ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN JACOD

Générateurs infinitésimaux des processus à accroissements semi-markoviens

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 3 (1971), p. 219-233
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_3_219_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 3, 1971, p. 219-233.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Générateurs infinitésimaux des processus à accroissements semi-markoviens

par

Jean JACOD

Centre de Morphologie mathématique,
35, rue Saint-Honoré, 77-Fontainebleau (Seine-et-Marne).

RÉSUMÉ. — Considérons un espace L. C. D. Π et un processus de Markov $\underset{\sim}{X} = (\varpi_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans le produit $\Pi \times \mathbb{R}$. Ce processus est dit « à accroissements semi-markoviens » si la loi conditionnelle de $(\varpi_{t+s}, X_{t+s} - X_t)$ lorsque (ϖ_t, X_t) est connu ne dépend pas de la valeur prise par X_t. Dans ce cas le processus $X_0 = (\varpi_t)_{t\geqslant 0}$ est lui-même un processus de Markov.

Notons A_0 et $\underset{\sim}{A}$ les générateurs infinitésimaux faibles des processus X_0 et $\underset{\sim}{X}$. Nous indiquons d'abord lorsque $\underset{\sim}{X}$ est standard une condition (A) pour que, si f est une fonction sur Π appartenant au domaine de A_0, la fonction $g_u(\varpi, x) = f(\varpi)e^{iux}$ appartienne pour tout u au domaine de $\underset{\sim}{A}$ et qu'on ait :

$$(a) \quad Ag_u(\varpi, x) = e^{iux}A_0 f(\varpi) + e^{iux}f(\varpi)\left(iub(\varpi) + \int \frac{e^{iuy} - 1 - iu \sin y}{y^2} G(\varpi, dy)\right)$$

où $(b, G)_\Pi$ est un « système de Lévy » sur Π. Réciproquement si A_0 est le générateur infinitésimal d'un processus standard X_0 à valeurs dans Π et $(b, G)_\Pi$ un système de Lévy, on peut construire à partir de X_0 un processus standard $\underset{\sim}{X}$ à accroissements semi-markoviens, vérifiant la condition (A) et pour lequel on a (a).

SUMMARY. — Let Π be a locally compact space with a countable base and $\underset{\sim}{X} = (\varpi_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ a Markov process with values in $\Pi \times \mathbb{R}$. This process is called « with semi-markovian increments » if the conditionnal law of $(\varpi_{t+s}, X_{t+s} - X_t)$ when (ϖ_t, X_t) is known does not depend on the value of X_t. Then the process $X_0 = (\varpi_t)_{t\geqslant 0}$ is also a Markov process.

We study weak infinitesimal generators $\underset{\sim}{A}$ and A_0 of processes $\underset{\sim}{X}$ and X_0. When $\underset{\sim}{X}$ is standard and satisfies to a certain condition (A), if f belongs to the domain of A_0, $g_u(\varpi, x) = e^{iux}f(\varpi)$ belongs to the domain of $\underset{\sim}{A}$. Moreover, $\underset{\sim}{A}$ and A_0 are tied by relation (a) (see French summary), where $(b, G)_\Pi$ is a so-called « Lévy system ».

Conversely if A_0 is the infinitesimal generator of a standard process X_0 and $(b, G)_\Pi$ a Lévy system we can construct a process $\underset{\sim}{X}$ with semi-markovian increments which satisfies to (A) and (a).

I. LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS SEMI-MARKOVIENS

I-1

$(\Pi, \mathcal{N})$ est un espace L. C. D. muni de ses boréliens, $\mathcal{R}$ désigne les boréliens de $\mathbb{R}$, $(E, \mathcal{E}) = (\Pi \times \mathbb{R}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{R})$; δ et Δ sont des points isolés extérieurs à Π et à E, $\mathcal{N}_\delta$ et $\mathcal{E}_\Delta$ sont les tribus engendrées par $\mathcal{N}$ et par $\mathcal{E}$ dans $\Pi_\delta = \Pi \cup \{ \delta \}$ et dans $E_\Delta = E \cup \{ \Delta \}$. 1_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Définition. — Un processus de Markov $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{\Omega}, \underset{\sim}{\mathcal{M}}, \underset{\sim}{\mathcal{M}}_t, \underset{\sim}{\theta}_t, (\varpi_t, X_t), \underset{\sim}{P}^{\varpi,x})$ à valeurs dans $(E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta)$ est dit à *accroissements semi-markoviens* s'il est normal et s'il vérifie l'axiome ci-dessous :

Axiome (ASM). — Pour tous $(\varpi, x) \in E$, $F \in \mathcal{E}$, $s, t \geqslant 0$,

$$\underset{\sim}{P}^{\varpi,x} \{ (\varpi_{t+s}, X_{t+s} - X_t) \in F \mid \underset{\sim}{\mathcal{M}}_t \} = \underset{\sim}{P}^{\varpi_t,0} \{ (\varpi_s, X_s) \in F \} \tag{1}$$

Remarque. — On appelle $(\underset{\sim}{P}_t)_{t \geqslant 0}$ la famille des mesures de transition associées à $\underset{\sim}{X}$. Si F est une partie de E, on note $x + F = \{ (\varpi, x+y); (\varpi, y) \in F \}$. En utilisant le fait que $\underset{\sim}{X}$ est normal et en faisant $t = 0$ dans (1), on obtient :

$$\underset{\sim}{P}_t(\varpi, x; x + F) = \underset{\sim}{P}_t(\varpi, 0; F) \tag{2}$$

pour tous $(\varpi, x) \in E$, $F \in \mathcal{E}$, $t \geqslant 0$. Réciproquement si $(\underset{\sim}{P}_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe sous-markovien sur $(E, \mathcal{E})$ vérifiant (2) et normal, il existe un processus à accroissements semi-markoviens admettant ce semi-groupe pour transitions ; en effet (1) découle immédiatement de la propriété de Markov et de (2).

