}(U-H)} B_1^{W-H} \right\}$$

qui est positif, car d'après (B6) la famille B_1 vérifie (8) pour tous $U \subset V \subset W$. Supposons (9) vraie pour $n-1$ et tous $\varphi \in F_\Delta$: cela veut dire que la famille $(B_2^V(\varphi) ; V \subset W)$ vérifie (8) pour tous $U \subset V = W$ et $\varphi \in F_\Delta$. Il suffit alors d'appliquer le résultat rappelé après l'énoncé, car le premier membre de (9) s'écrit :

$$E_\varphi\left\{\sum_{H\subset U}(-1)^{\mathrm{card}(U-H)}B_1^{W-H}B_2^{W-H}(X_{t_1}^W)\right\}$$

Condition suffisante : soit (q_t^V) une famille de densités de $\mathscr{Q}$ par rapport à $\mathscr{P}$. Supposons que pour $U \subset V \in \mathscr{S}$, $t \geqslant 0$, il existe $A \in \mathscr{F}^V$ et $\varphi^V \in F^V$ tels que :

$$P_t^V(\varphi^V, A) > 0$$

$$\sum_{H\subset U}(-1)^{\mathrm{card}(U-H)}q_t^{V-H}(\varphi^{V-H}, \psi^{V-H}) < 0 \quad \text{si} \quad \psi^V \in A$$

On a alors :

$$E_\varphi\left\{\sum_{H\subset U}(-1)^{\mathrm{card}(U-H)}M_t^{V-H}1_A(X_t^V)\right\}$$
$$= E_\varphi\left\{\sum_{H\subset U}(-1)^{\mathrm{card}(U-H)}q_t^{V-H}(\varphi^{V-H}, X_t^{V-H})1_A(X_t^V)\right\} < 0$$

ce qui contredit (FM7). Donc pour tous $U < V \in \mathscr{S}$, $\varphi^V \in F^V$, $t \geqslant 0$, on doit avoir (7). ■

IV. LES SOUS-PROCESSUS

IV-1. — Soit X un P-processus, M une FM de X engendrant $\mathscr{Q}$. On appelle *sous-processus de* X tout P-processus de transitions $\mathscr{Q}$.

Peut-on construire de manière explicite un sous-processus « canonique », comme dans le cas des processus de Markov ordinaires ? Précisons ce que nous entendons par là :

Soit $\Lambda = T^S$, $\mathscr{L} = \mathscr{T}^{S\otimes}$; un point λ de Λ a pour coordonnées λ^u, et $(\lambda - t)^+$ est le point de coordonnées $(\lambda^u - t)^+$. Posons $\hat\Omega = \Omega \times \Lambda$, $\hat\omega = (\omega, \lambda)$, et soient :

$$\hat X_t^u(\hat\omega) = \begin{cases} X_t^u(\omega) & \text{si} \quad t < \lambda^u \\ \Delta & \text{sinon}\end{cases}$$
$$\hat\theta_t(\hat\omega) = (\theta_t(\omega), (\lambda - t)^+)$$
$$\hat\zeta^u(\hat\omega) = \zeta^u(\omega) \wedge \lambda^u$$

Si $t < \infty$, appelons $\hat{\mathscr{H}}_t^u$ la tribu constituée des parties de $\hat\Omega$ de la forme $A \times]t, \infty]^u \times T^{S-\{u\}} + B \times [0, t]^u \times T^{S-\{u\}}$, où $A \in \mathscr{M}_t^u$ et où B égale Ω ou ϕ. On vérifie que $\hat X_t^u$ est $\hat{\mathscr{H}}_t^u$-mesurable. Soient $\hat{\mathscr{M}}_t^V = \sigma(\hat{\mathscr{H}}_s^u; u \in V, s \leqslant t)$. On pose $\hat\Omega_t^V = \Omega \times]t, \infty]^V \times T^{S-V}$; si $\hat A \in \hat{\mathscr{M}}_t^V$, il existe un $A \in \mathscr{M}_t^V$ tel que $\hat{A} \cap \hat{\Omega}_t^V = A \times]t, \infty]^V \times T^{S-V}$. On note encore $\mathscr{M}_t^V$ la tribu de $\hat{\Omega}$ constituée des parties de la forme $A \times \Lambda$, où $A \in \mathscr{M}_t^V$. Toute fonction $\mathscr{M}_t^V$-mesurable sur $\hat{\Omega}$ est en fait une fonction de ω seul.

