ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. JACOD

Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 2 (1971), p. 83-129
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_2_83_0>

A. LICHNEROWICZ

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VII, n° 2, 1971, p 83-129. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes

par

J. JACOD (*)

RÉSUMÉ. — Nous considérons une chaîne semi-markovienne $(\varpi_n, X_n)_{n \geqslant 0}$, c'est-à-dire une chaîne de Markov telle que ϖ_{n+1} et X_{n+1} dépendent de ϖ_n, mais pas de X_n ; X_n est une variable aléatoire réelle, ϖ_n prend ses valeurs dans un espace mesurable quelconque Π. Si $S_n = \sum_{p=0}^{n} X_p$, les deux chaînes $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ et $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$ sont également markoviennes.

Dans une première partie nous étudierons les σ-algèbres asymptotiques des deux chaînes $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ et $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$; si la première est récurrente au sens de Harris et si le support (dont nous préciserons la définition) de la seconde vérifie une condition qui signifie que la chaîne n'est pas arithmétique, on montrera que tout élément de l'une de ces σ-algèbres égale presque sûrement un élément de l'autre (en partant d'un point ϖ quelconque).

La seconde partie est consacrée à l'étude des chaînes positives, c'est-à-dire telles que X_n prenne ses valeurs dans $[0, +\infty[$. On considère le processus semi-markovien associé ([*10*] [*13*]), et on montre qu'il est récurrent au sens de Harris. On peut alors déduire du comportement de ce processus plusieurs propriétés relatives au potentiel de la chaîne $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$; en particulier on donnera un théorème limite quotient et, dans le cas où la condition sur le support est vérifiée, un théorème de renouvellement qui généralise le théorème classique relatif aux marches aléatoires ; on

(*) Centre de Morphologie mathématique, 35, rue Saint-Honoré, 77-Fontainebleau.

démontre dans cette partie, en les développant, les résultats annoncés dans [6].

Dans la troisième partie nous définissons les chaînes semi-markoviennes transientes et récurrentes. On relie le comportement du potentiel à la nature de la chaîne ; puis après avoir donné la définition de la « moyenne » d'une chaîne semi-markovienne, on indique un critère de récurrence analogue à celui des marches aléatoires, selon lequel une marche dont la moyenne existe est récurrente si et seulement si cette moyenne est nulle.

Dans la dernière partie, nous supposons que Π est un espace L. C. D. et que la chaîne est « semi-fortement fellérienne » ; après avoir montré que pour de telles chaînes on peut définir des points récurrents ou transients, on précise la forme des classes (récurrentes, transientes essentielles ou non) pour la chaîne de Markov $(\varpi_n, S_n)_{n\geq 0}$. Nous retrouvons-là encore une situation analogue, quoique beaucoup plus compliquée, à celle des marches ; les résultats annoncés dans [7] sont démontrés dans ces deux dernières parties.

Je tiens à remercier M. Neveu pour l'aide qu'il m'a apportée dans la rédaction de cet article, notamment en simplifiant plusieurs démonstrations.

SUMMARY. — Consider a measurable space $(\Pi, \mathcal{N})$ and a Markov chain $(\varpi_n, X_n)_{n\geq 0}$ with values in $\Pi \times \mathbb{R}$; this chain is semi-markovian if (ϖ_{n+1}, X_{n+1}) is dependant of ϖ_n, but independant of X_n. Put $S_n = \sum_{p=0}^{n} X_p$. We suppose that the Markov chain $(\varpi_n)_{n\geq 0}$ is recurrent in the sense of Harris.

We show at first that, under a certain condition, the tail σ-fields of both the chains $(\omega_n)_{n\geq 0}$ and $(\varpi_n, S_n)_{n\geq 0}$ are identical. When the random variables are non-negative, we construct the so-called semi-Markov process associated to the semi-Markov chain, and this process is recurrent in the sense of Harris. This result allows us to show a renewal theorem.

Then we define transient and recurrent semi-Markov chains, and give a criterium for the chain to be recurrent. At last we give a local classification of the states for the Markov chain $(\varpi_n, S_n)_{n\geq 0}$, when Π is a locally compact space.

I. σ-ALGÈBRES ASYMPTOTIQUES

I.1. Préliminaires.

Désignons par $(\Pi, \mathcal{N})$ un espace mesurable, par $\mathcal{R}(\mathcal{R}_+)$ et $\lambda(\lambda_+)$ les boréliens et la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}(\mathbb{R}_+)$, et posons

$$(E, \mathcal{E}) = (\Pi \times \mathbb{R}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{R}),$$
$$(E_+, \mathcal{E}_+) = (\Pi \times \mathbb{R}_+, \mathcal{N} \otimes \mathcal{R}_+).$$

On notera $\varepsilon(x)$ l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, et 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Etant données une mesure positive $\underset{\sim}{\nu}$ sur $(E, \mathcal{E})$ et une mesure de transition positive $\underset{\sim}{P}$ de $(\Pi, \mathcal{N})$ dans $(E, \mathcal{E})$, pour toute partie mesurable A de E on pose :

$$\underset{\sim}{\nu} * \underset{\sim}{P}(A) = \int \underset{\sim}{\nu}(d\varpi, dx)\underset{\sim}{P}(\varpi\,; d\varpi', dx')1_A(\varpi', x + x') \tag{1}$$

cette formule définit une mesure $\underset{\sim}{\nu} * \underset{\sim}{P}$ sur $(E, \mathcal{E})$, qui peut être partout infinie ; cependant elle sera σ-finie par rapport aux compacts de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe une suite de parties mesurables Π_n de Π, croissant vers Π, telle que $\underset{\sim}{\nu} * \underset{\sim}{P}(\Pi_n \times K) < +\infty$ pour tout n et tout compact K de $\mathbb{R}$) si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(2) : $\underset{\sim}{\nu}$ est une probabilité, et pout tout entier n et tout compact K de $\mathbb{R}$ on a :

$$\sup \{ \underset{\sim}{P}(\varpi\,; \Pi_n \times (x + K))\,; \varpi \in \Pi, x \in \mathbb{R} \} < +\infty$$

(3) : les mesures sur $\mathbb{R}$, $\underset{\sim}{P}(\varpi\,; \Pi, .)$ pour tout ϖ et $\underset{\sim}{\nu}(\Pi, .)$, ont leurs supports dans $[0, \infty[$; pour tout x, $\underset{\sim}{\nu}(\Pi \times [0, x])$ et $\sup \{ \underset{\sim}{P}(\varpi\,; \Pi \times [0, x])\,; \varpi \in \Pi \}$ sont finis.

Si l'on remplace $\underset{\sim}{\nu}$ par une mesure de transition Q de $(\Pi, \mathcal{N})$ dans $(E, \mathcal{E})$, la formule (1) définit une mesure de transition $\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{P}$ de $(\Pi, \mathcal{N})$ dans $(E, \mathcal{E})$. On vérifie que l'opération interne $*$ ainsi définie sur l'ensemble des mesures de transition positives de $(\Pi, \mathcal{N})$ dans $(E, \mathcal{E})$ est associative, cela permet de définir par récurrence les transitions $\underset{\sim}{P}^{1*} = \underset{\sim}{P}$, $\underset{\sim}{P}^{n*} = \underset{\sim}{P}^{(n-1)*} * \underset{\sim}{P}$.

$\underset{\sim}{\nu}$ et P étant respectivement une mesure positive sur $(E, \mathcal{E})$ et une transition positive de $(\Pi, \mathcal{N})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, on pose pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$\underset{\sim}{\nu} * P(A) = \int \underset{\sim}{\nu}(d\varpi, dx)P(\varpi, dx')1_A(x + x') \tag{1'}$$

cette formule définit une mesure $\underset{\sim}{\nu} * \mathrm{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$, au sujet de laquelle on peut faire les mêmes remarques qu'au sujet de $\underset{\sim}{\nu} * \underset{\sim}{\mathrm{P}}$. En remplacant ν par une mesure de transition $\underset{\sim}{\mathrm{Q}}$ de $(\Pi, \mathscr{N})$ dans $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$, (1') définit une mesure de transition $\underset{\sim}{\mathrm{Q}} * \mathrm{P}$ de $(\Pi, \mathscr{N})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$. Si pour tout ϖ la mesure $\mathrm{P}(\varpi, .)$ admet la densité $g(\varpi, .)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ, $\underset{\sim}{\mathrm{Q}} * \mathrm{P}(\varpi, .)$ admet une densité notée $\underset{\sim}{\mathrm{Q}} * g(\varpi, .)$:

$$\underset{\sim}{\mathrm{Q}} * g(\varpi, x) = \int \underset{\sim}{\mathrm{Q}}(\varpi\,; d\varpi', dy) g(\varpi', x - y)$$

I.2. Chaînes semi-markoviennes.

Une chaîne de Markov homogène $(\varpi_n, \mathrm{X}_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs dans $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$ est dite *semi-markovienne* si sa probabilité de transition $\underset{\sim}{\Pi}$ vérifie pour tout réel x

(4) $$\underset{\sim}{\Pi}(\varpi, x\,; d\varpi, dx') = \underset{\sim}{\Pi}(\varpi, 0\,; d\varpi', dx') = \underset{\sim}{\mathrm{P}}(\varpi\,; d\varpi', dx')$$

Cette chaîne est définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$. Si $\mathrm{S}_n = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{X}_p$, les chaînes $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ et $(\varpi_n, \mathrm{S}_n)_{n \geqslant 0}$ sont également markoviennes et sont définies sur le même espace Ω. On note P la transition de la première ; $\tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}}$ désigne la probabilité construite sur $(\Omega, \mathscr{A})$ à partir de la seconde avec la loi initiale $\underset{\sim}{\mu}$; si $(\varpi_0, \mathrm{S}_0) = (\varpi, x)$ on la note $\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,x}$, et $\tilde{\mathrm{P}}_{\mu,x}$ si $\mathrm{S}_0 = x$ et si la loi de ϖ_0 est μ.

PROPOSITION 1. — *Pour toute partie mesurable* A *de* E *on a :*

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,0}\{(\varpi_n, \mathrm{S}_n) \in \mathrm{A}\} = \underset{\sim}{\mathrm{P}}^{n*}(\varpi\,; \mathrm{A})$$

Démonstration. — En effet si $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ on a :

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,0}\{(\varpi_n, \mathrm{S}_n) \in \mathrm{A}\} = \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,0}\left\{(\varpi_n, \mathrm{X}_1 + \sum_{p=2}^{n} \mathrm{X}_p) \in \mathrm{A}\right\}$$
$$= \int \underset{\sim}{\mathrm{P}}(\varpi\,; d\varpi_1, dx_1)\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi_1,0}\left\{(\varpi_{n-1}, x_1 + \sum_{p=1}^{n-1} \mathrm{X}_p) \in \mathrm{A}\right\}$$

or il est clair que $\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,0}\{(\varpi_1, \mathrm{S}_1) \in \mathrm{A}\} = \underset{\sim}{\mathrm{P}}(\varpi\,; \mathrm{A})$, d'où le résultat.

On supposera que la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie la condition :

Condition A. — Il existe une mesure σ-finie φ sur $(\Pi, \mathscr{N})$ *telle que la chaîne* $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ *soit φ-récurrente.*

Dans ce cas on sait ([*8*] [*9*]) qu'il existe une mesure σ-finie π invariante pour P, unique, et la chaîne est π-récurrente. On appelle $p^m(\varpi, .)$ la densité de la partie absolument continue de $P^m(\varpi, .)$ par rapport à π. Rappelons qu'une partie mesurable C de Π telle que $\pi(C) > 0$ est une *C*-partie s'il existe un entier m et un réel positif ε tels que :

$$p^m(\varpi, \varpi') \geqslant \varepsilon, \qquad \forall \varpi, \varpi' \in C$$

sous la condition A et si la σ-algèbre $\mathcal{N}$ est séparable, toute partie mesurable de π-mesure positive contient une C-partie [*8*].

D'après [*4*] pour tout n il existe une probabilité de transition $F^n_{\varpi,\varpi'}(.)$ de $(\Pi^2, \mathcal{N}^{2\otimes})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ telle qu'on ait :

$$\underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi ; d\varpi', dx) = P^n(\varpi, d\varpi')F^n_{\varpi,\varpi'}(dx)$$

on peut alors poser la définition :

Définition. — On appelle *support* de la chaîne semi-markovienne l'ensemble Σ des points (a, m) de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ tels que pour tout $\delta > 0$ il existe une partie D de π-mesure positive avec :

$$\inf \{ p^m(\varpi, \varpi')F^m_{\varpi,\varpi'}(\delta(a)) ; \varpi, \varpi' \in D \} = \theta > 0$$

cela veut dire que la densité par rapport à π de la mesure $\underset{\sim}{P}^{m*}(\varpi ; ., \delta(a))$ est bornée inférieurement sur D $\times$ D ; D est d'ailleurs une C-partie. On note $\sigma(\Sigma)$ le groupe fermé engendré par le support Σ s'il n'est pas vide ; $\sigma(\Sigma)$ est contenu dans le groupe $\mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, où d, période de la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$, est le plus grand commun diviseur de l'ensemble des entiers associés à une C-partie.

I.3. Les σ-algèbres asymptotiques.

On appelle $\mathcal{F}^\infty$ (resp. $\mathcal{G}^\infty$) la σ-algèbre asymptotique de $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ (resp. $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$) dans Ω ; $\mathcal{F}^\infty_{\underset{\sim}{\mu}}$ (resp. $\mathcal{G}^\infty_{\underset{\sim}{\mu}}$) sera la $\tilde{P}_{\mu,0}$-σ-algèbre (resp. $\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}$-$\sigma$-algèbre) asymptotique de $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ (resp. $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$), c'est-à-dire la σ-algèbre formée des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{F}^\infty$ pour $\tilde{P}_{\mu,0}$ (resp. $\mathcal{G}^\infty$ pour $\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}$).

La chaîne « espace-temps » construite à partir de $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$ sera désignée par $(Z_n)_{n \geqslant 0} = (\varpi_n, S_n, T_n)_{n \geqslant 0}$; étant donnée une probabilité $\underset{\sim}{\mu}$ sur E $\times$ $\mathbb{Z}$, on note $\bar{P}_{\underset{\sim}{\mu}}$ la probabilité sur $\Omega \times \mathbb{Z}$ (espace d'états de la chaîne espace-temps) construite à partir de la loi initiale $\underset{\sim}{\mu}$.

THÉORÈME 1. — *Sous la condition* A *et si le groupe fermé engendré par* Σ *est* $\mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, *pour toute probabilité* $\underset{\sim}{\mu}$ *sur* $(E, \mathcal{E})$ *la* $\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}$-*$\sigma$-algèbre asymptoti-*

que de $(\varpi_n, S_n)_{n\geq 0}$ est identique a la $\tilde{P}_{\mu,0}$-σ-algèbre asymptotique de $(\varpi_n)_{n\geq 0}$, μ étant la probabilité sur $(\Pi, \mathcal{N})$ définie par $\mu(.) = \underset{\sim}{\mu}(., \mathbb{R})$.

Si la chaîne $(\varpi_n)_{n\geq 0}$ est apériodique ($d = 1$), *cette σ-algèbre est triviale*; sinon elle est engendrée par les atomes $\Omega_i = \liminf_{(n)} \{ \varpi_{nd} \in C_i \}$ tels que $\tilde{P}_\mu(\Omega_i) > 0$, où les C_i sont les éléments du cycle décrit par $(\varpi_n)_{n\geq 0}$ (cf. [*8*]).

Il nous faut d'abord montrer deux lemmes; la démonstration du premier s'inspire des méthodes de Jain et Jamison [*8*] et d'Orey [*12*].

LEMME 1. — *Sous la condition* A, *si f est une fonction sur $\Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ bornée harmonique pour la chaîne espace-temps, telle que la famille $\{ f(\varpi, ., n) ; \varpi \in \Pi, n \in \mathbb{Z} \}$ de fonctions sur $\mathbb{R}$ soit uniformément équicontinue, pour tout point (a, m) de $\sigma(\Sigma)$ on a :*

(6) $\quad f(\varpi, x, n) = f(\varpi, x + a, n + m) \qquad \forall (\varpi, x, n) \in \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

Démonstration. — L'ensemble des points (a, m) pour lesquels on a (6) étant un groupe fermé (à cause de la continuité de $f(\varpi, ., n)$), il suffit de montrer (6) pour $(a, m) \in \Sigma$. Supposons alors qu'il existe un point (a, m) de Σ et un point $z_0 = (\varpi'_0, x_0, n_0)$ tels que

$$f(\varpi'_0, x_0, n_0) \neq f(\varpi'_0, x_0 + a, n_0 + m),$$

et posons $f'(\varpi, x, n) = f(\varpi, x + a, n + m)$. Les suites $f(Z_n)$ et $f'(Z_n)$ sont des martingales bornées, qui convergent $\bar{P}_{z_0}$-p.s. vers des variables aléatoires F et F' telles que $\bar{E}_{z_0}(F) = f(z_0)$, $\bar{E}_{z_0}(F') = f'(z_0)$. Si par exemple $f(z_0) < f'(z_0)$, il existe deux nombres α et β tels que

(7) $$\bar{P}_{z_0} \{ F < \alpha < \beta < F' \} = r > 0$$

α' et β' étant deux nombres tels que $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, on définit les parties suivantes de $\Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$: $A = \{ z ; f(z) < \alpha \}$, $A' = \{ z ; f(z) < \alpha' \}$, $B = \{ z ; f'(z) > \beta \}$, $B' = \{ z ; f'(z) > \beta' \}$. L'équi-continuité des fonctions $f(\varpi, ., n)$ entraîne l'existence d'un nombre ρ tel que :

(8) $$0 < \rho = \inf \{ | x - x' | ; | f(\varpi, x, n) - f(\varpi, x', n) | \geq (\beta - \beta') \wedge (\alpha' - \alpha), \varpi \in \Pi, n \in \mathbb{Z}, x, x' \in \mathbb{R} \}$$

Rappelons d'autre part le résultat suivant : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ étant un espace de probabilité muni d'une suite croissante de σ-algèbre $\mathcal{F}_n$ contenues dans $\mathcal{F}$, A_n étant une suite de parties $\mathcal{F}_n$-mesurables, la suite de v. a. r.

$$P \left\{ \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \mid \mathcal{F}_n \right\}$$

converge p. s. vers l'indicatrice de l'ensemble $\liminf_{(n)} (A_n)$. Appliquant ce résultat, on obtient :

$$\lim_{(n)} \bar{P}_{Z_n}\left\{ \bigcap_{p=0}^{\infty} (Z_p \in A \cap B) \right\} = 1_{\liminf_{(n)}\{Z_n \in A \cap B\}} \qquad \bar{P}_{z_0}\text{-p. s.}$$

donc à cause de (7) :

$$\text{(9)} \qquad \bar{P}_{z_0}\left\{ \lim_{(n)} \bar{P}_{Z_n}\left\{ \bigcap_{p=0}^{\infty} (Z_p \in A \cap B) \right\} = 1 \right\} \geqslant r$$

