ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

FRANÇOISE MARTIN
JEAN-LUC PETIT
MONIQUE PETIT-LITTAYE

Comparaison des expériences

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 2 (1971), p. 145-176
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_2_145_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VII, n° 2, 1971, p 145-176. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Comparaison des expériences

par

Françoise MARTIN (*), Jean-Luc PETIT (**)
et Monique PETIT-LITTAYE (***)

SOMMAIRE. — Dans ce travail nous introduisons d'abord une notion de morphisme statistique entre deux expériences statistiques, en généralisant celles introduites par Blackwell [*1*], et Morse et Sacksteder [*8*]. Nous cherchons ensuite les relations entre l'existence d'un morphisme statistique et la notion d'exhaustivité de Halmos et Savage [*5*]. Enfin nous généralisons de façon naturelle les notions d'expérience, de morphisme statistique et d'exhaustivité, ce qui nous permet de retrouver ainsi certaines notions introduites par Le Cam [*6*].

SUMMARY. — In this paper we first introduce a notion of statistical morphism between two experiments as a generalization of the notions introduced by Blackwell [*1*], and Morse and Sacksteder [*8*]. Then we look for connexions between the existence of a statistical morphism and the notion of sufficiency of Halmos and Savage [*5*]. As a natural conclusion we generalize the notions of experiments, statistical morphism and sufficiency and we recognize some notions introduced by Le Cam [*6*].

I. EXPÉRIENCES ET MORPHISMES STATISTIQUES

(1.1). DÉFINITION D'UNE EXPÉRIENCE

On appelle expérience statistique un triplet $\mathscr{E} = (X\,;\mathscr{A}\,;\mathscr{P}^{\Theta})$ où $(X\,;\mathscr{A})$ est un espace mesurable et $\mathscr{P}^{\Theta} = \{ P^{\theta}\,; \theta \in \Theta \}$ une famille de probabilités sur $(X\,;\mathscr{A})$.

(*) Service de Probabilité. Faculté des Sciences, 9, quai Saint-Bernard, Paris-75.
(**) Département de Mathématiques. Faculté des Sciences, Mont-Saint-Aignan-76.
(***) Département de Mathématiques. Faculté des Lettres, Vincennes-75.

On dira qu'une expérience $\mathscr{E} = (X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ est dominée si la famille $\mathscr{P}^\Theta$ est dominée par une mesure σ-finie sur $(X ; \mathscr{A})$. On sait alors qu'il existe une probabilité dominante qui est barycentre d'une sous famille dénombrable de P^θ (cf. [5]) que l'on appellera dominante privilégiée.

(1.2). NOTATIONS

1) Soit $\mathscr{E}$ une expérience ; $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})$ est le M-espace (cf. Appendice) des fonctions mesurables bornées sur $(X ; \mathscr{A})$; $\mathscr{N}$ est le σ-idéal des éléments de $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})$ P^θ-presque sûrement nuls pour tout élément θ de Θ. On notera $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$ le quotient de $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})$ par $\mathscr{N}$; c'est un M-espace avec unité et le passage au quotient est une application linéaire, positive, qui conserve l'unité, c'est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}\,(\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}), \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}))/\mathscr{P}^\Theta$ qui est de plus σ-continu pour l'ordre. Nous noterons $q^\Theta_{\mathscr{E}}$ cette application.

2) Soit $\mathscr{E}$ une expérience dominée. L'ensemble des mesures bornées sur $(X ; \mathscr{A})$ absolument continues par rapport à une dominante privilégiée $\bar{P}$ de la famille $\mathscr{P}^\Theta$ est indépendante du choix de $\bar{P}$ et sera noté $L(\mathscr{E})$. C'est un L-espace (cf. Appendice). Son dual est un $\bar{M}$ espace (cf. Appendice) qui s'identifie à $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$ que l'on notera $L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$.

3) Soit $\mathscr{E} = (X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ une expérience. Nous noterons $\mathscr{K}$ l'ensemble des parties finies de Θ. Pour $K \in \mathscr{K}$ nous noterons $\mathscr{E}_K$ l'expérience réduite $(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)$ où $\mathscr{P}^K = \{ P^\theta ; \theta \in K \}$. L'expérience $\mathscr{E}_K$ est dominée et nous noterons $q^{\mathscr{E}}_K ; \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}) \to L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)$ l'application de passage au quotient. Pour $K \subset K'$ dans $\mathscr{K}$, on a $L(\mathscr{E}_K) \subset L(\mathscr{E}_{K'})$ et nous noterons $a^{\mathscr{E}}_{K'K} : L(\mathscr{E}_K) \to L(\mathscr{E}_{K'})$ l'injection canonique qui est linéaire, positive et isométrique, donc est un morphisme de la catégorie $\mathbb{L}$ (cf. Appendice). Soit $q^{\mathscr{E}}_{KK'} : L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^{K'}) \to L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)$ l'application de passage au quotient, définie par $q^{\mathscr{E}}_{KK'} \circ q^{\mathscr{E}}_{K'} = q^{\mathscr{E}}_K$. On vérifie que $q^{\mathscr{E}}_{KK'}$ est l'application transposée de $a^{\mathscr{E}}_{KK'}$. Nous avons ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}) \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_\Theta"'] \arrow[dr, "q^{\mathscr{E}}_{K'}"'] \arrow[drr, "q^{\mathscr{E}}_K"] & & \\
\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta \arrow[r, "q^{\mathscr{E}}_{K'\Theta}"'] & L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^{K'}) \arrow[r, "q^{\mathscr{E}}_{KK'}"'] & L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)
\end{tikzcd}$$

(1.3). LEMME

Soit $\mathscr{E} = (X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ une expérience.

1) $\{ L(\mathscr{E}_K) ; a^{\mathscr{E}}_{K'K} ; K \in \mathscr{K} \}$ est un système inductif dans la catégorie $\mathbb{L}$ (cf. Appendice).

2) $\{ L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K) ; q^{\mathscr{E}}_{KK'} ; K \in \mathscr{K} \}$ est un système projectif dans la catégorie $\mathbb{M}$ (cf. Appendice).

Démonstration. — La première partie est évidente.

Pour la 2[e] partie, il suffit de montrer que l'application $q^{\mathscr{E}}_{KK'}$ est continue pour l'ordre. Or les applications $q^{\mathscr{E}}_{KK'}$ sont σ-continues pour l'ordre, donc continues pour l'ordre puisque dans un espace $L^\infty(X ; \mathscr{A} ; P)$; la borne supérieure d'une famille majorée quelconque est la borne supérieure d'une sous-famille dénombrable.

C. Q. F. D.

Morphismes statistiques :

(1.4). THÉORÈME

Soient $\mathscr{E} = (X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ et $\mathscr{F} = (Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^\Theta)$ deux expériences indexées par Θ.

1) Si u est une application mesurable de $(X, \mathscr{A})$ dans $(Y, \mathscr{B})$ telle que $P^\theta \circ u^{-1} = Q^\theta$ pour tout $\theta \in \Theta$, l'application : $g \rightsquigarrow g \circ u$ définit une application v :

$$\mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B}) \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})$$

v est linéaire, positive, σ-continue pour l'ordre, vérifiant $v(1) = 1$ et

i) $\qquad (\forall \theta \in \Theta)\ (\forall g \in \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B}))(\langle g, Q^\theta \rangle = \langle v(g), P^\theta \rangle)$

2) Soit $v : \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B}) \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})$ vérifiant les propriétés ci-dessus. Alors la relation : $q^{\mathscr{E}}_\Theta \circ v = \tau_\Theta \circ q^{\mathscr{F}}_\Theta$ définit une application τ_Θ :

$$\mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$$

τ_Θ est linéaire, positive, vérifie $\tau_\Theta(1) = 1$ (c'est-à-dire est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(\mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta ; \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)$ et :

ii) $\quad (\forall \theta \in \Theta)\ (\forall \psi \in \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta) \qquad (\langle \psi, Q^\theta \rangle = \langle \tau_\Theta(\psi), P^\theta \rangle)$

3) Soit $\tau_\Theta : \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$ vérifiant les propriétés ci-dessus. Alors, pour tout $K \in \mathscr{K}$, la relation $q^{\mathscr{E}}_{K\Theta} \circ \tau_\Theta = \tau_K \circ q^{\mathscr{F}}_{K\Theta}$ définit une application τ_K :

$$L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K) \to L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)$$

τ_K est linéaire, positive, vérifie $\tau_K(1) = 1$ (c'est-à-dire est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K) ; L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)))$ et :

iii) $\quad (\forall \theta \in K)\ (\forall \psi \in L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K)) \qquad (\langle \psi, Q^\theta \rangle = \langle \tau_K(\psi), P^\theta \rangle)$

De plus la famille $\{ \tau_K ; K \in \mathscr{K})$ vérifie la relation :

iv) $\quad (\forall (K, K') \in \mathscr{K}^2 ; K \subset K') \; (q^{\mathscr{E}}_{KK'} \circ \tau_{K'} = \tau_K \circ q^{\mathscr{F}}_{KK'})$

4) La relation :

$$(\forall K \in \mathscr{K}) \; (\forall \lambda \in L(\mathscr{E}_K)) \; (\forall \psi \in L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K)) \quad (\langle \tau_K(\psi), \lambda \rangle = \langle \psi, t_K(\lambda) \rangle)$$

définit une correspondance bijective entre les familles d'applications $\{ \tau_K ; L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K) \to L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K) \}$ linéaires, positives, telles que $\tau_K(1) = 1$ et vérifiant les relations *iii)* et *iv)* et les familles d'applications $\{ t_K ; L(\mathscr{E}_K) \to L(\mathscr{F}_K) \}$ linéaires, positives, isométriques sur le cône positif (c'est-à-dire éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}$ $(L(\mathscr{E}_K), L(\mathscr{F}_K)))$ et vérifiant les relations :

v) $\quad (\forall \theta \in K)(t_K(P^\theta) = Q^\theta)$

vi) $\quad (\; (K, K') \in \mathscr{K}^2 ; K \subset K')(t_{K'} \circ a^{\mathscr{E}}_{K'K} = a^{\mathscr{F}}_{K'K} \circ t_K)$

Démonstration. — Résumons sur un schéma les différentes applications du théorème :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \\
\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}) \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{\Theta}"'] & \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B}) \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{\Theta}"] \\
\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{K'\Theta}"'] & \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta \arrow[l, "\tau_\Theta"] \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{K'\Theta}"] \\
L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^{K'}) \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{KK'}"'] & L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^{K'}) \arrow[l, "\tau_{K'}"] \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{KK'}"] \\
L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^{K}) & L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^{K}) \arrow[l, "\tau_{K}"]
\end{tikzcd}$$

passage au transposé

$$\begin{tikzcd}
L(\mathscr{E}_{K'}) \arrow[r, "t_{K'}"'] & L(\mathscr{F}_{K'}) \\
L(\mathscr{E}_{K}) \arrow[r, "t_{K}"'] \arrow[u, "a^{\mathscr{E}}_{K'K}"] & L(\mathscr{F}_{K}) \arrow[u, "a^{\mathscr{F}}_{K'K}"']
\end{tikzcd}$$

1) Evident.

2) La seule partie non évidente est de montrer que $q^{\mathscr{E}}_{\Theta} \circ v$ factorise à travers $q^{\mathscr{F}}_{\Theta}$. Or si $g \in \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})$ est Q^θ-presque sûrement nulle pour tout $\theta \in \Theta$ on à :

$$(\forall \theta \in \Theta) \quad \langle | v(g) |, P^\theta \rangle \leqslant \langle v(| g |), P^\theta \rangle = \langle | g |, Q^\theta \rangle = 0$$

donc :

$$q_{\Theta}^{\mathscr{E}} \circ v(g) = 0.$$

3) Evident.