Remarque. — Quand S est réduite à un point u, les $\hat{\mathscr{M}}_t^u$ sont plus petites que les tribus dont on muni habituellement le tué d'un processus de Markov. Lorsque $\mathscr{M}_t^V = \mathscr{G}_{t,0}^V$, on a $\hat{\mathscr{M}}_t^V = \sigma(\hat{X}_s^u;\ s \leqslant t,\ u \in V)$.

Comme pour $V \in \mathscr{S}$ la restriction de $\hat{X}$ à V doit être un P-processus, et un sous-processus de la restriction de X à V, il est naturel de s'intéresser aux :

DÉFINITION. — $\hat{X}$ *est un sous-processus strict de* X *si c'est un* P-*processus et s'il vérifie*

(10) *Pour tous* $t \geqslant 0$, $\varphi \in F_\Delta$, $V \in \mathscr{S}$ *et toute partie mesurable* A *de* $[0, t]^V$, $\hat{P}_\varphi\{\hat{\zeta}^V \in A \mid \mathscr{G}_t^S\}$ *est* $\mathscr{G}_t^V$*-mesurable.*

PROPOSITION 8. — *Soient* X *un* P-*processus normal et* M *une FM de* X *engendrant* $\mathscr{Q}$; *s'il existe un sous-processus strict de* X *de transitions* $\mathscr{Q}$, M *est stricte.*

Démonstration. — Posons :

$$N_t^V(\omega) = \hat{P}_\varphi\{\hat{\zeta}^V > t \mid \mathscr{G}_t^S\} \quad \text{si} \quad X_0(\omega) = \varphi$$

la famille $N = (N_t^V;\ t \geqslant 0,\ V \in \mathscr{S})$ vérifie (FM1) à cause de (10). Soit $V \in \mathscr{S}$ nous allons utiliser la normalité de X^V et la propriété de Markov pour $\hat{X}^V$; si $t_1 < \ldots < t_n = t$, $s_1 < \ldots < s_p = s$, A_i, $B_j \in \mathscr{F}^V$, il vient :

$$\begin{aligned}
E_\varphi\left\{\prod_{i=1}^n 1_{A_i}(X_{t_i}^V)\prod_{j=1}^p 1_{B_j}(X_{t+s_j}^V)N_{t+s}^V\right\}
&= \hat{E}_\varphi\left\{\prod_{i=1}^n 1_{A_i}(\hat{X}_{t_i}^V)\prod_{j=1}^p 1_{B_j}(\hat{X}_{t+s_j}^V)\right\}\\
&= \hat{E}_\varphi\left\{\prod_{i=1}^n 1_{A_i}(\hat{X}_{t_i}^V)\hat{E}_{\hat{X}_t}\left\{\prod_{j=1}^p 1_{B_j}(\hat{X}_{s_j}^V)\right\}\right\}\\
&= E_\varphi\left\{\prod_{i=1}^n 1_{A_i}(X_{t_i}^V)N_t^V E_{X_t}\left\{\prod_{j=1}^p 1_{B_j}(X_{s_j}^V)N_s^V\right\}\right\}\\
&= E_\varphi\left\{\prod_{i=1}^n 1_{A_i}(X_{t_i}^V)\prod_{j=1}^p 1_{B_j}(X_{t+s_j}^V)N_t^V N_s^V \circ \theta_t\right\}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que N vérifie (FM2). Lorsque $U \subset V \in \mathscr{S}$,

$$W = \{ u \in V ; \zeta^u(\omega) \leqslant t \},$$

on a :

$$\sum_{H \subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-H)} N_t^{V-H}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad W \not\subset U \\ \displaystyle\sum_{H \subset U - W} (-1)^{\operatorname{card}(U-W-H)} N_t^{V-W-H}(\omega) & \text{si} \quad W \subset U \end{cases}$$

quand $X_0(\omega) = \varphi$, cette dernière expression égale :

$$P_\varphi \{ \bigcap_{u \in V-U} \{ \lambda^u > t \} \bigcap_{u \in U-W} \{ \lambda^u \leqslant t \} \mid \mathscr{G}_t^S \} \geqslant 0$$

donc N vérifie (FM7) et est une FM stricte de X. Enfin il est clair qu'elle engendre la famille des transitions de $\hat{X}$. ■

On va maintenant étudier la réciproque.