Appelons D la C-partie associée au point (a, m) et au nombre $\delta = \dfrac{\rho}{4}$. Comme $\pi(D) > 0$, la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ passe $\tilde{P}_{\varpi'_0, 0}$-p.s. une infinité de fois dans D, et (9) montre que pour tout nombre $s > 0$ on peut trouver un point $z_1 = (\varpi'_1, x_1, n_1)$ tel que $\omega'_1 \in D$ et que :

$$\text{(10)} \qquad \bar{P}_{z_1}\left\{ \bigcap_{p=0}^{\infty} (Z_p \in A \cap B) \right\} \geqslant 1 - s$$

Prenons pour s le plus petit des deux nombres $\dfrac{1}{4}\, \theta\pi(D)$ et $\dfrac{1}{4}\, (\theta\pi(D))^2$, choisissons un point z_1 vérifiant (10) et définissons quatre parties mesurables de E :

$$\underset{\sim}{M} = \left\{ (\varpi, x) ; \varpi \in D,\ x \in \frac{\rho}{2}(0),\ (\varpi, x + x_1 + a, n_1 + m) \notin A \cap B \right\}$$

$$\underset{\sim}{N} = \left\{ (\varpi, x) ; \varpi \in D,\ x \in \frac{\rho}{2}(0),\ (\varpi, x + x_1 + 2a, n_1 + 2m) \notin A \cap B \right\}$$

ainsi que $\underset{\sim}{M}'$ et $\underset{\sim}{N}'$ définis comme $\underset{\sim}{M}$ et $\underset{\sim}{N}$ en remplaçant A et B par A′ et B′ ; on définit aussi $M = \{ \varpi ; \exists x, (\varpi, x) \in \underset{\sim}{M} \}$ et des parties analogues pour $\underset{\sim}{M}'$, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{N}'$. Si $(\varpi, x) \in \underset{\sim}{M}'$, on voit facilement en utilisant (8) que $(\varpi, y) \in \underset{\sim}{M}$ dès que

$$y \in \frac{\rho}{2}(0) \cap \rho(x),$$

ou encore que

$$\underset{\sim}{M}' \subset M' \times \frac{\rho}{2}(0) \subset \underset{\sim}{M}.$$

De même on a

$$\underset{\sim}{N}' \subset N' \times \frac{\rho}{2}(0) \subset \underset{\sim}{N}.$$

On peut écrire:

$$s \geqslant \bar{\mathrm{P}}_{z_1}\left\{\bigcup_{p=0}^{\infty}(\mathrm{Z}_p \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right\} \geqslant \bar{\mathrm{P}}_{z_1}\{\mathrm{Z}_m \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$$

$$\geqslant \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi'_1,-a}\{(\varpi_m, \mathrm{S}_m) \in \mathrm{M}\} \geqslant \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi'_1,-a}\left\{\varpi_m \in \mathrm{M}', \mathrm{S}_m \in \frac{\rho}{4}(0)\right\}$$

$$\geqslant \int p^m(\varpi'_1, \varpi)\pi(d\varpi)1_{\mathrm{M}'}(\varpi)\mathrm{F}^m_{\varpi'_1,\varpi}\left(\frac{\rho}{4}(a)\right)$$

$$\geqslant \theta\pi(\mathrm{M}')$$

et de même

$$s \geqslant \bar{\mathrm{P}}_{z_1}\{\mathrm{Z}_{2m} \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\} \geqslant \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi'_1,-2a}\{(\varpi_{2m}, \mathrm{S}_{2m}) \in \underset{\sim}{\mathrm{N}}\}$$

$$\geqslant \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi'_1,-2a}\left\{\varpi_{2m} \in \mathrm{N}', \mathrm{S}_{2m} \in \frac{\rho}{2}(0)\right\}$$

$$\geqslant \tilde{\mathrm{E}}_{\varpi'_1,0}\left\{1_{\mathrm{D}}(\varpi_m)1_{\frac{\rho}{4}(a)}(\mathrm{S}_m)\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi_m,0}\left\{\varpi_m \in \mathrm{N}', \mathrm{S}_m \in \frac{\rho}{4}(a)\right\}\right\}$$

$$\geqslant \int p^m(\varpi'_1, \varpi)\pi(d\varpi)1_{\mathrm{D}}(\varpi)\mathrm{F}^m_{\varpi'_1,\varpi}\left(\frac{\rho}{4}(a)\right)p^m(\varpi, \varpi')\pi(d\varpi')1_{\mathrm{N}'}(\varpi')\mathrm{F}^m_{\varpi,\varpi'}\left(\frac{\rho}{4}(a)\right)$$

$$\geqslant (\theta)^2\pi(\mathrm{N}')\pi(\mathrm{D})$$

on en conclut que $\pi(\mathrm{N}')+\pi(\mathrm{M}') \leqslant \frac{1}{2}\pi(\mathrm{D})$, donc il existe $(\varpi, x) \in \mathrm{D} \times \frac{\rho}{2}(0)$ tel que (ϖ, x) n'appartienne ni à N' ni à M'; pour ce point (ϖ, x) on a:

$$f(\varpi, x + x_1 + a, n_1 + m) \in \mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' \subset \mathrm{B}'$$
$$f(\varpi, x + x_1 + 2a, n_1 + 2m) \in \mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' \subset \mathrm{A}'$$

d'où on déduit $\beta' \leqslant \mathrm{f}(\varpi, x + x_1 + 2a, n_1 + 2m) \leqslant \alpha'$, ce qui est impossible, et le lemme est ainsi démontré.

LEMME 2. — *Sous la condition* A, *soit une famille* $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de mesures de transition positives de* $(\Pi, \mathscr{N})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ *vérifiant pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}$

$$\sup\{\mathrm{Q}_n(\varpi, x + \mathrm{K}); \varpi \in \Pi, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\} = \alpha(\mathrm{K}) < +\infty$$

Si la relation:

$$\underset{\sim}{\mathrm{P}} * \mathrm{Q}_n = \mathrm{Q}_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

est vérifiée, pour tout (a, m) *de* $\sigma(\Sigma)$ *on a* $\mathrm{Q}_n(\varpi, .) = \mathrm{Q}_{n+m}(\varpi, a + .)$.

En particulier si $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, la mesure $\mathrm{Q}_n(\varpi, .)$ est invariante par translation, et il existe une fonction $h(\varpi, n)$ sur $\Pi \times \mathbb{Z}$ telle que

$$\mathrm{Q}_n(\varpi, dx) = h(\varpi, n)\lambda(dx) \tag{12}$$

(11) entraîne que h est harmonique pour la chaîne espace-temps construite à partir de $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$. Inversement (12) et l'harmonicité de h pour la chaîne espace-temps entraînent (11). On obtient ainsi une généralisation à l'opération $*$ d'un lemme de Choquet et Deny [*11*] relatif à l'équation de convolution $F * \mu = \mu$, où F est une probabilité et μ une mesure sur $\mathbb{R}$.

A cause de la récurrence de $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$, la fonction h n'est pas quelconque; elle est une combinaison linéaire des d fonctions $h_i(\varpi, n) = 1_{C_{i-n(\operatorname{mod} d)}}(\varpi)$.

Démonstration. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de support contenu dans l'intervalle $[a, b]$. Posons

$$g(\varpi, x, n) = \int Q_n(\varpi, dy) f(x - y).$$

$$g(\varpi, x, n) \leqslant \| f \| \sup_{\varpi, y, m} \{ Q_m(\varpi, y + K) \} \leqslant \| f \| \alpha([a, b]) < +\infty$$

f est uniformément continue, donc pour tout ε il existe η tel que si $|x - x'| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$; si $\eta \leqslant 1$, on vérifie que le support de $f(x - .) - f(x' - .)$ est contenu dans $x + [-b - 1, -a + 1]$.

$$\begin{aligned} |g(\varpi, x, n) - g(\varpi, x', n)| &\leqslant \int Q_n(\varpi, dy) |f(x - y) - f(x' - y)| \\ &\leqslant \varepsilon\alpha([-b - 1, -a + 1]) \end{aligned}$$

donc la fonction g vérifie les hypothèses de régularité du lemme 1. $P * Q_n = Q_{n+1}$ entraîne $\underset{\sim}{P} * g(., ., n) = g(., ., n+)$; g est harmonique pour la chaîne espace-temps, et la fonction $g(\varpi, ., .)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ admet tout point (a, m) de $\sigma(\Sigma)$ pour période.

Considérons maintenant une suite de fonctions f^m sur $\mathbb{R}$ continues à support compact, convergeant étroitement vers la mesure de Dirac en 0, et notons g^m la fonction sur $\Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ associée à f^m. Si h est une fonction continue à support compact,

$$k_m(\varpi, x) = \int Q_m(\varpi, dy) h(y + x)$$

est continue en x et bornée; on a:

$$\begin{aligned} \int Q_n(\varpi, dx) f^m(y) h(x + y) dy &= \int f^m(y) k_n(\varpi, y) dy \\ &= \int g^m(\varpi, x, n) h(x) dx \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse faite sur les f^m, si $m \to +\infty$ cette quantité tend vers

$k_n(\varpi, 0) = \int Q_n(\varpi, dy)h(y)$. D'autre part la périodicité de $g^m(\varpi, . , .)$ montre que si $(a, m) \in \sigma(\Sigma)$,

$$\int g^m(\varpi, x, n)h(x)dx = \int g^m(\varpi, x, n + p)h(x - a)dx$$

en passant à la limite, il vient :

$$\int Q_n(\varpi, dy)h(y) = \int Q_{n+p}(\varpi, dy)h(y - a)$$

ceci étant vrai pour toute fonction h continue à support compact, on a démontré le lemme.

Démonstration du théorème. — Soit $\underset{\sim}{\mu}$ une probabilité sur $(E, \mathscr{E})$, μ étant la probabilité définie sur $(\Pi, \mathscr{N})$ par $\mu(.) = \underset{\sim}{\mu}(., \mathbb{R})$. Toute fonction f sur $\Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, bornée, harmonique pour la chaîne espace-temps peut être considérée comme la densité d'une famille de transitions Q_n

$$(Q_n(\varpi, dx) = f(\varpi, x, n)\lambda(dx))$$

vérifiant les hypothèses du lemme 2; d'après (12) elle sera de la forme $f(\varpi, x, n) = h(\varpi, n)$, h étant harmonique pour la chaîne espace-temps construite sur $(\varpi_n)_{n \geq 0}$.

Une variable Y est $\mathscr{G}^\infty_{\underset{\sim}{\mu}}$-mesurable s'il existe une fonction f bornée harmonique pour l'espace-temps construit sur $(\varpi_n, S_n)_{n \geq 0}$, telle que

$$Y = \liminf_{(n)} f(\varpi_n, S_n, n), \qquad \tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}\text{-p.s.} ;$$

mais on a également, d'après la forme de f,

$$Y = \liminf_{(n)} h(\varpi_n, n), \qquad \tilde{P}_{\mu,0}\text{-p.s.}$$

et Y est $\mathscr{F}^\infty_\mu$-mesurable. L'inverse étant évidemment vrai, on voit que les σ-algèbres $\mathscr{F}^\infty_\mu$ et $\mathscr{G}^\infty_{\underset{\sim}{\mu}}$ coincïdent.

II. LES CHAINES POSITIVES

II.1. Le processus semi-markovien associé.

La chaîne semi-markovienne $(\varpi_n, X_n)_{n \geq 0}$ est dite *positive* si elle prend ses valeurs dans $\Pi \times [0, \infty[$. On peut alors construire un processus de

Markov à temps continu $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$, à valeurs dans $(E_+, \mathscr{E}_+)$, appelé *processus semi-markovien associé à la chaîne* $(\varpi_n, X_n)_{n \geqslant 0}$:

$$(Z_t, V_t) = (\varpi_n, S_n - t) \qquad \text{si} \qquad S_{n-1} \leqslant t < S_n$$

ce processus est défini sur le même espace $(\Omega, \mathscr{A})$ que la chaîne initiale; ses trajectoires sont continues à droite; on note $(\Pi_t)_{t \geqslant 0}$ son semi-groupe de transition; il existe une famille de probabilités de transition $(\underset{\sim}{H}_t)_{t \geqslant 0}$ de $(\Pi, \mathscr{N})$ dans $(E_+, \mathscr{E}_+)$ telle qu'on ait:

$$\underset{\sim}{\Pi}_t(\varpi, x; d\varpi', dx') = \begin{cases} \delta_\varpi(d\varpi')\delta_{x-t}(dx') & \text{si} \quad x > t \\ \underset{\sim}{H}_{t-x}(\varpi; d\varpi', dx') & \text{si} \quad x \leqslant t \end{cases}$$

Si $\underset{\sim}{\mu}$ est une probabilité sur $(E_+, \mathscr{E}_+)$, la probabilité construite sur $(\Omega, \mathscr{A})$ à partir de $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$ avec la loi initiale $\underset{\sim}{\mu}$ est $\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}$; en particulier si $x > 0$ $(\varpi_0, S_0) = (\varpi, x)$ équivaut à $(Z_0, V_0) = (\varpi, x)$; par contre si $(\varpi_0, S_0) = (\varpi, 0)$, le couple (Z_0, V_0) est aléatoire de loi $\underset{\sim}{H}_0(\varpi; .)$, et les probabilités $\tilde{P}_{\varpi,0}$ et $\tilde{P}_{\underset{\sim}{H}_0(\varpi;.)}$ coïncident sur les parties de Ω mesurables pour la σ-algèbre engendrée par les (Z_t, V_t). On note $\underset{\sim}{U}$ le potentiel de $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$, défini par $(A \in \mathscr{E})$:

$$\underset{\sim}{U}(\varpi; A) = \tilde{E}_{\varpi,0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} 1_A(\varpi_n, S_n)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi; A)$$

et on appelle $\underset{\sim}{G}$ la mesure positive sur $(E_+, \mathscr{E}_+)$ définie par $(A \in \mathscr{E}_+)$:

$$\underset{\sim}{G}(A) = \int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}(\varpi; d\varpi',]x, \infty[)1_A(\varpi', x)dx$$

$\underset{\sim}{G}$ est finie pour toute partie $A \times K$ où $\pi(A) < +\infty$ et où K est un compact de $\mathbb{R}$; on note m sa masse (finie ou infinie).

$\underset{\sim}{\nu}$ étant une mesure positive à support dans $\Pi \times [0, \infty[$, on appelle $\hat{\underset{\sim}{\nu}}(d\varpi, p)$ la mesure sur Π définie par

$$\hat{\underset{\sim}{\nu}}(A, p) = \int \underset{\sim}{\nu}(d\varpi, dx)1_A(\varpi)e^{-px}$$

en remplacant ν par une transition Q de $(\Pi, \mathscr{N})$ dans $(E, \mathscr{E})$ telle que pour tout ϖ le support de $\underset{\sim}{Q}(\varpi; .)$ soit dans $\Pi \times [0, \infty[$, la formule précédente définit une famille de transitions $\hat{\underset{\sim}{Q}}(\varpi; ., p)$ de $(\Pi, \mathscr{N})$ dans lui-même.

De même $\hat{\nu}(p)$ désigne la transformée de Laplace de la mesure ν à support dans $[0, \infty[$, $\hat{f}(p)$ et $\hat{g}(\varpi, p)$ les transformées des fonctions $f(x)$ et $g(\varpi, x)$, mesurables, bornées, nulles pour $x < 0$. On vérifie que:

$$\widehat{\underset{\sim}{\nu} * \underset{\sim}{Q}}(., p) = \int \hat{\underset{\sim}{\nu}}(d\varpi, p)\hat{\underset{\sim}{Q}}(\varpi; ., p)$$

les processus semi-markoviens $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$ ont été introduits par Lévy [*10*] sous une forme beaucoup plus générale; Pyke et Schaufele les ont étudiés en détail lorsque Π est dénombrable, mais les méthodes qu'ils emploient ne peuvent guère être généralisées au cas où Π est quelconque. Nous allons donner un théorème qui généralise un résultat de [*14*].

THÉORÈME 2. — *Sous la condition* A, *si* $m > 0$, *le processus associé est* $\underset{\sim}{G}$*-récurrent au sens de Harris et* $\underset{\sim}{G}$ *est l'unique mesure invariante pour* $(\underset{\sim}{\Pi}_t)_{t \geqslant 0}$.

La condition $m > 0$ sert à éliminer le cas trivial suivant, pour lequel il n'y a pas récurrence: pour π-presque tout ϖ, $\underset{\sim}{P}(\varpi\,; \Pi, .)$ est concentré en 0. Dans ce cas pour π-presque tout ϖ, $S_n = 0$ pour tout n, $\tilde{P}_{\varpi,0}$-p. s.; pour tout ϖ, S_n est constant à partir d'un certain rang, $\tilde{P}_{\varpi,0}$-p. s.

Rappelons que $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$ est $\underset{\sim}{G}$-récurrent si, dès que $\underset{\sim}{G}(A) > 0$, presque toutes les trajectoires passent un temps infini dans A. Montrons d'abord deux lemmes.

