JEAN-LUC PETIT

Exhaustivité, ancillarité et invariance

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, nº 4 (1970), p. 327-334
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_4_327_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VI, n° 4, 1970, p. 327-334. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Exhaustivité, ancillarité et invariance

par

Jean-Luc PETIT

Faculté des Sciences, Rouen (France).

I. INTRODUCTION

Dans cet article nous allons généraliser un certain nombre de résultats obtenus par Basu (cf. [*1*]). Dans la partie II nous allons considérer trois différentes complétions d'une tribu (cf. [*2*]) et étudier les complétions d'une tribu invariante par un groupe de transformations laissant l'expérience statistique $(X ; \mathfrak{A} ; \mathcal{P})$ invariante. Dans la partie III nous allons étudier les propriétés d'exhaustivité et d'ancillarité d'une tribu invariante par une transformation laissant l'expérience invariante.

Dans la dernière partie nous généralisons les résultats de la partie III en introduisant la notion de model codé qui intervient dans les problèmes statistiques avec paramètre nuisible et qui permet de définir une notion d'exhaustivité partielle (cf. [*5*]).

II. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Soit une expérience statistique $(X ; \mathfrak{A} ; \mathcal{P})$ où $\mathcal{P} = \{ P^\theta \mid \theta \in \Theta \}$ est la famille de probabilités associée à la transition de probabilité

$$P : (\Theta ; \mathcal{H}) \to (X ; \mathfrak{A}).$$

Λ notera l'ensemble des sous-familles dominées de $\mathcal{P}$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda|$ une probabilité équivalente à la sous-famille λ. Pour toute probabilité P ; $\bar{\mathfrak{A}}^P$ notera la tribu complétée de $\mathfrak{A}$ pour P.

Dans l'ensemble des sous-tribus de $\mathfrak{A}$ nous pouvons introduire trois relations d'équivalence (cf. [*2*]) :

. $\mathscr{B}^{(\underset{\sim}{1})}\mathscr{C}$ $[\mathscr{P}]$ (équivalence forte) si et seulement si $\forall B \in \mathscr{B}$ (respectivement : $C \in \mathscr{C}$)$\exists C \in \mathscr{C}$ (resp : $B \in \mathscr{B}$)$\forall P^\theta \in \mathscr{P}$; $P^\theta(B \triangle C) = 0$,

. $\mathscr{B}^{(\underset{\sim}{2})}\mathscr{C}$ $[\mathscr{P}]$ (équivalence par paire) si et seulement si $\forall \lambda \in \Lambda$, $\mathscr{B}^{(\underset{\sim}{1})}\mathscr{C}[\lambda]$,

. $\mathscr{B}^{(\underset{\sim}{3})}\mathscr{C}$ $[\mathscr{P}]$ (équivalence faible) si et seulement si $\forall B \in \mathscr{B}$ (resp. : $C \in \mathscr{C}$) $\forall P^\theta \in \mathscr{P} \exists C \in \mathscr{C}$ (resp : $B \in \mathscr{B}$) ; $P^\theta(B \triangle C) = 0$.

Sur les événements de $\mathfrak{A}$ nous considérerons la relation d'équivalence habituelle : $A \sim A'[\mathscr{P}]$ si et seulement si $P^\theta \in \mathscr{P} P^\theta(A \triangle A') = 0$.

A ces trois relations d'équivalence sur les sous-tribus $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{A}$ sont associés trois types de complétions que nous noterons $\overline{\mathscr{B}}^{(i)[\mathscr{P}]}$ $(i = 1, 2, 3)$; $\overline{\mathscr{B}}^{(i)[\mathscr{P}]}$ étant la plus grande tribu de la classe d'équivalence pour i de la tribu $\mathscr{B}$.

PROPOSITION 1

(α) $(\underset{\sim}{1}) \Rightarrow (\underset{\sim}{2}) \Rightarrow (\underset{\sim}{3})$

(β) $$\overline{\mathscr{B}}^{(1)[\mathscr{P}]} \subset \overline{\mathscr{B}}^{(2)[\mathscr{P}]} = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \overline{\mathscr{B}}^{|\lambda|} \subset \overline{\mathscr{B}}^{(3)[\mathscr{P}]} = \bigwedge_{P^\theta \in \mathscr{P}} \overline{\mathscr{B}}^{P^\theta}.$$