IV-2. **Construction d'un sous-processus strict.** — Nous supposerons que X est normal et que M est une FM stricte et continue à droite de X.

Fixons quelques notations. Soit $V = \{ u_1, \ldots, u_n \} \in \mathscr{S}$. $\mathscr{T}_t^V$ est le σ-anneau des cylindriques mesurables de Λ à base dans T^V, contenue dans $[0, t]^V$. $\mathscr{T}^V$ est la tribu $\mathscr{T}_\infty^V$. $\mathscr{T}_t^V$ est engendré par le semi-anneau $\mathscr{A}_t^V$ des parties de la forme $\bigcap_{i=1}^n \{ \lambda^{u_i} \in]a_i, b_i] \}$ où les u_i sont pris dans un ordre quelconque et où les a_i et les b_i vérifient :

Condition (G). — Les a_i et les b_i sont des rationnels inférieurs ou égaux à t ; $a_i < b_i$; on a soit $b_i < a_{i+1}$, soit $a_i = a_{i+1}$ et $b_i = b_{i+1}$.

On note $\mathscr{B}_t^V$ la classe des parties de la forme précédente, pour lesquelles $b_i = t$ pour tout $i \leqslant n$. $\mathscr{B}_t^V$ n'est pas dans $\mathscr{A}_t^V$. Quand $t = \infty$, on écrit $\mathscr{A}^V$ et $\mathscr{B}^V$. Soient $T_+ =]0, \infty]$ et $\mathscr{T}_+$ les boréliens de T_+.

Soit $\Omega_1^V = \{ \omega$; pour tout $U \subset V$ et $s \in \mathbb{Q}$, $M_0^U(\omega) = 1$ et $M_t^U \circ \theta_s(\omega)$ est continu à droite en t ; pour tous $s, t \in \mathbb{Q}$, $U \subset W \subset V$, ω vérifie (3) et $\theta_s(\omega)$ vérifie (6), lorsqu'on remplace V par W $\}$. Ω_1^V est mesurable, et si $\varphi \in G_M^V$, $P_\varphi(\Omega_1^V) = 1$. Lorsque les $t_i \in \mathbb{Q} \cup \{ \infty \}$ *et* $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, posons :

$$(11) \quad F_{u_1,\ldots,u_n}^\omega(t_1, \ldots, t_n) = M_{t_1}^V(\omega) M_{t_2-t_1}^{V-\{u_1\}} \circ \theta_{t_1}(\omega) \ldots M_{t_n-t_{n-1}}^{u_n} \circ \theta_{t_{n-1}}(\omega)$$

LEMME 1. — *La formule*

$$(12) \qquad R_\omega^V(\bigcap_{i=1}^n \{ \lambda^{u_i} > t_i \}) = F_{u_1,\ldots,u_n}^\omega(t_1, \ldots, t_n),$$

valable pour des t_i rationnels ou infinis tels que $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, définit une fonction d'ensemble sur $\mathscr{B}^V$ qui se prolonge de manière unique en une probabilité sur $(T^V_+, \mathscr{T}^{V\otimes}_+)$ lorsque $\omega \in \Omega^V_1$.

Démonstration. — (12) exprime que $F^\omega_{u_1,\ldots,u_n}$ est la restriction aux rationnels de la « fonction de répartition » des n variables λ^{u_i}. Par conséquent pour que R^V_ω se prolonge en une probabilité (nécessairement unique) sur $\mathscr{T}^{V\otimes}_+$, il faut et il suffit que $F^\omega_{u_1,\ldots,u_n}(0, \ldots, 0) = 1$, que F^ω soit continue à droite le long des rationnels en chaque t_i, et que F^ω soit « totalement décroissante ». Cette dernière propriété s'exprime de manière simple ainsi : on sait qu'on peut prolonger de manière unique R^V_ω à la semi-algèbre $\mathscr{A}^V$, et F^ω est totalement décroissante si $R^V_\omega(A) \geqslant 0$ pour tout $A \in \mathscr{A}^V$.

