Annales de l'I. H. P., section B

Jacqueline Chatard

# Applications des propriétés de moyenne d'un groupe localement compact à la théorie ergodique

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 6, nº 4 (1970), p. 307-326

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_4_307_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section B :
Vol. VI, n° 4, 1970, p. 307-326. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Applications des propriétés de moyenne d'un groupe localement compact à la théorie ergodique

PAR

**Mme Jacqueline CHATARD**
Centre Universitaire de Saint-Denis. 93-Saint-Denis.

RÉSUMÉ. — Dans un article récent [*7*], Templeman a étendu les théorèmes de Von Neumann et G. D. Birkhoff à l'action de groupes plus généraux que Z ou R. La preuve n'en ayant jamais été publiée, le but de ce travail est d'énoncer et de démontrer complètement des théorèmes voisins de ceux de [*7*].

Le théorème de convergence en moyenne est démontré dans le cadre assez général d'une famille de groupes étudiés par [*5*]. Pour montrer un théorème analogue au théorème de Birkhoff (convergence presque partout), il est nécessaire d'introduire une condition supplémentaire et les démonstrations sont faites dans le cas de groupes unimodulaires.

Une généralisation des théorèmes ergodiques a été également faite dans [*2*], pour des groupes d'un type différent de ceux qui sont utilisés ici.

SUMMARY. — The present note deals with extension of the ergodic theorems of Birkhoff and Von Neumann to general dynamic systems $(\Omega, G)$ [$\Omega$ compact, G amenable group of homeomorphisms of $\Omega$].

NOTATIONS

G étant un groupe topologique, on notera par $e$ l'élément neutre de G, par $\Delta(g)$ la valeur au point $g$ de la fonction modulaire de G.

Pour tout espace E, $\overline{V}$ est la fermeture de $V \subset E$, $A \triangle B$ est la différence symétrique des sous-ensembles A et B, $\mathbf{1}_v$ est la fonction caractéristique de l'ensemble V, $V^c$ est le complémentaire de V dans E. Si E est un espace vectoriel topologique, E* son dual, on notera $\sigma(E^*, E)$ la topologie faible sur E*.

## I. PROPRIÉTÉS DU GROUPE DE TRANSFORMATIONS G

On se donne un groupe G localement compact. $\mathscr{G}$ est la tribu des boréliens engendrée par les ouverts de G, $\lambda$ une mesure de Haar à gauche sur G. On suppose que G possède la propriété (P) suivante :

Il existe une suite $\{ H_n \}$ de boréliens de G, de mesure finie non nulle, telle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda[gH_n \triangle H_n]}{\lambda[H_n]} = 0, \qquad \forall g \in G.$$

Nous allons préciser les propriétés de G si l'on a (P).

DÉFINITIONS I. — Soit CB(G) l'ensemble des fonctions continues bornées réelles sur G muni de la norme suivante

$$\| f \| = \sup_{g \in G} | f(g) |.$$

1) *Moyenne.* — Une moyenne $m$ sur CB(G) est une forme linéaire positive continue, telle que $m(1) = 1$ où 1 représente la fonction constante égale à 1 pour tout $g$. On a $\| m \| = 1$ et l'ensemble $\mathscr{M}$ des moyennes sur CB(G) forment un sous-ensemble convexe faiblement compact du dual de CB(G).

On pourra donc toujours représenter $m$ par une mesure additive régulière bornée définie sur $\mathscr{G}$ ([*4*], chap. IV).

2) *Moyennes finies.* — Soit $\delta_s$ la moyenne définie par $\delta_s(f) = f(s)$, $s \in G$ pour tout $f \in CB(G)$ (Mesure de Dirac en $s$).

On appelle moyenne finie toute moyenne de la forme

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_s i \quad \alpha_i \text{ réel positif } \forall i, \quad \sum_{1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Dans l'espace vectoriel (CB)*(G) muni de la topologie faible, les moyennes finies forment un sous-ensemble dense de l'ensemble $\mathscr{M}$ de toutes les moyennes [*2*].