4) Posons, pour $K \in \mathscr{K}$:

$$\bar{P}^K = \frac{1}{\text{card } K} \sum_{\theta \in K} P^\theta ; \qquad \bar{Q}^K = \frac{1}{\text{card } K} \sum_{\theta \in K} Q^\theta$$

Pour $K \in \mathscr{K}$, soit τ'_K le transposé de τ_K et soit t_K sa restriction à $L(\mathscr{E}_K)$. Il suffit alors de montrer que $t_K(L(\mathscr{E}_K)) \subset L(\mathscr{F}_K)$. Or pour tout élément θ de K on à $t_K(P^\theta) = Q^\theta$, donc $t_K(\bar{P}^K) = \bar{Q}^K$. Soit maintenant une mesure positive μ absolument continue par rapport à $\bar{Q}^K$. Si $B \in \mathscr{B}$ vérifie $\bar{Q}^K(B) = 0$, on à :

$$\bar{Q}^K(B) = \langle q_K^{\mathscr{F}}(1_B), t_K(\bar{P}^K) \rangle = \langle \tau_K(q_K^{\mathscr{F}}(1_B)), \bar{P}^K \rangle = 0$$

donc :

$$t_K(\mu)(B) = \langle q_K^{\mathscr{F}}(1_B), t_K(\mu) \rangle = \langle \tau_K(q_K^{\mathscr{F}}(1_B)), \mu \rangle = 0$$

Ainsi $t_K(\mu)$ est absolument continue par rapport à $\bar{Q}^K$.

C. Q. F. D.

(1.5). DÉFINITIONS

Soient deux expériences $\mathscr{E} = (X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ et $\mathscr{F} = (Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^\Theta)$ indexées par le même Θ.

1) Un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est définit de façon équivalente :

— Par une famille $\{ t_K \in \text{Hom}_{\mathbb{L}} (L(\mathscr{E}_K), L(\mathscr{F}_K)) \}$ vérifiant les relations *v*) et *vi*) du théorème précédent.

— Ou par une famille $\{ \tau_K \in \text{Hom}_{\mathbb{M}} (L^\infty(X ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K) ; L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)) \}$ vérifiant les relations *iii*) et *iv*) du théorème précédent.

2) On appelle morphisme de Morse et Sacksteder (cf. [*8*]) de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ qui peut être définit par un élément $\tau_\Theta \in \text{Hom}_{\mathbb{M}} (\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta, \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)$ vérifiant la condition *ii*) du théorème précédent.

3) On appelle morphisme de Blackwell (cf. [*1*]) de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ qui peut être définit par une application $u : \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B}) \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})$ linéaire, positive, σ-continue pour l'ordre, telle que $u(1) = 1$ et vérifiant la condition *i*) du théorème précédent.

4) On appelle morphisme application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ un morphisme de Blackwell de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ qui peut être défini par une application mesurable u de $(X ; \mathscr{A})$ dans $(Y ; \mathscr{B})$.

(1.6). Etant données deux expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, nous noterons systématiquement dans la suite :

— Un morphisme de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ par une lettre majuscule.

— Les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L(\mathscr{E}_K), L(\mathscr{F}_K))$ qui le définissent par la lettre minuscule correspondante indexée par K.

— Les éléments de $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{M}}}(L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K), L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K))$ qui les définissent par la lettre grecque correspondante indexée par K.

— L'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(\mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta, \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)$ qui le définit si c'est un morphisme de Morse et Sacksteder par la lettre grecque correspondante indexée par Θ.

— Nous noterons $I_{\mathscr{E}}$ le morphisme identite de $\mathscr{E}$, défini par l'application identique de X. Toutes les applications qui le définissent sont des identites.

(1.7). REMARQUES

1) Si $(X ; \mathscr{A})$ et $(Y ; \mathscr{B})$ sont des espaces mesurables, une transition de probabilité de $(X ; \mathscr{A})$ dans $(Y ; \mathscr{B})$ est défini comme une application $V : X \times \mathscr{B} \to [0, 1]$ telle que :

$(\forall x \in X)$, $V(x, .)$ est une probabilité sur $(Y ; \mathscr{B})$
$(\forall B \in \mathscr{B})$, $V(., B)$ est une fonction réelle $\mathscr{A}$-mesurable.

Les formules :

$$\begin{cases} (vf)(x) = \displaystyle\int_Y f(y) V(x, dy) \\ V(x, B) = v(1_B)(x) \end{cases}$$

définissent une correspondance bijective entre les transitions de probabilité V de $(X ; \mathscr{A})$ dans $(Y ; \mathscr{B})$ et les applications

$$v : \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B}) \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})$$

linéaires, positives, σ-continues pour l'ordre et telles que $v(1) = 1$.

Par suite un morphisme de Blackwell de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est un morphisme défini par une transition de probabilité de $(X ; \mathscr{A})$ dans $(Y ; \mathscr{B})$ transportant les P^θ sur les Q^θ.

Remarque. — Un morphisme de Blackwell peut être défini par plusieurs transitions de probabilité différentes.

2) Si $(X ; \mathscr{A})$ et $(Y ; \mathscr{B})$ sont des espaces mesurables et si $\mathscr{P}^\Theta$ est une famille de probabilités sur $(X ; \mathscr{A})$, on appelle $\mathscr{P}^\Theta$-transition de $(X ; \mathscr{A})$ dans $(Y ; \mathscr{B})$ une application $W : \mathscr{B} \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$, linéaire, positive, σ-additive et telle que $W(Y) = 1$ (cf. [3]).

On montre qu'une $\mathscr{P}^\Theta$-transition de $(X ; \mathscr{A})$ dans $(Y ; \mathscr{B})$ est définie de façon équivalente par chacune des applications suivantes :

— Une application $\bar{W} : \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B}) \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$, linéaire, positive, σ-continue pour l'ordre et vérifiant : $\bar{W}(1) = 1$.

— Une famille Q^Θ de probabilités sur $(Y ; \mathscr{B})$ et une application

$$w : \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$$

linéaire, positive, vérifiant $w(1) = 1$ et telle que :

$$(\forall \theta \in \Theta) \ (\forall \psi \in \mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta \quad (\langle \psi, Q^\theta \rangle = \langle w(\psi), P^\theta \rangle))$$

Remarquons qu'une telle application w est nécessairement σ-continue pour l'ordre. En effet soit $\{\psi_n\}$ une suite croissant vers ψ dans $\mathscr{L}^\infty(Y ; \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta$. La suite $\{w(\psi_n)\}$ dans $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$ est croissante et majorée par $w(\psi)$, donc converge vers un élément φ dans $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$. On à $\varphi \leqslant w(\psi)$ et

$$(\forall \theta \in \Theta) \quad \langle w(\psi) - \varphi, P^\theta \rangle = \langle \psi, Q^\theta \rangle - \lim \uparrow \langle \psi_n, Q^\theta \rangle = 0$$

donc $\varphi = w(\psi)$.

Ainsi un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est un morphisme défini par une $\mathscr{P}^\Theta$-transition. Remarquons que dans ce cas la $\mathscr{P}^\Theta$-transition est unique.

3) Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des expériences et si T est un morphisme de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ la même démonstration que celle du lemme (1.3) montre que les applications $\tau_K : L^\infty(Y ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K) \to L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K)$ sont continues pour l'ordre.

(1.8). PROPOSITION

Etant données deux expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ et un morphisme T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, si l'expérience $\mathscr{E}$ est dominée, $\mathscr{F}$ l'est aussi et T est un morphisme de Morse et Sacksteder. Si de plus l'espace X est un espace localement compact à base dénombrable et si $\mathscr{A}$ est sa tribu borélienne, alors T est un morphisme de Blackwell.

Démonstration. — La première partie est démontrée dans l'appendice, la 2^e partie est classique.

(1.9). COMPOSITION DES MORPHISMES

Soient trois expériences

$$\mathscr{E} = (X\,;\mathscr{A}\,;\mathscr{P}^{\Theta}), \qquad \mathscr{F} = (Y\,;\mathscr{B}\,;\mathscr{Q}^{\Theta}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{G} = (Z\,;\mathscr{C}\,;\mathscr{R}^{\Theta})$$

indexées par le même Θ, un morphisme T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et un morphisme S de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$.

Alors la famille

$$\{\, s_K \circ t_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}\,(L(\mathscr{E}_K), L(\mathscr{G}_K))\,;\, K \in \mathscr{K}\,\}$$

définit un morphisme noté $S \circ T$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{G}$.

Le morphisme $S \circ T$ est défini de façon équivalente par la famille

$$\{\, \tau_K \circ \sigma_K \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{M}}}\,(L^{\infty}(Z\,;\mathscr{C}\,;\mathscr{R}^{K}), L^{\infty}(X\,;\mathscr{A}\,;\mathscr{P}^{K}))\,;\, K \in \mathscr{K}\,\}$$

Si S et T sont des morphismes de Morse et Sacksteder, alors $S \circ T$ l'est aussi et est défini par

$$\tau_{\Theta} \circ \sigma_{\Theta} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}\,(\mathscr{L}^{\infty}(Z, \mathscr{C})/\mathscr{R}^{\Theta}, \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta})$$

Si S et T sont des morphismes de Blackwell, définis par des transitions de probabilité U et V, alors $S \circ T$ est aussi un morphisme de Blackwell, défini par la composée des transitions U et V.

Enfin si S et T sont des morphismes applications, $S \circ T$ l'est aussi et est défini par l'application composée.

(1.10). SOUS-EXPÉRIENCE

Définition. — Étant donnée une expérience $\mathscr{E} = (X\,;\mathscr{A}\,;\mathscr{P}^{\Theta})$ on appelle sous-expérience de $\mathscr{E}$ toute expérience $\mathscr{F} = (X\,;\mathscr{B}\,;\mathscr{Q}^{\Theta})$ ou est une sous-tribu de $\mathscr{A}$ et pour tout $\theta \in \Theta$, Q^{θ} est la restriction de P^{θ} à $\mathscr{B}$.

Si $\mathscr{E}$ est une expérience et $\mathscr{F}$ une sous-expérience de $\mathscr{E}$, nous appellerons morphisme restriction, le morphisme statistique R de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ associé à l'application identique de $(X, \mathscr{A})$ dans $(Y, \mathscr{B})$.

Précisons ce morphisme.

— R est défini par l'injection canonique $i: \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{B}) \to \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A})$ (toute fonction $\mathscr{B}$-mesurable est $\mathscr{A}$-mesurable).

— R est défini par l'application ρ_{Θ} définie par le diagramme commutatif dans $\overline{\mathbb{M}}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{B}) & \xrightarrow{\quad i \quad} & \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A}) \\
\big\downarrow{\scriptstyle q_{\Theta}^{\mathscr{F}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle q_{\Theta}^{\mathscr{E}}} \\
\mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{B})/\mathscr{Q}^{\Theta} & \xrightarrow{\quad \rho_{\Theta} \quad} & \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta}
\end{array}$$

— $R = \{ \rho_K ; K \in \mathscr{K} \}$, l'application ρ_K étant définie par le diagramme commutatif dans $\bar{\mathbb{M}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{B}) \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_K"'] & \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}) \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_K"] \\ L^\infty(X ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^K) \arrow[r, "\rho_K"] & L^\infty(X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^K) \end{tikzcd}$$

— $R = \{ \tau_K ; K \in \mathscr{K} \}$ où τ_K est l'application de $L(\mathscr{E}_K)$ dans $L(\mathscr{F}_K)$ qui à toute mesure sur $(X ; \mathscr{A})$ associe sa restriction à $(X ; \mathscr{B})$.