I-2

Pour tout $t \geqslant 0$, posons :

$$\varpi'_t(\omega) = \begin{cases} \varpi_t(\omega) & \text{si} \quad (\varpi_t(\omega), X_t(\omega)) \in E \\ \delta & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après (1) le processus $X_0 = (\underset{\sim}{\Omega}, \mathcal{M}, \underset{\sim}{\mathcal{M}}_t, \underset{\sim}{\theta}_t, \varpi'_t, \underset{\sim}{P}^{\varpi,0})$, à valeurs dans $(\Pi_\delta, \mathcal{N}_\delta)$, est markovien. Les processus $\underset{\sim}{X}$ et X_0 ont même durée de vie ζ. Si $\underset{\sim}{X}$ est fortement markovien, soit T un temps d'arrêt pour la famille $(\underset{\sim}{\mathcal{M}}_t)_{t \geqslant 0}$; f étant une fonction réelle mesurable et bornée sur Π_δ, on a :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{ f(\varpi'_{T+t}) \mid \underset{\sim}{\mathcal{M}}_T \} &= f(\delta)1_{\zeta \leqslant T} + f(\delta)1_{T<\zeta}\underset{\sim}{P}_t(\varpi_T, X_T; E) \\ &\quad + 1_{T<\zeta}\int \underset{\sim}{P}_t(\varpi_T, X_T; d\varpi', dx')f(\varpi')1_E(\varpi', x') \\ &= f(\delta)1_{\zeta \leqslant T} + f(\delta)1_{T<\zeta}\underset{\sim}{P}_t(\varpi_T, 0; E) \\ &\quad + 1_{T<\zeta}\int \underset{\sim}{P}_t(\varpi_T, 0; d\varpi', dx')f(\varpi')1_E(\varpi', x') \\ &= \underset{\sim}{E}^{\varpi_T,0}\{ f(\varpi'_t) \} \end{aligned}$$

à cause de (2), donc X_0 est fortement markovien. De même si $\underset{\sim}{X}$ est standard, X_0 l'est aussi.

Pour tout réel u, définissons une mesure de transition $Q_{t,u}$ sur Π par $(A \in \mathcal{N})$:

$$Q_{t,u}(\varpi, A) = \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{ 1_A(\varpi_t)e^{iuX_t} \}$$

on a :

$$\begin{aligned} Q_{t+s,u}(\varpi, A) &= \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{ \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{ 1_A(\varpi_{t+s})e^{iu(X_{t+s}-X_t)}e^{iuX_t} \mid \underset{\sim}{\mathcal{M}}_t \} \} \\ &= \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{ e^{iuX_t}\underset{\sim}{E}^{\varpi_t,0}\{ 1_A(\varpi_s)e^{iuX_s} \} \} \\ &= Q_{t,u}Q_{s,u}(\varpi, A) \end{aligned}$$

donc pour tout u réel, la famille $(Q_{t,u})_{t \geqslant 0}$ constitue un semi-groupe de transitions ; pour $u = 0$, c'est le semi-groupe associé à X_0.

I-3. **Processus factorisé.**

On appelle ainsi un processus à accroissements semi-markoviens tel que la phrase « conditionnellement si la trajectoire de X_0 est connue, le processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est à accroissements indépendants (non stationnaires) » ait un sens et soit vraie. Plus précisément :

Considérons d'une part un processus de Markov $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \theta_t, \varpi_t, P^\varpi)$ à valeurs dans Π_δ, de temps de mort ζ. D'autre part, soient : Δ' un point isolé extérieur à $\mathbb{R}$; Ω' un espace muni d'une famille de tribus $(\mathscr{H}_t^s)_{0 \leqslant s \leqslant t}$ telles que si $s' \leqslant s \leqslant t \leqslant t'$, $\mathscr{H}_t^s \subset \mathscr{H}_{t'}^{s'}$; $(X'_t)_{t \geqslant 0}$ une famille d'applications de Ω' dans $\mathbb{R} \cup \{ \Delta' \}$, telles que X'_t soit $\mathscr{H}_r^s$-mesurable si $s \leqslant t \leqslant r$ et que si $X'_s(\omega) = \Delta'$, $X'_t(\omega) = \Delta'$ pour tout $t \geqslant s$; $(\theta'_t)_{t \geqslant 0}$ une famille d'applications de Ω' dans Ω', telles que $X'_t \circ \theta'_s = X'_{t+s}$.

Dans la suite, p. s. signifie P^{ϖ}-p. s. pour tout $\varpi \in \Pi$. Posons

$$\Omega'_t = \{ \omega ; X'_t(\omega) = \Delta' \} ;$$

on considère pour presque tout $\omega \in \Omega$, tous $x \in \mathbb{R}$ et $s \geqslant 0$ une probabilité $P_\omega^{x,s}(.)$ sur $(\Omega', \mathscr{H}_\infty^s)$ qui satisfait :

(3) Si $A \in \mathscr{H}_t^s$, $P_\cdot^{x,s}(A)$ est $\mathscr{M}_t$-mesurable.

(4) Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $A \in \mathscr{H}_\infty^0$, $P_{\theta_t(\omega)}^{x,0}(A) = P_\omega^{x,t}(\theta_t'^{-1}(A))$ p. s.