LEMME 1. — *Sous la condition* A, *si* $m > 0$ $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$ *est* $\underset{\sim}{G}$*-récurrent.*

Démonstration. — Pour tous $\alpha > 0$, ϖ et ϖ', soit il existe un réel $b^{\alpha}_{\varpi,\varpi'}$ tel que $\{ x\,; x \geqslant 0, F^1_{\varpi,\varpi'}(]x, \infty[) > \alpha \} = [0, b^{\alpha}_{\varpi,\varpi'}[$, soit cet ensemble est vide et on pose $b^{\alpha}_{\varpi,\varpi'} = 0$. Soit A une partie mesurable de E_+ telle que $\underset{\sim}{G}(A) > 0$, et $A_{\varpi} = \{ x\,; (\varpi, x) \in A \}$.

$$\underset{\sim}{G}(A) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \int \pi(d\varpi)P(\varpi, d\varpi') \int_0^{b^{\alpha}_{\omega,\omega'}} F^1_{\varpi,\varpi'}(]x, \infty[) 1_{A_{\omega'}}(x)dx$$

donc il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que:

$$\int \pi(d\varpi)P(\varpi, d\varpi')\lambda(A_{\varpi'} \cap [0, b^{\alpha}_{\varpi,\varpi'}[)$$
$$\geqslant \int \pi(d\varpi)P(\varpi, \varpi') \int_0^{b^{\alpha}_{\omega,\omega'}} F^1_{\varpi,\varpi'}(]x, \infty[) 1_{A_{\omega'}}(x)dx > 0$$

il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que si $H = \{ (\varpi, \varpi')\,; \lambda(A_{\varpi'} \cap [0, b^{\alpha}_{\varpi,\varpi'}[) \geqslant \varepsilon \}$

$$\int_H \pi(d\varpi)P(\varpi, d\varpi') > 0$$

si $(\varpi, \varpi') \in H$, $b^{\alpha}_{\varpi,\varpi'} - \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ et on a:

$$\lambda\left(A_{\varpi'} \cap \left[0, b^{\alpha}_{\varpi,\varpi'} - \frac{\varepsilon}{2}\right[\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

D'autre part on voit facilement que la chaîne $(\chi_n)_{n\geqslant 0} = (\varpi_{n-1}, \varpi_n)_{n\geqslant 0}$ est $\underline{\pi}$-récurrente si $\underline{\pi}(d\varpi, d\varpi') = \pi(d\varpi)\mathrm{P}(\varpi, d\varpi')$; on note $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n, \ldots$ les temps d'entrée successifs de $(\chi_n)_{n\geqslant 0}$ dans H, et $\mathscr{F}_{\mathrm{T}_n}$ les σ-algèbres associées. Soit

$$\Omega_n = \left\{ \omega \in \Omega\,;\, \mathrm{T}_n(\omega) < +\infty,\, \mathrm{X}_{\mathrm{T}_n(\omega)}(\omega) > b^{\alpha}_{\chi_{\mathrm{T}_n}} - \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,x}\{\Omega_n \mid \mathscr{F}_{\mathrm{T}_n}\} = 1_{\mathrm{T}_n<+\infty}\mathrm{F}^1_{\chi_{\mathrm{T}_n}}\left(\left]b^{\alpha}_{\chi_{\mathrm{T}_n}} - \frac{\varepsilon}{2}, \infty\right[\right) \geqslant \alpha \,.\, 1_{\mathrm{T}_n<+\infty}$$

comme $\underline{\pi}(\mathrm{H}) > 0$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,x}\{\Omega_n \mid \mathscr{F}_{\mathrm{T}_n}\} \geqslant \alpha \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\mathrm{T}_n<+\infty} = +\infty$$

le lemme de Borel-Cantelli généralisé montre alors que

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,x}\{\limsup_{(n)} \Omega_n\} = 1\,;$$

mais si $(\varpi_{n-1}, \varpi_n) \in \mathrm{H}$ et si

$$\mathrm{X}_n > b^{\alpha}_{\varpi_{n-1},\varpi_n} - \frac{\varepsilon}{2},$$

(13) montre que V_t reste dans A_{ϖ_n}, et donc $(\mathrm{Z}_t, \mathrm{V}_t)$ dans A, pendant un temps au moins égal à $\frac{\varepsilon}{2}$. Donc si $\omega \in \limsup_{(n)} \Omega_n$,

$$\int_0^{\infty} 1_{\mathrm{A}}(\mathrm{Z}_t(\omega), \mathrm{V}_t(\omega))dt = +\infty$$

d'où le résultat.

Dans la suite, si f est une fonction sur $\mathbb{R}$ nulle sur $]-\infty, 0[$, mesurable et bornée, on pose :

$$(14) \qquad \begin{cases} q(\varpi, t) = 1_{t\geqslant 0} \displaystyle\int \underline{\mathrm{P}}(\varpi\,;\, d\varpi', dx) f(\varpi', x-t) 1_{x>t} \\ r(\varpi, t) = \underline{\mathrm{H}}_t f(\varpi) 1_{t\geqslant 0} \end{cases}$$

q et r sont positives et bornées. En conditionnant par rapport à la variable X_1, on vérifie aisément qu'elles satisfont à l'équation dite « *de renouvellement* » :

$$(15) \qquad r = q + \underline{\mathrm{P}} * r$$

LEMME 2. — *Sous la condition* A *et si* $m > 0$, q *et* r *étant des fonctions sur* E, *mesurables bornées et nulles pour* $t < 0$, *vérifiant* (15), *on a* $r = \underset{\sim}{U} * q$.

Démonstration. — (15) permet d'écrire

$$r = \sum_{p=0}^{n-1} \underset{\sim}{P}^{p*} * q + \underset{\sim}{P}^{n*} * r$$

le premier terme tend en croissant vers $r' = \underset{\sim}{U} * q$, qui est une fonction bornée vérifiant (15). Comme $r - r' \geqslant 0$, pour montrer que $r = r'$ il suffit de vérifier que l'équation $\underset{\sim}{P} * f = f$ admet 0 pour seule solution bornée positive nulle pour $t < 0$.

Soit f une telle solution, $M_x = \sup \{ f(\varpi, y) ; \varpi \in \Pi, y \leqslant x \}$, $M = \sup (f)$. Comme $m > 0$, il existe deux nombres positifs α et a tels que si $A = \{ \varpi ; \underset{\sim}{P}(\varpi ; \Pi \times]a, \infty[) \geqslant \alpha \}$, $\pi(A) > 0$. Etant donné un point ϖ, il existe n et $\rho > 0$ tels que $P^n(\varpi, A) \geqslant \rho$. Comme $P^{(n+1)*} * f = f$, on a :

$$f(\varpi, x) = \int \underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi ; d\varpi', dy)\underset{\sim}{P}(\varpi' ; d\varpi'', dz) f(\varpi'', x - y - z)$$
$$[1_A(\varpi')1_{]a,\infty[}(z) + [1 - 1_A(\varpi')1_{]a,\infty[}(z)]]$$

$$f(\varpi, x) \leqslant \rho\alpha M_{x-a} + (1 - \rho\alpha)M_x \tag{16}$$

M_x est une fonction non décroissante de x ; si elle n'est pas constante, on peut trouver un point x tel que $M_{x-a} < M_x$, et une suite (ϖ'_n, x_n) telle que $x - a < x_n \leqslant x$ et $\lim_{(n)} f(\varpi'_n, x_n) = M_x$. (16) entraîne :

$$f(\varpi'_n, x_n) \leqslant M_{x-a}\rho\alpha + M_x(1 - \rho\alpha) < M_x$$

si $M > 0$ il y a une impossibilité, sauf si M_x est identiquement égal à M. Mais si $x < a$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(\varpi, x) &= \int \underset{\sim}{P}^{n*}(\omega ; d\varpi', dy)\underset{\sim}{P}(\varpi' ; d\varpi'', dz) f(\varpi'', x-y-z)[1_{A^c}(\varpi') + 1_A(\varpi')] \\ &\leqslant M(1-\rho) + M\rho \sup \{ \underset{\sim}{P}(\varpi' ; \Pi \times [0, a]) ; \varpi' \in A \} \\ &\leqslant M(1-\rho) + M\rho(1-\alpha) \end{aligned}$$

et donc $M_x \leqslant M(1 - \rho) + M\rho(1 - \alpha)$; il y a encore impossibilité, à moins que $M = 0$, ce qui montre le lemme.

Démonstration du théorème. — Soit $(\underset{\sim}{V}^p)_{p>0}$ la résolvante de $(Z_t, V_t)_{t\geqslant 0}$. On va montrer que $\underset{\sim}{G}$ est surharmonique pour $\underset{\sim}{V}^1$; soit f une fonction positive bornée mesurable sur E_+, telle que $\underset{\sim}{G}(f) < +\infty$, q et r les fonctions associées à f par (14).

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{V}^p f(\varpi, x) &= \int_0^\infty e^{-pt} \underset{\sim}{\Pi}_t(\varpi, x\,; d\varpi', dx') f(\varpi', x') dt \\ &= \int_0^x e^{-pt} f(\varpi, x - t) dt + e^{-px} \hat{r}(\varpi, p) \end{aligned}$$

$\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{V}^p(f)$ peut se mettre sous la forme d'une somme $\alpha + \beta$, correspondant à l'intégration des deux termes précédents par $\underset{\sim}{G}$.

$$\begin{aligned} \alpha &= \int \pi(d\varpi) \underset{\sim}{P}(\varpi\,; d\varpi', dx) f(\varpi', t) e^{pt - py} 1_{y<x} 1_{t<y} dt\, dy \\ &= \int \pi(d\varpi) \underset{\sim}{P}(\varpi\,; d\varpi', dx) f(\varpi', t) e^{pt} \frac{1}{p} [e^{-pt} - e^{-px}] 1_{x>t} dt \\ &= \frac{1}{p} \underset{\sim}{G}(f) - \frac{1}{p} \int \pi(d\varpi) \underset{\sim}{P}(\varpi\,; d\varpi', dx) f(\varpi', x - t) e^{-pt} 1_{x>t} dt \end{aligned}$$

ceci ayant un sens car $\underset{\sim}{G}(f) < +\infty$; comme on a

$$\pi \hat{q}(p) = \int \pi(d\varpi) \hat{q}(\varpi, p) = \int \pi(d\varpi) 1_{x>t} e^{-pt} dt \underset{\sim}{P}(\varpi\,; d\varpi', dx) f(\varpi', x - t)$$

il vient

$$\alpha = [\underset{\sim}{G}(f) - \pi \hat{q}(p)] \frac{1}{p}.$$

D'autre part soit g une fonction sur Π telle que $\pi(g) < +\infty$; on a :

$$\hat{\underset{\sim}{G}}(g, p) = \frac{1}{p} [\pi(g) - \int \pi(d\varpi) \hat{\underset{\sim}{P}}(\varpi\,; d\varpi', p) g(\varpi')]$$

donc

$$\int \pi(d\varpi) \hat{\underset{\sim}{P}}(\varpi\,; d\varpi', p) g(\varpi') < +\infty,$$

et une récurrence montre que

$$\widehat{\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{P}^{n*}}(g, p) = \frac{1}{p} \int \pi(d\varpi) [\widehat{\underset{\sim}{P}^{n*}}(\varpi\,; d\varpi', p) - \widehat{\underset{\sim}{P}^{(n+1)*}}(\varpi\,; d\varpi', p)] g(\varpi')$$

$$\widehat{\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}}(g, p) = \frac{1}{p} \left[\pi(g) - \lim_{(n)} \int \pi(d\varpi) \widehat{P^{n*}}(\varpi\,; d\varpi', p) g(\varpi') \right] \tag{17}$$

Le lemme 2 et le fait que, à cause de la valeur de α, $\pi\hat{q}(p) < +\infty$, permettent de calculer β :

$$\beta = \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)e^{-px}\hat{\underset{\sim}{U}}(\varpi\,;\, d\varpi', p)\hat{q}(\varpi', p) = \int \widehat{\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}}(d\varpi, p)\hat{q}(\varpi, p)$$

$$(18) \qquad \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{V}^p f = \frac{1}{p}\left[\underset{\sim}{G}(f) - \lim_{(n)} \int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi\,;\, d\varpi', p)\hat{q}(\varpi', p)\right]$$

On en déduit que $\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{V}^1(f) \leqslant \underset{\sim}{G}(f)$; comme cette inégalité est également vraie si $\underset{\sim}{G}(f) = +\infty$, $\underset{\sim}{G}$ est surharmonique pour $\underset{\sim}{V}^1$. Mais compte tenu du lemme 1 et de [3], $\underset{\sim}{G}$ est l'unique mesure invariante pour le processus $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$.

II.2. Le potentiel.

Le but de ce paragraphe est de déterminer le comportement du potentiel $\underset{\sim}{U}$, mais auparavant nous allons indiquer une conséquence du théorème précédent.

PROPOSITION 2. — *Si $m > 0$, $\underset{\sim}{G}$ est l'unique mesure positive sur* $(E_+, \mathscr{E}_+)$ *telle que*

$$(19) \qquad \underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U} = \pi \otimes \lambda_+$$

Démonstration. — Soit $\Pi_0 = \{\varpi\,;\, \underset{\sim}{P}(\varpi\,;\, \Pi \times]0, \infty[) > 0\}$; on va d'abord montrer qu'on a (19) sur $\Pi_0 \times \mathbb{R}_+$. Soient a un nombre positif et A_n une suite de parties de π-mesure finie croissant vers Π. Posons $f_n(\varpi, x) = 1_{A_n}(\varpi)1_{]0,a]}(x)$ et soit $q_n(\varpi, x) = 1_{x \geqslant 0}\underset{\sim}{P}(\varpi\,;\, A_n \times]x, x + a])$ la fonction associée à f_n par (14). Si

$$B_n = \left\{\varpi\,;\, \varpi \in A_n, \hat{q}_n(\varpi, p) \geqslant \frac{1}{n}\right\},$$

il est clair que la suite B_n croît vers Π_0 (pour un p fixé) ; pour tout n et toute partie C de Π_0 telle que $\pi(C) < +\infty$, on a :

$$(20) \qquad \frac{1}{n}\int \pi(d\varpi)\widehat{\underset{\sim}{P}^{q*}}(\varpi\,;\, B_n \cap C, p) \leqslant \int \pi(d\varpi)\widehat{\underset{\sim}{P}^{q*}}(\varpi\,;\, d\varpi', p)\hat{q}_n(\varpi', p)$$

mais $G(f_n) < +\infty$ et d'après la proposition précédente $\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{V}^p = \dfrac{1}{p}\underset{\sim}{G}$, donc (18) montre que le deuxième membre de (20), donc aussi le premier, tendent vers zéro lorsque $q \to +\infty$. (17) entraîne :

$$\widehat{\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}}(B_n \cap C, p) = \frac{1}{p}\pi(B_n \cap C)$$

pour tout n et toute partie C de Π_0, ce qui montre que $\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}$ et $\pi \otimes \lambda_+$ coïncident sur $\Pi_0 \times \mathbb{R}_+$.

Montrons qu'il en est de même sur $\Pi_0^c \times \mathbb{R}_+$; définissons la probabilité tabou $(A \in \mathscr{E})$:

$$_{\Pi_0}P^n(\varpi, A) = \tilde{P}_{\varpi,0}\{(\varpi_n, S_n) \in A, \varpi_q \notin \Pi_0, \quad \text{pour} \quad 0 < q < n\}$$

Si A est une partie de π-mesure finie de Π_0^c, $_{\Pi_0}\widehat{P^n}(\varpi\,; A, p)$ tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$, et le théorème de Lebesgue montre que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier N tel que

$$\int \pi(d\varpi)_{\Pi_0}\widehat{P^N}(\varpi\,; A, p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned}
&\int \pi(d\varpi)\widehat{\underset{\sim}{P}^{(q+N)*}}(\varpi\,; A, p) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \int \pi(d\varpi)\widehat{\underset{\sim}{P}^{q*}}(\varpi\,; d\varpi', p)_{\Pi_0}\widehat{P^n}(\varpi'\,; d\varpi'', p)1_{\Pi_0}(\varpi'')\widehat{\underset{\sim}{P}^{(N-n)*}}(\varpi''\,; A, p) \\
&+ \int \pi(d\varpi)\widehat{\underset{\sim}{P}^{q*}}(\varpi\,; d\varpi', p)_{\Pi_0}\widehat{P^N}(\varpi'\,; A, p) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}^{(q+n)*}(\varpi\,; d\varpi', p)\underset{\sim}{P}^{(N-n)*}(\varpi'\,; A, p)1_{\Pi_0}(\varpi') + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

La fonction $g(\varpi) = 1_{\Pi_0}(\varpi)\widehat{P^{(N-n)*}}(\varpi\,; A, p)$ est bornée, nulle en dehors de Π_0 et $\pi(g) < +\infty$; la première partie de la démonstration montre que

$$\widehat{\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}}(g, p) = \frac{1}{p}\pi(g),$$

et (17) entraîne que le premier terme du deuxième membre de l'expression précédente tend vers zéro lorsque $q \to +\infty$; si $N + q \to +\infty$, le premier membre tend donc vers zéro, et (17) montre alors que

$$\widehat{\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}}(A, p) = \frac{1}{p}\pi(A),$$

et on a bien (19).

Quant à l'unicité, il suffit d'appliquer le principe d'unicité des masses à la mesure $\hat{\underset{\sim}{G}}(.,p)$ et au noyau $\hat{\underset{\sim}{P}}(.;.,p)$ de potentiel $\hat{\underset{\sim}{U}}(.;.,p)$. On voit que $\hat{\underset{\sim}{G}}(.,p)$ est l'unique mesure telle que

$$\int \hat{G}(d\varpi, p)\hat{\underset{\sim}{U}}(\varpi ; d\varpi', p) = \frac{1}{p}\pi(d\varpi'),$$

et l'unicité de la transformée de Laplace montre que $\underset{\sim}{G}$ est l'unique mesure vérifiant (19).

Définissons les mesures positives $\underset{\sim}{G}^n$ sur $(E_+, \mathscr{E}_+)$:

$$\underset{\sim}{G}^n(A) = \int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}(\varpi ; d\varpi_1, dx_1) \dots \underset{\sim}{P}(\varpi_{n-1} ; d\varpi_n, dx_n)dy1_A(\varpi_n, y)1_{y>x_1+\dots x_n}$$

$\underset{\sim}{G}^1$ et $\underset{\sim}{G}$ sont identiques et on vérifie facilement que la masse de $\underset{\sim}{G}^n$ est nm

Corollaire. — *Si $m > 0$, $\underset{\sim}{G}^n$ est l'unique mesure positive sur* $(E_+, \mathscr{E}_+)$ *telle que pour tout* $A \in \mathscr{E}_+$ *on ait :*

$$\underset{\sim}{G}^n * \underset{\sim}{U}(A) = \sum_{q=0}^{n-1} \int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}^{q*}(\varpi ; d\varpi', dx)1_A(\varpi', x + y)1_{y>0}dy$$

Démonstration. — Une formule analogue à (17) montre que si $A \in \mathscr{N}$ et si $\pi(A) < +\infty$, on a :

$$\widehat{\underset{\sim}{G}^n * \underset{\sim}{U}}(A, P) = \sum_{q=0}^{n-1}\left[\int \pi(d\varpi)\widehat{\underset{\sim}{P}^{q*}}(\varpi ; A, p) - \lim_{(r)} \int \pi(d\varpi)\widehat{\underset{\sim}{P}^{(q+r)*}}(\varpi ; A, p)\right]\frac{1}{p}$$

la démonstration précédente montre que le deuxième terme du second membre est nul, d'où le résultat.

Proposition 3. — *Si $m > 0$, $\pi(A) > 0$ équivaut à l'existence d'un entier n tel que* $\underset{\sim}{G}^n(A \times \mathbb{R}_+) > 0$.