Une transformation g sera une application de X dans X bijective mesurable laissant l'expérience $(X ; \mathfrak{A} ; \mathscr{P})$ invariante. Nous noterons $\bar{g}$ la transformation qui lui correspond dans Θ c'est-à-dire :

$$\forall \theta \in \Theta \qquad \forall A \in \mathfrak{A} \qquad P^{\bar{g}\theta}(gA) = P^\theta(A)$$

A toute transformation g nous associerons $\mathscr{A}(g)$ la sous-tribu des ensembles g-invariants c'est-à-dire :

$$\mathscr{A}(g) = \{ A \mid A \in \mathfrak{A} ; g^{-1}.A = A \}$$

Nous associerons de même la sous-tribu des ensembles $\bar{g}$-invariants :

$$\mathscr{A}(\bar{g}) = \{ H \mid H \in \mathscr{H} ; \bar{g}^{-1}.H = H \}$$

PROPOSITION 2. — Soit $A \in \mathfrak{A}$; alors $A \in \overline{\mathscr{A}(g)}^{(1)[\mathscr{P}]}$ si et seulement si $A \sim g^{-1}.A[\mathscr{P}]$.

Démonstration. — Si $A \in \overline{\mathscr{A}(g)}^{(1)[\mathscr{P}]}$ alors $\exists A' \in \mathscr{A}(g)$ tel que $A' \sim A[\mathscr{P}]$. Or si $A_1 \sim A_2[\mathscr{P}]$ alors $g^{-1}.A_1 \sim g^{-1}.A_2[\mathscr{P}]$ d'où :

$$g^{-1}.A' = A' \sim g^{-1}.A \sim A[\mathscr{P}]$$

Réciproquement soit $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \sim g^{-1}.A[\mathscr{P}]$ et soit $G = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ le groupe engendré par g. Posons $A(g) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n.A$; on a alors :

$$A(g) \in \mathscr{A}(g) \qquad \text{et} \qquad A(g) \sim A[\mathscr{P}] \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

PROPOSITION 3. — On a :

$$\overline{\mathscr{A}(g)}^{(1)[\mathscr{P}]} = \overline{\mathscr{A}(g)}^{(2)[\mathscr{P}]} = \overline{\mathscr{A}(g)}^{(3)[\mathscr{P}]}$$

Démonstration. — Si $A \in \overline{\mathscr{A}(g)}^{(3)[\mathscr{P}]}$ alors $\forall P^\theta \in \mathscr{P}$, $A \in \overline{\mathscr{A}(g)}^{P^\theta}$ ainsi $\forall \theta \in \Theta \exists A'(\theta) \in \mathscr{A}(g)$; $A \sim A'(\theta)[\theta]$; donc $\forall \theta \in \Theta$; $g^{-1}A \sim A[\theta]$ ce qui entraîne d'après la proposition 2 que $A \in \overline{\mathscr{A}(g)}^{(1)[\mathscr{P}]}$.

C. Q. F. D.

Considérons maintenant un groupe G de transformations g. A ce groupe on peut associer 5 sous-tribus

$$\mathscr{A}(G) = \bigcap_{g \in G} \mathscr{A}(g) \subset \overline{\mathscr{A}(G)}^{(1)[\mathscr{P}]} \subset \overline{\mathscr{A}(G)}^{(2)[\mathscr{P}]} \subset \overline{\mathscr{A}(G)}^{(3)[\mathscr{P}]}$$
$$\subset \widetilde{\mathscr{A}(G)} = \bigcap_{g \in G} \overline{\mathscr{A}(g)}^{(i)[\mathscr{P}]} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

PROPOSITION 4. — Si G est un groupe localement compact dénombrable à l'infini, si l'application $(g ; x) \to g.x$ est mesurable pour la tribu $\mathscr{B} \otimes \mathfrak{A}$ ($\mathscr{B}$ étant la tribu borélienne de G) alors :

$$\overline{\mathscr{A}(G)}^{(1)[\mathscr{P}]} = \overline{\mathscr{A}(G)}^{(2)[\mathscr{P}]} = \overline{\mathscr{A}(G)}^{(3)[\mathscr{P}]} = \widetilde{\mathscr{A}(G)}$$

Démonstration. — D'après les hypothèses sur G, il existe une probabilité ν sur G telle que :

$$\forall g \in G \qquad \forall B \in \mathscr{B} ; \qquad \nu(B) = 0 \Rightarrow \nu(g \cdot B) = 0$$

Posons alors, pour $A \in \widetilde{\mathscr{A}(G)}$:

$$A' = \left\{ x \in X \mid \int_G I_A(gx)\nu(dg) = 1 \right\} = \{ x \in X \mid gx \in A[\nu pp] \}$$
$$= \{ x \in X \mid \exists N_x \quad \nu(N_x) = 0 \quad \forall g \notin N_x \quad gx \in A \}$$

$$A'' = \left\{ x \in X \mid \int_G I_A(gx)\nu(dg) = 1 \right\}$$

D'après la propriété sur ν on a $A' \in \mathscr{A}(G)$.