(5) On a presque sûrement :

$$P_\omega^{x,s}(\Omega'_t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s + t < \zeta(\omega) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(6) Pour presque tout ω, le processus $X'_\omega = (\Omega', \mathscr{H}_t^s, X'_t, P_\omega^{x,t})$ est un processus de Markov (non homogène) à accroissements indépendants.

Compte tenu de (4) et de ce que $\theta_s'^{-1}(\Omega'_t) = \Omega'_{s+t}$, il suffit que (5) soit vérifié pour $s = 0$. Posons :

$$\underset{\sim}{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \underset{\sim}{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \otimes \mathscr{H}_\infty^0, \quad \underset{\sim}{\mathscr{M}}_t = \mathscr{M}_t \otimes \mathscr{H}_t^0$$

$$\underset{\sim}{\theta}_t(\omega, \omega') = (\theta_t(\omega), \theta'_t(\omega'))$$

$$(\varpi_t, X_t)(\omega, \omega') = \begin{cases} (\varpi_t(\omega), X'_t(\omega')) & \text{si} \quad t < \zeta(\omega) \quad \text{et} \quad \omega' \notin \Omega'_t \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{P}^{\varpi,x}(d\omega, d\omega') = P^{\varpi}(d\omega) P_\omega^{x,0}(d\omega')$$

PROPOSITION 1. — *Le processus* $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{\Omega}, \underset{\sim}{\mathscr{M}}, \underset{\sim}{\mathscr{M}}_t, \underset{\sim}{\theta}_t, (\varpi_t, X_t), \underset{\sim}{P}^{\varpi,x})$ *est à accroissements semi-markoviens.*

Un processus du type précédent s'appelle un processus *factorisé, construit sur le processus de Markov* X.

Démonstration. — Les seules choses qui ne sont pas évidentes sont les vérifications de la propriété de Markov et de l'axiome (ASM). Pour la propriété de Markov, il suffit de montrer que si $A \in \mathscr{M}_t$, $B \in \mathscr{H}_t^0$, $C \in \mathscr{N}$, et $D \in \mathscr{R}$, on a :

$$\underset{\sim}{E}^{\varpi,x} \{ 1_A(\omega) 1_B(\omega') 1_C(\varpi_{t+s}) 1_D(X_{t+s}) \} = \underset{\sim}{E}^{\varpi,x} \{ 1_A(\omega) 1_B(\omega') \underset{\sim}{P}^{\varpi_t, X_t} \{ (\varpi_s, X_s) \in C \times D \} \}$$

mais en appliquant successivement (5), puis la propriété de Markov relative à X et (3), puis (4), puis la propriété de Markov relative à X'_ω, et enfin (5), on obtient :

$$\underset{\sim}{E}^{\varpi,x}\{1_A(\omega)1_B(\omega')\underset{\sim}{P}^{\varpi_t,X_t}\{(\varpi_s,X_s)\in C\times D\}\}$$
$$= \int P^{\varpi}(d\omega)1_A(\omega)P^{x,0}_{\omega}(d\omega')1_B(\omega')P^{\varpi_t(\omega)}(d\omega_1)1_C(\varpi_s(\omega_1))P^{X'_t(\omega'),0}_{\omega_1}\{X'_s\in D\}$$
$$= \int P^{\varpi}(d\omega)1_A(\omega)P^{x,0}_{\omega}(d\omega')1_B(\omega')1_C(\varpi_{s+t}(\omega))P^{X'_t(\omega'),0}_{\theta_t(\omega)}\{X'_s\in D\}$$
$$= \int P^{\varpi}(d\omega)1_A(\omega)P^{x,0}_{\omega}(d\omega')1_B(\omega')1_C(\varpi_{s+t}(\omega))P^{X'_t(\omega'),t}_{\omega}\{X'_{s+t}\in D\}$$
$$= \int P^{\varpi}(d\omega)1_A(\omega)1_C(\varpi_{t+s}(\omega))P^{x,0}_{\omega}\{\{X'_{t+s}\in D\}\cap B\}$$
$$= \underset{\sim}{E}^{\varpi,x}\{1_A(\omega)1_B(\omega')1_C(\varpi_{t+s})1_D(X_{t+s})\}$$

Enfin (ASM) découle immédiatement de la propriété de Markov et de ce que chaque X'_ω est à accroissements indépendants. ■

II. PROCESSUS STANDARDS ET SYSTÈMES DE LÉVY

Nous supposons dans cette partie que $\underset{\sim}{X}$ est un processus standard à accroissements semi-markoviens. Soit $\mathscr{G}_t = \sigma(\varpi_s, s \leqslant t)$; $\mathscr{F}_\infty$ est la complétée de $\mathscr{G}_\infty$ par rapport aux probabilités $\underset{\sim}{P}^{\mu,0}$, où μ désigne une probabilité quelconque sur $(\Pi, \mathscr{N})$; $\mathscr{F}_t$ est la complétée de $\mathscr{G}_t$ dans $\mathscr{F}_\infty$ par rapport à la même famille de probabilités.