II. EXHAUSTIVITÉ ET MORPHISME DANS LE CAS D'UNE SOUS-EXPÉRIENCE

(II.1). Définitions

Étant donnée une expérience $\mathscr{E} = (X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$, on dira qu'une sous-expérience $\mathscr{F} = (X ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^\Theta)$ est

- exhaustive dans $\mathscr{E}$ si $\mathscr{B}$ est une sous-tribu exhaustive de $\mathscr{A}$ pour la famille $\mathscr{P}^\Theta$ c'est-à-dire si :

$$(\forall f \in \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}))\ (\exists g \in \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{B}))\ (\forall \theta \in \Theta))\ (g \in E_{P^\theta}[f / \mathscr{B}])$$

(il suffit que la condition précédente soit vérifiée pour les fonctions indicatrices $f = 1_A$) ;

— exhaustive par paire dans $\mathscr{E}$ si $\mathscr{B}$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$ exhaustive par paire pour la famille $\mathscr{P}^\Theta$, c'est-à-dire si pour tout élément K de $\mathscr{K}$, $\mathscr{B}$ est une sous-tribu exhaustive de $\mathscr{A}$ pour la famille $\mathscr{P}^K$ (il suffit d'avoir la condition précédente pour les couples d'éléments de Θ (cf. [5])).

(II.2). Soient une expérience $\mathscr{E} = (X ; \mathscr{A} ; \mathscr{P}^\Theta)$ et une sous-expérience $\mathscr{F} = (X ; \mathscr{B} ; \mathscr{Q}^\Theta)$ de $\mathscr{E}$.

1) Supposons $\mathscr{F}$ exhaustive dans $\mathscr{E}$. La version commune des expériences conditionnelles définit une application

$$E^{\mathscr{B}}_\Theta : \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}) \to \mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{B}) / \mathscr{Q}^\Theta$$

qui factorise à travers $q^{\mathscr{E}}_\Theta$. Notons ε_Θ l'application de $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{A}) / \mathscr{P}^\Theta$ dans $\mathscr{L}^\infty(X ; \mathscr{B}) / \mathscr{Q}^\Theta$ définie par $E^{\mathscr{E}}_\Theta = \varepsilon_\Theta \circ q^{\mathscr{E}}_\Theta$.

Il est clair que ε_Θ définit un morphisme de Morse et Sacksteder E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$, caractérisé de façon unique par la relation :

$$i) \quad (\forall \varphi \in \mathscr{L}^\infty(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)\ (\forall \psi \in \mathscr{L}^\infty(X\,;\mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta)\ (\varepsilon_\Theta(\rho_\Theta(\psi).\varphi) = \psi.\varepsilon_\Theta(\varphi))$$

Inversement l'existence d'un tel morphisme entraîne évidemment l'exhaustivité de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

Le morphisme de Morse et Sacksteder sera appelé morphisme d'exhaustivité.

2) Si $\mathscr{F}$ est exhaustive par paires dans $\mathscr{E}$, alors, avec les notations précédentes, la famille $\{\varepsilon_K\,;\,K \in \mathscr{K}\}$ définit un morphisme E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$, caractérisé de façon unique par les relations :

$$ii) \quad (\forall K \in \mathscr{K})\ (\forall \varphi \in L^\infty(X\,;\mathscr{A}\,;\mathscr{P}^K))\ (\forall \psi \in L^\infty(X\,;\mathscr{B}\,;\mathscr{Q}^K))$$
$$(\varepsilon_K(\rho_K(\psi).\varphi) = \psi.\varepsilon_K(\varphi))$$

Inversement l'existence d'un tel morphisme entraîne l'exhaustivité par paire de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

Le morphisme E sera appelé morphisme d'exhaustivité.

(II.3). LEMME

Soient une expérience $\mathscr{E} = (X\,;\mathscr{A}\,;\mathscr{P}^\Theta)$ une sous-expérience

$$\mathscr{F} = (X\,;\mathscr{B}\,;\mathscr{Q}^\Theta)$$

et une application $\varepsilon_\Theta : \mathscr{L}^\infty(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta \to \mathscr{L}^\infty(X\,;\mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta$ linéaire, positive, conservant 1 et telle que :

$$(\forall \theta \in \Theta)\ (\forall \varphi \in \mathscr{L}^\infty(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)\ (\langle \varphi, P^\theta \rangle = \langle \varepsilon_\Theta(\varphi), Q^\theta \rangle)$$

Alors les deux propositions suivantes

$$a) \quad (\forall \theta \in \Theta)\ (\forall \varphi \in \mathscr{L}^\infty(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)\ (\forall \psi \in \mathscr{L}^\infty(X\,;\mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta)$$
$$(\varepsilon_\Theta(\varphi.\rho_\Theta(\psi)) = \psi.\varepsilon_\Theta(\varphi))$$

$$b) \quad \varepsilon_\Theta \circ \rho_\Theta = y_\Theta^{\mathscr{F}} \qquad (y = \text{i-grec, cf. (I.5)})$$

Dans le cas d'une seule probabilité, ce résultat est classique. La démonstration suivante n'utilise pas la σ-additivité des P^θ.

Démonstration.

a) $\Rightarrow$ *b)* Évident en prenant $\varphi = 1$ dans la relation *a)*.

b) $\Rightarrow$ *a*) Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{B}) \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{\Theta}"'] \arrow[dr, "q^{\mathscr{E}}_{\Theta}=\rho_{\Theta}\circ q^{\mathscr{F}}_{\Theta}"] & \\
\mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta} \arrow[r, "e_{\Theta}"] & \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{B})/\mathscr{Q}^{\Theta} \arrow[r, "\rho_{\Theta}"] & \mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta}
\end{tikzcd}$$

La condition *b*) entraîne que ρ_{Θ} $(\mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{B})/\mathscr{Q}^{\Theta})$ est l'ensemble des invariants de l'opérateur $\rho_{\Theta}\circ e_{\Theta}$.

Si $\varphi\in\mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta}$ et $B\in\mathscr{B}$ vérifient $\varphi\,.\,q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_B)=0$ alors

$$e_{\Theta}(\varphi)\,.\,q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_B)=0.$$

En effet, on a : $\varphi=\varphi q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_B)$, donc $|\,\varphi\,|\leqslant\|\,\varphi\,\|_{\infty}q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_B)$ et par suite

$$|\,e_{\Theta}(\varphi)\,|\leqslant\|\,\varphi\,\|_{\infty}q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_B)$$

et le résultat s'en déduit en multipliant par $q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_B)$.

Soient

$$\varphi\in\mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta}\qquad\text{et}\qquad B\in\mathscr{B}$$

Si $\varphi_1=\varphi\,.\,q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_B)$, alors $\varphi_1\,.\,q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_B)=0$, donc $e_{\Theta}(\varphi_1)\,.\,q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_B)=0$.

Si $\varphi_2=\varphi\,.\,q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_B)$, alors $\varphi_2\,.\,q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_{\bar{B}})=0$, donc $e_{\Theta}(\varphi_2)\,.\,q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_{\bar{B}})=0$, ce qui entraîne

$$e_{\Theta}(\varphi_2)=e_{\Theta}(\varphi_2)q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_B)$$

Par suite

$$e_{\Theta}(\varphi)q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_B)=e_{\Theta}(\varphi\,.\,q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_B)).$$

La formule précédente démontrée pour les fonctions indicatrices, s'étend par linéarité aux fonctions $\mathscr{B}$-étagées puis par limites uniformes à $\mathscr{L}^{\infty}(X\,;\mathscr{B})$.

(II.4). Proposition

Soient une expérience $\mathscr{E}$ et une sous-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$, et un morphisme E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

1) Si E est un morphisme de Morse et Sacksteder, pour que $\mathscr{F}$ soit exhaustive dans $\mathscr{E}$ et que E soit le morphisme d'exhaustivité, il faut et il suffit que $R\circ E=I_{\mathscr{F}}$.

2) Pour que $\mathscr{F}$ soit exhaustive par paire dans $\mathscr{E}$ et que E soit le morphisme d'exhaustivité il faut et il suffit que

$$R\circ E=I_{\mathscr{F}'}$$

(R est le morphisme restriction de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et $I_{\mathscr{F}}$ le morphisme identité de $\mathscr{F}$ (cf. I.6)).

Démonstration. — La proposition résulte immédiatement du lemme précédent.

COROLLAIRE. — Soient une expérience $\mathscr{E}$ et une sous-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$.

1) Pour que $\mathscr{F}$ soit exhaustive dans $\mathscr{E}$ il faut et il suffit qu'il existe un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ tel que $R \circ E = I_{\mathscr{F}}$.

2) Pour que $\mathscr{F}$ soit exhaustive par paire dans $\mathscr{E}$, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ tel que $R \circ E = I_{\mathscr{F}}$.

3) L'exhaustivité de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ entraîne l'exhaustivité par paires. Si $\mathscr{E}$ est dominée, l'exhaustivité par paires de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ entraîne l'exhaustivité.

Démonstration.

1) et 2) Évident.

3) Résulte de la première partie de la proposition (I.8).

C. Q. F. D.

(II.5). PROPOSITION

Soient une expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ et une sous-expérience $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$ de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E}$ est dominée et si

$$\bar{P} = \sum_n c_n P^{\theta_n}$$

est une dominante privilégiée de la famille $\mathscr{P}^\Theta$, alors

$$\bar{Q} = \sum_n c_n Q^{\theta_n}$$

est une dominante privilégiée de la famille $\mathscr{Q}^\Theta$, et, pour que $\mathscr{F}$ soit exhaustive dans $\mathscr{E}$ il faut et il suffit que

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad \bar{\rho}\left(\frac{dQ^\theta}{d\bar{Q}}\right) = \frac{dP^\theta}{d\bar{P}}$$

où

$$\bar{\rho} : L^1(X, \mathscr{B}, \bar{Q}) \to L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P})$$

est l'injection canonique.

Démonstration. — Voir [5].

COROLLAIRE. — Soient une expérience $\mathscr{E}$, une sous-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ et une sous-expérience $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$. Si l'expérience $\mathscr{E}$ est dominée, et si $\mathscr{G}$ est exhaustive dans $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{F}$ est exhaustive dans $\mathscr{E}$.

Démonstration. — Évident.

(II.6). THÉORÈME

Soient une expérience $\mathscr{E}$ et une sous-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$.

1) L'exhaustivité par paires de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ est équivalente à l'existence d'un morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

2) Si $\mathscr{E}$ est dominée, l'exhaustivité de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ est équivalente à l'existence d'un morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

Démonstration. — Si $\mathscr{F}$ est exhaustive dans $\mathscr{E}$, on a le morphisme d'exhaustivité de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$. Inversement soit T un morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

Pour $K \in \mathscr{K}$, posons

$$\bar{P}_K = \frac{1}{\operatorname{card}(K)} \sum_{\theta \in K} P^\theta, \qquad \bar{Q}_K = \frac{1}{\operatorname{card}(K)} \sum_{\theta \in K} Q^\theta$$

L'élément

$$\tau_K \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{M}} (L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K),\ L^\infty(X, \mathscr{B}, \bar{Q}_K))$$

vérifie

$$(\forall \varphi \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)) \qquad \langle \tau_K(\varphi), \bar{Q}_K \rangle = \langle \varphi, \bar{P}_K \rangle$$

donc peut se prolonger en un élément $\tilde{\tau}_K$ de

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{L}} (L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K),\ L^1(X, \mathscr{B}, \bar{Q}_K))$$

(en posant, pour toute suite croissante φ_n dans $L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$ croissant vers

$$f \in L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K), \qquad \tilde{\tau}_K(f) = \lim_n \uparrow \tau_K(\varphi_n))$$

De même ρ_K peut se prolonger en un élément $\tilde{\rho}_K$ de

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{L}} (L^1(X, \mathscr{B}, \bar{Q}_K),\ L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K))$$

On peut donc appliquer le théorème ergodique en moyenne à l'opérateur $\tilde{\rho}_K \circ \tilde{\tau}_K$ sur $L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$ (cf. [4], cor. 5, p. 662): pour tout $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$ la suite

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{\rho}_K \circ \tilde{\tau}_K)^i(f) \right\}$$

converge dans $L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$.

La limite définit un opérateur sur $L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$ idempotent et qui est évidemment de la forme $\tilde{\rho}_K \circ \tilde{\sigma}_K$ où $\tilde{\sigma}_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L^1(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K), L^1(X, \mathscr{B}, \bar{Q}_K))$.

On vérifie facilement que la restriction σ_K de $\tilde{\sigma}_K$ à $L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$ définit un morphisme S_K de $\mathscr{F}_K$ dans $\mathscr{E}_K$.

