ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUELINE CHATARD

Erratum à l'article de Mme J. Chatard

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 1 (1971), p. 81-82
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_81_0>

ERRATUM A L'ARTICLE DE Mme J. CHATARD

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 4, 1970, p. 307-326.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Applications des propriétés de moyenne d'un groupe localement compact à la théorie ergodique.

Le lemme de la page 325 est à remplacer par le suivant :

LEMME

$$\forall f \in L_1^+(x) \lim_{m \to \infty} [M_m(f_n) - f_m] = 0 \text{ P. p. s.}$$

a) *Cas où* $f \in L^\infty(X)$:

$$|M_m(f_n)(x) - M_m(f)(x)| = \left| \frac{1}{\lambda(H_m)} \int_{H_m} \left[\frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} [f(hTx) - f(Tx)] d\lambda(h) \right] d\lambda(T) \right.$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} d\lambda(h) \int_{hH_m \Delta H_m} f(Tx) \frac{d\lambda(T)}{\lambda(H_m)}$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \frac{\lambda(hH_m \Delta H_m)}{\lambda(H_m)} d\lambda(h) \text{ P. p. s.}$$

Alors on a

$$0 \leqslant \overline{\lim_m} \, |M_m(f_n)(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \overline{\lim_m} \frac{\lambda(hH_m \Delta H_m)}{\lambda(H_m)} d\lambda(h) = 0 \text{ P. p. s.}$$

b) *Cas général :*

$L^\infty(X)$ est dense dans $L^1(X)$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \in L^\infty(X)$ telle que $\|f - k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ et par suite

$$\|f_n - k_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \forall n.$$

On a :

$$|M_m(f_n - f)(x)| \leqslant M_m |f_n - k_n + k - f|(x) + |M_m(k_n - k)(x)|.$$

Soit $\alpha > 0$

$$P\{x : \overline{\lim_m} \mid M_m(f_n - f)(x) \mid > 2\alpha\} \leqslant P\{x : \overline{\lim_m} M_m \mid f_n - k_n + k - f \mid (x) > \alpha\}$$
$$+ P\{x : \overline{\lim_m} \mid M_m(k_n - k)(x) \mid > \alpha\}.$$

D'où en utilisant a) et le théorème IV

$$P\{x : \overline{\lim_m} \mid M_m(f_n - f)(x) \mid > 2\alpha\} \leqslant \frac{K}{\alpha}\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on en déduit que

$$P\{x : \overline{\lim_m} \mid M_m(f_n - f)(x) \mid > 2\alpha\} = 0.$$

C'est-à-dire $\lim_{m \to \infty} [M_m(f_n) - f_m] = 0$ p. s.