Démonstration. — Soit

$$m_{\varpi,\varpi'} = \int xF_{\varpi,\varpi'}(dx) ; \qquad m = \int \underset{\sim}{\pi}(d\varpi, d\varpi')m_{\varpi,\varpi'} > 0$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $H = \{(\varpi, \varpi') ; m_{\varpi,\varpi'} \geqslant \varepsilon\}$, $\underset{\sim}{\pi}(H) > 0$.

Il est évident que les mesures $\underset{\sim}{G}^n$ sont absolument continues par rapport à $\pi \otimes \lambda_+$; réciproquement supposons que $\pi(A) > 0$.

$$1 \leqslant \tilde{P}_{\varpi,0}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\varpi_n \in A)\right\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P^n(\varpi, A)$$

$$0 < \underset{\sim}{\pi}(H) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_H \pi(d\varpi)P(\varpi, d\varpi')P^n(\varpi', A)$$

il existe donc un entier n et un nombre positif a tels que si

$$B = \{\varpi ; P^n(\varpi, A) \geqslant a\}, \qquad \underset{\sim}{\pi}(H \cap (\Pi \times B)) > 0,$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{G}^{n+1}(A \times \mathbb{R}) &\geqslant \int_H \pi(d\varpi)P(\varpi, d\varpi')P^n(\varpi', A)m_{\varpi,\varpi'}\\ &\geqslant \varepsilon a \underset{\sim}{\pi}(H) > 0\end{aligned}$$

PROPOSITION 4. — *Etant donnée une chaîne semi-markovienne positive vérifiant la condition* A *et telle que* $m > 0$, *si* K *est un compact de* $\mathbb{R}$ *et* A *une partie de* Π *telle que* $\pi(A) < +\infty$, $\underset{\sim}{U}(.\,; A \times K)$ *est* π-p.s. *finie.*

Si $m = 0$, la remarque suivant l'énoncé du théorème 2 montre que dès que $\pi(A) > 0$, $\underset{\sim}{U}(.\,; A \times \{0\}) = +\infty$, π-p.s. ; pour tout ϖ il existe un nombre a tel que $\underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times [0, a]) = +\infty$, à condition que $\pi(A) > 0$.

Démonstration. — Etant donnée une partie A de π-mesure finie, soit a et $B = \{\varpi ; \underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times [0, a]) = +\infty\}$; si $\pi(B) > 0$ la proposition précédente montre qu'il existe un entier n et un nombre positif b tels que $\underset{\sim}{G}^n(B \times [0, b]) > 0$,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{G}^n * \underset{\sim}{U}(A \times [0, a + b]) &= \int \underset{\sim}{G}^n(d\varpi, dx)\underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times [0, a + b - x])\\ &= \int \underset{\sim}{G}^n(d\varpi, dx)\underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times [0, a])1_B(\varpi)1_{[0,b]}(x) = +\infty\end{aligned}$$

mais d'après le corollaire de la proposition 2, $\underset{\sim}{G}^n * \underset{\sim}{U}$ est fini sur toute partie $A \times [0, c]$; il y a contradiction, et il faut que $\pi(B) = 0$.

Pour la suite nous aurons besoin non seulement de savoir que le potentiel est fini, mais également de majorer $\underset{\sim}{U}(.\,; A \times K)$. On pose la :

Définition. — On dit qu'une partie mesurable A de Π est *de potentiel borné* s'il existe un nombre ε tel que $\sup\{\underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times [0, \varepsilon]) ; \varpi \in A\} < +\infty$.

Le résultat suivant est valable pour toute chaîne semi-markovienne, positive ou non, vérifiant ou ne vérifiant pas la condition A. Il entraîne en particulier que si A est de potentiel borné, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ on a $\sup \{ \underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times K) ; \varpi \in \Pi \} < + \infty$. On note $B \ominus B$ l'ensemble des points $x - y$ tels que x et y appartiennent à B.

PROPOSITION 5. — *Pour tout borélien* B *de* $\mathbb{R}$ *et toute partie mesurable* A *de* Π, *on a*

$$(21) \qquad \underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times (x + B)) \leqslant \sup \{ \underset{\sim}{U}(\varpi' ; A \times (B \ominus B)) ; \varpi' \in A \}$$

Démonstration. — On a en effet, si $T = \inf \{ n \geqslant 0 ; (\varpi_n, S_n) \in A \times B \}$,

$$\underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times B) = \tilde{E}_{\varpi,0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} 1_{A \times B}(\varpi_{T+n}, S_{T+n}) \right\}$$

$$= \tilde{E}_{\varpi,0} \left\{ \tilde{E}_{\varpi_T, S_T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} 1_{A \times B}(\varpi_n, S_n) \right\} \right\}$$

mais si S_T et S_n appartiennent à B, alors $S_n - S_T \in B \ominus B$, ce qui donne:

$$\underset{\sim}{U}(\varpi ; A \times B) \leqslant \tilde{E}_{\varpi,0} \{ \underset{\sim}{U}(\varpi_T ; A \times (B \ominus B)) \}$$

on conclut en remarquant que $(x + B) \ominus (x + B) = B \ominus B$.

COROLLAIRE. — *Etant donnée une chaîne positive vérifiant la condition* A *et telle que* $m > 0$, *il existe une suite* Π_n *de parties de* Π, *de potentiel borné, croissant* π-p.s. *vers* Π.

Démonstration. — Soit A_n une suite de parties de Π de π-mesure finie, croissant vers Π ; d'après la proposition 4, pour tout n on peut trouver un nombre M_n tel que si $B_n = \{ \varpi \in A_n, \underset{\sim}{U}(\varpi ; A_n \times [0, 1]) \leqslant M_n \}$, on ait $\pi(A_n - B_n) \leqslant \frac{1}{n}$. (21) montre que:

$$U(\varpi ; B_n \times [0, 1]) \leqslant \sup \{ U(\varpi' ; A_n \times [0, 1]) ; \varpi' \in B_n \} \leqslant M_n$$

donc B_n est de potentiel borné. $\Pi_n = \bigcup_{p=1}^{n} B_p$ est aussi de potentiel borné, et la suite Π_n croît π-p.s. vers Π.

Remarquons que s'il existe deux nombres positifs α et β tels que pour tout ϖ, $\underset{\sim}{P}(\varpi ; \Pi \times [\alpha, \infty[) \geqslant \beta$, l'ensemble Π lui-même est de potentiel borné (en effet si $F(dx) = (1 - \beta)\delta_0(dx) + \beta\delta_\alpha(dx)$, le potentiel $\underset{\sim}{U}(. ; \Pi \times [0, a])$ est inférieur à $V([0, a])$, V étant le potentiel $\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}$).

II.3. Théorèmes quotient.

Nous nous appuyerons dans ce paragraphe sur le résultat suivant [2]: si A_t est une fonctionnelle additive continue à droite du processus $(Z_t, V_t)_{t \geq 0}$, on pose:

$$\nu_A = \tilde{E}_{\underset{\sim}{G}}\{A_1\} = p\tilde{E}_{\underset{\sim}{G}}\left\{\int_0^\infty e^{-pt}dA_t\right\}$$

A_t et B_t étant deux fonctionnelles additives telles que $\nu_A < +\infty, 0 < \nu_B < +\infty$, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\tilde{E}_{\varpi,x}\{A_t\}}{\tilde{E}_{\varpi,x}\{B_t\}} = \frac{\nu_A}{\nu_B} \qquad \underset{\sim}{G}\text{-p.s.}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{A_t}{B_t} = \frac{\nu_A}{\nu_B} \qquad \tilde{P}_{\varpi,x}\text{-p.s.},$$

pour tout $(\varpi, x) \in E_+$.

Proposition 6. — *Sous la condition* A *et si* $m > 0$, A *et* B *étant deux parties de* Π *telles que* $\pi(A) < +\infty$, $0 < \pi(B) < +\infty$, *on a:*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\underset{\sim}{U}(\varpi; A \times]0, t])}{\underset{\sim}{U}(\varpi; B \times]0, t])} = \frac{\pi(A)}{\pi(B)} \qquad \underset{\sim}{G}(., \mathbb{R}_+)\text{-p.s.}$$

Démonstration. — Considérons la fonctionnelle additive continue à droite A_t, qui représente le nombre de sauts du processus $(Z_t, V_t)_{t\geq 0}$ dans $A \times \mathbb{R}_+$ au cours de l'intervalle $]0, t]$. On a:

$$\tilde{E}_{\varpi,x}\{A_t\} = \underset{\sim}{U}(\varpi; A \times]0, t - x])$$

$$\nu_A = \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)d\tilde{E}_{\varpi,x}\{A_t\}\,e^{-t} = \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)\underset{\sim}{U}(\varpi; A, dy)e^{-x-y} = \pi(A)$$

d'après (19); comme

$$\frac{\underset{\sim}{U}(\varpi; A \times]0, t])}{\underset{\sim}{U}(\varpi; B \times]0, t])} \quad \text{et} \quad \frac{\underset{\sim}{U}(\varpi; A \times]0, t - x])}{\underset{\sim}{U}(\varpi; A \times]0, t - x])}$$

ont même limite lorsque $t \to +\infty$, il suffit d'appliquer la remarque précédant l'énoncé.

Il est souvent utile dans les applications de connaître le comportement de la mesure suivante, définie par $(A \in \mathscr{E}_+)$:

$$\underset{\sim}{V}(\varpi; A) = \tilde{E}_{\varpi,0}\left\{\int 1_A(Z_s, s)ds\right\}$$

en particulier $\underset{\sim}{V}(\varpi ; A \times]0, t])$ est l'espérance du temps passé par Z_s dans la partie A de Π entre les instants 0 et t.

PROPOSITION 7. — *Sous la condition* A *et si* $m > 0$, A *et* B *étant deux parties de* Π *telles que* $\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+) < +\infty$, $0 < \underset{\sim}{G}(B \times \mathbb{R}_+) < +\infty$, *on a :*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\underset{\sim}{V}(\varpi ; A \times]0, t])}{\underset{\sim}{V}(\varpi ; B \times]0, t])} = \frac{\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)}{\underset{\sim}{G}(B \times \mathbb{R}_+)} \qquad \underset{\sim}{G}(., \mathbb{R}_+)\text{-p.s.}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\int_0^t 1_A(Z_s)ds}{\int_0^t 1_A(Z_s)ds} = \frac{\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)}{\underset{\sim}{G}(B \times \mathbb{R}_+)} \qquad \tilde{P}_{\varpi,x}\text{-p.s.,}$$

pour tout (ϖ, x) *de* E_+.

Démonstration. — On considère les fonctionnelles additives continues

$$A'_t = \int_0^t 1_A(Z_s)ds \qquad \text{et} \qquad A^a_t = \int_0^t 1_A(Z_s)1_{]0,a]}(V_s)ds.$$

Posons $f(\varpi, x) = 1_A(\varpi)1_{]0,a]}(x)$; on note q et r les fonctions associées à f par (14).

$$\tilde{E}_{\varpi,x}\{A^a_t\} = \int_0^{x \wedge t} 1_A(\varpi)1_{]0,a]}(x-s)ds + \int_{x \wedge t}^t \underset{\sim}{H}_{s-x}(\varpi ; A \times]0, a])ds$$

$$\begin{aligned}\tilde{\underset{\sim}{E}}_G\{A^a_1\} &= \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)e^{-t}d\tilde{E}_{\varpi,x}\{A^a_t\} \\ &= \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)[1_A(\varpi)(e^{-(x-a)^+} - e^{-x}) + e^{-x}\hat{r}(\varpi, 1)] \\ &= \int \pi(d\varpi)\hat{q}(\varpi, 1) + \int_0^a \underset{\sim}{G}(A, dx)(1-e^{-x}) + \int_a^\infty \underset{\sim}{G}(A, dx)(e^{a-x} - e^{-x})\end{aligned}$$

d'après le lemme 2 du paragraphe II-1 et (19). Un calcul montre que :

$$\tilde{E}_{\underset{\sim}{G}}\{A^a_1\} = \int \pi(d\varpi)\left[a\underset{\sim}{P}(\varpi ; A \times]a, \infty[) + \int_0^a y\underset{\sim}{P}(\varpi ; A, dy)\right]$$

si $a \to +\infty$, $A^a_t \to A'_t$, et

$$\lim \int \pi(d\varpi) \int_0^a y\underset{\sim}{P}(\varpi ; A, dy) = \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)$$

$$0 = \lim_{a \to +\infty} \int \pi(d\varpi) \int_a^\infty y\underset{\sim}{P}(\varpi ; A, dy) \geqslant \lim_{a \to +\infty} \int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}(\varpi ; A \times]a, \infty[)a$$

ce qui montre que $\nu_{A'} = \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)$. Le résultat découle de la remarque faite au début du paragraphe et de l'égalité suivante, valable pour $x < t$:

$$\tilde{E}_{\varpi,x}\{A'_t\} = x 1_A(\varpi) + \underset{\sim}{V}(\varpi\,;\, A \times]0, t - x])$$

II.4. Le théorème de renouvellement.

On va d'abord montrer qu'il y a convergence lorsque $t \to +\infty$ de $\underset{\sim}{\Pi}_t(\varpi, x\,;\, A)$ vers $\underset{\sim}{G}(A)$; pour cela on ne peut pas appliquer tels quels les résultats de [5], car le processus $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$ n'est pas en général « régulier » ou « apériodique » au sens de [5] (sauf si pour un ensemble de points ϖ de π-mesure non nulle, $\underset{\sim}{P}(\varpi\,;\,.)$ a une partie absolument continue par rapport à $\pi \otimes \lambda_+$ non nulle).

Remarquons en premier lieu que $\underset{\sim}{H}_0$ peut être considérée comme la probabilité de transition d'une chaîne semi-markovienne $(\varpi'_n, X'_n)_{n \geqslant 0}$ construite de la manière suivante:

$$T_0 = 0, \qquad T_n = \inf\{p\,;\, p > T_{n-1}, X_p > 0\}$$
$$(\varpi'_n, S'_n) = (\varpi_{T_n}, S_{T_n}) \qquad \text{et} \qquad X'_n = S'_n - S'_{n-1}$$

le processus semi-markovien associé à cette chaîne est également $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$; inversement la chaîne $(\varpi'_n, X'_n)_{n \geqslant 0}$ est la seule qu'on puisse associer au processus $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$ et telle que S'_n soit strictement croissant avec n. Si $\underset{\sim}{Q}(\varpi\,;\, d\varpi', dx) = \underset{\sim}{P}(\varpi\,;\, d\varpi', dx) 1_{x>0}$ et $V(\varpi, d\varpi') = \underset{\sim}{P}(\varpi\,;\, d\varpi', \{0\})$, on a:

$$\underset{\sim}{H}_0 = \underset{\sim}{Q} + V\underset{\sim}{H}_0 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} V^n \underset{\sim}{Q} \tag{22}$$

PROPOSITION 8. — *Sous la condition* A *et si* $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, *pour toute probabilité* $\underset{\sim}{\mu}$ *sur* $(E_+, \mathscr{E}_+)$ *la* $\underset{\sim}{\tilde{P}}_\mu$-*σ-algèbre asymptotique pour le processus associé* $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$ *est triviale.*

On peut utiliser alors un résultat de [5], selon lequel si m est fini, et si f est une fonction mesurable et bornée sur E_+, $\underset{\sim}{\Pi}_t f$ converge vers $\frac{1}{m} G(f)$ lorsque $t \to +\infty$; quand m est infini, si de plus f est $\underset{\sim}{G}$-intégrable, cette limite est nulle.

LEMME. — *Toute fonction bornée harmonique pour la chaîne de Markov* $(\varpi'_n, S'_n)_{n \geqslant 0}$ *est constante.*

Démonstration. — On va d'abord chercher la forme du support Σ' de la chaîne $(\varpi'_n, X'_n)_{n \geqslant 0}$. Soit $(a, m) \in \Sigma$, $a > 0$; il existe une suite C_δ, décroissant avec δ, de parties de Π telles que si $g^\delta_m(\varpi, .)$ est la densité de $\underset{\sim}{P}^{m*}(\varpi ; ., \delta(a))$ par rapport à π,

$$\inf \{ g^\delta_m(\varpi, \varpi') ; \varpi, \varpi' \in C_\delta \} > 0$$

Par définition de $\underset{\sim}{Q}$ et de V on a $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{Q} + V \otimes \delta_0$; $\underset{\sim}{P}^{m*}$ est égal à une somme finie de termes de la forme $(V^{n_1}\underset{\sim}{Q}^{m_1*}) * \ldots * (V^{n_p}\underset{\sim}{Q}^{m_p*})$, avec $n_1 + m_1 + \ldots + n_p + m_p = m$. Soit $g^\delta_{n_1,m_1,\ldots,n_p,m_p}(\varpi, .)$ la densité (positive ou nulle) par rapport à π de :

$$(V^{n_1}\underset{\sim}{Q}^{m_1*}) * \ldots * (V^{n_p}\underset{\sim}{Q}^{m_p*})(\varpi ; ., \delta(a))$$

g^δ_m est la somme des densités précédentes, chacune d'elles étant une fonction décroissante de δ. Il existe donc une famille $(n_1, m_1, \ldots, n_p, m_p)$, et pour tout $\delta > 0$ une partie C'_δ de Π, telle que :

$$\inf \{ g^\delta_{n_1,m_1,\ldots,n_p,m_p}(\varpi, \varpi') ; \varpi, \varpi' \in C'_\delta \} > 0 \tag{23}$$

soit $m' = m_1 + \ldots + m_p$; si $\delta < a$, on a $m' > 0$ et pour tout A de $\mathscr{E}_+$, $\underset{\sim}{H}^{m*}_0(A)$ est supérieur à $(V^{n_1}\underset{\sim}{Q}^{m_1*}) * \ldots * (V^{n_p}\underset{\sim}{Q}^{m_p*})(A)$ d'après (22) ; (23) montre alors que (a, m') appartient à Σ'.

Soit g une fonction bornée harmonique pour la chaîne $(\varpi'_n, S'_n)_{n \geqslant 0}$; on peut la considérer comme la densité d'une mesure de transition Q de $(\Pi, \mathcal{N})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ $(Q(\varpi, dx) = g(\varpi, x)\lambda(dx))$, qui doit vérifier $\underset{\sim}{H}_0 * Q = Q$. Pour tout point (a, m) de Σ il existe un entier m' tel que (a, m') appartienne à Σ' ; le lemme 2 du paragraphe I-3 montre alors que $Q(\varpi ; .) = Q(\varpi, a + .)$ pour tout ϖ. Comme $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, les mesures $Q(\varpi, .)$ sont invariantes par translation, et il existe une fonction h sur telle que $g(\varpi, x) = h(\varpi)$.