Soit $\mathscr{I}_K$ l'ensemble des invariants de l'opérateur $\rho_K \circ \sigma_K$ sur $L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$ C'est un sous-treillis vectoriel: si $\varphi \in \mathscr{I}_K$ on a

$$\rho_K \circ \sigma_K(\varphi^+) \geqslant (\rho_K \circ \sigma_K(\varphi))^+ = \varphi^+$$

d'où l'égalité puisque $\rho_K \circ \sigma_K$ est isométrique sur le cône positif.

De plus il est σ-complet pour l'ordre, et contenu dans $\rho_K(L^\infty(X, \mathscr{B}, \bar{Q}_K))$ puisque $\rho_K \circ \sigma_K$ est idempotent.

Par suite $\mathscr{C}_K = \{ B \in \mathscr{B} ; q_K^{\mathscr{F}}(1_B \in \mathscr{I}_K) \}$ est une σ-algèbre.

Soient l'expérience $\mathscr{G}_K = (X, \mathscr{C}_K, \mathscr{R}^K)$ où $\mathscr{R}^K$ est la famille des restrictions R^θ de Q^θ à $\mathscr{C}_K$, $\theta \in K$, $\bar{R}_K$ la restriction de $\bar{Q}_K$ à $\mathscr{C}_K$, et

$$\rho'_K : L^\infty(X, \mathscr{C}_K, \bar{R}_K) \to L^\infty(X, \mathscr{B}, \bar{Q}_K)$$

l'injection canonique. On a

$$\mathscr{I}_K = \rho_K \circ \rho'_K(L^\infty(X, \mathscr{C}_K, \bar{R}_K).$$

Par suite, il existe

$$\sigma'_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K), L^\infty(X, \mathscr{C}_K, \bar{R}_K))$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K) \arrow[r, "\sigma_K"] \arrow[dr, "\sigma'_K"'] & L^\infty(X, \mathscr{B}, \bar{Q}_K) \arrow[r, "\rho_K"] & L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K) \\
 & L^\infty(X, \mathscr{C}_K, \bar{R}_K) \arrow[u, "\rho'_K"'] &
\end{tikzcd}$$

et, pour $\theta \in K$ et $\varphi \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_K)$ on a

$$\langle \sigma'_K(\varphi), P^\theta \rangle = \langle \varphi'_K \circ \sigma'_K(\varphi), Q^\theta \rangle = \langle \sigma_K(\varphi), Q^\theta \rangle = \langle \sigma, P^\theta \rangle$$

donc σ'_K définit un morphisme S'_K de $\mathscr{G}_K$ dans $\mathscr{E}$.

De plus on a $R'_K \circ S'_K = I_{G_K}$

$$\langle \sigma'_K(\varphi), P^\theta \rangle = \langle \rho'_K \circ \sigma'_K(\varphi), Q^\theta \rangle = \langle \sigma_K(\varphi), Q^\theta \rangle = \langle \varphi, P^\theta \rangle$$

donc comme $\rho_K \circ \rho'_K$ est injective, $\sigma'_K \circ \rho_K \circ \rho'_K = \rho_K \circ \rho'_K$.

On en déduit (proposition II.4) que $\mathscr{G}_K$ est exhaustive dans $\mathscr{E}_K$, donc, comme $\mathscr{E}_K$ est dominée, $\mathscr{F}_K$ est exhaustive dans $\mathscr{E}_K$, ce qui démontre la deuxième partie du théorème. Si $\mathscr{E}$ est dominée, le corollaire (II.4) entraîne l'exhaustivité de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

Remarque. — Soit $K \subset K'$ dans $\mathscr{K}$.

Si $B \in \mathscr{C}_{K'}$, c'est-à-dire si $B \in \mathscr{B}$ et $q^{\mathscr{E}}_{K'}(1_B) \in \mathscr{I}_{K'}$ alors $q^{\mathscr{E}}_{KK'} \circ q^{\mathscr{E}}_{K'}(1_B) \in \mathscr{I}_K$ donc $\mathbb{B} \in \mathscr{C}_K$.

Inversement on a :

$$(\forall f \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P}_{K'}))\ (\forall \theta \in K),\ \langle f, P^\theta \rangle = \langle \sigma'_{K'}(f), R^\theta \rangle$$

donc, à cause de l'unicité du morphisme d'exhaustivité $q_{KK'} \circ \sigma'_{K'} = \sigma_K$ et par suite $\mathscr{C}_K \subset \mathscr{C}_{K'} \vee \mathscr{N}_K$, où $\mathscr{N}_K = \{ B \in \mathscr{B},\ \forall \theta \in K,\ P^\theta(B) = 0 \}$. Donc $\mathscr{C}_K = \mathscr{C}_{K'} \vee \mathscr{N}_K$.

Notons $\mathscr{C}$ la tribu $\mathscr{C} = \bigcap_{K \in \mathscr{K}} \mathscr{C}_K$. Elle est exhaustive par paire dans $\mathscr{A}$ pour la famille $\mathscr{P}^\Theta$. Si l'expérience $\mathscr{E}$ est dominée, $\mathscr{C}$ est exhaustive dans $\mathscr{A}$ pour la famille $\mathscr{P}^\Theta$. On aurait pu construire directement la tribu $\mathscr{C}$ en faisant la démonstration précédente sur l'espace $L^\infty(X, \mathscr{A}, \bar{P})$.

Remarque. — Sans la condition de domination la deuxième partie du théorème précédent est faux, même avec un morphisme de Morse et Sacksteder. En effet dans [*2*], on trouve un exemple d'expérience

$$\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$$

où la famille $\mathscr{P}^\Theta$ n'est pas dominée, avec des sous-tribus $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ telles que $\mathscr{C}$ est exhaustive dans $\mathscr{A}$ et pas $\mathscr{B}$. Alors si $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$ et $\mathscr{G} = (X, \mathscr{C}, \mathscr{R}^\Theta)$ et si R est le morphisme de restriction de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ et E le morphisme d'exhaustivité de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{E}$, alors $E \circ R$ est un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ n'est pas exhaustive dans $\mathscr{E}$.

III. EXHAUSTIVITÉ ET MORPHISME DANS LE CAS GÉNÉRAL

(III.1). Soient deux expériences $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ et $\mathscr{F} = (Y, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$, et un morphisme T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Considérons le diagramme suivant, pour $K \subset K'$ dans $\mathscr{K}$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}) \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{K'}"'] & \mathscr{L}^{\infty}(Y, \mathscr{B}) \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{K'}"] \\
L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^{K'}) \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{KK'}"'] & L^{\infty}(Y, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^{K'}) \arrow[l, "\tau_{K'}"'] \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{KK'}"] \\
L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^{K}) & L^{\infty}(Y, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^{K}) \arrow[l, "\tau_{K}"']
\end{tikzcd}$$

On a :

$$\tau_K \circ q^{\mathscr{F}}_K = \tau_K \circ q^{\mathscr{F}}_{KK'} \circ q^{\mathscr{F}}_{K'} = q^{\mathscr{E}}_{KK'} \circ \tau_{K'} \circ q^{\mathscr{F}}_{K'}$$

et

$$q^{\mathscr{E}}_K = q^{\mathscr{E}}_{KK'} \circ q^{\mathscr{E}}_{K'}$$

Donc, pour

$$\theta \in K \subset K', \qquad A \in \mathscr{A}, \qquad B \in \mathscr{B}$$

on a :

$$\langle P^{\theta}, \tau_K \circ q^{\mathscr{F}}_K(1_B) q^{\mathscr{E}}_K(1_A) \rangle = \langle P^{\theta}, \tau_{K'} \circ q^{\mathscr{F}}_{K'}(1_B) q^{\mathscr{E}}_{K'}(1_A) \rangle$$

Par suite, comme les applications considérées sont linéaires, positives et conservent l'unité, on peut définir pour tout $\theta \in \Theta$ un contenu positif unitaire R^{θ} sur l'algèbre sur $X \times Y$ engendré par $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ par la formule.

$(\forall A \in \mathscr{A})\ (\forall B \in \mathscr{B}) \qquad R^{\theta}(A \times B)$

$$= \langle P^{\theta}, \tau_K \circ q^{\mathscr{F}}_K(1_B) q^{\mathscr{E}}_K(1_A) \rangle \qquad \text{si} \qquad \theta \in K$$

Définitions

1) On appelle pseudo-expérience un triplet $\mathscr{G} = (Z, \mathscr{C}, \mathscr{R}^{\Theta})$ où $(Z, \mathscr{C})$ est un espace prémesurable c'est-à-dire un couple formé d'un ensemble et d'un clan unitaire sur cet ensemble et $\mathscr{R}^{\Theta} = \{ R^{\theta} ; \theta \in \Theta \}$ une famille de contenus positifs unitaires sur $(Z, \mathscr{C})$.

2) Étant données deux expériences $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^{\Theta})$ et $\mathscr{F} = Y, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^{\Theta})$ et un morphisme T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, on appelle expérience produit de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ par T la pseudo-expérience $\mathscr{G} = (Z, \mathscr{C}, \mathscr{R}^{\Theta})$ où $Z = X \times Y$, $\mathscr{C}$ est l'algèbre sur Z engendrée par $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, et pour $\theta \in \Theta$, R^{θ} est le contenu sur $(Z, \mathscr{C})$ défini précédemment.

(III.2). Lemme

Soient un espace prémesurable $(X, \mathscr{A})$, une sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$, et un contenu positif unitaire P sur $(X, \mathscr{A})$ dont la restriction Q à $\mathscr{B}$ est une probabilité. Alors on peut définir une application « espérance conditionnelle » $E^{\mathscr{B}}_P : \mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}) \to L^{\infty}(X, \mathscr{B}, Q)$ par la relation :

$$(\forall f \in \mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}))\ (\forall B \in \mathscr{B}) \qquad \langle P, 1_B f \rangle = \langle Q, q(1_B) E^{\mathscr{B}}_P(f) \rangle$$

ou $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ est l'ensemble des limites uniformes de fonctions réelles $\mathscr{A}$ étagées et $q: \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B}) \to L^\infty(X, \mathscr{B}, Q)$ est l'application de passage au quotient (il suffit d'avoir la relation précédente pour toute fonction indiciaire $f = 1_A$).

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si f est un élément de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ l'application $A \to \langle P, 1_A f \rangle$ définit un contenu positif fP sur $\mathscr{A}$, dont la restriction à $\mathscr{B}$ est une mesure absolument continue par rapport à Q et de prendre

$$E_P^{\mathscr{B}}(f) = \frac{d[fP/\mathscr{B}]}{dQ}$$

(III.3). DÉFINITION

Soient une pseudo-expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ et une sous-expérience $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$ de $\mathscr{E}$. Nous dirons que $\mathscr{F}$ est

— exhaustive dans $\mathscr{E}$ si

$$(\forall f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}))\ (\exists g \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B}))\ (\forall \theta \in \Theta) \qquad g \in E_{P^\theta}^{\mathscr{B}}(f)$$

— exhaustive par paire dans $\mathscr{E}$ si pour toute partie finie K de $\mathscr{K}$, $\mathscr{F}_K$ est exhaustive dans $\mathscr{E}_K$.

Remarque. — Au chapitre IV on généralisera la notion de morphisme au cas des pseudo-expériences donc la notion de morphisme d'exhaustivité en utilisant l'application $\varepsilon_\theta: \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$ dans $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta$ où $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$ est encore l'espace quotient de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ par la relation d'équivalence d'égalité P^θ presque sûre pour tout $\theta \in \Theta$ définie comme dans le cas des expériences.