Montrons que $A \sim A'[\mathscr{P}]$.

En effet, comme $A \in \widetilde{\mathscr{A}(G)}$ on a :

$$\forall g \in G \qquad \forall \theta \in \Theta \qquad \int_X | I_A(x) - I_A(gx) | P^\theta(dx) = 0$$

Ainsi en utilisant le théorème de Fubini on en déduit que :

$$\forall \theta \in \Theta \qquad \exists N_\theta \subset X \qquad P^\theta(N_\theta) = 0 \qquad \forall x \notin N_\theta \qquad I_A(x) = I_A(gx)[\nu pp].$$

Les inclusions $\bar{N}_\theta \subset A \cap A' + \bar{A} \cap A'' \subset A \cap A' + \bar{A} \cap \bar{A}'$ nous donnent donc :

$$\forall \theta \in \Theta ; \qquad P^\theta \{ A \cap A' + \bar{A} \cap \bar{A}' \} = 1$$

c'est-à-dire $A \sim A'[\mathscr{P}]$.

C. Q. F. D.

III. EXHAUSTIVITÉ ET ANCILLARITÉ

Nous allons étudier les deux cas extrêmes $\mathscr{A}(\bar{g}) = \mathscr{H}$ qui correspond à $\bar{g}$ = identité (on supposera que la tribu $\mathscr{H}$ contient les points) et

$$\mathscr{A}(\bar{g}) = \{ \Phi ; \Theta \}$$

THÉORÈME 1. — Si $\mathscr{A}(\bar{g}) = \mathscr{H}$ alors la sous-tribu $\mathscr{A}(g)$ est $(\mathfrak{A} ; \mathscr{P})$ exhaustive.

Démonstration (cf. [*1*]). — A toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable bornée nous pouvons associer la suite de fonctions mesurables bornées : $f_n : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(g^i x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

En utilisant le théorème ergodic ponctuel on sait que la suite f_n converge sauf sur un ensemble N_f tel que $P^\theta(N_f) = 0$, $\forall \theta \in \Theta$. Posons donc :

$$f^*(x) = \begin{cases} \operatorname{Lim}_n f_n(x) & \text{si} \quad x \notin N_f \\ 0 & \text{si} \quad x \in N_f \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que :

$$f^* \in E_{P^\theta}[f / \mathscr{A}(g)] \qquad \forall \theta \in \Theta.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2. — Si $\mathscr{A}(\bar{g}) = \{ \Phi ; \Theta \}$ alors la sous-tribu $\mathscr{A}(g)$ est ancillaire (c'est-à-dire : $\forall A \in \mathscr{A}(g)$; $P^\theta(A)$ est indépendant de θ).

Démonstration. — Soit $\bar{G} = \{ \bar{g}^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ le groupe engendré par $\bar{g}$ et soit 0 une orbite de Θ sous l'action de $\bar{G}$ (c'est-à-dire $0 = \{ \bar{g}^n . \theta_0 \mid n \in \mathbb{Z} \}$). Par construction nous avons $\bar{g}^{-1} . 0 = 0$ d'où $0 = \Theta$. Ainsi :

$$\forall \theta \in \Theta \qquad \forall \theta' \in \Theta \qquad \exists n \in \mathbb{Z} ; \qquad \theta' = \bar{g}^n . \theta$$

Si $A \in \mathscr{A}(g)$ on a donc :

$$P^{\theta'}(A) = P^{\bar{g}^n\theta}(A) = P^{\theta}[\bar{g}^{-n}.A] = P^{\theta}[A]$$

C. Q. F. D.

Considérons maintenant un groupe G de transformations g telles que $\mathscr{A}(\bar{g}) = \mathscr{H}$. Nous pouvons alors généraliser dans ce cas le théorème 1. Pour cela, considérons $\mathfrak{A}^*$ la sous-tribu exhaustive par paire, minimale, complète pour l'équivalence par paire (son existence et son unicité sont montrées dans [*2*]).