Mais cette fonction h est harmonique pour la chaîne $(\varpi'_n)_{n \geqslant 0}$, qui elle-même est récurrente par rapport à la restriction de π à

$$\{ \varpi ; \pi \{ \varpi' ; F^1_{\varpi',\varpi}(]0, \infty[) > 0 \} > 0 \}.$$

h doit donc être constante, et le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition. — D'après un résultat de [9] qu'on étend facilement aux processus à temps continu, il suffit de prouver que toute fonction bornée, harmonique pour le processus espace-temps construit à partir de $(Z_t, V_t)_{t \geqslant 0}$, est constante. Une telle fonction f sur $E_+ \times \mathbb{R}$ vérifie pour tous $\varpi \in \Pi$, $t \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $x > 0$:

$$f(\varpi, x, t) = \int \underset{\sim}{\Pi}_s(\varpi, x ; d\varpi', dx') f(\varpi', x', x + t)$$

en particulier si $s = x$, et compte tenu de la forme de $\underset{\sim}{\Pi}_s$, on a :

$$f(\varpi, x, t) = \int \underset{\sim}{H}_0(\varpi\,; d\varpi', dx') f(\varpi', x', t + x)$$

Il existe donc une fonction g telle que $f(\varpi, x, t) = g(\varpi, x + t)$; en appliquant $\underset{\sim}{H}_0$ à l'équation précédente, on trouve que $\check{\underset{\sim}{H}}_0 * g = g$, si $\check{\underset{\sim}{H}}_0$ est la mesure « symétrique » de $\underset{\sim}{H}_0$:

$$\check{\underset{\sim}{H}}_0(\varpi\,; A) = \int \underset{\sim}{H}_0(\varpi\,; d\varpi', dx) 1_A(\varpi', -x).$$

Le lemme montre que g est une constante ; par conséquent f est constante et on a prouvé la proposition.

THÉORÈME 3 *(Renouvellement). — Étant donnée une chaîne semi-markovienne positive vérifiant la condition* A *et telle que* $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, *pour toute partie* A *de* Π *de potentiel borné et tout borélien borné* B *de* $\mathbb{R}_+$, *on a :*

$$\lim_{t \to +\infty} \underset{\sim}{U}(\varpi\,; A \times (t + B)) = \frac{1}{m} \pi(A)\lambda(B)$$

(*cette limite est nulle si m est infini et si* $\pi(A) < +\infty$).

Ce théorème est une généralisation immédiate du théorème classique de renouvellement concernant les marches aléatoires positives ; m représente la « moyenne » de la deuxième composante de la chaîne :

$$m = \int \pi(d\varpi) P(\varpi, d\varpi') \int x F^1_{\varpi,\varpi'}(dx)$$

Démonstration. — Comme $B \subset]0, \infty[$, on a :

$$\underset{\sim}{U}(\varpi\,; A \times (t + B)) = \int \underset{\sim}{H}_t(\varpi\,; d\varpi', dx) \underset{\sim}{U}(\varpi'\,; A \times ((B - x) \cap]0, \infty[))$$

la proposition 5 montre que la fonction $U(.\,; A \times ((B - x) \cap]0, \infty[))$ est bornée ; la remarque faite après la proposition précédente montre alors que cette expression tend, lorsque $t \to +\infty$, vers :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \int G(d\varpi, dx) \underset{\sim}{U}(\varpi\,; A \times ((B - x) \cap]0, \infty[)) &= \frac{1}{m} \underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}(A \times B) \\ &= \frac{1}{m} \pi(A)\lambda(B)\end{aligned}$$

d'après la proposition 2.

PROPOSITION 9. — *Sous les mêmes hypothèses, si* A *est une partie de* Π *telle que* $\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+) < +\infty$, *et* B *un borélien borné de* $\mathbb{R}_+$, *on a :*

$$\lim_{t \to +\infty} \underset{\sim}{V}(\varpi ; A \times (t + B)) = \frac{1}{m} \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(B)$$

cette limite est nulle si m est infini .

Démonstration. — On peut écrire :

$$\underset{\sim}{V}(\varpi ; A \times (t + B)) = \int \underset{\sim}{H}_t(\varpi ; d\varpi', dx)\underset{\sim}{V}(\varpi' ; A \times ((B - x) \cap]0, \infty[))$$

de même que pour le théorème précédent, cette expression a pour limite $\frac{1}{m} \underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{V}(A \times B)$ lorsque $t \to +\infty$.

D'autre part considérons la fonctionnelle additive A'_t introduite à la proposition 7 ; pour h fixé, la fonction $f(\varpi, x) = \tilde{E}_{\varpi,x}\{A'_h\}$ est bornée par h, et on a :

$$\int \underset{\sim}{H}_t(\varpi ; d\varpi', dx)f(\varpi', x) = \underset{\sim}{V}(\varpi ; A \times]t, t + h])$$

donc cette quantité tend, lorsque $t \to +\infty$, vers $\frac{1}{m}\underset{\sim}{G}(f) = \frac{h}{m}\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)$ d'après les calculs de la proposition 7. Par conséquent les mesures $\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(.)$ et $\underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{V}(A, .)$, coïncidant sur les intervalles $]0, h]$, sont identiques, et on en déduit le résultat.

III. CHAINES TRANSIENTES, CHAINES RÉCURRENTES

III.1. Récurrence et transience.

Nous revenons au cas général d'une chaîne semi-markovienne à valeurs dans $(E, \mathscr{E})$ et vérifiant la condition A. Comme le temps est discret nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que l'espace d'états Ω est assez grand pour qu'il existe des translations θ_n de pas n. Si $A \in \mathscr{E}$, on note

$$T_A = \inf \{ n ; n > 0, (\varpi_n, S_n) \in A \}$$

le temps d'entrée et

$$N_A = \sum_{n=0}^{\infty} 1_A(\varpi_n, S_n)$$

le nombre de passages de la chaîne $(\varpi_n, S_n)_{n \geq 0}$ dans A ; de même si $A \in \mathscr{N}$

on appelle T_A et N_A le temps d'entrée et le nombre de passages de $(\varpi_n)_{n\geq 0}$ dans A.

Définition. — Une chaîne semi-markovienne est dite *transiente* s'il existe une suite Π_n de parties mesurables de Π croissant vers Π et vérifiant pour tout n :
pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et tout ϖ de Π,

(24) $$\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{\Pi_n\times K} = +\infty\} = 0$$

Elle est dite *récurrente* si pour toute partie mesurable A de Π telle que $\pi(A) > 0$ et tout $\delta > 0$, on a π-p.s. sur A :

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\delta(0)} = +\infty\} = 1$$

PROPOSITION 10. — *Si une chaîne semi-markovienne vérifie la condition* A, *elle est récurrente ou transiente.*

LEMME 1. — *Soit* A *une partie mesurable de* Π ; *si pour tout* $\delta > 0$,

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{A\times\delta(0)} < \infty\} = 1$$

π-p.s. *sur* A, *alors pour tout* $\delta > 0$,

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\delta(0)} = +\infty\} = 1$$

π-p.s. *sur* A.

Démonstration. — Si A est une partie vérifiant les hypothèses de l'énoncé, posons :

$$A_1 = \{\varpi ; \varpi\in A, \text{ il existe un } \delta>0 \text{ avec } \tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{A\times\delta(0)} < +\infty\} < 1\}$$
$$A_n = \{\varpi ; \varpi\in A, \text{ il existe un } \delta>0 \text{ avec } \tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{(A-A_{n-1})\times\delta(0)} < +\infty\} < 1\}$$

la suite A_n croît vers une partie A_∞, et on va montrer que $\pi(A_\infty) = 0$. On a $\pi(A_1) = 0$; supposons que $\pi(A_{n-1}) = 0$;

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{(A-A_{n-2})\times\delta(0)} < +\infty\}\\ &= \tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{(A-A_{n-1})\times\delta(0)} < +\infty\}\\ &+ \tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{(A-A_{n-1})\times\delta(0)} = +\infty, T_{(A_{n-1}-A_{n-2})\times\delta(0)} < +\infty\}\\ &\leq \tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{(A-A_{n-1})\times\delta(0)} < +\infty\} + \sum_{N=1}^{\infty} P^N(\varpi, A_{n-1})\end{aligned}$$

π étant la mesure invariante pour P, le deuxième terme du second membre est π-p.s. nul ; comme pour tout ϖ de $A - A_{n-1}$ le premier membre égale 1, il faut que $\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{(A-A_{n-1})\times\delta(0)} < +\infty\} = 1$, π-p.s. sur $A - A_{n-1}$; par conséquent $\pi(A_n) = 0$; donc $\pi(A_\infty) = 0$.

Soit $B = A - A_\infty$; il est clair que pour tout ϖ de B et tout $\delta > 0$, $P_{\varpi,0}\{T_{B\times\delta(0)} < +\infty\} = 1$. Si $T = T_{B\times\frac{\delta}{2}(0)}$ et si $\mathscr{G}_T$ est la σ-algèbre associée au temps d'arrêt T pour $(\varpi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$, on a:

$$\begin{aligned}\inf_{\varpi\in B} \tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{B\times\delta(0)} \geqslant n\} &\geqslant \inf_{\varpi\in B} \tilde{E}_{\varpi,0}\{1_{T<+\infty}\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{B\times\delta(0)}\circ\theta_T \geqslant n-1 \mid \mathscr{G}_T\}\} \\ &\geqslant \inf_{\varpi\in B} \tilde{P}_{\varpi,0}\{T < +\infty\} \inf_{\varpi\in B} \tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{B\times\frac{\delta}{2}(0)} \geqslant n-1\} \\ &\geqslant \inf_{\varpi\in B} \tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{B\times\frac{\delta}{2}(0)} \geqslant n-1\} \\ &\geqslant \inf_{\varpi\in B} \tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{B\times\frac{\delta}{2^{n-1}}(0)} \geqslant 1\} = 1\end{aligned}$$

par suite pour tout $\delta > 0$, $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{B\times\delta(0)} = +\infty\} = 1$ sur B, et *a fortiori* $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\delta(0)} = +\infty\} = 1$ sur B, donc π-p.s. sur A.

LEMME 2. — *Si une partie* A *vérifie* $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\delta(0)} = +\infty\} = 0$ *sur* A *pour une valeur positive de* δ, *elle vérifie* (24).

Démonstration. — Soit $T = T_{A\times\frac{\delta}{2}(x)}$ pour une valeur de x fixée;

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\frac{\delta}{2}(x)} = +\infty\} &= \tilde{E}_{\varpi,0}\{1_{T<+\infty}\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\frac{\delta}{2}(0)} = +\infty \mid \mathscr{G}_T\}\} \\ &\leqslant \tilde{E}_{\varpi,0}\{1_{T<+\infty}\tilde{P}_{\varpi_T,0}\{N_{A\times\delta(0)} = +\infty\}\} = 0\end{aligned}$$

par hypothèse. On conclut en remarquant que tout compact peut être recouvert d'un nombre fini d'intervalles de demi-longueur $\frac{\delta}{4}$.

Démonstration de la proposition. — Supposons que la chaîne ne soit pas récurrente; il existe une partie A telle que $\pi(A) > 0$ et un nombre $\delta > 0$ tel que $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\delta(0)} = +\infty\}$ ne soit pas π-p.s. égal à 1 sur A. D'après le lemme 1 il existe une partie A_0 de A telle que $\pi(A_0) > 0$ et deux nombres $\delta > 0$ et $\alpha < 1$, avec:

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{A_0\times\delta(0)} < +\infty\} \leqslant \tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{A\times\delta(0)} < +\infty\} \leqslant \alpha \qquad \forall \varpi \in A_0$$

Soit T le temps de $(n-1)^{\text{ième}}$ entrée dans $A_0 \times \frac{\delta}{2}(0)$; on a:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A_0\times\frac{\delta}{2}(0)} \geqslant n\} &= \tilde{E}_{\varpi,0}\{1_{T<+\infty}\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{A_0\times\frac{\delta}{2}(0)}\circ\theta_T < +\infty \mid \mathscr{G}_T\}\} \\ &\leqslant \tilde{P}_{\varpi,0}\{T < +\infty\} \sup_{\varpi'\in A_0} \tilde{P}_{\varpi',0}\{T_{A_0\times\delta(0)} < +\infty\} \\ &\leqslant \alpha\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A_0\times\frac{\delta}{2}(0)} \geqslant n-1\}\end{aligned}$$

donc $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A_0\times\frac{\delta}{2}(0)} \geqslant n\} \leqslant \alpha^n$ sur A_0 ; on en déduit que sur A_0

$\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A_0 \times \frac{\delta}{2}(0)} = +\infty\} = 0$, donc A_0 vérifie (24) d'après le lemme 2.

Soit $B_x^n = \left\{\varpi\,;\ \tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{A_0 \times \delta(x)} < +\infty\} \geqslant \frac{1}{n}\right\}$, T_p les temps d'entrée successifs dans $B_x^n \times \frac{\delta}{2}(0)$ (pour n et x fixés) et

$$\Omega_p = \left\{\omega\,;\ \text{il existe } m \geqslant T_p(\omega) \text{ avec } (\varpi_m(\omega), S_m(\omega)) \in A_0 \times \frac{\delta}{2}(x)\right\};$$

on a :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{P}_{\varpi,0}\{\Omega_p \mid \mathscr{G}_{T_p}\} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{\infty} 1_{T_p < +\infty} = +\infty$$

sur $\{N_{B_x^n \times \frac{\delta}{2}(0)} = +\infty\}$. Le lemme de Borel-Cantelli entraîne alors que $\{N_{B_x^n \times \frac{\delta}{2}(0)} = +\infty\} \subset \{N_{A_0 \times \frac{\delta}{2}(x)} = +\infty\}$, $\tilde{P}_{\varpi,0}$-p.s. ; A_0 vérifiant (24), on en déduit que $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{B_x^n \times \frac{\delta}{2}(0)} = +\infty\} = 0$ pour tout ϖ.

Comme la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ est récurrente, $\Pi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}} B_x^n$; si l'on classe les rationnels en une suite $\{x_p\}$, et si l'on pose $\Pi_n = \bigcup_{p=1}^{n} B_{x_p}^n$, Π_n croit vers Π et pour tout ϖ de Π on a $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{\Pi_n \times \frac{\delta}{2}(0)} = +\infty\} = 0$. La conclusion découle du lemme 2.

COROLLAIRE. — *Si la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ est π-uniformément récurrente, s'il existe un nombre $\alpha > 0$ et un compact K de $\mathbb{R}$ tels que pour tous ϖ et ϖ' de Π, $F^1_{\varpi,\varpi'}(K) \geqslant \alpha$ et si la chaîne semi-markovienne est transiente, l'espace Π lui-même vérifie* (24).

Démonstration. — La chaîne semi-markovienne étant transiente, on peut trouver une partie A telle que $\pi(A) > 0$ et vérifiant (24). ${}_AP^n$ désignant les probabilités tabou pour la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$, la π-récurrence uniforme entraîne que $\sum_{p=0}^{n} {}_AP^p(\varpi, A)$ converge vers 1 uniformément en ϖ lorsque $n \to +\infty$; il existe donc un entier N tel que $\sum_{p=0}^{N} {}_AP^p(\varpi, A) \geqslant \beta$ pour tout ϖ de Π, soit

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_A \leqslant N\} \geqslant \beta \qquad \forall \varpi \in \Pi$$

Si $K_2 = (K \oplus K) \cup K$, $K_N = (K_{N-1} \oplus K) \cup K_{N-1}$, les hypothèses faites entraînent que $\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{A\times K_N} \leqslant N\} \geqslant \beta\alpha^N$ pour tout ϖ de Π. En remplacant B_x^n par Π, $\frac{1}{n}$ par $\beta\alpha^N$ et $\delta(x)$ par un intervalle recouvrant K_N, on peut répéter la démonstration précédente, ce qui montre que Π vérifie (24).

En revanche dans le cas général il n'y a pas de raisons pour que Π, ni même toute partie mesurable A telle que $\pi(A) < +\infty$, vérifie (24).

III.2. **Comportement du potentiel.**

Il est facile de voir qu'une chaîne semi-markovienne positive est transiente si et seulement si $m > 0$. Le but de ce paragraphe est d'étendre le corollaire de la proposition 5 aux chaînes transientes quelconques. Pour une chaîne quelconque, une partie A de Π est de *potentiel borné* s'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $\sup\{\underset{\sim}{U}(\varpi; A \times \delta(0)); \varpi \in A\} < +\infty$, et la proposition 5 montre que A est de potentiel borné si et seulement si l'on a :

(25) pour tout compact K de $\mathbb{R}$,

$$\sup\{\underset{\sim}{U}(\varpi; A \times (x + K)); \varpi \in \Pi, x \in \mathbb{R}\} < +\infty$$

THÉORÈME 4. — *Considérons une chaîne semi-markovienne vérifiant la condition* A; *si elle est récurrente, pour tout* $\delta > 0$ *et toute partie* A *de* Π *telle que* $\pi(A) > 0$ *on a* $\underset{\sim}{U}(\varpi; A \times \delta(0)) = +\infty$, π-p.s. *sur* A; *si elle est transiente, il existe une suite de parties de* Π, *croissant* π-p.s. *vers* Π *et de potentiel borné.*

La démonstration de ce théorème s'inspire directement des méthodes de Azema, Duflo, Revuz [1]. Commencons par un lemme :

LEMME. — *Il existe une suite* A_n *de parties de* Π *croissant* π-p.s. *vers* Π *et une suite de nombres* M_n, *avec :*

$$\tilde{E}_{\varpi,0}\{T_{A_n^c}\} \leqslant M_n \qquad \forall \varpi \in \Pi$$

Démonstration. — Soit D_n une suite de parties de Π telles que $0 < \pi(D_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$; pour n fixé, $\sum_{p=1}^{\infty} P^p(\varpi, D_n) = +\infty$ à cause de la récurrence de la chaîne $(\varpi_n)_{n\geqslant 0}$, donc on peut trouver un entier r_n et un réel $c_n > 0$ tels que si

$$B_n = D_n \cup \left\{\varpi; \sum_{p=1}^{r_n} P^p(\varpi, D_n) < c_n\right\}, \pi(B_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$c_n \tilde{\mathrm{E}}_{\varpi,0}\{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n}\} = \tilde{\mathrm{E}}_{\varpi,0}\left\{\sum_{p=0}^{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n}-1} c_n\right\} \leqslant \tilde{\mathrm{E}}_{\varpi,0}\left\{\sum_{p=0}^{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n}-1}\sum_{q=1}^{r_n} \mathrm{P}^q(\varpi_p, \mathrm{D}_n)\right\}$$

$$\leqslant \tilde{\mathrm{E}}_{\varpi,0}\left\{\sum_{p=0}^{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n}-1}\sum_{q=1}^{r_n} 1_{\mathrm{D}_n}(\varpi_{p+q})\right\} \leqslant r_n^2$$

puisque si $\varpi_{p+q} \in \mathrm{D}_n$, $p + q \geqslant \mathrm{T}_{\mathrm{B}_n}$. Si l'on pose $\mathrm{A}_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} \mathrm{B}_m^c$, d'une part $\pi(\Pi - \mathrm{A}_n) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}}$ donc A_n croît π-p.s. vers Π, et d'autre part

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\varpi,0}\{\mathrm{T}_{\mathrm{A}_n^c}\} \leqslant \tilde{\mathrm{E}}_{\varpi,0}\{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n}\} \leqslant \frac{r_n^2}{c_n} ;$$

la suite A_n répond donc à la question.