(III.4). THÉORÈME

Soient deux expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) il existe une pseudo-expérience $\mathscr{G}$ dont $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont sous-expériences telles que $\mathscr{E}$ soit exhaustive dans $\mathscr{G}$,

b) il existe un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Démonstration

a) $\Rightarrow$ *b*) La version commune des espérances conditionnelles définit une application

$$E_\Theta^{\mathscr{A}}: \mathscr{L}^\infty(Z, \mathscr{C}) \to \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$$

Si $i: \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B}) \to \mathscr{L}^\infty(Z, \mathscr{C})$ est l'injection canonique, l'application $E^{\mathscr{A}}_{\Theta} \circ i$ factorise à travers l'application $q^{\mathscr{F}}_{\Theta}$. Il est facile de voir que la formule $E^{\mathscr{A}}_{\Theta} \circ i = \tau_\Theta \circ q^{\mathscr{F}}_{\Theta}$ définit un élément

$$\tau_\Theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(\mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta, \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)$$

vérifiant la relation *ii*) de (I.4), c'est-à-dire un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

b) $\Rightarrow$ *a*) Soit T un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{G} = (Z, \mathscr{C}, \mathscr{R}^\Theta)$ l'expérience produit de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ par T. Pour $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$, posons $w(1_{A\times B}) = q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(1_A).\tau_\Theta.q^{\mathscr{F}}_{\Theta}(1_B)$. L'application ainsi définie sur les fonctions indicatrices de $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ peut se prolonger par linéarité aux fonctions indicatrices de $\mathscr{C}$. Alors si $C \in \mathscr{C}$ tout élément f de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ tel que $q^{\mathscr{E}}_{\Theta}(f) = w(1_C)$ vérifie la relation

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad f \in E^{\mathscr{A}}_{P\theta}(1_C)$$

Donc $\mathscr{E}$ est exhaustive dans $\mathscr{G}$.

(III.5). Théorème

Soient deux expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) il existe une pseudo-expérience $\mathscr{G}$ dont $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont sous-expériences telle que $\mathscr{E}$ soit exhaustive par paire dans $\mathscr{G}$,

b) il existe un morphisme de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Démonstration

a) $\Rightarrow$ *b*) Pour toute partie finie K de Θ, $\mathscr{E}_K$ est exhaustive dans $\mathscr{F}_K$ et $\mathscr{G}_K$ et (démonstration du théorème précédent) la version commune des espérances conditionnelles définit un morphisme T_K de $\mathscr{E}_K$ dans $\mathscr{F}_K$. On vérifie facilement que la famille $\{\tau_K, K \in \mathscr{K}\}$ vérifie la condition *iv* de (I.4) donc définit un morphisme T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

b) $\Rightarrow$ *a*) Soit T un morphisme de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et soit $\mathscr{G}$ la pseudo-expérience produit de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ par T. Pour toute partie finie K de Θ, l'application τ_K définit un morphisme de Morse et Sacksteder T_K de $\mathscr{E}_K$ dans $\mathscr{F}_K$ donc (démonstration du théorème précédent) $\mathscr{E}_K$ est exhaustive dans la pseudo-expérience produit de $\mathscr{E}_K$ et $\mathscr{F}$ par T_K qui est identique à $\mathscr{G}_K$. Par suite $\mathscr{E}$ est exhaustive par paire dans $\mathscr{G}$.

IV. EXTENSION

Ce chapitre est destiné à faire le lien avec les notions d'expériences et morphismes introduites par Le Cam [6].

(IV.1). Objets associés a une expérience ou une pseudo-expérience

La notion de pseudo-expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ a déjà été introduite [6]. Par analogie avec le chapitre premier, on introduit dans ce cas :

— le M-espace $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ formé des limites uniformes de fonctions $\mathscr{A}$-étagées,

— l'idéal N des fonctions P^θ-presque sûrement nulle pour tout θ,

— le M-espace $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$, quotient de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ par N et l'application de passage au quotient $q_\Theta^\mathscr{E}$ de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ dans $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$, qui est un morphisme de $\mathbb{M}$, surjectif.

Les définitions suivantes, dans le cas d'une expérience $\mathscr{E}$, n'ont été introduites que pour les expériences réduites $\mathscr{E}_K$. Ici on peut aussi bien les introduire dans le cas général :

— la bande $L(\mathscr{E})$ engendrée par la famille $\mathscr{P}^\Theta$ dans le L-espace dual de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$, qui est l'ensemble des contenus bornés sur $(X, \mathscr{A})$,

— le dual $M(\mathscr{E})$ de $L(\mathscr{E})$, qui est un $\bar{M}$-espace ; le M-espace $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta$ n'est pas nécessairement un $\bar{M}$-espace, donc n'est pas isomorphe à $M(\mathscr{E})$,

— l'injection $\gamma_\Theta^\mathscr{E} \in \mathrm{Hom}_\mathbb{M}(\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta, M(\mathscr{E}))$, définie par

$$(\forall \lambda \in L(\mathscr{E})), \ (\forall f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta), \qquad \langle \lambda, \gamma_\Theta^\mathscr{E}(f) \rangle = \langle \lambda, f \rangle$$

Pour toute partie finie K de Θ, on définit de même la pseudo-expérience réduite $\mathscr{E}_K = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^K)$, où $\mathscr{P}^K = \{ P^\theta, \theta \in K \}$ et les éléments associés à $\mathscr{E}_K$.

Pour $K \subset K' \subset \Theta$, soient :

— $q_{KK'}^\mathscr{E} \in \mathrm{Hom}_\mathbb{M}(\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{K'}, \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^K)$ l'application de passage au quotient,

— $a_{K'K}^\mathscr{E} \in \mathrm{Hom}_\mathbb{L}(L(\mathscr{E}_K), L(\mathscr{E}_{K'}))$, l'injection canonique,

— $\alpha_{KK'}^\mathscr{E} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{M}}}(M(\mathscr{E}_{K'}), M(\mathscr{E}_K))$ la transposée de $a_{K'K}^\mathscr{E}$.

On a

$$\gamma_K^\mathscr{E} \circ q_{KK'}^\mathscr{E} = \alpha_{KK'}^\mathscr{E} \circ q_{K'}^\mathscr{E}$$

(IV.2). Théorème

Soit $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ une pseudo-expérience. Si pour tout $K \in \mathscr{K}$,

$a_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}}$ est l'injection canonique de $\mathrm{L}(\mathscr{E}_{\mathrm{K}})$ dans $\mathrm{L}(\mathscr{E})$ et $\alpha_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}}$ sa transposée, alors on a :

$$(\mathrm{L}(\mathscr{E}), a_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}} ; \mathscr{K}) = \varinjlim (\mathrm{L}(\mathscr{E}_{\mathrm{K}}), a_{\mathrm{K'K}}^{\mathscr{E}} ; \mathscr{K}) \text{ dans } \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{B}$$

$$(\mathrm{M}(\mathscr{E}), \alpha_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}} ; \mathscr{K}) = \varprojlim (\mathrm{M}(\mathscr{E}_{\mathrm{K}}), \alpha_{\mathrm{KK'}}^{\mathscr{E}} ; \mathscr{K}) \text{ dans } \bar{\mathbb{M}}, \mathbb{M} \text{ et } \mathbb{B}$$

Démonstration. — Le théorème résulte immédiatement de la proposition (A.5).

COROLLAIRE

— On a $\gamma_{\Theta}^{\mathscr{E}} = \lim \gamma_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}} \circ s_{\mathrm{K}\Theta}^{\mathscr{E}}$ dans $\mathbb{M}$, et $\gamma_{\Theta}^{\mathscr{E}}$ est un élément injectif de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(\mathscr{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta}, \mathrm{M}(\mathscr{E}))$.
— Si $\mathscr{E}$ est une expérience dominée, $\gamma_{\Theta}^{\mathscr{E}}$ est un isomorphisme.
— Si $\mathscr{E}$ est une expérience, alors on a :

$$(\mathrm{M}(\mathscr{E}), (\gamma_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}})^{-1} \circ \alpha_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}} ; \mathscr{K}) = \varprojlim (\mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mathscr{P}^{\mathrm{K}}), q_{\mathrm{KK'}}^{\mathscr{E}} ; \mathscr{K}) \text{ dans } \mathbb{M} \text{ et } \mathbb{B}$$

En effet si $\mathscr{E}$ est une expérience dominée, $\mathrm{L}(\mathscr{E})$ est isomorphe à $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \bar{\mathrm{P}})$, où $\bar{\mathrm{P}}$ est une dominante privilégiée de $\mathscr{P}^{\Theta}$, donc $\mathrm{M}(\mathscr{E})$ est isomorphe à $\mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \bar{\mathrm{P}}) = \mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta}$. La dernière relation résulte du fait que si $\mathscr{E}$ est une expérience, les $\gamma_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}}$ sont des isomorphismes.

(IV.3). On obtient ainsi, pour $\mathrm{K} \subset \mathrm{K'} \subset \Theta$, le diagramme commutatif suivant dans $\mathbb{M}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A}) \arrow[d, "q_{\Theta}^{\mathscr{E}}"'] & \\
\mathscr{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{\Theta} \arrow[r, "\gamma_{\Theta}^{\mathscr{E}}"] \arrow[d, "q_{\mathrm{K'}\Theta}^{\mathscr{E}}"'] & \mathrm{M}(\mathscr{E}) \arrow[d, "\alpha_{\mathrm{K'}}^{\mathscr{E}}"] \\
\mathscr{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{\mathrm{K'}} \arrow[r, "\gamma_{\mathrm{K'}}^{\mathscr{E}}"] \arrow[d, "q_{\mathrm{KK'}}^{\mathscr{E}}"'] & \mathrm{M}(\mathscr{E}_{\mathrm{K'}}) \arrow[d, "\alpha_{\mathrm{KK'}}^{\mathscr{E}}"] \\
\mathscr{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{\mathrm{K}} \arrow[r, "\gamma_{\mathrm{K}}^{\mathscr{E}}"] & \mathrm{M}(\mathscr{E}_{\mathrm{K}})
\end{tikzcd}$$

Morphismes statistiques

Soient $\mathscr{E} = (\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mathscr{P}^{\Theta})$ et $\mathscr{F} = (\mathrm{Y}, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^{\Theta})$ deux expériences. On a défini au chapitre I un morphisme statistique T, soit par une famille $\{ t_{\mathrm{K}} ; \mathrm{K} \in \mathscr{K} \}$ de morphismes de $\mathbb{L}$, soit, de façon équivalente, par une famille $\{ \tau_{\mathrm{K}} ; \mathrm{K} \in \mathscr{K} \}$ de morphismes de $\bar{\mathbb{M}}$. Nous allons en donner ici une caractérisation « au sommet ».

(IV.4). PROPOSITION

Soient deux expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est caractérisé par un élément t de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(\mathrm{L}(\mathscr{E}), \mathrm{L}(\mathscr{F}))$, vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta), \qquad t(\mathrm{P}^\theta) = \mathrm{Q}^\theta$$

Démonstration. — Soit $\{ t_\mathrm{K} ; \mathrm{K} \in \mathscr{K} \}$ définissant T (cf. (I.5)). Alors $t = \varinjlim t_\mathrm{K}$ satisfait aux conditions désirées.

Inversement soit t vérifiant les propriétés ci-dessus; alors, d'après le lemme (A.4), pour tout élément K de $\mathscr{K}$, $t \circ a_\mathrm{K}^{\mathscr{E}}$ factorise à travers $a_\mathrm{K}^{\mathscr{F}}$, on peut donc définir t_K par $t \circ a_\mathrm{K}^{\mathscr{E}} = a_\mathrm{K}^{\mathscr{F}} \circ t_\mathrm{K}$, et on vérifie que $\{ t_\mathrm{K} ; \mathrm{K} \in \mathscr{K} \}$ définit un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, pour lequel $t = \varinjlim t_\mathrm{K}$.

(IV.5). PROPOSITION

Soient deux expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est caractérisé par un élément $\bar{\tau}$ de $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{M}}}(\mathrm{M}(\mathscr{F}), \mathrm{M}(\mathscr{E}))$, vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta), \ (\forall \psi \in \mathrm{M}(\mathscr{F})) \qquad \langle \mathrm{P}^\theta, \bar{\tau}(\psi) \rangle = \langle \mathrm{Q}^\theta, \psi \rangle$$

Démonstration. — Soit $\{ \tau_\mathrm{K} ; \mathrm{K} \in \mathscr{K} \}$ définissant T (cf. (I.5)). Alors $\bar{\tau} = \varprojlim \tau_\mathrm{K}$ vérifie les propriétés désirées.