Si $\omega \in \Omega^V_1$, pour tous $t, s \in \mathbb{Q}$ et $W \subset V$ on a

$$M^W_t \circ \theta_s(\omega) = M^W_{t+s}(\omega)/M^W_s(\omega);$$

donc $M^W_t \circ \theta_s(\omega)$ est continue à droite en s et en t le long des rationnels. Il en découle que F^ω est continue à droite le long des rationnels en chaque t_i. Si $\omega \in \Omega^V_1$, il est évident que $F^\omega_{u_1,\ldots,u_n}(0, \ldots, 0) = 1$.

Soit $A = \bigcap_{i=1}^{n} \{ \lambda^{u_i} \in]a_i, b_i] \} \in \mathscr{A}^V$, la famille $(a_i, b_i)_{i<n}$ vérifiant (G). Posons

$$b_0 = 0, \quad n_0 = 0, \quad n_r = \sup (m > n_{r-1} ; a_m = a_{n_{r-1}+1})$$
$$V_r = \{ u_i ; i > n_{r-1} \}, \qquad U_r = V_r - V_{r+1}$$

p est l'entier tel que $n_p = n$; on a $b_i = b_{n_r}$ si $n_{r-1} < i \leqslant n_r$. En exprimant A à l'aide d'éléments de $\mathscr{B}^V$, on trouve :

$$R^V_\omega(A) = \prod_{r=1}^{p} \left(M^{V_r}_{a_{n_r} - b_{n_{r-1}}} \circ \theta_{b_{n_{r-1}}}(\omega) \sum_{H \subset U_r} (-1)^{\operatorname{card}(U_r - H)} M^{V_r - H}_{b_{n_r} - a_{n_r}} \circ \theta_{a_{n_r}}(\omega) \right)$$

si $\omega \in \Omega^V_1$, $\theta_{a_{n_r}}(\omega)$ vérifie (6) avec $t = b_{n_r} - a_{n_r}$, $V = V_r$, $U = U_r$; donc $R^V_\omega(A) \geqslant 0$. ■

La fonction $F^{\cdot}_{u_1,\ldots,u_n}(t_1, \ldots, t_n)$ est $\mathscr{G}^V_\infty$-mesurable, donc $R^V_{\cdot}(.)$ est une probabilité de transition de $(\Omega^V_1, \Omega^V_1 \cap \mathscr{G}^V_\infty)$ dans $(T^V_+, \mathscr{T}^{V\otimes}_+)$. R^V induit une probabilité de transition de $(\Omega^V_1, \Omega^V_1 \cap \mathscr{G}^V_\infty)$ dans $(\Lambda, \mathscr{T}^V)$, qui ne charge pas les $\{ \lambda^u = 0 \}$ pour $u \in V$, et qu'on écrit aussi R^V. Lorsque $U \subset V$ et $A \in \mathscr{T}^U_t$, on pose :

$$T^{V,U}_{\omega,t}(A) = R^V_\omega(A \bigcap_{u \in V-U} \{ \lambda^u > t \})$$

LEMME 2. — $T^{V,U}_{.,t}(.)$ *est une mesure de transition de* $(\Omega^V_1, \Omega^V_1 \cap \mathscr{G}^V_t)$ *dans* $(\Lambda, \mathscr{T}^U_t)$; *si* $W \subset V - U$ *et si t est rationnel, on a pour* $\omega \in \Omega^V_1$:

$$(13) \quad R^V_\omega(A \bigcap_{u \in W} \{ \lambda^u > t + s \} \bigcap_{u \in V-U-W} \{ \lambda^u > t \}) = T^{V,U}_{\omega,t}(A) M^M_s \circ \theta_t(\omega)$$