Démonstration du théorème. — Si la chaîne semi-markovienne est récurrente, le résultat est évident. Si elle est transiente, on appelle Π_n' la suite construite à la proposition 10; A_n étant la suite du lemme précédent, soit $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n \cap \Pi_n'$; B_n croît π-p.s. vers Π, et on a :

$$(26) \qquad \tilde{\mathrm{E}}_{\varpi,x}\{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n^c}\} \leqslant \mathrm{M}_n \qquad \forall \varpi \in \Pi,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

B_n vérifie (24), donc pour tout ϖ et tout $\delta > 0$, lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$, $\tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,0}\{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n \times \delta(0)} \circ \theta_{\mathrm{N}} < +\infty\} \to 0$; pour tout n il existe donc un entier N_n tel que si

$$\mathrm{C}_n = \left\{\varpi \in \mathrm{B}_n ;\ \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,0}\{\mathrm{T}_{\mathrm{B}_n \times \delta(0)} \circ \theta_{\mathrm{N}_n} < +\infty\} \leqslant \frac{1}{n}\right\},$$

on a

$$\pi(\mathrm{B}_n - \mathrm{C}_n) \leqslant \frac{1}{n} ;$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{C}_n = \Pi$, π-p.s., et

$$(27) \qquad \tilde{\mathrm{P}}_{\varpi,x}\{\mathrm{T}_{\mathrm{C}_n \times \frac{\delta}{2}(0)} \circ \theta_{\mathrm{N}_n} < +\infty\} \leqslant \frac{1}{n} \qquad \forall \varpi \in \mathrm{C}_n,\ \forall x \in \frac{\delta}{2}(0)$$

Définissons la suite de temps d'arrêt :

$$\mathrm{T}_1^n = \mathrm{N}_n + \mathrm{T}_{\mathrm{C}_n \times \frac{\delta}{2}(0)} \circ \theta_{\mathrm{N}_n}$$

$$\mathrm{T}_2^n = \mathrm{T}_1^n + (\mathrm{T}_{\mathrm{C}_n^c} \vee \mathrm{N}_n) \circ \theta_{\mathrm{T}^n}$$

$$\mathrm{T}_{2p-1}^n = \mathrm{T}_{2p-2}^n + \mathrm{T}_{\mathrm{C}_n \times \frac{\delta}{2}(0)} \circ \theta_{\mathrm{T}_{2p-2}^n}$$

$$\mathrm{T}_{2p}^n = \mathrm{T}_{2p-1}^n + (\mathrm{T}_{\mathrm{C}_n^c} \vee \mathrm{N}_n) \circ \theta_{\mathrm{T}_{2p-1}^n}$$

$$U\left(\varpi\,;\,C_n \times \frac{\delta}{2}(0)\right) \leqslant N_n + \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{E}_{\varpi,0}\{\,1_{T^n_{2p-1}<+\infty}(T^n_{2p} - T^n_{2p-1})\,\}$$

$$\leqslant N_n + \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{E}_{\varpi,0}\{\,1_{T^n_{2p-1}<+\infty}\,\tilde{E}_{(\varpi,S)_{T^n_{2p-1}}}\{\,T_{C^c_n} \vee N_n\,\}\,\}$$

mais $C_n \subset B_n$, donc C_n vérifie (26) et $\tilde{E}_{\varpi,x}\{\,T_{C^c_n} \vee N_n\,\}$ est majoré par $M_n + N_n$; donc :

$$\underset{\sim}{U}\left(\varpi\,;\,C_n \times \frac{\delta}{2}(0)\right) \leqslant N_n + (M_n + N_n)\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{P}_{\varpi,0}\{\,T^n_{2p-1} < +\infty\,\}$$

comme $(\varpi, S)_{T^n_{2p-1}} \in C_n \times \frac{\delta}{2}(0)$, (27) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_{\varpi,0}\{\,T^n_{2p+1} < +\infty\,\}\\
&\quad = \tilde{P}_{\varpi,0}\{\,T^n_{2p-1} + T_{C_n\times\frac{\delta}{2}(0)} \circ \theta_{T^n_{2p}} + (T_{C^c_n} \vee N_n)\circ\theta_{T^n_{2p-1}} < +\infty\,\}\\
&\quad \leqslant \tilde{P}_{\varpi,0}\{\,T^n_{2p-1} < +\infty,\, T_{C_n\times\frac{\delta}{2}(0)} \circ \theta_{N_n + T^n_{2p-1}} < +\infty\,\}\\
&\quad \leqslant \tilde{E}_{\varpi,0}\{\,1_{T^n_{2p-1}<+\infty}\,\tilde{P}_{(\varpi,S)_{T^n_{2p-1}}}\{\,T_{C_n\times\frac{\delta}{2}(0)} \circ \theta_{N_n} < +\infty\,\}\,\}\\
&\quad \leqslant \frac{1}{n}\,\tilde{P}_{\varpi,0}\{\,T^n_{2p-1} < +\infty\,\}
\end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{U}\left(\varpi\,;\,C_n \times \frac{\delta}{2}(0)\right) \leqslant N_n + (N_n + M_n)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^p$$

pour tout ϖ ; donc C_n est de potentiel borné, et si $\Pi_n = \bigcup_{m=1}^{n} C_m$, la suite Π_n satisfait aux conditions de l'énoncé.

III.3. **Un critère de récurrence.**

Le but du présent paragraphe est d'indiquer un critère de récurrence analogue à celui de la « moyenne nulle » pour les marches aléatoires.

Si A est une partie mesurable de Π, la chaîne de Markov « sur $A \times \mathbb{R}$ » déduite de $(\varpi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne $(\varpi'_n, S'_n)_{n\geqslant 0}$ qui provient d'une chaîne semi-markovienne $(\varpi'_n, X'_n)_{n\geqslant 0}$; on note $\underset{\sim}{P}_A$ sa mesure de transition, définie par $\underset{\sim}{P}_A(\varpi\,;\,B) = \tilde{E}_{\varpi,0}\{\,1_B((\varpi, S)_{T_{A\times\mathbb{R}}})\,\}$ pour $B \in \mathscr{E}$. On sait d'autre part que la restriction de π à A est la seule mesure invariante pour la chaîne de Markov sur A déduite de $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$.

On dit que la moyenne sur A, m_A, existe si la fonction $|x|$ est intégrable pour la mesure

$$\int_A \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}_A(\varpi ; A, .)$$

et on pose :

$$m_A = \int_A \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}_A(\varpi ; A, dx)x$$

si $m = m_\Pi$, on voit que lorsque la chaîne est positive le nombre m ainsi défini est le même que celui défini au paragraphe II-1 (masse de la mesure $\underset{\sim}{G}$).

PROPOSITION 11. — *Si* A *est une partie mesurable de* Π *telle que* m_A *existe, pour toute partie mesurable* B *de* A, m_B *existe et on a* $m_A = m_B$.

Démonstration. — Quitte à considérer la chaîne sur $A \times \mathbb{R}$, on peut supposer que $A = \Pi$ et que $m = m_A$; soit B une partie mesurable de A. Pour toute fonction positive f sur Π, on sait que :

$$\int \pi(d\varpi)f(\varpi) = \int_B \pi(d\varpi)\tilde{E}_{\varpi,0}\left\{ \sum_{n=0}^{T_B - 1} f(\varpi_n) \right\}$$

Soit alors $f(\varpi) = \tilde{E}_{\varpi,0}\{ |X_1| \}$, $g(\varpi) = \tilde{E}_{\varpi,0}\{ X_1 \}$; par hypothèse $|x|$ est intégrable pour $\int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}(\varpi ; \Pi, .)$, donc :

$$\begin{aligned}
&\int_B \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}_B(\varpi ; B, dx)|x| \\
&\qquad = \int_B \pi(d\varpi)\tilde{E}_{\varpi,0}\{ |S_{T_B}| \} \\
&\qquad \leqslant \int_B \pi(d\varpi)\tilde{E}_{\varpi,0}\left\{ \sum_{n=1}^{T_B} |X_n| \right\} = \int_B \pi(d\varpi)\tilde{E}_{\varpi,0}\left\{ \sum_{n=0}^{T_B - 1} f(\varpi_n) \right\} \\
&\qquad \leqslant \int \pi(d\varpi)f(\varpi) = \int \pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}(\varpi ; \Pi, dx)|x| < +\infty
\end{aligned}$$

donc m_B existe ; en remplacant f par g, ce qui conduit à remplacer $|x|$ par x et l'inégalité par une égalité, on voit que $m_B = m$.

PROPOSITION 12 *(Critère de récurrence).* — *Etant donnée une chaîne* *semi-markovienne vérifiant la condition* A *et telle qu'il existe une partie mesurable* A *de* $\mathcal{N}$ *pour laquelle* m_A *existe et* $\pi(A) > 0$, *deux cas sont possibles :*

(i) $m_A = 0$, *et la chaîne est récurrente.*

(ii) $m_A \neq 0$, *la chaîne est transiente et toute partie* B *telle que* m_B *existe et* $\pi(B) < +\infty$, *vérifie* (24).

LEMME. — *Si* $\pi(\Pi) = 1$ *et si* m *existe*, $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = m$, $\tilde{P}_{\pi,0}$-p. s.

Démonstration. — Si l'on munit l'espace d'états Ω de la σ-algèbre $\mathscr{A}'$ engendrée par $(\varpi_n, X_n)_{n \geqslant 1}$ et de la probabilité $\tilde{P}_{\pi,0}$, la translation θ_1 de pas 1 est un endomorphisme de probabilités. La σ-algèbre invariante pour cet endomorphisme est la $\tilde{P}_{\pi,0}$-σ-algèbre invariante pour la chaîne $(\varpi_n, X_n)_{n \geqslant 1}$, et la condition A entraîne que cette σ-algèbre est triviale.

Soit f la fonction sur Ω définie par $f(\omega) = X_1(\omega)$; puisque m existe, f appartient à $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}', \tilde{P}_{\pi,0})$, et le théorème de Birkhoff entraîne :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} f \circ \theta_p = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} S_n = \tilde{E}_{\pi,0}(f) = m \qquad \tilde{P}_{\pi,0}\text{-p. s.}$$

Démonstration de la proposition. — La chaîne $(\varpi_n, X_n)_{n \geqslant 0}$ est récurrente si et seulement si la chaîne sur A l'est ; d'autre part la proposition 11 montre que si $\pi(A) = +\infty$ on peut remplacer A par une partie de A de π-mesure finie sans changer la moyenne. On peut donc supposer que $\pi(\Pi) = 1$ et que m existe.

Supposons d'abord que $m = 0$; si B est une partie de π-mesure finie on sait que :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n(\varpi, B) = \pi(B)$$

d'autre part le lemme montre que pour tout $\varepsilon > 0$, $\tilde{P}_{\pi,0}\{ S_n \in n\varepsilon(0) \}$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$; donc pour π-presque tout ϖ on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi ; B \times n\varepsilon(0)) = \pi(B)$$

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int \pi(d\varpi) \underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi ; B \times n\varepsilon(0)) = \pi(B)^2$$

à cause du théorème de Lebesgue. En recouvrant $N\varepsilon(0)$ par $N\frac{\varepsilon}{\delta}+1$ intervalles de longueur 2δ et en appliquant (21), on obtient :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{B}\pi(d\varpi)\underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi\,;\,B\times n\varepsilon(0))$$
$$\leqslant \frac{1}{N}\left(N\frac{\varepsilon}{\delta}+1\right)\pi(B)\sup\{\,\underset{\sim}{U}(\varpi\,;\,B\times 2\delta(0))\,;\,\varpi\in B\,\}$$

Donc

$$\liminf_{N\to+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}+\frac{1}{N}\right)\sup\{\,\underset{\sim}{U}(\varpi\,;\,B\times 2\delta(0))\,;\,\varpi\in B\,\}\geqslant\pi(B),$$

ce qui entraîne que

$$\frac{\varepsilon}{\delta}\sup\{\,U(\varpi\,;\,B\times 2\delta(0))\,;\,\varpi\in B\,\}\geqslant\pi(B)\,;$$

en faisant tendre vers zéro, on voit qu'il existe une suite ϖ_n telle que $\underset{\sim}{U}(\varpi_n\,;\,B\times 2\delta(0))$ tende vers l'infini, ce qui montre que B ne vérifie pas (25).

On trouve le même résultat pour toute partie B de A, ce qui, joint au théorème 4, montre que la chaîne est récurrente.

Supposons maintenant que $m\neq 0$; S_n converge $\tilde{P}_{\pi,0}$-p. s. vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de m, lorsque $n\to+\infty$. Si

$$A_n=\{\,\varpi\,;\,\tilde{P}_{\varpi,0}\{\,N_{\Pi\times[-n,n]}=+\infty\,\}>0\,\}$$

la suite A_n croît vers une partie A telle que $\pi(A)=0$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$.

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{\,N_{\Pi\times K}=+\infty\,\}\leqslant\tilde{P}_{\varpi,0}\{\,T_{A^c}=+\infty\,\}$$
$$+\,\tilde{E}_{\varpi,0}\{\,1_{T_{A^c}<+\infty}\tilde{P}_{(\varpi,S)_{T_{A^c}}}\{\,N_{\Pi\times K}=+\infty\,\}\,\}$$

le deuxième terme du second membre est nul par définition de A, le premier est nul à cause de la récurrence de $(\varpi_n)_{n\geqslant 0}$ et du fait que $\pi(A^c)>0$. Par conséquent Π vérifie (24) et la chaîne est transiente.

Pour terminer soit B une partie de π-mesure finie et telle que m_B existe. Comme la chaîne est transiente, on ne peut avoir $m_B=0$ à cause de la première partie de la démonstration ; on vient de montrer que dans ce cas B vérifie (24).

Au passage on a montré le corollaire :

COROLLAIRE. — *Étant donnée une chaîne semi-markovienne vérifiant* *la condition* A *et telle que* $\pi(\Pi) = 1$ *et que m existe, deux cas sont possibles :*

(i) $m = 0$ *et la chaîne est récurrente.*
(ii) $m \neq 0$ *la chaîne est transiente et* Π *vérifie* (24).

IV. CLASSIFICATION LOCALE DES CHAINES SEMI-FORTEMENT FELLÉRIENNES

IV.1. Les chaînes semi-fortement fellériennes.

Dans ce paragraphe nous supposerons que $(\Pi, \mathcal{N})$ est un espace localement compact de type dénombrable, muni de ses boréliens.

Définition. — Une chaîne semi-markovienne est dite *semi-fortement fellérienne* si pour toute fonction réelle f bornée mesurable sur $(E, \mathscr{E})$, telle que pour tout ϖ la fonction $f(\varpi, .)$ soit continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\underset{\sim}{P}f$ est continue sur Π.

Pour une chaîne de Markov, la topologie la moins fine rendant les fonctions p-surharmoniques continues admet toute partie de l'espace d'états pour ouvert ; la notion de récurrence fine se réduit alors à celle de récurrence ponctuelle, qui est en général sans intérêt pour un espace d'états non dénombrable. Cependant si l'on transpose les démonstrations de [*1*] aux cas des chaînes $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ et $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$, avec les topologies initiales de Π et de $\mathbb{R}$, on voit qu'elles sont fondées sur le lemme ci-dessous et sur les trois points suivants (i), (ii) et (iii).

On va montrer que si la chaîne $(\varpi_n, X_n)_{n \geqslant 0}$ est semi-fortement fellérienne ces trois points sont vérifiés pour $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$; on en déduira facilement qu'ils le sont également pour $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$. $\mathscr{V}_\varpi$ désigne le filtre des voisinages de ϖ dans Π.

Point (i) : *Si pour un voisinage* V' *de* ϖ' *on a* $\tilde{P}_{\varpi,x}\{T_{V' \times \varepsilon(y)} < +\infty\} > 0$, *il existe un* $V \in \mathscr{V}_\varpi$ *et un* $a > 0$ *tels que pour tous* $\varpi'' \in V$ *et* $x' \in \varepsilon(x)$, *on ait*

$$\tilde{P}_{\varpi'',x'}\{T_{V' \times 3\varepsilon(y)} < +\infty\} \geqslant a.$$

Par hypothèse il existe un n tel que $\underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi\,;\, V' \times \varepsilon(y - x)) > 0$; si f est continue bornée par 1, positive, égale à 1 sur $\varepsilon(y - x)$ et nulle en dehors de $2\varepsilon(y - x)$, $\underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi\,;\, V', f) > 0$, donc il existe un $V \in \mathscr{V}_\varpi$ et un $a > 0$ avec :

$$\varpi'' \in V \Rightarrow \underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi'', V', f) \geqslant a$$

comme $\tilde{P}_{\varpi'',x'}\{T_{V'\times 3\varepsilon(y)} < +\infty\} \geqslant \underset{\sim}{P}^{n*}(\varpi'', V', f)$ si $x' \in \varepsilon(x)$, on obtient le résultat.

Point (ii) : *Si pour un voisinage* V *de* ϖ *on a* $\tilde{P}_{\varpi,0}\{T_{V\times\varepsilon(0)}\circ\theta_N < +\infty\} < 1$, *il existe un* $V' \in \mathscr{V}_\varpi$ *et un* $a < 1$ *tels que pour tous* $\varpi' \in V'$ *et* $x' \in \frac{1}{6}\varepsilon(0)$, *on ait* $\tilde{P}_{\varpi',x'}\{T_{V\times\frac{1}{6}\varepsilon(0)}\circ\theta_N < +\infty\} \leqslant a$.

