

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

G. BODIOU

**Complément à l'article : « Sur les treillis  
booléens métriques et le conditionnement  
général des probabilités »**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 7, n° 1 (1971), p. 21-22

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1971\\_\\_7\\_1\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_21_0)

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Complément à l'article :*

## **Sur les treillis booléens métriques et le conditionnement général des probabilités**

(G. BODIOU; ces *Annales*, vol. VI, n° 1, 1970)

par

**G. BODIOU**

Faculté des Sciences, Marseille.

---

Dans cet article, les résultats essentiels sont :

**PROPOSITION A :** *Tout treillis booléen métrique, B, est ortho-isomorphe à un sous-treillis du treillis des multiplicités linéaires fermées d'un espace de Hilbert, H, ou treillis (m. l. f.).*

**PROPOSITION B :** *Tout sous-treillis booléen, B, du treillis (m. l. f.), est métrique (on suppose que H et O appartiennent à B).*

La preuve qui est donnée de la proposition B, dans l'article considéré, utilise la compacité de la sphère unité de H; elle n'est donc valable que si H est de dimension finie. Cette limitation est sévère; nous la levons dans cette note complémentaire.

---

**THÉORÈME B.** — *Tout sous  $\sigma$ -treillis booléen, B, du triellis (m. l. f.) des multiplicités linéaires fermées de l'espace de Hilbert, H, à base dénombrable, est capable d'une probabilité strictement positive : c'est un  $\sigma$ -treillis de Boole métrique.*

On impose à B d'admettre O et H en tant que minorant et majorant universels, communs avec (m. l. f.).

On montrera qu'il existe un vecteur normé,  $\Psi$ , dans  $H$ , qui n'est orthogonal à aucun des éléments de  $B$ ; la loi de probabilité quantique qu'il détermine est telle que :

$$\forall b \in B, b \neq 0, P(b/\Psi) \neq 0.$$

On sait que  $P(b/\Psi)$  est le carré de la norme de la projection de  $\Psi$  sur  $b$ .

Soit, dans  $B$ , une chaîne maximale, c'est-à-dire non contenue dans une autre chaîne; son existence est assurée par l'axiome du choix. Cette chaîne est nécessairement finie ou dénombrable, puisque les compléments relatifs entre termes constituent une décomposition de  $H$  en sous-espaces orthogonaux et que  $H$  est à base dénombrable; soit  $(\dots b_i, b_{i'}, \dots)$  cette chaîne; elle a nécessairement  $O$  pour terme minimal et  $H$  pour terme maximal.

Soit  $b$  un élément quelconque de  $B$ .

Posons :  $(b_{i'} - b_i) \wedge b = y_i$ ;  $y_i \neq (b_{i'} - b_i) \Leftrightarrow Cb \wedge (b_{i'} - b_i) \neq 0$ ; c'est-à-dire :

$$\ll b \text{ ne contient aucun intervalle} \gg \Leftrightarrow \ll Cb \text{ coupe tout intervalle} \gg.$$

S'il en était ainsi, les  $B_i$ , tels que :  $B_i = Cb \wedge b_i$ , constitueraient une chaîne dont les intervalles seraient inclus dans les intervalles homologues de la chaîne des  $b_i$ , sans se confondre avec elle, puisque tous les  $B_i$  sont majorés par  $Cb$ . Cela est exclu par le caractère maximal de la chaîne des  $b_i$ . Donc :

$$\ll \text{Tout élément, } b, \text{ majore un intervalle } (b_{i'} - b_i) \text{ de la chaîne maximale} \gg.$$

Il existe dans  $H$  un ensemble  $K$  de vecteurs orthonormés, tel que les vecteurs de  $K$  qui appartiennent à  $b_i$  constituent une base de  $b_i$ , pour tout  $i$ , et donc, ceux qui appartiennent à un intervalle  $(b_{i'} - b_i)$  constituent une base de cet intervalle.

Il existe un vecteur unitaire,  $\Psi$ , de projection non nulle sur chacun des vecteurs de  $K$ , donc sur chacun de leurs majorants; c'est le vecteur que nous cherchions et l'on a bien, pour tout  $b$  non nul, dans  $B$  :  $P(b/\Psi) \neq 0$ .  
*C. Q. F. D.*

(Manuscrit reçu le 3 septembre 1970).