Démonstration. — Soient $U = \{u_1, \ldots, u_p\}$ et $A = \bigcap_{i=1}^{p} \{ \lambda^{u_i} \in]a_i, t] \} \in \mathscr{B}^U_t$. Si $a_1 < \ldots < a_p$, $t \in \mathbb{Q}$ et $\omega \in \Omega^V_1$, on a :

$$(14) \quad T^{V,U}_{\omega,t}(A) = M^V_{a_1}(\omega) M^{V-\{u_1\}}_{a_2-a_1} \circ \theta_{a_1}(\omega) \ldots M^{V-U+\{u_n\}}_{a_n-a_{n-1}} \circ \theta_{a_{n-1}}(\omega) \sum_{H \subset U} (-1)^{\operatorname{card}(U-H)} M^{V-H}_{t-a_n} \circ \theta_{a_n}(\omega)$$

Donc si $A \in \mathscr{B}^U_t$ et $t \in \mathbb{Q}$, $T^{V,U}_{.,t}(A)$ est $\mathscr{G}^V_t$-mesurable. $\mathscr{B}^U_t$ engendrant $\mathscr{T}^U_t$, c'est aussi vrai pour tout $A \in \mathscr{T}^U_t$. Enfin si t n'est pas rationnel, on considère une suite de rationnels t_n décroissant vers t : si $A \in \mathscr{T}^U_t \subset \mathscr{T}^U_{t_n}$, on a $\lim_{(n)} \uparrow T^{V,U}_{.,t_n}(A) = T^{V,U}_{.,t}(A)$. Par conséquent $T^{V,U}_{.,t}(A)$ est $\mathscr{G}^V_t$-mesurable pour tout $t \geqslant 0$ et $A \in \mathscr{T}^U_t$.

Si $s, t \in \mathbb{Q}$ et $A \in \mathscr{B}^U_t$, en utilisant (14) et en revenant à la définition de $T^{V,U}_{\omega,t}$ on vérifie facilement qu'on a (13). Donc on a (13) également pour $A \in \mathscr{T}^U_t$. Enfin le premier membre de (13) est continu à droite en s, et si $\omega \in \Omega^V_1$ le second membre l'est aussi. On en déduit la validité de (13) pour tout $s \geqslant 0$. ∎

On appelle S^W la probabilité sur $(\Lambda, \mathscr{T}^W)$ qui est concentrée en $\{0\}^W \times T^{S-W}$. Soit $\varphi \in F_\Delta$, $V \in \mathscr{S}$, $K = \{ u \in V ; \varphi^u \in G^u_M \}$; d'après la proposition 3, $\varphi \in G^K_M$ et $P_\varphi(\Omega^K_1) = 1$. La formule suivante, où $\hat{A} \in \mathscr{M}^V_\infty$, définit une probabilité sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{M}}^V_\infty)$:

$$\hat{P}^V_{\varphi^V} = \int P_\varphi(d\omega)(R^K_\omega \otimes S^{V-K})(d\lambda) 1_{\hat{A}}(\omega, \lambda)$$

LEMME 3. — *La famille* $(\hat{P}^V_\varphi \; ; V \in \mathscr{S})$ *engendre une probabilité* $\hat{P}_\varphi$ *sur* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{M}}^S_\infty)$ *vérifiant l'axiome* (C').

Démonstration. — La semi-algèbre des parties de $\hat{\Omega}$ de la forme

$$A \times T^{S-V} \times \prod_{u \in V} \{ \lambda^u \in B_u \}$$

où $V \in \mathscr{S}$, $A \in \mathscr{M}^V_\infty$ et $B_u \in \mathscr{T}$ engendre l'algèbre $\hat{\mathscr{M}}_0$, qui engendre elle-même une tribu plus grande que $\hat{\mathscr{M}}^S_\infty$. Soit μ_V la probabilité sur $(\Lambda, \mathscr{T}^V)$ définie par $\mu_V(B) = \hat{P}^V_\varphi\, (\Omega \times B)$. Si $\omega \in \Omega^V_1$ et si $V = \{ u_1, \ldots, u_n \}$, on a

$$F^\omega_{u_1,\ldots,u_n}(0, t_2, \ldots, t_n) = F^\omega_{u_2,\ldots,u_n}(t_2, \ldots, t_n)$$

donc si $U \subset V$, R^U_ω est la restriction de R^V_ω à $\mathscr{T}^U$. Il est alors immédiat de vérifier que les familles $(\hat{P}^V_{\varphi^V} ; V \in \mathscr{S})$ et $(\mu_V ; V \in \mathscr{S})$ sont compatibles et définissent respectivement une fonction additive $\hat{P}_\varphi$ sur $\hat{\mathscr{M}}_0$ et, d'après le théorème de Kolmogorov, une probabilité μ sur $(\Lambda, \mathscr{L})$.