Pour tout $y \in \frac{\varepsilon}{3}(x)$, on a :

$$\tilde{P}_{\varpi,x}\{T_{V\times\frac{1}{3}\varepsilon(0)} < +\infty\} \leqslant \tilde{P}_{\varpi,y}\{T_{V\times\frac{2}{3}\varepsilon(0)} < +\infty\} \leqslant \tilde{P}_{\varpi,x}\{T_{V\times\varepsilon(0)} < +\infty\}$$

donc si l'on pose

$$f(\varpi, x) = \frac{3}{2\varepsilon}\int_{x-\frac{\varepsilon}{3}}^{x+\frac{\varepsilon}{3}} \tilde{P}_{\varpi,y}\{T_{V\times\frac{2}{3}\varepsilon(0)} < +\infty\}\,dy$$

on obtient une fonction f bornée mesurable, telle que $f(\varpi, .)$ soit continue sur $\mathbb{R}$, et encadrée par $\tilde{P}_{\varpi,x}\{T_{V\times\frac{1}{3}\varepsilon(0)} < +\infty\}$ et $\tilde{P}_{\varpi,x}\{T_{V\times\varepsilon(0)} < +\infty\}$. Par hypothèse $\underset{\sim}{P}^{N*}f(\varpi) < 1$, et comme on peut le vérifier facilement la transition $\underset{\sim}{P}^{N*}$ est semi-fortement fellérienne, donc il existe un $a < 1$ et $V' \in \mathscr{V}_\varpi$ tels que pour tout $\varpi' \in V'$, $\underset{\sim}{P}^{N*}f(\varpi') \leqslant a$; la conclusion en découle immédiatement.

Point (iii) : *Si pour un voisinage* V *de* ϖ, $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{V\times\varepsilon(0)} = +\infty\} = 1$, *il existe un* $V' \in \mathscr{V}_\varpi$ *et un* $a > 0$ *tels que pour tous* $\varpi' \in V'$ *et* $x' \in \varepsilon(0)$, *on ait* $\tilde{P}_{\varpi',x'}\{N_{V\times 4\varepsilon(0)} = +\infty\} \geqslant a$.

Comme pour le point (ii), si l'on pose

$$f(\varpi, x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \tilde{P}_{\varpi,y}\{N_{V\times 2\varepsilon(0)} = +\infty\}\,dy$$

on obtient :

$$\tilde{P}_{\varpi,x}\{N_{V\times\varepsilon(0)} = +\infty\} \leqslant f(\varpi, x) \leqslant \tilde{P}_{\varpi,x}\{N_{V\times 3\varepsilon(0)} = +\infty\}$$

d'autre part la fonction $g(\varpi, x) = \tilde{P}_{\varpi,x}\{N_{V\times\varepsilon(0)} = +\infty\}$ est harmonique pour $(\varpi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$, et on a :

$$1 = g(\varpi, 0) = \int \underset{\sim}{P}(\varpi ; d\varpi', dx')\tilde{P}_{\varpi',x'}\{N_{V\times\varepsilon(0)} = +\infty\} \leqslant \underset{\sim}{P}f(\varpi) = 1$$

donc il existe un $V' \in \mathscr{V}_\varpi$ et un $a > 0$ tels que si $\varpi' \in V'$, $\underset{\sim}{P}f(\varpi') \geqslant a$, et on conclut en remarquant que

$$P_{\varpi',0}\{N_{V\times 3\varepsilon(0)} = +\infty\}$$
$$= \int P(\varpi'; d\varpi'', dx)\tilde{P}_{\varpi'',x}\{N_{V\times 3\varepsilon(0)} = +\infty\} \geqslant \underset{\sim}{P}f(\varpi') \geqslant a$$

LEMME. — *Si* $P(\varpi, \{\varpi\}) < 1$, *il existe un* $V \in \mathscr{V}_\varpi$ *et un* M *tels que pour tout* $(\varpi', x) \in E$,

$$\tilde{E}_{\varpi',x}\{T_{V^c}\} \leqslant M$$

Démonstration. — ϖ n'est pas une trappe, donc il existe un voisinage V_1 de ϖ avec $P(\varpi, V_1) < 1$; il existe alors un voisinage V_2 de ϖ et un nombre $a < 1$ avec $P(\varpi', V_1) \leqslant a$ si $\varpi' \in V_2$. Si $V = V_1 \cap V_2$, $P(\varpi', V) \leqslant a$ dès que $\varpi' \in V$, et on a :

$$\tilde{P}_{\varpi',x}\{T_{V^c} \geqslant n\} = \int_{V^n} P(\varpi', d\varpi_1) \ldots P(\varpi_{n-1}, d\varpi_n) \leqslant a^{n-1}$$

$$\tilde{E}_{\varpi',x}\{T_{V^c}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_{\varpi',x}\{T_{V^c} \geqslant n\} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a^{n-1} = M$$

Les résultats de [*1*] s'appliquent donc aux chaînes $(\varpi_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\varpi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$, en remplaçant la topologie fine par les topologies initiales. On dit que (ϖ', x') *suit* (ϖ, x) ($(\varpi', x') \to (\varpi, x)$) si pour tous $V \in \mathscr{V}_{\varpi'}$ et $\varepsilon > 0$ on a $\tilde{P}_{\varpi,x}\{T_{V\times\varepsilon(x')} < +\infty\} > 0$. Un point (ϖ, x) est *récurrent* si pour tous $V \in \mathscr{V}_\varpi$ et $\varepsilon > 0$ on a $\tilde{P}_{\varpi,x}\{N_{V\times\varepsilon(x)} = +\infty\} = 1$, il est *transient* s'il existe un $V \in \mathscr{V}_\varpi$ et un $\varepsilon > 0$ tels que $\tilde{P}_{\varpi,x}\{N_{V\times\varepsilon(x)} = +\infty\} = 0$.

Tout point (ϖ, x) *de* E *est récurrent ou transient.* S'il est transient il existe un $V \in \mathscr{V}_\varpi$ et un $\varepsilon > 0$ tels que le potentiel de la chaîne $(\varpi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ sur $V \times \varepsilon(x)$ soit borné. S'il est récurrent, et si $(\varpi', x') \to (\varpi, x)$, pour tous $V \in \mathscr{V}_\varpi$ et $\varepsilon > 0$ on a $\tilde{P}_{\varpi',x'}\{N_{V\times\varepsilon(x)} = +\infty\} > 0$.

La relation $(\varpi, x) \sim (\varpi', x')$ lorsque $(\varpi, x) \to (\varpi', x')$ et que $(\varpi', x') \to (\varpi, x)$ est une relation d'équivalence, et les propriétés « (ϖ, x) est récurrent » et « (ϖ, x) est essentiel » sont des propriétés de classe pour cette relation ((ϖ, x) est dit *essentiel* si $(\varpi, x) \to (\varpi', x')$ entraîne $(\varpi', x') \to (\varpi, x)$). Il est facile de voir que *toute classe essentielle est fermée* pour la topologie de E *et stable, toute classe récurrente est essentielle.*

On a les mêmes notions pour la chaîne $(\varpi_n)_{n\geqslant 0}$. Nous allons d'abord étudier les classes d'équivalence dans E pour la relation $\to$, puis nous étudierons la récurrence.

IV.2. La classification.

Soit $G_{\varpi,x} = \{ (\varpi', x'); (\varpi, x) \rightarrow (\varpi', x') \}$; c'est l'ensemble des états qui suivent (ϖ, x), ou encore des états « possibles » à partir de (ϖ, x): on a ainsi une notion analogue à celle des états possibles d'une marche aléatoire. La relation $G_{\varpi,x} = \{ (\varpi', x + y); (\varpi', y) \in G_{\varpi,0} \}$ permet de n'étudier que $G_{\varpi,0}$. Si $H_\varpi = \{ x; (\varpi, x) \in G_{\varpi,0} \}$, on appelle G_ϖ le groupe fermé engendré par H_ϖ; comme on voit facilement que H_ϖ est fermé et que si x et y sont dans H_ϖ, $x + y \in H_\varpi$, on a la relation $G_\varpi = H_\varpi \ominus H_\varpi$.

On appelle $K_{\varpi,x}$ la classe de (ϖ, x) dans E; comme pour $G_{\varpi,x}$ on peut se contenter de déterminer $K_{\varpi,0}$, et si $L_\varpi = \{ x; (\varpi, x) \in K_{\varpi,0} \}$, L_ϖ est un groupe fermé.

Enfin si $\varpi \rightarrow \varpi'$, il n'existe pas toujours un x tel que $(\varpi, 0) \rightarrow (\varpi', x)$; on dira que $\varpi \Rightarrow \varpi'$ s'il existe un tel x. Comme la relation $\Rightarrow$ est transitive et réflexive, elle engendre une relation d'équivalence, dont chaque classe D est contenue dans une classe C pour la chaîne $(\varpi_n)_{n\geqslant 0}$ (cette inclusion peut être stricte).

Donnons un exemple: pour espace Π on prend [0, 1] et pour transition, $\underset{\sim}{P}(\varpi; d\varpi', dx) = \lambda(d\varpi')1_{]0,1]}(\varpi')\delta_{\frac{1}{\varpi}}(dx)$; il est clair que cette transition est semi-fortement fellérienne et qu'il n'y a qu'une seule classe pour $(\varpi_n)_{n\geqslant 0}$. Par contre si $\varpi_n < \varepsilon$, $S_n - S_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc $\tilde{P}_{\varpi,0} \{ T_{[0,\varepsilon[\times[0,\frac{1}{\varepsilon}[} < +\infty \} = 0$ et il n'existe pas de nombre x tel que $(\varpi, 0) \rightarrow (0, x)$; il y a deux classes pour la relation $\Rightarrow$, $\{ 0 \}$ et]0, 1].

PROPOSITION 13. — *Si la chaîne est semi-fortement fellérienne, s'il existe un entier m, un nombre positif d fini ou infini et une fonction réelle k sur une classe* D *pour la relation* $\Rightarrow$, *tels que si* ϖ *et* $\varpi' \in D$, *la mesure* $F^m_{\varpi,\varpi'}(.)$ *soit portée par* $\{ k(\varpi') - k(\varpi) \} + d\mathbb{Z}$, *la fonction* $k' = k$ (mod d) *de* D *sur le tore isomorphe à* $[0, d[$ *est continue.*

Démonstration. — f étant une fonction bornée uniformément continue et périodique de période d sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$g(\varpi) = \int P^m(\varpi, d\varpi')1_D(\varpi')F^m_{\varpi,\varpi'}(dx)f(x)$$
$$= \int P^m(\varpi, d\varpi')1_D(\varpi')f(k(\varpi') - k(\varpi)) \qquad \text{si} \qquad \varpi \in D$$

doit être continue sur D. Si k' n'est pas continue sur D en un point ϖ_0

de D, on peut trouver un nombre $\alpha \neq k'(\varpi_0)$ (mod d) et une suite ϖ'_n de D convergeant vers ϖ_0, telle que $k'(\varpi'_n) \to \alpha$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver N tel que pour tous $\varpi \in D$ et $n \geqslant N$, $|f(k(\varpi) - k(\varpi'_n)) - f(k(\varpi) - \alpha)| \leqslant \varepsilon$, et on a :

$$\begin{aligned} g(\varpi'_n) - g(\varpi_0) = & \int P^m(\varpi_0, d\varpi)\{f(k(\varpi)-k(\varpi'_n))-f(k(\varpi)-k(\varpi_0))\}\, 1_D(\varpi) \\ & + \int (P^m(\varpi'_n, d\varpi) - P^m(\varpi_0, d\varpi))\{f(k(\varpi)-k(\varpi'_n))-f(k(\varpi)-\alpha)\}\, 1_D(\varpi) \\ & + \int (P^m(\varpi'_n, d\varpi) - P^m(\varpi_0, d\varpi))\{f(k(\varpi)-\alpha)\}\, 1_D(\varpi) \end{aligned}$$

Le deuxième terme du second membre est inférieur à 2ε ; le troisième terme tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ car la fonction $P^m h$ est continue sur Π pour toute fonction bornée h sur Π, et le premier membre tend vers zéro à cause de la continuité de g ; il faut donc que :

$$\int P^m(\varpi_0, d\varpi)\{f(k(\varpi) - \alpha) - f(k(\varpi) - k(\varpi_0))\}\, 1_D(\varpi) = 0$$

cette relation, vraie pour toute fonction uniformément continue et bornée, s'étend facilement à toute fonction mesurable bornée périodique. Les lois des variables aléatoires $U = k(\varpi_m) - \alpha$ (mod d) et $V = k(\varpi_m) - k(\varpi_0)$ (mod d) lorsque l'on part de ϖ_0 sont donc identiques, ce qui est impossible si $\alpha \neq k(\varpi_0)$ (mod d).

THÉORÈME 5. — *Considérons une chaîne semi-markovienne semi-fortement fellérienne ; si* D *est une classe pour la relation* $\Rightarrow$ *on est dans l'un des cas :*

cas α : $G_\varpi = L_\varpi = \{0\}$ *pour tout* $\varpi \in D$; *il existe une fonction réelle continue* k *sur* D *avec :*

$$K_{\varpi,0} = G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\varpi' \in D} \{\varpi', k(\varpi') - k(\varpi)\}$$

cas β_1 : $G_\varpi = L_\varpi = d\mathbb{Z}$ *pour tout* $\varpi \in D$; *il existe une fonction continue* k *de* D *dans le tore isomorphe à* $[0, d[$, *avec :*

$$K_{\varpi,0} = G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\varpi' \in D} \{\varpi'\} \times (\{k(\varpi') - k(\varpi)\} + d\mathbb{Z})$$

cas γ_1 : $G_\varpi = L_\varpi = \mathbb{R}$ *pour tout* $\varpi \in D$, *il y a une seule classe* $K = D \times \mathbb{R}$ *et* $G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R}) = K$.

cas $\beta_2^\pm$: $G_\varpi = d\mathbb{Z}$, $L_\varpi = \{0\}$ *pour tout* $\varpi \in D$; D *est divisé en classes* D_ρ *disjointes ; il existe une fonction continue k dans le tore isomorphe à* $[0, d[$ *et une famille de réels* $\{a_{\varpi,\varpi'} ; \varpi, \varpi' \in D\}$ *vérifiant :*

(28) $a_{\varpi,\varpi'} + a_{\varpi',\varpi''} = a_{\varpi,\varpi''}$ si $\varpi, \varpi', \varpi'' \in D_\rho$

(29) $a_{\varpi,\varpi'} + a_{\varpi',\varpi''} > a_{\varpi,\varpi''}$ sinon, pour β_2^+ ($<$ pour β_2^-)

(30) $a_{\varpi,\varpi'} = k(\varpi') - k(\varpi) \pmod d$ $\forall \varpi, \varpi' \in D$

et on a partout avec le même signe + ou − :

$$G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\varpi' \in D} \{\varpi'\} \times (\{a_{\varpi,\varpi'}\} \pm d\mathbb{N})$$

$$K_{\varpi,0} = \bigcup_{\varpi' \in D_\rho} \{\varpi', a_{\varpi,\varpi'}\} \quad \text{si} \quad \varpi \in D_\rho$$

cas $\gamma_2^\pm$: $G_\varpi = \mathbb{R}$, $L_\varpi = \{0\}$ *pour tout* $\varpi \in D$; D *est divisé en classes* D_ρ *disjointes et il existe une famille de réels* $\{a_{\varpi,\varpi'} ; \varpi, \varpi' \in D\}$ *vérifiant* (28) *et* (29) ; *on a, avec partout le même signe :*

$$G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R}) = \bigcup_{\varpi' \in D} \{\varpi'\} \times (\{a_{\varpi,\varpi'}\} \pm [0, +\infty[)$$

$$K_{\varpi,0} = \bigcup_{\varpi' \in D} \{\varpi', a_{\varpi,\varpi'}\} \quad \text{si} \quad \varpi \in D_\rho$$

Démonstration. — Le groupe G_ϖ est de la forme $\{0\}$, $d\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.

Supposons d'abord que pour un ϖ de D, $G_\varpi = \{0\}$. Si $\varpi' \in D$, il existe deux nombres a et b tels que :

(31) $$(\varpi, 0) \to (\varpi', a) \to (\varpi, a + b)$$

et on doit avoir $a + b = 0$; si $x \in H_{\varpi'}$, (31) entraîne que $(\varpi, 0) \to (\varpi, x)$, donc $x = 0$ et $G_{\varpi'} = H_{\varpi'} = L_{\varpi'} = \{0\}$. Il est alors clair qu'il existe un seul réel $a_{\varpi,\varpi'}$ tel que $(\varpi, 0) \to (\varpi', a_{\varpi,\varpi'})$ et on a (28) pour tous $\varpi, \varpi', \varpi''$ de D ; ϖ_0 étant un point quelconque de D, si $k(\varpi) = a_{\varpi_0,\varpi}$ on a

$$a_{\varpi,\varpi'} = k(\varpi') - k(\varpi)$$

et l'application de la proposition 13 termine la démonstration *du cas* α.

Supposons que pour ϖ, $G_\varpi = d\mathbb{Z}$, et soient ϖ', a, b vérifiant (31) ; on doit avoir $a + b = md$, et si $x \in H_{\varpi'}$, $(\varpi, 0) \to (\varpi, a + b + x)$ donc x est un multiple de d. Mais alors $G_{\varpi'} \subset G_\varpi$, et on montrerait de même que $G_\varpi \subset G_{\varpi'}$, ce qui entraîne que pour tout ϖ de D, $G_\varpi = d\mathbb{Z}$.

Il est clair que tous les nombres x tels que $(\varpi, 0) \to (\varpi', x)$ sont égaux modulo d à un nombre $b_{\varpi,\varpi'}$ vérifiant (28) ; ϖ_0 étant un point quelconque de D, posant $k(\varpi) = b_{\varpi_0,\varpi} \pmod d$ et appliquant la proposition 13, on voit que k est continue à valeurs dans le tore isomorphe à $[0, d[$ et que :

$$G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R}) \subset \bigcup_{\varpi' \in D} \{ \varpi' \} \times (\{ k(\varpi') - k(\varpi) \} + d\mathbb{Z})$$

Supposons alors que pour ϖ, $L_\varpi = b\mathbb{Z}$; on a $b = pd$, et d'autre part un résultat d'arithmétique bien connu entraîne qu'il existe N tel que si $m \geqslant N$, $md \in H_\varpi$; pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $m \geqslant N$ on aura $d(np + m) \in H_\varpi$, ce qui entraîne que $H_\varpi = d\mathbb{Z} = L_\varpi$. Si ϖ', a, b vérifient (31), on aura pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$(\varpi', 0) \to (\varpi, b) \to (\varpi, b + nd) \to (\varpi', a + b + nd)$$

comme $a + b = md$, on en conclut que $H_{\varpi'} = L_{\varpi'} = d\mathbb{Z}$, et on est dans le *cas* β_1 dont le reste est évident.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $G_\varpi = d\mathbb{Z}$ et où $L_\varpi = \{ 0 \}$ pour tout ϖ de D. La relation « il existe x avec $(\varpi, 0) \to (\varpi', x) \to (\varpi, 0)$ » est une relation d'équivalence sur D, dont on note D_ρ les classes ; le nombre x est évidemment unique, on l'appelle $a_{\varpi,\varpi'}$ et on a bien-sûr (28) et (30).