Inversement soit $\bar{\tau}$ vérifiant les propriétés ci-dessus ; on définit $t \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(\mathrm{L}(\mathscr{E}), \mathrm{L}(\mathscr{F}))$ par :

$$\mathrm{D}^*(\mathrm{M}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\bar{\tau}} \mathrm{M}(\mathscr{E})) = (\mathrm{L}(\mathscr{E}) \xrightarrow{t} \mathrm{L}(\mathscr{F}))$$

et, en utilisant la proposition précédente, on vérifie que t définit un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

(IV.6). PROPOSITION

Soient deux expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, et un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. Pour que T soit un morphisme de Morse et Sacksteder, il faut et il suffit que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

1) t est continue pour la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{\boldsymbol{\Theta}}$ et sur $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{Y}, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^{\boldsymbol{\Theta}}$,

2) $\bar{\tau} \circ \gamma_{\boldsymbol{\Theta}}^{\mathscr{F}} = \gamma_{\boldsymbol{\Theta}}^{\mathscr{E}} \circ \tau_{\boldsymbol{\Theta}}$.

Démonstration. — Évident.

Dans les propositions (IV.4) et (IV.5), on retrouve les objets introduits par Le Cam [*6*].

(IV.7). Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des pseudo-expériences, on définit un morphisme statistique de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ par sa caractérisation « au sommet »:

Définition. — Soient deux pseudo-expériences $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ et $\mathscr{F} = (Y, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$.

— Un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est défini par un élément $\bar{\tau}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(M(\mathscr{F}), M(\mathscr{E}))$, vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta), (\forall \psi \in M(\mathscr{F})), \qquad \langle P^\theta, \bar{\tau}(\psi) \rangle = \langle Q^\theta, \psi \rangle$$

— Un morphisme de Morse et Sacksteder de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ tel que $\bar{\tau} \circ \gamma_\Theta^{\mathscr{F}}$ factorise à travers $\gamma_\Theta^{\mathscr{E}}$. La factorisation $\bar{\tau} \circ \gamma_\Theta^{\mathscr{F}} = \gamma_\Theta^{\mathscr{E}} \circ \tau_\Theta$ définit un élément unique τ_Θ de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(\mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta), \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta)$$

tel que :

$$(\forall \theta \in \Theta), (\forall \psi \in \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta), \qquad \langle P^\theta, \tau_\Theta(\psi) \rangle = \langle Q^\theta, \psi \rangle$$

(IV.8). THÉORÈME

Soient deux pseudo-expériences $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ et $\mathscr{F} = (Y, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$. Un morphisme statistique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est caractérisé de façon équivalente par l'un des objets suivants :

1) un élément t de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L(\mathscr{E}), L(\mathscr{F}))$, vérifiant :

$$(\forall \theta = \Theta), \qquad t(P^\theta) = Q^\theta$$

2) un élément $\bar{\tau}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(M(\mathscr{F}), M(\mathscr{E}))$, vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta), (\forall \psi \in M(\mathscr{F})), \qquad \langle P^\theta, \bar{\tau}(\psi) \rangle = \langle Q^\theta, \psi \rangle$$

3) une famille $\{ t_K ; K \in \mathscr{K} \}$ telle que :

$$\begin{array}{ll} (\forall K \in \mathscr{K}), & t_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L(\mathscr{E}_K), (\mathscr{F}_K)) \\ (\forall K \in \mathscr{K}), (\forall \theta \in K), & t_K(P^\theta) = Q^\theta, \\ (\forall (K, K') \in \mathscr{K}^2 : K \subset K'), & a_{K'K}^{\mathscr{F}} \circ t_K = t_{K'} \circ a_{K'K}^{\mathscr{E}} \end{array}$$

4) une famille $\{ \bar{\tau}_K ; K \in \mathscr{K} \}$ telle que

$$\begin{array}{ll} (\forall K \in \mathscr{K}), & \bar{\tau}_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(M(\mathscr{F}_K), M(\mathscr{E}_K)) \\ (\forall K \in \mathscr{K}), (\forall \theta \in K), (\forall \psi \in M(\mathscr{F}_K)), & \langle P^\theta, \bar{\tau}_K(\psi) \rangle = \langle Q^\theta, \psi \rangle \\ (\forall (K, K') \in \mathscr{K}^2 : K \subset K'), & \alpha_{KK'}^{\mathscr{E}} \circ \bar{\tau}_{K'} = \bar{\tau}_K \circ \alpha_{KK'}^{\mathscr{F}} \end{array}$$

Démonstration.

1) La première caractérisation s'obtient par les relations $t = D^*(\tau)$, et $\tau = D'^*(t)$ (cf. (A.3)).

2) Il suffit de remarquer que $M(\mathscr{E})^*$ est la bande engendrée par $\mathscr{P}^\Theta$ dans $M(\mathscr{E})'$, donc $M(\mathscr{E})^* = L(\mathscr{E})$. Par suite, d'après le lemme (A.4), la restriction τ^* de τ' à $M(\mathscr{E})^* = L(\mathscr{E})$ prend ses valeurs dans $M(\mathscr{F})^* = L(\mathscr{F})$.

3) Les caractérisations 3) et 4) se démontrent comme les propositions (IV.4) et (IV.5).

(IV.10). PROPOSITION

Soient deux pseudo-expériences $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ et $\mathscr{F} = (Y, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$.

1) Soit une famille $\{ \tau_K ; K \in \mathscr{K} \}$ telle que:

$$(\forall K \in \mathscr{K}), \qquad \tau_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}} (\mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^K, \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^K)$$
$$(\forall K \in \mathscr{K}), (\forall \theta \in K), (\forall g \in \mathscr{L}^\infty(Y, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^K), \qquad \langle P^\theta, \tau_K(g) \rangle = \langle Q^\theta, g \rangle$$
$$(\forall (K, K') \in \mathscr{K}^2 : K \subset K'), \qquad q^{\mathscr{E}}_{KK'} \circ \tau_{K'} = \tau_K \circ q^{\mathscr{F}}_{KK'}$$

Alors il existe un morphisme statistique unique T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ tel que:

$$(\forall K \in \mathscr{K}), \qquad \bar{\tau}_K \circ \gamma^{\mathscr{F}}_K = \gamma^{\mathscr{E}}_K \circ \tau_K$$

2) Pour qu'un morphisme statistique de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ vérifie les propriétés précédentes, il faut et il suffit qu'il les vérifie pour tout couple d'éléments de Θ.

Démonstration.

1) Résulte immédiatement de la proposition précédente.

2) Il suffit de montrer que si un élément φ de $M(\mathscr{E}_K)$ est tel que pour tout couple Λ d'éléments de K, $\alpha^{\mathscr{E}}_\Lambda(\varphi) \in \gamma^{\mathscr{E}}_\Lambda(\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Lambda)$, alors

$$\varphi \in \gamma^{\mathscr{E}}_K(\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^K)$$

Il suffit même de le faire pour $K = \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \}$.

Posons

$$\Lambda_1 = \{ \theta_2, \theta_3 \}, \qquad \Lambda_2 = \{ \theta_3, \theta_1 \}, \qquad \Lambda_3 = \{ \theta_1, \theta_2 \}.$$

Par hypothèse, pour $i = 1, 2, 3$, il existe $f_i \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ telle que

$$\alpha^{\mathscr{E}}_{\Lambda_i K}(\varphi) = \gamma^{\mathscr{E}}_{\Lambda_i} \circ q^{\mathscr{E}}_{\Lambda_i}(f_i).$$

Alors on a:

$$f_1 = f_2[P^{\theta_3}], \qquad f_2 = f_3[P^{\theta_1}], \qquad f_3 = f_1[P^{\theta_2}]$$

donc il existe $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ telle que :

$$f = f_1 = f_2[P^{\theta_3}], \qquad f = f_2 = f_3[P^{\theta_1}], \qquad f = f_3 = f_1[P^{\theta_2}]$$

Alors, pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\alpha^{\mathscr{E}}_{\Lambda_i K} \circ \gamma^{\mathscr{E}}_K(q_K(f)) = \alpha^{\mathscr{E}}_{\Lambda_i K}(\varphi)$$

donc

$$\gamma^{\mathscr{E}}_K \circ q^{\mathscr{E}}_K(f) = \varphi.$$

Définition. — Étant données deux pseudo-expériences $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ on appelle morphisme de Morse et Sacksteder par paire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ tout morphisme statistique de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ vérifiant les conditions de la proposition précédente.

Remarque. — Si $\mathscr{E}$ est une expérience et $\mathscr{F}$ une pseudo-expérience tout morphisme statistique de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est un morphisme de Morse et Sacksteder par paires.

En effet, $\mathscr{E}_K$ étant une expérience dominée, $\gamma^{\mathscr{E}}_K$ est un isomorphisme, et il suffit de prendre :

$$\tau_K = (\gamma^{\mathscr{E}}_K)^{-1} \circ \bar{\tau}_K \circ \gamma^{\mathscr{F}}_K.$$

(IV.12). COMPOSITION DES MORPHISMES STATISTIQUES

Soient $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ trois pseudo-expériences, T un morphisme statistique de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, et S un morphisme statistique de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$.

Alors il existe un morphisme statistique $S \circ T$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{G}$ caractérisé de façon équivalente par :

1) $\{ s_K \circ t_K \; ; \; K \in \mathscr{K} \}$
2) $\{ \bar{\tau}_K \circ \bar{\sigma}_K \; ; \; K \in \mathscr{K} \}$
3) $s \circ t$
4) $\bar{\tau} \circ \bar{\sigma}$

Si S et T sont de Morse et Sacksteder, $S \circ T$ l'est aussi et est caractérisé par $\tau_\Theta \circ \sigma_\Theta$.

Si S et T sont de Morse et Sacksteder par paire, $S \circ T$ l'est aussi et est caractérisé par la famille $\{ \tau_K \circ \sigma_K \; ; K \in \mathscr{K} \}$.

(IV.13). DÉFINITION

Étant donnée une pseudo-expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ on appelle sous-pseudo-expérience de $\mathscr{E}$ toute pseudo-expérience $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$ où $\mathscr{B}$

est un sous-clan de $\mathscr{A}$ et pour tout $\theta \in \Theta$, Q^θ est la restriction de P^θ à $\mathscr{B}$.

Étant données une pseudo-expérience $\mathscr{E}$ et une sous-pseudo-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$, on définit le morphisme restriction R de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ comme dans (I.10).

(IV.14). Exhaustivité

Si (X, $\mathscr{A}$) est un espace pré-mesurable (c'est-à-dire un ensemble X muni d'un clan $\mathscr{A}$), et P un contenu positif unitaire sur $\mathscr{A}$, pour un sous-clan quelconque $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ le théorème de Radon-Nikodym n'étant plus valable, on ne peut plus parler d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{B}$. On est donc amené à la définition suivante:

(IV.14). Définition

On dit qu'une sous-pseudo-expérience $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$ d'une pseudo-expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ est exhaustive dans $\mathscr{E}$ si:

$$(\forall f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})), \ (\exists g \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B})), \ (\forall \theta \in \Theta), \ (\forall h \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B}))$$
$$\langle P^\theta, hf \rangle = \langle Q^\theta, hg \rangle$$

(Il suffit évidemment d'avoir la relation précédente pour les fonctions indicatrices).

La relation précédente définit de façon unique un morphisme de Morse et Sacksteder E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ vérifiant

$$(\forall \varphi \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta), \ (\exists \psi \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^\Theta), \qquad \varepsilon_\Theta(\varphi \,.\, \rho_\Theta(\psi)) = \psi \,.\, \varepsilon_\Theta(\varphi).$$

Inversement l'existence d'un tel morphisme caractérise l'exhaustivité de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$. Ce morphisme statistique sera appelé « morphisme d'exhaustivité ».