Pour que $\hat{P}_\varphi$ se prolonge en une probabilité sur $\hat{\mathscr{M}}^S_\infty$, il suffit que si $\hat{A}_n$ est une suite d'éléments de $\hat{\mathscr{M}}_0$ décroissant vers Φ, $\hat{P}_\varphi(\hat{A}_n) \downarrow 0$. Si $\hat{A}_n \in \hat{\mathscr{M}}_0$, il existe un entier N_n et pour $p \leqslant N_n$ un $A^p_n \in \cup (\mathscr{M}^V_\infty ; V \in \mathscr{S})$ et un un $B^p_n \in \cup (\mathscr{T}^V ; V \in \mathscr{S})$, tels que les $A^p_n \times B^p_n$ soient disjoints et que $\hat{A}_n = \sum_{p=1}^{N_n} A^p_n B^p_n$. Les A_n décroissent, donc N_n, A^p_n et B^p_n décroissent. Quitte à remplacer A^p_n et B^p_n par ϕ, on peut supposer que $N_n = N$. On note A^p et B^p les limites décroissantes de A^p_n et de B^p_n. On a :

$$\hat{P}_\varphi(\hat{A}_n) \leqslant \sum_{p=1}^{N} \inf (P_\varphi(A^p_n), \mu(B^p_n))$$

mais pour chaque p, $A^p \times B^p = \phi$, donc l'un des deux ensembles A^p ou B^p est vide. Comme P_φ et μ sont des probabilités, l'inégalité précédente montre que $\hat{P}_\varphi(\hat{A}_n)$ décroît vers 0. Enfin (C′) découle de la compatibilité des $(\hat{P}^V_{\varphi^V} ; V \in \mathscr{S})$. ■

THÉORÈME 3. — *Soit* X *un* P-*processus normal et* M *une FM stricte de* X, *continue à droite, engendrant* $\mathscr{Q}$; *le processus* $\hat{X} = (\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{M}}^V_t, \hat{\theta}_t, \hat{X}_t, \hat{P}_\varphi)$ *qu'on vient de construire est un sous-processus strict de* X, *admettant* $\mathscr{Q}$ *pour transitions.*

Démonstration. — Par construction $\hat{X}$ vérifie (*i*)-(*iv*), (A), et (C′) d'après le lemme 3.

La formule (11) est vraie pour des t_i rationnels. La continuité à droite presque sûre de M et celle de F^ω montre que si $\varphi \in G^V_M$, pour tous t_i réels on a (11), P_φ-p. s. ; de même pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a P_φ-p. s. la relation (13). Si $A \in \mathscr{F}^V$, $\varphi \in G^V_M$, $t \geqslant 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \hat{E}_\varphi \{ 1_A(\hat{X}^V_t) \} &= \int P_\varphi(d\omega) R^V_\omega(d\lambda) 1_A(X^V_t(\omega)) \prod_{u \in V} 1_{\lambda^u > t} \\ &= \int P_\varphi(d\omega) 1_A(X^V_t(\omega)) M^V_t(\omega) = Q^V_t(\varphi^V, A) \end{aligned}$$

et si $\varphi \notin G^V_M$, les deux membres de cette expression sont nuls.