Pour que $L_\varpi = \{ 0 \}$, il faut que tous les éléments de H_ϖ soient de même signe. Mais si ϖ, ϖ', a, b vérifient (31) et si $x \in H_{\varpi'}$, $a + b + x \in H_\varpi$ et pour x assez grand, x et $a + b + x$ sont de même signe ; il y a donc deux cas, β_2^+ ou $H_\varpi \subset d\mathbb{N}$ pour tout ϖ de D, et β_2^- ou $H_\varpi \subset -dN$ pour tout ϖ de D. Plaçons nous par exemple dans le cas β_2^+ ; si ϖ et $\varpi' \in D_\rho$, on vérifie que $a_{\varpi,\varpi'} = \inf \{ x ; (\varpi, 0) \to (\varpi', x) \}$; pour ϖ et ϖ' quelconques on pose $a_{\varpi,\varpi'} = \inf \{ x ; (\varpi, 0) \to (\varpi', x) \}$; comme $a_{\varpi,\varpi'} + a_{\varpi',\varpi} \geqslant 0$, les nombres $a_{\varpi,\varpi'}$ sont bien définis, et on a (29) et la fin du cas β_2^+, comme on peut le voir facilement.

Par élimination des cas précédents, il reste le cas où $G_\varpi = \mathbb{R}$ pour tout ϖ de D. Si $L_\varpi = \{ 0 \}$ pour tout ϖ on est dans l'un des cas γ_2^+ où γ_2^-, qu'on traite comme les cas $\beta_2^\pm$ (l'inégalité stricte de (29) provient du fait que les ensembles $G_{\varpi,0} \cap \{ \varpi' \} \times \mathbb{R}$ sont fermés). Si $d\mathbb{Z} \subset L_\varpi$, il existe un réel x de H_ϖ rationnellement indépendant avec d, et $nx + md \in H_\varpi$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$; cela veut dire que tout réel appartient à H_ϖ (car H_ϖ est fermé), et $H_\varpi = G_\varpi = L_\varpi = \mathbb{R}$. Il est alors très facile de voir, grace à (31), que $L_{\varpi'} = \mathbb{R}$ pour tout ϖ' de D, et on est dans le *cas* γ_1.

La situation est donc la même, en plus compliquée, que pour les marches aléatoires.

Le cas α est « *semi-déterministe* », il correspond à une marche aléatoire identiquement nulle ; seule la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ apporte un élément aléatoire.

Les cas β_1 et $\beta_2^\pm$ sont dits « *arithmétiques* », ils correspondent au cas de même nom pour les marches ; de même les cas γ_1 et $\gamma_2^\pm$ sont dits « *non arithmétiques* ».

Pour une marche aléatoire non identiquement nulle, il y a deux possibilités ; soit elle est positive (ou négative), soit l'ensemble des états possibles est un groupe fermé. Pour une chaîne semi-markovienne, les cas $\beta_2^\pm$ et $\gamma_2^\pm$ signifient que la chaîne est positive (ou négative) en un sens large : si l'on pose $X'_n = X_n - a_{\varpi_{n-1},\varpi_n}$ la chaîne $(\varpi_n, X'_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne positive (ou négative) telle qu'elles ont été étudiées au paragraphe II. Dans les cas β_1 et γ_1 on a $K_{\varpi,0} = G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R})$ et en particulier H_ϖ est un groupe fermé égal à L_ϖ.

Si $\varpi \in D$, on n'a déterminé que $G_{\varpi,0} \cap (D \times \mathbb{R})$; la seule chose que l'on puisse dire des états (ϖ', x) qui suivent $(\varpi, 0)$ lorsque ϖ' n'appartient pas à la même classe D que ϖ, est que $G_{\varpi,0} \cap (D' \times \mathbb{R}) = \{(\varpi', \mathbb{R})$; il existe $\varpi'' \in D'$ et y tels que $(\varpi, 0) \to (\varpi'', y)$ et $(\varpi', x - y) \in G_{\varpi'',0} \times (D' \cap \mathbb{R})\}$; comme $\varpi'' \in D'$, on connaît la forme de $G_{\varpi'',0} \cap (D' \times \mathbb{R})$. Remarquons qu'il est possible que la chaîne soit dans un cas pour la classe D et dans un autre cas pour la classe D'.

LEMME. — *Si $\varpi \to \varpi'$, il existe une suite ϖ_n convergeant vers ϖ', telle que $\varpi \Rightarrow \varpi_n$.*

Démonstration. — Soit V_n une suite fondamentale de voisinages de ϖ' ; puisque $\varpi \to \varpi'$, pour tout n il existe un entier m avec $P^m(\varpi, V_n) > 0$. Le support de $\underset{\sim}{P}^{m*}(\varpi\,; d\varpi'', dx)1_{V_n}(\varpi'')$ contient donc au moins un point (ϖ_n, x_n), et $(\varpi, 0) \to (\varpi_n, x_n)$, donc $\varpi \Rightarrow \varpi_n$; enfin il est clair que ϖ_n converge vers ϖ'.

PROPOSITION 14. — *Dans les cas $\beta_2^\pm$ et $\gamma_2^\pm$ les classes $K_{\varpi,0}$ ne sont pas essentielles ; dans les autres cas, toutes les classes $K_{\varpi,x}$ pour $\varpi \in D$ sont essentielles si et seulement si D l'est pour la relation $\Rightarrow$; on a alors $C = D$ et C est essentielle pour la relation $\to$.*

Démonstration. — La première partie est évidente. Notons ensuite que si $(\varpi, 0)$ est essentiel, (ϖ, x) l'est pour tout x ; donc toutes les classes $K_{\varpi,x}$ sont essentielles ou aucune ne l'est. Il est alors évident qu'elles le sont si et seulement si D l'est pour la relation $\Rightarrow$.

Supposons que ce soit le cas, et soit ϖ' un état qui suit ϖ ; le lemme entraîne qu'il existe une suite ϖ'_n convergeant vers ϖ' et telle que $\varpi'_n \in D$ (puisque D est essentielle). Dans le cas γ_1 posons $a_n = 0$ et dans les cas β_1 et α, posons $a_n = k(\varpi'_n) - k(\varpi)$; pour β_1, a_n est compris entre $-d$ et d ; supposons que pour α, la limite inférieure de $|k(\varpi'_n)|$ soit finie. On peut toujours extraire de la suite a_n une sous-suite, notée encore a_n, et qui converge vers un nombre a ; comme $(\varpi'_n, a_n) \in K_{\varpi,0}$ et que cette classe est fermée $(\varpi', a) \in K_{\varpi,0}$ et $\varpi' \in D$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas α et supposons que $|k(\varpi'_n)|$ tende vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Si $P(\varpi'_n, D^c) > 0$, il existe un point (ϖ'', x) de $D^c \times \mathbb{R}$ dans le support de $\underset{\sim}{P}(\varpi'_n\,;\,.)$; donc $\varpi'_n \Rightarrow \varpi''$ et comme D est essentielle, $\varpi'' \in D$, ce qui est contradictoire avec $(\varpi'', x) \in D^c \times \mathbb{R}$. Donc $P(\varpi'_n, D) = 1$ et en passant à la limite, $P(\varpi', D) = 1$.

Mais alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre a tel que :

$$\int_D P(\varpi', d\varpi)1_{]-a,a[}(k(\varpi)) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe un entier N tel que si $n \geqslant N$,

$$\int_D P(\varpi'_n, d\varpi)1_{]-a,a[}(k(\varpi)) \geqslant 1 - \varepsilon$$

D'autre part pout tout b il existe un N' tel que si $n \geqslant N'$, $|k(\varpi'_n)| \geqslant b + 2a$; soit f une fonction réelle continue comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur $[-b, b]$ et nulle sur $]-b-a, b+a[^c$. Si $n \geqslant \sup(N, N')$,

$$\underset{\sim}{P}(\varpi'_n\,;\,D, f) \leqslant \int_D P(\varpi'_n, d\varpi)1_{]-b-a,b+a[}(k(\varpi) - k(\varpi'_n)) \leqslant \varepsilon$$

en passant à la limite en n, on trouve que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\underset{\sim}{P}(\varpi'\,;\,D \times]-b, b[) \leqslant \underset{\sim}{P}(\varpi'\,;\,D, f) \leqslant \varepsilon$$

donc $\underset{\sim}{P}(\varpi'\,;\,D \times]-b, b[) = 0$, et en faisant tendre b vers $+\infty$ on trouve $\underset{\sim}{P}(\varpi'\,;\,D \times \mathbb{R}) = P(\varpi', D) = 0$. On aboutit donc à une contradiction.

Finalement on a montré que si ϖ' suit ϖ, alors $\varpi' \in D$; cela prouve bien que $D \subset C \subset D$, donc $C = D$ et C est essentielle pour $\to$.

IV.3. Étude de la récurrence.

Nous sommes en présence de trois définitions de la récurrence : la récurrence d'un point (ou d'une classe), la récurrence au sens de Harris (c'est la condition A transposée pour la chaîne de Markov $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$) et la récurrence « globale » définie au paragraphe III. Nous allons préciser les rapports entre ces diverses notions, et donner le comportement du potentiel.

Rappelons d'abord un résultat reliant les deux premiers concepts, résultat bien connu pour la récurrence fine des processus :

PROPOSITION 15. — *S'il existe une classe récurrente* K *pour la chaîne*

$(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$ *la chaîne sur* K *est récurrente au sens de Harris, et l'unique mesure invariante a pour support* K ; *si la chaîne est récurrente au sens de Harris, il existe une classe récurrente et une seule, qui est le support de la mesure invariante.*

Remarquons que dans ce dernier cas il peut y avoir une ou plusieurs classes transientes. On pourrait donner un énoncé analogue pour $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$ et pour des raisons de simplicité d'écriture on fera la démonstration dans le cas de cette chaîne.

Démonstration. — S'il existe un point récurrent ϖ, [2] montre que la mesure $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} P^n(\varpi, .)$ est absolument continue par rapport à une mesure invariante π, si l'on se restreint à la chaîne sur la classe C de ϖ. De plus cette chaîne est π-récurrente au sens de Harris. Si $\varpi' \in C$, dès que V est un voisinage de ϖ' on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} P^n(\varpi, V) > 0$, donc $\pi(V) > 0$ et ϖ' appartient au support de π ; on a donc la première partie de l'énoncé.

Réciproquement si la condition A est vérifiée, soit ϖ un point du support S de π ; si V est un voisinage de ϖ, $\pi(V) > 0$, donc $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_V = +\infty\} = 1$. Mais alors ϖ est récurrent et il existe une classe récurrente C (nécessairement unique, car la chaîne est irréductible et une classe récurrente est stable) contenant S. La première partie de la démonstration montre alors que $C = S$.

Si $(\varpi, 0)$ est récurrent, ϖ l'est pour la chaîne $(\varpi_n)_{n \geqslant 0}$. Si C est la classe de ϖ, tout (ϖ', x) tel que $\varpi' \in C$ est récurrent. On est dans l'un des cas α, β_1 ou γ_1 et $D = C$. Inversement si $D = C$, si C est une classe récurrente et si la chaîne est dans le cas α sur C, tout point de $C \times \mathbb{R}$ est récurrent : en effet si V est un voisinage de ϖ et si $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V′ de ϖ contenu dans V et tel que si $\varpi' \in V'$, $|k(\varpi') - k(\varpi)| < \varepsilon$; comme C est stable, on a :

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{V \times \varepsilon(0)} = +\infty\} \geqslant \tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{V'} = +\infty\} = 1$$

$\underset{\sim}{U}(\varpi ; .)$ est le potentiel de la chaîne $(\varpi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$ au point $(\varpi, 0)$; la proposition suivante rassemble des résultats sur ce potentiel.

PROPOSITION 16. — *Étant donnée une chaine semi-fortement fellérienne, le support de* $\underset{\sim}{U}(\varpi ; .)$ *est* $G_{\varpi,0}$; *si aucun point n'est récurrent, tout compact de* Π *vérifie* (25) ; *si* $(\varpi_0, 0)$ *est récurrent et si* C *est la classe de* ϖ_0, *on note* π

la mesure invariante de $(\varpi_n)_{n\geq 0}$ *sur* C, *et on a* $\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_B = +\infty\} = 1$ *et* $\underset{\sim}{U}(\varpi ; B) = +\infty$ *pour tout* ϖ *de* C *si* B *est de la forme :*

cas α ; $B = \bigcup_{\varpi' \in A} \{\varpi', k(\varpi') - k(\varpi)\}$ *avec* $\pi(A) > 0$.

cas β_1 ; $B = \bigcup_{\varpi' \in A} \{\varpi', k(\varpi') - k(\varpi) + n_{\varpi'}\}$ *avec* $\pi(A) > 0$, $\{n_\varpi ; \varpi \in C\}$ *étant une famille quelconque d'entiers.*

cas γ_1 ; B *est une partie mesurable de* E *telle que* $\pi \otimes \lambda(B) > 0$.

Démonstration. — La première partie provient d'une remarque faite à la fin du paragraphe IV-1 au sujet du potentiel au voisinage d'un point transient, et du fait que tout compact peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts.

Si la classe $K_{\varpi,0}$ est récurrente, la proposition 15 montre qu'il existe une mesure invariante; dans le cas γ_1 on vérifie que cette mesure est $\pi \otimes \lambda$; dans le cas β_1 c'est $\pi(d\varpi') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{k(\varpi')-k(\varpi)+n}(dx)$ et dans le cas α, $\pi(d\varpi') \delta_{k(\varpi')-k(\varpi)}(dx)$. La fin de la proposition découle alors de la condition de Harris, appliquée à cette mesure.

Pour terminer nous allons préciser les rapports entre ce qui précède et la récurrence telle qu'elle a été définie au paragraphe III.

PROPOSITION 17. — *Soit une chaîne semi-markovienne vérifiant la condition* A *et semi-fortement fellérienne; elle est récurrente si et seulement s'il existe au moins un point récurrent dans* E.

On a d'ailleurs vu que si tel est le cas, tout point (ϖ, x) tel que ϖ appartienne au support de π est récurrent.

Démonstration. — On appelle C le support de π ; d'après la proposition 15 C est l'unique classe récurrente pour $(\varpi_n)_{n\geq 0}$. Si aucun point de E n'est récurrent, il existe une suite de compacts de Π croissant vers Π et vérifiant (25). D'après le théorème 4, la chaîne $(\varpi_n, S_n)_{n\geq 0}$ est transiente.

Supposons qu'il existe des points récurrents pour cette chaîne; si l'on est dans le cas γ_1, pour toute partie A de Π telle que $\pi(A) > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, le résultat précédent montre que

$$\tilde{P}_{\varpi,0}\{N_{A\times\varepsilon(0)} = +\infty\} = 1 \qquad \forall \varpi \in C$$

donc la chaîne est récurrente.

Supposons maintenant que nous soyons dans l'un des cas α ou β_1 et soit A une partie de Π telle que $\pi(A) > 0$. Si $\{V_n\}$ est une base de la topologie de Π, soit $A' = \{ \varpi ; \varpi \in A, \text{ il existe } V_n \in \mathscr{V}_\varpi \text{ avec } \pi(A \cap V_n) = 0 \}$; appelons M l'ensemble des entiers tels que $\pi(A \cap V_n) = 0$. On a

$$A' = A \cap \Big\{ \bigcup_{n \in M} V^n \Big\}, \qquad \text{et} \qquad \pi(A') \leqslant \sum_{n \in M} \pi(A \cap V_n) = 0.$$

Si $\varpi \in A - A'$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un voisinage V_n de ϖ tel que si $\varpi' \in V_n$, on ait $| k(\varpi') - k(\varpi) | < \varepsilon$. Comme $\pi(A \cap V_n) > 0$, la proposition précédente montre que :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\varpi,0} \{ N_{A \times \varepsilon(0)} = +\infty \} &\geqslant \tilde{P}_{\varpi,0} \{ N_{(V_n \cap A) \times \varepsilon(0)} = +\infty \} \\ &\geqslant \tilde{P}_{\varpi,0} \Big\{ N \bigcup_{\varpi' \in V_n \cap A} \{ \varpi', k(\varpi') - k(\varpi) \} = +\infty \Big\} = 1 \end{aligned}$$

on a donc bien $\tilde{P}_{\varpi,0} \{ N_{A \times \varepsilon(0)} = +\infty \} = 1$, π-p.s. sur A, et la chaîne semi-markovienne est récurrente.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Récurrence fine des processus de Markov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **2**, 1966, p. 185-220.

[*2*] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Mesures invariantes sur les classes récurrentes des processus de Markov, *Z. Wahr. verw. Geb.*, t. **8**, 1967, p. 157-181.

[*3*] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Mesure invariante des processus de Markov récurrents, Sém. Çal. Prob. Fac. Sci., Strasbourg III, Springer Verlag, *Lecture Notes in Math.*, t. **88**, 1968, p. 24-33.

[*4*] J. L. DOOB, *Stochastic processes*, Wiley and Sons, 1953.

[*5*] M. DUFLO et D. REVUZ, Propriétés asymptotiques des probabilités de transition des processus de Markov récurrents, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **5**, n° 3, 1969, p. 233-244.

[*6*] J. JACOD, Un théorème de renouvellement pour les chaînes semi-markoviennes, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **270**, 1970, p. 255-258.

[*7*] J. JACOD, Chaînes semi-markoviennes transientes et récurrentes, chaînes positives, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **270**, 1970, p. 776-779.

[*8*] M. JAIN et B. JAMISON, Contributions to Doeblin's theory of Markov processes, *Z. Wahr. verw. Geb.*, t. **8**, 1967, p. 18-41.

[*9*] B. JAMISON et S. OREY, Markov chains recurrent in the sense of Harris, *Z. Wahr. verw. Geb.*, t. **8**, 1967, p. 41-48.

[*10*] P. LÉVY, Processus semi-markoviens, *Proc. Int. Congress Math. III*, Amsterdam, 1954.

[*11*] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, 1966.

[*12*] S. OREY, Tail events for sums of independant random variables, *J. Math. Mech.*, t. **15**, 1964, p. 937-951.

[*13*] R. PYKE and R. SCHAUFELE, Limit theorems for Markov renewal processes, *Ann. Math. Stat.*, t. **35**, 1964, p. 1746-1764.

[*14*] R. PYKE and R. SCHAUFELE, The existence and uniqueness of stationnary measures for Markov renewal processes, *Ann. Math. Stat.*, t. **37**, 1966, p. 1439-1462.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1970).