Pour tous $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $Q_{t,u}(x, .)$ est absolument continue par rapport à $P_t(x, .)$. Il existe donc une fonctionnelle multiplicative $(M_{t,u})_{t\geqslant 0}$ de X_0 qui engendre le semi-groupe $(Q_{t,u})_{t\geqslant 0}$, et il est clair que

$$M_{t,u} = \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{e^{iuX_t} \mid \mathscr{F}_t\}$$

Soit la variable aléatoire

$$C^{\varpi}_u = \underset{(\underset{\sim}{P}^{\omega,0})}{\text{ess sup}}\left\{\frac{1}{t}\,|(M_{t,u} - M_{t,0})|\,;\ t \geqslant 0\right\}$$

CONDITION (A). — X vérifie cette condition si

(*i*) Il existe une famille de variables aléatoires β_u telles que

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(M_{t,u} - M_{t,0}) = \beta_u \quad \underset{\sim}{P}^{\varpi,0}\text{-p. s.}$$

(*ii*) Pour tout u, sup $\{ \underset{\sim}{E}^{\varpi,0} \{ C_u^{\varpi} \} ; \varpi \in \Pi \} = D(u) < \infty$.

(*iii*) Si $V_u(\varpi) = \underset{\sim}{E}^{\varpi,0} \{ \beta_u \}$, la fonction $V_u(\varpi)$ est continue en u pour tout ϖ, finement continue en ϖ pour tout u, relativement à la topologie fine induite sur Π par X_0, et il existe deux réels $\varepsilon < 0$ et $D > \infty$ avec :

$$\sup \{ V_u(\varpi); u \in [-\varepsilon, \varepsilon], \varpi \in \Pi \} \leqslant D \tag{7}$$

Condition (A'). — $\underset{\sim}{X}$ vérifie cette condition s'il vérifie (*i*), (*iii*) et

(*ii'*) Pour tout u il existe un réel C_u tel que pour tous $\varpi \in \Pi$, $t > 0$,

$$\frac{1}{t} | (M_{t,u} - M_{t,0}) | \leqslant C_u \quad \underset{\sim}{P}^{\varpi,0}\text{-p. s.}$$

La condition (A') est plus forte que la condition (A), mais on verra que si (A) est vérifiée, le processus $\underset{\sim}{X}$ admet une modification vérifiant (A'). La signification de ces conditions apparaîtra clairement dans la partie III.

Définition. — On appelle *système de Lévy* $(b, G)_T$ sur un ensemble T un système constitué de :

— Une fonction bornée b de T dans $\mathbb{R}$ (de norme b_0).

— Une famille de mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}$, $(G(t, .); t \in T)$, vérifiant les conditions :

$$G_0(\alpha) = \sup_T \{ G(t, [-\alpha, \alpha]) \} < \infty \tag{8}$$

$$G_1(\alpha) = \sup_T \left\{ \int G(t, dx) \frac{1}{x^2} 1_{|x| > \alpha} \right\} < \infty \tag{9}$$

Il suffit bien sûr que les conditions (8) et (9) soient vérifiées pour une valeur de α pour qu'elles le soient pour toutes.

Soit B (resp. $\underset{\sim}{B}$) l'ensemble des fonctions mesurables et bornées de Π (resp. E) dans $\mathbb{R}$. C^2 est l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$, dont les deux premières dérivées existent, sont continues et bornées. Rappelons qu'une suite de fonctions f_n de B converge faiblement vers f si pour tout ϖ, $f_n(\varpi)$ tend vers $f(\varpi)$, et si la famille f_n est uniformément bornée. On appellera $\underset{\sim}{A}$ et A_u (de domaines respectifs $\mathscr{D}_{\underset{\sim}{A}}$ et $\mathscr{D}_{A_u}$) les générateurs infinitésimaux faibles dans $\underset{\sim}{B}$ et dans B des semi-groupes $(\underset{\sim}{P}_t)_{t \geqslant 0}$ et $(Q_{t,u})_{t \geqslant 0}$. Notons que si $f \in \mathscr{D}_{A_u}$ si et seulement si la fonction $g_u(\varpi, x) = f(\varpi)e^{iux}$ appartient à $\mathscr{D}_{\underset{\sim}{A}}$, et dans ce cas,

$$\underset{\sim}{A} g_u(\varpi, x) = e^{iux} A_u f(\varpi)$$

THÉORÈME 1. — *Soit* $\underset{\sim}{X}$ *un processus standard à accroissements semi-markoviens vérifiant la condition* (A); *pour tout* u, $\mathscr{D}_{A_u} = \mathscr{D}_{A_0}$ *et il existe un système de Lévy* $(b, G)_\Pi$ *sur* Π *tel que si* $f \in \mathscr{D}_{A_0}$ *et si* $g_u(\varpi, x) = f(\varpi)e^{iux}$, *on ait* :

$$(10) \quad \underset{\sim}{A}g_u(\varpi, x) = e^{iux}A_0 f(\varpi) + e^{iux}f(\varpi)\left(iub(\varpi) + \int \frac{e^{iuy} - 1 - iu \sin y}{y^2} G(\varpi, dy)\right)$$

On donnera dans la partie suivante l'expression du générateur $\underset{\sim}{A}$ pour les fonctions de la forme $f(\varpi)g(x)$ où $g \in C^2$. (10) constitue une généralisation de la formule de Lévy relative aux processus à accroissements indépendants. Remarquons que les conclusions de ce théorème ne font intervenir que le semi-groupe $(\underset{\sim}{P}_t)_{t \geq 0}$, alors que les hypothèses mettent en jeu le processus $\underset{\sim}{X}$ lui-même.