Définition. — On dit qu'une sous-pseudo-expérience $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \mathscr{Q}^\Theta)$ d'une pseudo-expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ est exhaustive par paires dans $\mathscr{E}$ si pour toute partie finie K de Θ, $\mathscr{F}_K$ est exhaustive dans $\mathscr{E}_K$.

L'exhaustivité par paire de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ est définie de façon équivalente par l'existence pour tout $K \in \mathscr{K}$, d'un morphisme de Morse et Sacksteder E_K de $\mathscr{F}_K$ dans $\mathscr{E}_K$ tel que

$$(\forall \varphi \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^K), \ (\forall \psi \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B})/\mathscr{Q}^K), \qquad \varepsilon_K(\varphi \,.\, \rho_K(\psi)) = \psi \,.\, \varepsilon_K(\varphi)).$$

La famille $\{ \varepsilon_K ; K \in \mathscr{K} \}$ définit un morphisme de Morse et Sacksteder par paires E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ (proposition (IV.10)). Ce morphisme, s'il existe, est unique, et son existence caractérise l'exhaustivité par paire. On l'appellera encore morphisme d'exhaustivité.

(IV.15). PROPOSITION

Soient une pseudo-expérience $\mathscr{E}$, une sous-pseudo-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$, et un morphisme statistique E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

1) Si E est un morphisme de Morse et Sacksteder, pour que $\mathscr{F}$ soit exhaustive dans $\mathscr{E}$ et que E soit le morphisme d'exhaustivité, il faut et il suffit que $R \circ E = I^{\mathscr{F}}$.

2) Si E est un morphisme de Morse et Sacksteder par paire, pour que $\mathscr{F}$ soit exhaustive par paire dans $\mathscr{E}$ et que E soit le morphisme d'exhaustivité, il faut et il suffit que $R \circ E = I^{\mathscr{F}}$.

Démonstration.

1) Il suffit de remarquer que, dans la démonstration de la proposition (II.4), analogue dans le cas d'expérience, l'hypothèse de σ-additivité des P^{θ} n'intervient pas. Le résultat reste donc valable.

2) Il suffit d'appliquer la première partie aux pseudo-expériences réduites $\mathscr{E}_K$ et $\mathscr{F}_K$.

Définition. — Étant données une pseudo-expérience $\mathscr{E}$ et une sous-pseudo-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$, un morphisme statistique E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ sera appelé morphisme d'exhaustivité si $R \circ E = I^{\mathscr{F}}$.

(IV.16). REMARQUES

1) Étant données une pseudo-expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^{\Theta})$, l'isomorphisme de Kakutani [4] permet de construire une expérience

$$\mathscr{E}' = (X', \mathscr{A}', \mathscr{P}'^{\Theta})$$

et un morphisme T de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$ tel que $\bar{\tau}$ soit un isomorphisme de $M(\mathscr{E}')$ sur $M(\mathscr{E})$.

2) Si $\mathscr{E}$ est une expérience, le corollaire (IV.2) permet de définir une structure d'algèbre sur $M(\mathscr{E})$ par l'équivalence des deux relations suivantes :

— $\varphi_1\varphi_2 = \varphi$ dans $M(\mathscr{E})$,

— $(\forall K \in \mathscr{K})$, $(\gamma_K^{\mathscr{E}})^{-1} \circ \alpha_K^{\mathscr{E}}(\varphi_1) \,.\, (\gamma_K^{\mathscr{E}})^{-1} \circ \alpha_K^{\mathscr{E}}(\varphi_2) = (\gamma_K^{\mathscr{E}})^{-1} \circ \alpha_K^{\mathscr{E}}(\varphi)$ dans $L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^K)$.

Cette structure d'algèbre admet comme unité l'unité du M espace $M(\mathscr{E})$, et est positive (donc est unique).

Si $\mathscr{E}$ est une pseudo-expérience, on peut encore définir à l'aide de l'isomorphisme de Kakutani une structure d'algèbre semblable sur $M(\mathscr{E})$ par l'équivalence des deux relations suivantes :

— $\varphi_1\varphi_2 = \varphi$ dans $M(\mathscr{E})$,
— $\bar{\tau}^{-1}(\varphi_1)\bar{\tau}^{-1}(\varphi_2) = \bar{\tau}^{-1}(\varphi)$ dans $M(\mathscr{E}')$.

3) Soient une pseudo-expérience $\mathscr{E}$ et une sous-pseudo-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$. Le morphisme d'exhaustivité E de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ vérifie la propriété de produit suivante

$$(\forall \varphi \in M(\mathscr{E})),\ (\forall \psi \in M(\mathscr{F})), \qquad \bar{\varepsilon}(\varphi \,.\, \bar{\rho}(\psi)) = \psi \,.\, \bar{\varepsilon}(\varphi).$$

En effet, pour une expérience dominée, c'est la définition de l'exhaustivité car $M(\mathscr{E})$ est isomorphe à $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$. Pour une expérience ou une pseudo-expérience, cela résulte de la définition du produit sur $M(\mathscr{E})$.

4) Étant données une pseudo-expérience $\mathscr{E}$ et une sous-pseudo-expérience $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$, on peut, en utilisant l'isomorphisme de Kakutani, déduire de la proposition (II-6), qu'il y a équivalence entre l'existence d'un morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ et l'existence d'un morphisme d'exhaustivité par paire de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

Si $\mathscr{F}$ est une expérience, tout morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ est un morphisme de Morse et Sacksteder par paire (remarque (IV.11)). On en déduit que l'existence d'un morphisme statistique de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$ est équivalente à l'exhaustivité par paire de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$.

(IV.17). DIAGRAMMES RÉCAPITULATIFS

① Pour une pseudo-expérience $\mathscr{E} = (X, \mathscr{A}, \mathscr{P}^\Theta)$ et $K \subset K' \subset \Theta$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^\Theta \arrow[r, "\gamma^{\mathscr{E}}_\Theta"] \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{K'\Theta}"] & M(\mathscr{E}) \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{E}}_{K'}"] & L(\mathscr{E}) \\
\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}) \arrow[ur, "q^{\mathscr{E}}_\Theta"] \arrow[r, "q^{\mathscr{E}}_{K'}"] \arrow[dr, "q^{\mathscr{E}}_K"'] & \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^{K'} \arrow[r, "\gamma^{\mathscr{E}}_{K'}"] \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{KK'}"] & M(\mathscr{E}_{K'}) \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{E}}_{KK'}"] & L(\mathscr{E}_{K'}) \arrow[u, "a^{\mathscr{E}}_K"'] \\
 & \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})/\mathscr{P}^K \arrow[r, "\gamma^{\mathscr{E}}_K"] & M(\mathscr{E}_K) & L(\mathscr{E}_K) \arrow[u, "a^{\mathscr{E}}_{K'K}"']
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\qquad M \qquad\qquad L \qquad}_{\substack{\xrightarrow{D^*} \\ \xleftarrow{D'^*}}}$$

② Pour un morphisme statistique T d'une pseudo-expérience $\mathscr{E}$ dans une pseudo-expérience $\mathscr{F}$ et $K \subset K' \subset \Theta$

$$\left.\begin{tikzcd}
L(\mathscr{E}) \arrow[r, "t"] & L(\mathscr{F}) \\
L(\mathscr{E}_{K'}) \arrow[u, "a^{\mathscr{E}}_{K'}"] \arrow[r, "t_{K'}"] & L(\mathscr{F}_{K'}) \arrow[u, "a^{\mathscr{F}}_{K'}"'] \\
L(\mathscr{E}_{K}) \arrow[u, "a^{\mathscr{E}}_{K'K}"] \arrow[r, "t_{K}"] & L(\mathscr{F}_{K}) \arrow[u, "a^{\mathscr{F}}_{K'K}"']
\end{tikzcd}\right\}
\underset{D'^*}{\overset{D^*}{\rightleftarrows}}
\left\{\begin{tikzcd}
M(\mathscr{F}) \arrow[r, "\bar{t}"] \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{F}}_{K'}"] & M(\mathscr{E}) \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{E}}_{K'}"'] \\
M(\mathscr{F}_{K'}) \arrow[r, "\bar{t}_{K'}"] \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{F}}_{KK'}"] & M(\mathscr{E}_{K'}) \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{E}}_{KK'}"'] \\
M(\mathscr{F}_{K}) \arrow[r, "\bar{t}_{K}"] & M(\mathscr{E}_{K})
\end{tikzcd}\right.$$

③ Pour un morphisme de Morse de Sacksteder d'une pseudo-expérience $\mathscr{E}$ dans une pseudo-expérience $\mathscr{F}$ et $K \subset K' \subset \Theta$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{\infty}(Y,\mathcal{B})/\mathcal{Q}^{\Theta} \arrow[r, "\tau_{\Theta}"] \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{k'\Theta}"'] \arrow[dddrr, dashed, "\gamma^{\mathscr{F}}_{\Theta}"] & \mathcal{L}^{\infty}(X,\mathcal{A})/\mathcal{P}^{\Theta} \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{k'\Theta}"'] \arrow[dddrr, dashed, "\gamma^{\mathscr{E}}_{\Theta}"] & & \\
\mathcal{L}^{\infty}(Y,\mathcal{B})/\mathcal{Q}^{k'} \arrow[r, "\tau_{k'}"] \arrow[d, "q^{\mathscr{F}}_{kk'}"'] \arrow[dddrr, dashed, "\gamma^{\mathscr{F}}_{k'}"] & \mathcal{L}^{\infty}(X,\mathcal{A})/\mathcal{P}^{k'} \arrow[d, "q^{\mathscr{E}}_{kk'}"'] \arrow[dddrr, dashed, "\gamma^{\mathscr{E}}_{k'}"] & & \\
\mathcal{L}^{\infty}(Y,\mathcal{B})/\mathcal{Q}^{k} \arrow[r, "\tau_{k}"] \arrow[dddrr, dashed, "\gamma^{\mathscr{F}}_{k}"] & \mathcal{L}^{\infty}(X,\mathcal{A})/\mathcal{P}^{k} \arrow[dddrr, dashed, "\gamma^{\mathscr{E}}_{k}"] & & \\
& & M(\mathscr{F}) \arrow[r, "\bar{\tau}"] \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{F}}_{k'\Theta}"] & M(\mathscr{E}) \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{E}}_{k'\Theta}"] \\
& & M(\mathscr{F}_{k'}) \arrow[r, "\bar{\tau}_{k'}"] \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{F}}_{kk'}"] & M(\mathscr{E}_{k'}) \arrow[d, "\alpha^{\mathscr{E}}_{kk'}"] \\
& & M(\mathscr{F}_{k}) \arrow[r, "\bar{\tau}_{k}"] & M(\mathscr{E}_{k})
\end{tikzcd}$$

APPENDICE

(A.1). Rappels sur les treillis de Banach

— Si E est un treillis de Banach, on notera :

E′ son dual de Banach, qui est aussi son dual de Riesz,
E* la bande de E′ formée des formes linéaires normales (c'est-à-dire continues pour l'ordre).

— Si A est un sous-ensemble d'un treillis de Banach complet E, on notera :

I(A) l'idéal engendré par A dans E,
b(A) la bande engendrée par A dans E.

Rappelons leur construction : les éléments de $I^+(A)$ sont les éléments de E^+ qui sont majorés par une combinaison linéaire finie d'éléments de A ; les éléments de $b^+(A)$ sont les bornes supérieures des familles d'éléments de $I^+(A)$, majorées dans E.