THÉORÈME 3. — Si G est un groupe de transformations $\bar{g}$ vérifiant $\mathscr{A}(\bar{g}) = \mathscr{H}$ alors on a :

$$\mathfrak{A}^* \subset \widetilde{\mathscr{A}(G)}$$

(ce qui entraîne que $\widetilde{\mathscr{A}(G)}$ est une sous-tribu exhaustive par paire).

Démonstration. — En effet nous avons :

$$\forall g \in G\,; \qquad \mathfrak{A}^* \subset \overline{\mathscr{A}(g)}^{(2)[\mathscr{P}]}$$

d'où :

$$\mathfrak{A}^* \subset \bigcap_{g \in G} \overline{\mathscr{A}(g)}^{(2)[\mathscr{P}]} = \widetilde{\mathscr{A}(G)}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Avec les hypothèses de la proposition 4, $\mathscr{A}(G)$ est une sous-tribu exhaustive par paire.

IV. MODELS CODEES

Nous allons maintenant étudier le cas général où :

$$\{\Phi\,;\Theta\} \subset \mathscr{A}(\bar{g}) \subset \mathscr{H}$$

Pour cela rappelons un certain nombre de définition de [*5*].

— $\mathscr{L}$ notera une sous-tribu de $\mathscr{H}$, $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathfrak{A}$, μ une mesure *a priori* sur $(\Theta, \mathscr{H})$ et $\mu \times P$ la probabilité définie sur l'espace produit $(\Theta.X\,; \mathscr{H} \otimes \mathfrak{A})$ par :

$$\forall H \in \mathscr{H} \qquad \forall A \in \mathfrak{A}\,; \qquad (\mu \times P) \qquad (H \times A) = \int_H P^{\theta}(A)\mu(d\theta)$$

— $\mathscr{B}$ sera dite une sous-tribu μ-exhaustive de $\mathfrak{A}$ si et seulement si $\mathscr{H}$ et $\mathfrak{A}$ sont $\mu \times P$ conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire : $\forall H \in \mathscr{H}$; $E_{\mu \times P}[H/\mathscr{B}] \subset E_{\mu \times P}[H/\mathfrak{A}]$ où nous identifions les tribus dans les espaces coordonnés avec les tribus cylindriques qui leurs correspondent dans l'espace produit).

Au couple ($\mathscr{L}$; μ) nous pouvons associer une famille de probabilités $\mathscr{P}_\mu^{\mathscr{L}}$ sur (X ; $\mathfrak{A}$) définies par :

$$\begin{cases} P_\mu^L(A) = \dfrac{\displaystyle\int_L P^\theta(A)\mu(d\theta)}{\mu(L)} & \forall A \in \mathfrak{A} \quad \forall L \in \mathscr{L} \quad \text{tel que} \quad \mu(L) > 0 \\ P_\mu^L(A) = \displaystyle\int_\Theta P^\theta(A)\mu(d\theta) & \forall A \in \mathfrak{A} \quad \forall L \in \mathscr{L} \quad \text{tel que} \quad \mu(L) = 0 \end{cases}$$

Nous dirons que la sous-tribu $\mathscr{B}$ est partiellement μ-exhaustive par rapport à la sous-tribu $\mathscr{L}$ si et seulement si $\mathfrak{A}$ et $\mathscr{L}$ sont $\mu \times P$ conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathscr{B}$.

Nous dirons enfin que le couple ($\mathscr{B}$; $\mathscr{L}$) nous fournit un model codé du model (X ; $\mathfrak{A}$; Θ ; $\mathscr{H}$; P) s'il existe une transition de probabilités P' : (Θ ; $\mathscr{L}$) $\to$ (X ; $\mathscr{B}$) telle que $\delta \circ P = P' \circ \delta'$; δ (resp : δ') notant l'application identique de (X ; $\mathfrak{A}$) dans (X ; $\mathscr{B}$) (resp : de (Θ ; $\mathscr{H}$) dans (Θ ; $\mathscr{L}$)) c'est-à-dire si nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\Theta ; \mathscr{H}) & \xrightarrow{\delta'} & (\Theta ; \mathscr{L}) \\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P'} \\ (X ; \mathfrak{A}) & \xrightarrow[\delta]{} & (X ; \mathscr{B}) \end{array}$$

THÉORÈME 4. — Soit g une transformation.

(α) Le couple ($\mathscr{A}(g)$; $\mathscr{A}(\bar{g})$) fournit un model codé du model initial.

(β) Pour toute mesure μ-invariante par $\bar{g}$; $\mathscr{A}(g)$ est partiellement μ-exhaustive par rapport à $\mathscr{A}(\bar{g})$.