LEMME. — *Pour tout* u *on a* $\mathscr{D}_{A_u} = \mathscr{D}_{A_0}$, *et si* $f \in \mathscr{D}_{A_0}$,

$$(11) \qquad A_u f(\varpi) = A_0 f(\varpi) + f(\varpi)V_u(\varpi)$$

Démonstration. — Considérons d'abord une fonction f de B, finement continue pour X_0.

$$\frac{1}{t}(Q_{t,u}f(\varpi) - f(\varpi)) = \frac{1}{t}(Q_{t,u}f(\varpi) - Q_{t,0}f(\varpi)) + \frac{1}{t}(Q_{t,0}f(\varpi) - f(\varpi))$$
$$= \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\left\{ f(\varpi_t)\frac{1}{t}(M_{t,u} - M_{t,0}) \right\} + \frac{1}{t}(Q_{t,0}f(\varpi) - f(\varpi))$$

Le premier terme du second membre est inférieur à $D(u)$ pour tous $\varpi \in \Pi$ et $t > 0$; $f(\varpi_t)$ tend vers $f(\varpi)$ lorsque $t \downarrow 0$, $\underset{\sim}{P}^{\varpi,0}$-p. s. Grâce à (*ii*), le théorème de Lebesgue montre que ce terme converge vers $f(\varpi)V_u(\varpi)$. On en déduit facilement que $(f \in \mathscr{D}_{A_0})$ équivaut à $(f \in \mathscr{D}_{A_u})$, ainsi que la formule (11) pour les fonctions finement continues.

D'autre part on a :

$$\mathscr{R}e(V_u(\varpi)) = \lim_{t \downarrow 0} \underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{ \cos uX_t - 1 \} \leq 0$$

et par hypothèse V_u est finement continue ; d'après Dynkin [*3*], la formule

$$A'_u f(\varpi) = A_0 f(\varpi) + V_u(\varpi)f(\varpi)$$

définit un opérateur de domaine $\mathscr{D}_{A_0}$, qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(Q'_{t,u})_{t \geq 0}$.

f étant une fonction de B continue pour la topologie fine induite par X_0, $f(\varpi)e^{iux}$ est continue pour la topologie fine induite sur E par $\underset{\sim}{X}$. Mais un processus standard admet un semi-groupe fellérien pour la topologie fine, et on en déduit que $v_t = Q_{t,u}f$ est finement continue. La famille $(v_t)_{t \geqslant 0}$ de fonctions de B satisfait

$$\frac{dv_t}{dt} = A_u v_t = A'_u v_t$$

d'après (11). On a donc également $v_t = Q'_{t,u}f$; les transitions $Q_{t,u}$ et $Q'_{t,u}$ coïncidant sur les fonctions finement continues, elles sont identiques; de plus on a $A_u = A'_u$, ce qui est le résultat. ■

Démonstration du théorème. — Les formules (10) et (11) sont identiques, à condition que:

$$V_u(\varpi) = iub(\varpi) + \int \frac{e^{iux} - 1 - iu \sin x}{x^2} G(\varpi, dx) \tag{12}$$

Pour ϖ fixé, posons:

$$c_n = n\underset{\sim}{P}_{1/n}(\varpi, 0; E)$$

$$F_n(.) = \frac{n}{c_n} \underset{\sim}{P}_{1/n}(\varpi, 0; \Pi, .)$$

si φ_n est la transformée de Fourier de F_n, $V_u(\varpi)$ est définie par:

$$V_u(\varpi) = \lim_{n \uparrow \infty} c_n(\varphi_n(u) - 1)$$

$V_u(\varpi)$ étant continue en u, on sait [*4*] qu'il existe une constante $b(\varpi)$ et une mesure de Lévy $G(\varpi, .)$ telles qu'on ait (12). Il reste à montrer que la famille $(b, G)_\Pi$ est un système de Lévy. On a:

$$2ib(\varpi) = V_1(\varpi) - V_{-1}(\varpi)$$

et comme pour tout u, $V_u \in B$, la fonction b est dans B. On a aussi:

$$\begin{aligned} -(V_1(\varpi) + V_{-1}(\varpi)) &= 2\int \frac{1 - \cos x}{x^2} G(\varpi, dx) \\ &\geqslant \int \left(1 - \frac{x^2}{12}\right) 1_{|x| \leqslant 1} G(\varpi, dx) \\ &\geqslant \frac{11}{12} G(\varpi, [-1, 1]) \end{aligned}$$

par conséquent la fonction $G(., [-1, 1])$ est bornée et on a (8). Enfin à cause de (7),

$$
\begin{aligned}
2D\varepsilon &\geqslant -\frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du(V_u(\varpi) + V_{-u}(\varpi)) \\
&\geqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du \int \frac{1-\cos ux}{x^2} G(\varpi, dx) = 2\int G(\varpi, dx)\frac{1}{x^2}\left(\varepsilon - \frac{\sin x\varepsilon}{x}\right) \\
&\geqslant \int 1_{|x|>2/\varepsilon} G(\varpi, dx)\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

donc $G_1(2/\varepsilon) \leqslant 2D\varepsilon$, et on a (9). ■

III. THÉORÈME RÉCIPROQUE

Étant donné un système de Lévy $(b, G)_T$, pour tout $t \in T$, posons :

$$
V_u(t) = iub(t) + \int \frac{e^{iux} - 1 - iu \sin x}{x^2} G(t, dx)
$$

$\exp(V_u(r))$ est la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible ; si $T = [0, \zeta[$ et si pour tout u, $V_u(.)$ est continue à droite, $\exp\left(\int_s^t V_u(r)dr\right)$ est également lorsque $t < \zeta$ la fonction caractéristique d'une probabilité sur $\mathbb{R}$, notée $\mu_{s,t}(.)$. Posons :

$$
P_{s,t}(x, dy) = \begin{cases} \mu_{s,t}(dy - x) & \text{si} \quad t < \zeta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{13}
$$