On va maintenant montrer que pour tout $V \in \mathscr{S}$, le processus $\hat{X}^V$ est markovien : d'après la proposition 1 cela suffit à assurer que $\hat{X}$ soit un P-processus, et on vient de voir que sa famille de transitions est $\mathscr{Q}$. Pour montrer la propriété de Markov, il suffit de vérifier que si $s, t \geqslant 0$, $B \in \mathscr{F}^V_\Delta$, $\hat{A} \in \hat{\mathscr{M}}^V_t$, $\varphi \in F_\Delta$ on a :

$$\hat{P}_\varphi \{ \hat{A} \cap \{ \hat{X}^V_{t+s} \in B \} \} = \hat{E}_\varphi \{ 1_{\hat{A}} \hat{P}_{\hat{X}_t} \{ \hat{X}^V_s \in B \} \}$$

il suffit de prouver cette relation pour des B de la forme $B = A\Delta^{V-W}$, avec $A \in \mathscr{F}^W$. D'après une décomposition déjà faite plusieurs fois on peut même se contenter de montrer que si $W \subset V$, $B \in \mathscr{F}^W$,

$$\hat{P}_\varphi \{ \hat{A} \cap \{ \hat{X}^W_{t+s} \in B \} \} = \hat{E}_\varphi \{ 1_{\hat{A}} \hat{P}_{\hat{X}_t} \{ \hat{X}^W_s \in B \} \} \tag{15}$$

D'autre part la semi-algèbre des intersections finies d'éléments des $\hat{\mathscr{H}}^u_r$ pour $u \in V$ et $r \leqslant t$ engendre $\hat{\mathscr{M}}^V_t$: on peut se limiter aux $\hat{A}$ de la forme $\hat{A} = \bigcap_{u \in V} \bigcap_{i=1}^{N^u} \hat{A}^u_i$, où $\hat{A}^u_i \in \hat{\mathscr{H}}^u_{s^u_i}$ et $s^u_i \leqslant t$.

Soit $K = \{ v \in V ; \varphi \in G^v_M \}$. Si $W \not\subset K$, les deux membres de (15) sont nuls. Supposons que $W \subset K$. Pour tous $u \in V$ et $i \leqslant N^u$,

$$\hat{A}^u_i = A^u_i \times]s^u_i, \infty]^u \times T^{S-\{u\}} + B^u_i \times [0, s^u_i]^u \times T^{S-\{u\}},$$

avec $A^u_i \in \mathscr{M}^u_t$ et B^u_i égal à Ω ou à ϕ. Soit

$$\hat{C}^u = \bigcap_{i=1}^{N^u} \hat{A}^u_i \cap (\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^u_t) ;$$

par construction des $\hat{A}^u_i$, $\hat{C}^u \in \hat{\mathscr{M}}^u_t \otimes \hat{\mathscr{T}}^u_t$; C^u_ω désigne la « section » en ω de $\hat{C}^u$: c'est un élément de $\mathscr{T}^u_t$.

Rappelons que si $u \in V - K$, $\lambda^u = 0$, $\hat{P}_\varphi$-p. s. ; si $\hat{X}^W_{t+s}(\omega, \lambda) \in B$, on doit avoir $\lambda^u > t + s$ pour $u \in W$. Le premier membre de (15) s'écrit :

$$\hat{P}_\varphi \left\{ \{ \hat{X}^W_{t+s} \in B \} \bigcap_{u \in V} \bigcap_{i=1}^{N^u} \hat{A}^u_i \right\}$$

$$= \sum_{U \subset K - W} \hat{P}_\varphi \left\{ \{ X^W_{t+s} \in B \} \bigcap_{u \in W} \{ \lambda^u > t+s \} \bigcap_{u \in K-W-U} \{ \lambda^u > t \} \bigcap_{u \in K-U} \bigcap_{i=1}^{N^u} \hat{A}^u_i \right.$$
$$\left. \bigcap_{u \in U} \hat{C}^u \bigcap_{u \in V-K} (\{ \lambda^u = 0 \} \cap \hat{C}^u) \right\}$$

$$= \sum_{U \subset K - W} \int P_\varphi(d\omega) 1_B(X^W_{t+s}(\omega)) \left(\prod_{u \in K - U} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{A^u_i}(\omega) \right) \left(\prod_{u \in V - K} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{B^u_i}(\omega) \right)$$

$$R^K_\omega \left(\bigcap_{u \in W} \{ \lambda^u > t + s \} \bigcap_{u \in K - W - U} \{ \lambda^u > t \} \bigcap_{u \in U} C^u_\omega \right)$$