Démonstration.

(α) Si $A \in \mathscr{A}(g)$ nous avons $P^\theta(A) = P^{\bar{g}\theta}(A) \quad \forall \theta \in \Theta$. Ainsi $\forall A \in \mathscr{A}(g)$, la fonction $\theta \rightsquigarrow P^\theta(A)$ est $\mathscr{A}(\bar{g})$ mesurable.

(β) $\mathscr{A}(g)$ est partiellement μ-exhaustivité par rapport à $\mathscr{A}(\bar{g})$ si et seulement si $\mathscr{A}(g)$ est une sous-tribu exhaustive vis-à-vis de la famille de probabilités $\mathscr{P}_\mu^{\mathscr{A}(\bar{g})}$ (cf. [5]). Montrons que $\forall H \in \mathscr{A}(\bar{g})$ la probabilité P_μ^H est invariante par g.

$\forall A \in \mathfrak{A}$ $\quad \forall H \in \mathscr{A}(\bar{g})$ tel que $\mu(H) > 0$ on a :

$$(g.P_\mu^H)(A) = P_\mu^H(g^{-1}.A) = \frac{\int_H P^\theta[g^{-1}.A]\mu(d\theta)}{\mu(H)} = \frac{\int_H P^{\bar{g}\theta}[A]\mu(d\theta)}{\mu(H)} = P_\mu^H(A)$$

De même, dans le cas où $\mu(H) = 0$ on vérifie que $(g.P_\mu^H)(A) = P_\mu^H(A)$. Ainsi en utilisant le théorème 1 on voit que $\mathscr{A}(g)$ est une sous-tribu exhaustive vis-à-vis de la famille de probabilités $\mathscr{P}_\mu^{\mathscr{A}(\bar{g})}$.

C. Q. F. D.

Nous pouvons généraliser maintenant le théorème 4 au cas d'un groupe G de transformations.

THÉORÈME 5. — Soit G un groupe de transformations.

(α) Le couple $(\widetilde{\mathscr{A}(G)}\,;\mathscr{A}(\bar{G}))$ fournit un model codé du model initial.

(β) Pour toute mesure μ invariante par $\bar{G}$, $\widetilde{\mathscr{A}(G)}$ est partiellement μ-exhaustive par rapport à $\mathscr{A}(\bar{G})$.

La démonstration est analogue à celle du théorème 4.

Exemple. — Considérons n variables aléatoires réelles indépendantes normales $X_1, \ldots, X_n$ ayant même moyenne inconnue m et même écart type inconnu σ :

$$X = \mathbb{R}^n\,;\ \Theta = \{\,\theta = (m\,;\sigma)\,\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

Sur X considérons le groupe G engendré par les transformations suivantes :

$$g_b : x = (x_1 \ldots x_n) \to (x_1 + b\,; \ldots; x_n + b) \qquad (b \in \mathbb{R})$$
$$g_- : x = (x_1 \ldots x_n) \to (-x_1\,; \ldots; -x_n)$$

Nous avons $\mathscr{A}(G) = \mathfrak{A}(S)$ où $\mathfrak{A}(S)$ est la sous-tribu associée à la statistique S :

$$x \rightsquigarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{où} \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}(\bar{G}) = \mathfrak{A}(\Sigma)$$

où $\mathfrak{A}(\Sigma)$ est la sous-tribu associée à l'application $\Sigma : \theta = (m\,;\sigma) \rightsquigarrow \sigma$.

Le théorème 3 nous dit que la loi de S est indépendante de m et que S est une statistique μ-exhaustive par rapport à Σ pour toute mesure μ-invariante par $\bar{G}$ par exemple :

$$\mu = l \times P_\sigma$$

où l est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et P_σ une probabilité quelconque sur R_+^*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BASU, *On sufficiency ans invariance.* Essays in probability and statistics, 1969, p. 61-84.

[2] M. F. LE BIHAN, M. LITTAYE-PETIT et J.-L. PETIT, Exhaustivité par paire, *C. R. Acad. Sci.*, t. **270**, 1970, p. 1753-1756.

[3] E. L. LEHMANN, *Testing statistical hypotheses*, 1966.

[4] M. LITTAYE-PETIT, Thèse chap. I « Exhaustivité classique et exhaustivité bayésienne », à publier.

[5] M. LITTAYE-PETIT, F. MARTIN et J.-L. PETIT, *Réductions des observations et des paramètres en présence de paramètres nuisibles*, 1970, à publier.

(Manuscrit reçu le 8 mai 1970).