On construit ainsi un semi-groupe non homogène de transitions sous-markoviennes sur $\mathbb{R}$, invariantes par translation. On peut donc construire un processus à accroissements indépendants à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\Delta'\}$, de transitions $(P_{s,t})_{0 \leqslant s \leqslant t}$. Le temps de mort ζ' de ce processus est évidemment égal presque sûrement à ζ. Nous allons préciser quelques propriétés de ce processus :

PROPOSITION 2. — *Soit* $(b, G)_{[0,\zeta[}$ *un système de Lévy sur* $[0, \zeta[$ *tel que pour tout* u, V_u *soit continue à droite ; il existe un processus non homogène* $X' = (\Omega', \mathscr{H}_t^s, X_t', P^{x,s})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R} \cup \{\Delta'\}$, *de temps de mort* ζ, *à* *accroissements indépendants, de transitions définies par* (13), *dont les trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche, et qui est fortement markovien et quasi-continu à gauche.*

Pour démontrer la proposition, il suffit d'après Dynkin ([2], p. 156 et 168) de vérifier les deux conditions suivantes :

(C) Si f est une fonction réelle continue et bornée sur $\mathbb{R}$, pour tous x réel, $0 \leqslant s \leqslant t$, on ait :

$$\lim_{y \to x, r \downarrow s} \mathrm{P}_{r,t} f(y) = \mathrm{P}_{s,t} f(x)$$

(D) Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup \{ \mathrm{P}_{s,t}(x, \mathbb{R} -]x - \varepsilon, x + \varepsilon[); x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t - s \leqslant \delta \} = 0$$

Selon Dynkin on peut alors prendre pour Ω' l'ensemble de toutes les fonctions de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R} \cup \{ \Delta' \}$ qui sont continues à droite et limitées à gauche dans $\mathbb{R}$, et telles que si $X'_t(\omega) = \Delta'$, $X'_s(\omega) = \Delta'$ pour $s \geqslant t$; $\mathscr{H}_t^s = \sigma(X'_r; s \leqslant r \leqslant t)$.

LEMME 1. — *La famille de mesures* $\left\{ \frac{1}{h} \mu_{s,s+h}(dx)x^2;\ s \geqslant 0,\ h > 0 \right\}$ *vérifie* (8) *et* (9).

Démonstration. — Remarquons d'abord que la fonction V_u est bornée :

$$| \mathrm{V}_u(r) | \leqslant g(u) = | u | b_0 + \mathrm{G}_0(1)(1 + | u | + 2u^2 + | u |^3) + \mathrm{G}_1(1)(3 + | u |)$$

Il est évident que la famille $\left\{ \frac{1}{h} \mu_{s,s+h}(dx)x^2,\ s \geqslant 0,\ h \geqslant 1 \right\}$ vérifie (8) et (9). Si $h \leqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{h} \int \mu_{s,s+h}(dx)(1 - \cos ux) = \frac{1}{2h}\left(2 - \exp\left(\int_s^{s+h} \mathrm{V}_u(r)dr\right) - \exp\left(\int_s^{s+h} \mathrm{V}_{-u}(r)dr\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2h}\left(-\int_s^{s+h} (\mathrm{V}_u(r) + \mathrm{V}_{-u}(r))dr - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\left(\int_s^{s+h} \mathrm{V}_u(r)dr\right)^n + \left(\int_s^{s+h} \mathrm{V}_{-u}(r)dr\right)^n\right)\right)$$

$$\leqslant h e^{g(u)} + \frac{1}{h} \int_s^{s+h} dr \int \frac{1 - \cos ux}{x^2} \mathrm{G}(r, dx)$$

$$\leqslant e^{g(u)} + 2u^2 \mathrm{G}_0(1) + 2\mathrm{G}_1(1) = \mathrm{C}(u)$$

Mais on a :

$$\frac{1}{h}\int_{|x|\leqslant 1}\mu_{s,s+h}(dx)x^2 \leqslant \frac{24}{11}\int \frac{1}{h}\mu_{s,s+h}(dx)(1-\cos x) \leqslant \frac{24}{11}C(1)$$

$$\frac{1}{h}\int_{|x|>1}\mu_{s,s+h}(dx) \leqslant \frac{2}{h}\int_{|x|>1}\mu_{s,s+h}(dx)\left(1-\frac{\sin 2x}{2x}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{-2}^{2}du\int\mu_{s,s+h}(dx)(1-\cos ux) \leqslant \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}C(u)du$$

d'où le résultat. ■

LEMME 2. — *Si $f \in C^2$, il existe une constante C_f dépendant de f, telle que si $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant s < \zeta$, $0 < h < \zeta - s$, on ait*

$$\left|\frac{P_{s,s+h}f(x)-f(x)}{h}\right| \leqslant C_f$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{P_{s,s+h}f(x)-f(x)}{h} = \bar{A}_s f(x) = f'(x)b(s) + \int\frac{f(x+y)-f(x)-f'(x)\sin y}{y^2}G(s,dy)$$

Démonstration. — Soit $v_x(y) = f(x+y) - f(x) - f'(x)\sin y$; cette fonction est majorée par P, la fonction $v_x(y)/y^2$ est majorée par Q et les constantes P et Q ne dépendent pas de x. On a :

$$\frac{P_{s,s+h}f(x)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}f'(x)\int\mu_{s,s+h}(dy)\sin y + \frac{1}{h}\int\mu_{s,s+h}(dy)v_x(y)$$

$$= \frac{1}{2ih}f'(x)\left(\exp\left(\int_s^{s+h}V_1(r)dr\right) - \exp\left(\int_s^{s+h}V_{-1}(r)dr\right)\right) + \frac{1}{h}\int\mu_{s,s+h}(dy)v_x(y)(1_{|y|\leqslant 1} + 1_{|y|>1})$$

$$\left|\frac{P_{s,s+h}f(x)-f(x)}{h}\right| \leqslant b_0 f'(x) + 2hf'(x)e^{g(1)} + Q\frac{24}{11}C(1) + \frac{P}{2}\int_{-2}^{2}C(u)du = C_f$$

en reprenant les notations du lemme précédent. Mais d'après la définition de $\mu_{s,s+h}$, on a :