— Un M-espace avec unité est un treillis de Banach vérifiant :

$$(\forall \varphi \geqslant 0),\ (\forall \psi \geqslant 0), \qquad \| \varphi \vee \varphi \| = \| \varphi \| \vee \| \psi \|$$

et possèdant un élément positif 1_M tel que :

$$(\forall \varphi), \qquad \| \varphi \| = \inf (\alpha \in \mathbb{R}^+ : |\varphi| \leqslant \alpha 1_M)$$

— Un L-espace est un treillis de Banach vérifiant :

$$(\forall \mu \geqslant 0),\ (\forall \nu \geqslant 0), \qquad \| \mu + \nu \| = \| \mu \| + \| \nu \|$$

— Si E est un M-espace avec unité, E′ est un L-espace, et on a :

$$(\forall \lambda \in E'), \qquad \| \lambda \| = \langle |\lambda|, 1_E \rangle$$

— Si E est un L-espace, alors E′ = E*, et E′ est un M-espace complet avec unité, et on a :

$$(\forall \lambda \in E), \qquad \| \lambda \| = \langle \| \lambda \|, 1_{E'} \rangle$$

De plus $(E')^* = E$.

— Si E est un M-espace avec unité, complet et parfait (c'est-à-dire tel que E* soit séparant), alors $E = (E^*)'$.

(A.2). Introduisons les catégories suivantes :

— la catégorie $\mathbb{B}$

ses objets sont les espaces de Banach,
ses morphismes sont les applications linéaires de norme 1

— la catégorie $\mathbb{L}$

ses objets sont les L-espaces,
ses morphismes sont les applications linéaires positives isométriques sur le cône positif,

— la catégorie $\mathbb{M}$

ses objets sont les M-espaces avec unité,
ses morphismes sont les applications linéaires positives conservant l'unité

— la catégorie $\bar{\mathbb{M}}$

ses objets sont les M-espaces avec unité, complets et parfaits,
ses morphismes sont les applications linéaires positives conservant l'unité et continues pour l'ordre.

(A.3). Propriétés de ces catégories

— $\mathbb{L}$ est une sous-catégorie de $\mathbb{B}$.
En effet si $t \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L_1, L_2)$, alors on a:

$$(\quad \mu \in L_1), \qquad \| t(\mu) \| = \| \, |t(\mu)| \, \| \leqslant \| t(|\mu|) \| = \| \, |\mu| \, \| = \| \mu \|$$

— $\bar{\mathbb{M}}$ est une sous-catégorie de $\mathbb{M}$
— $\mathbb{M}$ est une sous-catégorie de $\mathbb{B}$.
En effet si $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(M_1, M_2)$, *on a:*

$$\begin{aligned} \sup \{ \| \tau(\varphi) \| ; \| \varphi \| \leqslant 1 \} &= \sup \{ \| \tau(\varphi) \| ; |\varphi| \leqslant 1_{M_1} \} \\ &= \sup \{ \| \tau(|\varphi|) ; |\varphi| \leqslant 1_{M_1} \} = \sup \{ \| \psi \| ; |\psi| \leqslant 1_{M_2} \} = 1. \end{aligned}$$

— Il existe un foncteur contravariant D' de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{L}$, défini par:

$$D'(M_1 \xrightarrow{\tau} M_2) = (M_2' \xrightarrow{\tau'} M_1')$$

ou τ' est la transposée de τ ; τ' est linéaire, positive, et vérifie :

$$(\forall \lambda \in M_2' ; \lambda \geqslant 0), \qquad \| \tau'(\lambda) \| = \langle \tau'(\lambda), 1_{M_1} \rangle = \langle \lambda, 1_{M_2} \rangle = \| \lambda \|$$

— Il existe un foncteur contravariant D* de $\bar{\mathbb{M}}$ dans $\mathbb{L}$, défini par :

$$D^*(M_1 \xrightarrow{\tau} M_2) = M_2^* \xrightarrow{\tau^*} M_1^*$$

où τ^* est la restriction à M_2^* de la transposée τ' de τ.
En effet, si λ est un élément positif de M_2^* et si $\varphi_\alpha \downarrow 0$ dans M_1 alors $\tau(\varphi_\alpha) \downarrow 0$ dans M_2, et $\langle \tau'(\lambda), \varphi_\alpha \rangle = \langle \lambda, \tau(\varphi_\alpha) \rangle \downarrow 0$. Par suite $\tau^*(M_2^*) \subset M_1^*$ et τ^* est un morphisme de $\mathbb{L}$.
— Il existe un foncteur contravariant D'* de $\mathbb{L}$ dans $\bar{\mathbb{M}}$, défini par:

$$D'^*(L_1 \xrightarrow{t} L_2) = (L_2' \xrightarrow{t'} L_1')$$

où t' est la transposée de t.
En effet t' est linéaire, positive et continue pour l'ordre, car si $\varphi_\alpha \downarrow 0$ dans L_2', $t'(\varphi^\alpha) \downarrow$, et on a

$$(\forall \lambda \in L_1 : \lambda \geqslant 0), \qquad \inf_\alpha \langle \lambda, t'(\varphi_\alpha) \rangle = \inf_\alpha \langle t(\lambda), \varphi_\alpha \rangle = 0$$

donc $t'(\varphi_\alpha) \downarrow 0$. De plus on a :

$$(\forall \lambda \in L_1 : \lambda \geqslant 0), \qquad \langle \lambda, t'(1_{L_2'}) \rangle = \langle t(\lambda), 1_{L_2'} \rangle = \| t(\lambda) \| = \| \lambda \|$$

donc $t'(1_{L_2'}) = 1_{L_1'}$.
— $D^* \circ D^*$ est le foncteur identité de $\mathbb{L}$
— $D'^* \circ D^*$ est le foncteur identité de $\mathbb{M}$.
Donc les catégories $\mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$ sont isomorphes.

(A.4). Lemme

Soit $t \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L_1, L_2)$.
Si A est une partie de L_1^+, on a $t(b(A)) \subset b(t(A))$.

Démonstration. — On sait que $I^+(A)$ est l'ensemble des éléments λ de L_1^+ qui sont majorés par une combinaison linéaire $\sum_1^n c_K a_K$ d'éléments de A. Comme l'application t est positive, on a :

$$0 \leqslant t(\lambda) \leqslant \sum_1^n c_K t(a_K).$$

Par suite $t(I^+(A)) \subset I^+(t(A))$.

Or dans un L espace, pour qu'un idéal soit une bande il faut et il suffit qu'il soit fermé pour la norme. D'où le résultat, puisque t est continue pour la norme.

(A.5). **Proposition**

Soient $\{ L_K ; K \in \mathscr{K} \}$ une famille filtrante croissante de bandes d'un L-espace L_0 et L la bande engendrée par cette famille dans L_0. Si pour $K \in \mathscr{K}$, a_K est l'injection canonique de L_K dans L et α_K sa transposée, et pour $K < K'$ dans $\mathscr{K}$, $a_{K'K}$ est l'injection canonique de L_K dans $L_{K'}$ et $\alpha_{KK'}$ sa transposée, alors on a :

$$(L, a_K ; \mathscr{K}) = \varinjlim (L_K, a_{K'K} ; \mathscr{K}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{B}$$
$$(L', \alpha_K ; \mathscr{K}) = \varprojlim (L'_K, \alpha_{KK'} ; \mathscr{K}) \quad \text{dans} \quad \bar{\mathbb{M}}, \mathbb{M} \text{ et } \mathbb{B}.$$

Démonstration. — Il est clair que a_K et $a_{K'K}$ sont des morphismes de $\mathbb{L}$, donc de $\mathbb{B}$ vérifiant :

si $K < K'$ dans $\mathscr{K}$, $a_{K'K} \circ a_K = a_{K'}$,
si $K < K' < K'$ dans $\mathscr{K}$, $a_{K''K'} \circ a_{K'K} = a_{K''K}$,

et que α_K et $\alpha_{KK'}$ sont des morphismes de $\bar{\mathbb{M}}$, donc de $\mathbb{M}$ et de $\mathbb{B}$, vérifiant :

si $K < K'$ dans $\mathscr{K}$, $\alpha_{KK'} \circ \alpha_{K'} = \alpha_K$,
si $K < K' < K'$ dans $\mathscr{K}$, $\alpha_{KK'} \circ \alpha_{K'K''} = \alpha_{KK''}$.

Soient B un objet de $\mathbb{B}$ [respectivement de $\mathbb{L}$], et pour $K \in \mathscr{K}$, b_K un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(L_K, B)$ [respectivement de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L_K, B)$], vérifiant :

$$(\forall (K, K') \in \mathscr{K}^2 : K < K'), \qquad b_{K'} \circ a_{K'K} = b_K$$

Alors on a :

$$(\forall (K, K') \in \mathscr{K}^2 : K < K') \, (\forall \lambda \in L_K) \qquad b_{K'}(\lambda) = b_K(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \| b_K(\lambda) \| \leqslant \| \lambda \|.$$

Donc, si I est la réunion des L_K, on peut définir une application $b : I \to B$ en posant :

$$b(\lambda) = b_K(\lambda) \qquad \text{si} \qquad \lambda \in L_K$$

Or I est un idéal dans L_0, et sa fermeture pour la norme est L ; par suite on peut prolonger l'application b à L par continuité pour la norme. On vérifie alors que b est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(L, B)$ [respectivement de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{L}}(L, B)$] vérifiant

$$(\forall K \in \mathscr{K}) \qquad b \circ a_K = b_K$$

ce qui démontre la première relation.

Les catégories $\mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$ étant isomorphes, les relations suivantes sont équivalentes.

$$(L, a_K ; \mathscr{K}) = \varinjlim (L_K, a_{K'K} ; \mathscr{K}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{L}$$
$$(L', \alpha_K ; \mathscr{K}) = \varprojlim (L'_K, \alpha_{KK'} ; \mathscr{K}) \quad \text{dans} \quad \bar{\mathbb{M}}$$

Soient B un objet de $\mathbb{B}$ [respectivement de $\mathbb{M}$], et, pour tout élément de K de $\mathscr{K}$, β_K un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(B, L'_K)$ [respectivement de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(B, L'_K)$] vérifiant $\alpha_{KK'} \circ \beta_{K'} = \beta_K$ pour $K < K'$. Alors on a :

$$(\forall (K, K') \in \mathscr{K}^2 : K < K')\ (\forall e \in B)\ (\forall \lambda \in L_K)$$
$$\langle \beta_K(e), \lambda \rangle = \langle \beta_{K'}(e), \lambda \rangle \quad \text{et} \quad |\langle \beta_K(e), \lambda \rangle| \leqslant \|e\| \,.\, \|\lambda\|$$

On peut donc définir une application β de B dans L' par :

$$\langle \beta(e), \lambda \rangle = \langle \beta_K(e), \lambda \rangle \quad \text{si} \quad \lambda \in L_K$$

On vérifie que β est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(B, L')$ [respectivement $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}}(B, L')$] et que

$$(\forall K \in \mathscr{K}) \qquad \alpha_K \circ \beta = \beta_K.$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BLACKWELL, Equivalent comparaison of experiments, *Ann. Math. Stat.*, t. **24**, 1953, p. 265-272.

[2] H. L. BURKOLDER, Sufficiency in the undominated case. *Ann. Math. Stat.*, t. **32**, 1961, p. 1191-1200.

[3] P. CAILLOT, Thèse de 3e cycle. I. S. S. U. P., Paris, 1969.

[4] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, t. **1**, Interpublis, 1967.

[5] P. R. HALMOS and L. J. SAVAGE, Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics. *Ann. Math. Stat.*, t. **20**, 1949, p. 225-241.

[6] L. LE CAM, Sufficiency and approximate sufficiency. *Ann. Math. Stat.*, t. **85**, 1964, p. 1419-1455.

[7] W. A. LUXEMBURG and A. C. ZAANEN, *Notes on Banach function spaces*, Calif. Inst. of Techn. and Leiden State University, 1963.

[8] N. MORSE and R. SACKSTEDER, Statistical isomorphisms, *Ann. Math. Stat.*, t. **37**, 1966, p. 203-213.

[9] T. S. PITCHER, Sets of measures not admitting necessary and sufficient statistics or subfields. *Ann. Math. Stat.*, t. **28**, 1957, p. 267-268.

(Manuscrit reçu le 28 novembre 1970).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1795*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6245. 6-1971