$$= \sum_{U \subset K - W} \int P_\varphi(d\omega) 1_B(X^W_{t+s}(\omega)) \left(\prod_{u \in K - U} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{A^u_i}(\omega) \right) \left(\prod_{u \in V - K} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{B^u_i}(\omega) \right)$$

$$T^{K,U}_{\omega,t} \left(\bigcap_{u \in U} C^u_\omega \right) M^W_s \circ \theta_t(\omega)$$

d'après le lemme 2. On peut alors appliquer la propriété de Markov au processus X^V, car $T^{K,U}_{\cdot,t}\left(\bigcap_{u \in U} C^u \right)$ est $\mathscr{M}^K_t$-mesurable :

$$= \sum_{U \subset K - W} E_\varphi \left(\prod_{u \in K - U} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{A^u_i} \right) \left(\prod_{u \in V - K} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{B^u_i} \right) T^{K,U}_{\cdot,t} \left(\bigcap_{u \in U} C^u_\cdot \right) E_{X_t} \{ 1_B(X^W_s) M^W_s \}$$

$$= \sum_{U \subset K - W} E_\varphi \left(\prod_{u \in K - U} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{A^u_i} \right) \left(\prod_{u \in V - K} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{B^u_i} \right) R^K \left(\bigcap_{u \in K - U} \{ \lambda^u > t \} \bigcap_{u \in U} C^u_\cdot \right)$$

$$\hat{E}_{\hat{X}_t} \{ 1_B(\hat{X}^W_s) \}$$

$$= \sum_{U \subset K - W} \hat{E}_\varphi \left\{ \left(\prod_{u \in K - U} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{\hat{A}^u_i \cap \hat{\Omega}^u_t} \right) \prod_{u \in U} 1_{\hat{C}^u} \prod_{u \in V - K} 1_{\{\lambda^u = 0\} \cap \hat{C}^u} \hat{P}_{\hat{X}_t} \{ \hat{X}^W_s \in B \} \right\}$$

$$= \hat{E}_\varphi \left\{ \prod_{u \in V} \prod_{i=1}^{N^u} 1_{\hat{A}^u_i} \hat{P}_{\hat{X}_t} \{ \hat{X}^W_s \in B \} \right\}$$

ce qui prouve (15). Il reste enfin à montrer que $\hat{X}$ est un sous-processus strict : si $V, W \in \mathscr{S}$ avec $V \cap W = \phi$, $A \in \mathscr{T}^V_t$, $B \in \mathscr{G}^{V+W}_t$, $\varphi \in F_\Delta$, $K = \{ u \in V + W ; \varphi^u \in G^u_M \}$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{P}_\varphi \{ B \cap \{ \hat{\zeta}^V \in A \} \} &= \hat{P}^{V+W}_{\varphi_{V+W}} \{ B \cap \{ \hat{\zeta}^V \in A \} \} \\ &= E^{V+W}_{\varphi_{V+W}} \{ 1_B(.) R^K_\cdot \otimes S^{V+W-K} \{ \lambda^V \in A \} \} \\ &= E^{V+W-K}_{\varphi_{V+W-K}} \{ 1_B(.) R^{K \cap V}_\cdot \otimes S^{V - V \cap K} \{ \lambda^V \in A \} \} \\ &= \hat{E}_\varphi \{ 1_B(.) R^{K \cap V}_\cdot \otimes S^{V - V \cap K} \{ \lambda^V \in A \} \} \end{aligned}$$

car on a presque sûrement $\hat{\zeta}^{V} = \lambda^{V}$. Cela prouve que

$$\hat{P}_{\varphi}\{\hat{\zeta}^{V} \in A \mid \mathscr{G}_{t}^{S}\} = R_{\cdot}^{K \cap V} \otimes S^{V - V \cap K}\{\lambda^{V} \in A\}$$

et cette dernière expression est $\mathscr{G}_{t}^{V}$-mesurable. Donc (10) est vérifiée et $\hat{X}$ est un sous-processus strict. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, *Markov processes and potential theory*. Academic Press, New York, 1968.

[2] J. JACOD et P. JOATHON, The use of random genetic models in the study of sedimentary processes. *J. Int. Ass. Math. Geol.*, **3**, 3, 1971, p. 265-279.

Manuscrit reçu le 14 juin 1971.