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(\int\mu_{s,s+h}(dx)e^{iux} - 1\right) = V_u(s)$$

on sait alors ([*4*], p. 528) que d'une part $\frac{1}{h}\int\mu_{s,s+h}(dx)\sin x$ tend vers

$b(s)$ si $h \downarrow 0$, et d'autre part comme $v_x(y)/y^2$ est continue à l'origine, on a :

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int \mu_{s,s+h}(dy) v_x(y) = \int \frac{v_x(y)}{y^2} G(s, dy)$$

la conclusion découle de ces deux remarques. ■

Démonstration de la proposition. — Soit $f \in C^2$; on vient de voir que la fonction $\bar{A}_s f(x)$ est bornée par une constante C_f, et $P_{s,t}f(x)$ est une fonction de t dérivable à droite, dont la dérivée est $P_{s,t}\bar{A}_t f(x)$; on en déduit :

$$| P_{s,t}f(x) - f(x) | \leqslant (t - s)C_f$$

Prenons une fonction f comprise entre 0 et 1, nulle pour $|x| \geqslant \varepsilon$ et telle que $f(0) = 1$; on a :

$$\begin{aligned} P_{s,t}(x, \mathbb{R} -]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) &= 1 - P_{s,t}(0,]-\varepsilon, \varepsilon[) \\ &\leqslant f(0) - P_{s,t}f(0) \\ &\leqslant (t - s)C_f \end{aligned}$$

et la condition (D) est remplie. Quant à la condition (C), notons que la loi $P_{r,t}(t, .)$ admet pour fonction caractéristique

$$\exp\left(iuy + \int_r^t V_u(z)dz \right)$$

donc la fonction caractéristique de $P_{r,t}(y, .)$ converge vers celle de $P_{s,t}(x, .)$ lorsque $y \to x$ et $r \downarrow s$. On en déduit le résultat. ■

THÉORÈME 2. — *Étant donné un opérateur* A_0 *qui est le générateur infinitésimal faible d'un processus de Markov standard* X *à valeurs dans* Π_δ *et un système de Lévy* $(b, G)_\Pi$ *sur* Π *tel que pour tout* u, V_u *soit continue pour la topologie fine induite sur* Π *par* X, *il existe un processus standard* $\underset{\sim}{X}$ *à accroissements semi-markoviens, factorisé et construit sur* X, *vérifiant* (A′) *et dont le générateur infinitésimal vérifie* (10).

Démonstration. — Soit $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \theta_t, \varpi_t, P^\varpi)$ un processus standard de temps de mort ζ, de générateur infinitésimal A_0. Ω', X'_t, $\mathcal{H}^s_t$ ont été définis après l'énoncé de la proposition 2, et θ'_t est la translation naturelle sur Ω'. La fonction $V_u(\varpi_t(\omega))$ est presque sûrement continue à droite en t, et soit Ω_0 l'ensemble des ω pour lesquels elle est continue à droite.

Pour tout $\omega \in \Omega_0$, la proposition 2 permet de définir une famille de probabilités $P^{x,s}_\omega$ sur $(\Omega', \mathcal{H}^s_\infty)$ telles que $X'_\omega = (\Omega', \mathcal{H}^s_t, X'_t, P^{x,s}_\omega)$ soit un processus à accroissements indépendants fortement markovien et quasi-continu à gauche, dont le temps de mort ζ' est p. s. égal à $\zeta(\omega)$, et dont les transitions sont définies par :

$$\int P^{\omega}_{s,s+t}(x, dy)e^{iuy} = \begin{cases} \exp\left(iux + \int_s^t V_u(\varpi_r(\omega))dr\right) & \text{si} \quad t<\zeta(\omega) \quad \text{et} \quad \omega \in \Omega_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour vérifier (3), il suffit de montrer que si $s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = t$, la fonction $E^{x,s}\left\{\exp \sum_{p=1}^{n} iu_p X'_{t_p}\right\}$ est $\mathscr{M}_t$-mesurable. Si $v_p = u_p + \ldots + u_n$, on a :

$$E^{x,s}_{\omega}\left\{\exp \sum_{p=1}^{n} iu_p X'_{t_p}\right\} = e^{iv_1 x} \prod_{p=1}^{n} \exp\left(\int_{t_{p-1}}^{t_p} V_{v_p}(\varpi_r(\omega)dr)\right) \quad P^{\varpi}\text{-p. s.}$$

d'où (3). (4) découle de ce que l'expression précédente égale aussi

$$E^{x,0}_{\theta_s(\omega)}\left\{\exp \sum_{p=1}^{n} iu_p X'_{t_p - s}\right\}.$$

(5) vient de ce que $\zeta' = \zeta$ p. s.

On peut alors faire la construction du paragraphe I-3 : le processus $\underset{\sim}{X}$ ainsi obtenu est à accroissements semi-markoviens. Par construction ses trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche, et $\underset{\sim}{\mathscr{M}}_{t_+} = \underset{\sim}{\mathscr{M}}_t$. Pour montrer qu'il est fortement markovien, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 1, en remplaçant l'instant t par un temps d'arrêt T relatif à $(\underset{\sim}{\mathscr{M}}_t)_{t \geqslant 0}$: en effet $T(., \omega')$ est un temps d'arrêt sur Ω pour $(\mathscr{M}_t)_{t \geqslant 0}$ et $T(\omega, .)$ un temps d'arrêt sur Ω' pour $(\mathscr{H}^0_t)_{t \geqslant 0}$. Enfin la quasi-continuité à gauche de X et de X′ entraînent celle de $\underset{\sim}{X}$, et $\underset{\sim}{X}$ est un processus standard.

On va montrer que $\underset{\sim}{X}$ vérifie la condition (A′) ; posons :

$$M_{t,u} = 1_{t>\zeta} \exp\left(\int_0^t V_u(\varpi_r)dr\right)$$

$(M_{t,u})_{t \geqslant 0}$ est une fonctionnelle multiplicative de X, qui engendre $(Q_{t,u})_{t \geqslant 0}$. D'autre part V_u est majorée par $g(u)$, donc (i) est vérifiée avec $\beta_u = V_u(\varpi_0)$, (ii') avec $C_u = e^{g(u)} - 1$, (iii) car $\underset{\sim}{E}^{\varpi,0}\{\beta_u\} = V_u(\varpi)$ et que

$$D = \sup\{g(u);\ u \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} < \infty.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 1 pour obtenir (10). ■

COROLLAIRE. — *Soit* $\underset{\sim}{X}$ *un processus standard à accroissements semi-markoviens vérifiant la condition* (A); *si* $f \in \mathscr{D}_{A_0}$ *et si* $h \in C^2$, *la fonction* $f(\varpi)h(x)$ *appartient à* $\mathscr{D}_{\underset{\sim}{A}}$ *et on a :*

$$\underset{\sim}{A}fh(\varpi, x) = h(x)A_0 f(\varpi) + f(\varpi)(b(\varpi)h'(x) + \int \frac{h(x+y) - h(x) - h'(x)\sin y}{y^2} G(\varpi, dy))$$

Démonstration. — On peut, sans changer les générateurs infinitésimaux, considérer le processus équivalent construit dans le théorème précédent.

$$\frac{1}{t}(\underset{\sim}{P}_t fh(\varpi, x) - f(\varpi)h(x)) = \frac{1}{t}(\underset{\sim}{P}_t fh(\varpi, x) - h(x)\underset{\sim}{P}_t f(\varpi, x)) + \frac{1}{t}(Q_{t,0}f(\varpi) - f(\varpi))h(x)$$

le deuxième terme du second membre converge faiblement vers $h(x)A_0 f(\varpi)$ lorsque $t \downarrow 0$; quant au premier terme, il égale :

$$\int P^{\varpi}(d\omega) f(\varpi_t(\omega)) \frac{P^{\omega}_{0,t}h(x) - h(x)}{t}$$

$f(\varpi_t(\omega))$ converge P^{ϖ}-p. s. vers $f(\varpi)$ lorsque $t \downarrow 0$; quant à la dernière partie de l'intégrand, le lemme 2 de la proposition 2 montre qu'il est majoré par une constante C_h et qu'il converge vers $\bar{A}_{\varpi}h(x)$ lorsque $t \downarrow 0$. On obtient donc le résultat en appliquant le théorème de Lebesgue. ■

UN PROCESSUS NE VÉRIFIANT PAS (10) (Processus de Poisson semi-markovien). — On considère une chaîne semi-markovienne $(\varpi_n, Y_n)_{n \geq 0}$, c'est-à-dire une chaîne de Markov à valeurs dans E, telle que (ϖ_{n+1}, Y_{n+1}) ne dépende que de ϖ_n et non de Y_n. On appelle $\underset{\sim}{P}$ sa probabilité de transition :

$$\underset{\sim}{P}(\varpi; A) = P\{(\varpi_1, Y_1) \in A \mid \varpi_0 = \varpi\}$$

On considère d'autre part une fonction bornée b et une fonction positive bornée a sur Π. Conditionnellement si les $(\varpi_n)_{n \geq 0}$ sont connus, on définit une suite $(T_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de lois exponentielles de paramètres $a(\varpi_n)$. Posons :

$$\varpi_t = \varpi_n$$

$$X_t = X_0 + \sum_{p=0}^{n-1}(Y_p + T_p b(\varpi_p)) + b(\varpi_n)\left(t - \sum_{p=0}^{n-1} T_p\right)$$

Il est clair que le processus $(\varpi_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus de Markov à accroissements semi-markoviens, qui généralise de manière naturelle les processus de Poisson composés. On voit facilement que toute fonction de B appartient à $\mathscr{D}_{A_u}$ pour chaque réel u, et que :

$$A_u f(\varpi) = iub(\varpi)f(\varpi) - a(\varpi)f(\varpi) + a(\varpi)\int \underset{\sim}{P}(\varpi; d\varpi', dx)f(\varpi')e^{iux}$$

$$= A_0 f(\varpi) + iub(\varpi)f(\varpi) + a(\varpi)\int \underset{\sim}{P}(\varpi; d\varpi', dx)f(\varpi')(e^{iux} - 1)$$

et la relation (10) n'est pas vérifiée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, *Markov processes and potential theory*. Academic Press, 1968, New York.
[2] E. B. DYNKIN, *Théorie des processus markoviens*. Dunod, 1963, Paris.
[3] E. B. DYNKIN, *Markov processes*. I. Springer Verlag, 1965, Berlin.
[4] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*. II. Wiley and Sons, 1966, New York.

Manuscrit reçu le 15 mars 1971.