3) Une moyenne $m$ est dite *invariante à gauche* si $m[{}_g f] = m[f]$ pour tout $g \in G$, où on définit ${}_g f$ par ${}_g f[t] = f[gt]$, $\forall t \in G$.

4) Un groupe est dit *moyennable* s'il existe une moyenne invariante sur CB(G). Une étude détaillée de tels groupes est faite dans [*6*]. Exemples : groupes compacts, groupes abéliens et résolubles, et leurs extensions compactes.

THÉORÈME I. — *Si* G *possède la propriété* (P), G *est moyennable et* $\bigcup_1^\infty H^n$ *engendre* G (voir [5]).

1) Pour tout $j$, soit $\Phi_j = \dfrac{\mathbf{1}H_j}{\lambda(H_j)}$.

Notons $L_1(G)$ l'ensemble des fonctions intégrales sur G muni de la norme

$$\| f \|_1 = \int_G | f(g) | \, d\lambda(g)$$

Alors $\Phi_j \in L_1(G)$ et l'on a :

$$\| g\Phi_j - \Phi_j \|_1 = \frac{\lambda[g^{-1}H_j \triangle H_j]}{\lambda[H_j]}$$

Pour tout $f \in CB(G)$, posons :

$$\langle \Phi_j, f \rangle = \int_G \Phi_j f \, d\lambda$$

c'est une moyenne sur CB(G) car on a

$$\langle \Phi_j, f \rangle \geqslant 0 \quad \text{si} \quad f \geqslant 0$$
$$\langle \Phi_j, 1 \rangle = 1$$

On définit, en prenant tous les $H_j$, une suite de moyennes $m_j$ contenues dans $\mathcal{M}$ qui est faiblement compact. On peut donc en extraire une sous-suite $m_{j_k}$ convergente vers un point $m$ de $\mathcal{M}$.

Montrons que $m$ définit une moyenne invariante.

On a, d'après l'invariance à gauche de $\lambda$,

$$\left| \int \Phi_j f d\lambda - \int \Phi_j ({}_g f) d\lambda \right| \leqslant \| f \| \quad \|_{g^{-1}}\Phi_j - \Phi_j \|_1$$

D'où

$$| m(f) - m({}_a f) | = \lim_{j_k \to \infty} \| f \| \frac{\lambda[{}_g H_{j_k} \triangle H_{j_k}]}{\lambda[H_{j_k}]} = 0$$

Le groupe G est donc moyennable.

2) Soit [G] le sous-groupe de G engendré par $\bigcup_1 H_n$.

Si $G - [G] \neq \emptyset$, il existe un $g \in G - [G]$ et par suite pour tout $n$, $gH_n \cap H_n = \emptyset$.

Alors $\lambda[gH_n \triangle H_n] = 2\lambda(H_n)$. Par suite pour cet élément $g$,

$$\frac{\lambda[gH_n \triangle H_n]}{\lambda(H_n)} = 2 \qquad \forall n$$

ce qui est en contradiction avec (P).

Définitions II.

1) Soit X un espace topologique, G un groupe topologique. On dit que G *opère continûment dans* X, si les conditions suivantes sont vérifiées.

*a*) X est muni du groupe d'opérateurs G, autrement dit X est muni d'une loi de composition externe $(g, x) \to gx$ telle que $g\cdot(tx) = (gt)x$ et $e\cdot x = x$ pour $g$, $t$ dans G et $x \in X$.

*b*) L'application $(g, x) \to gx$ de $G \times X$ dans X est continue. Ainsi, pour tout $g \in G$, l'application $x \to gx$ est un homéomorphisme de X sur lui-même.

2) Si X est un espace vectoriel topologique localement convexe sur lequel G opère continûment, on dit que l'application $(g, x) \to gx$ de $G \times X$ dans X est *affine* si $g[ax + (1 - a)y] = agx + (1 - a)gy$, $x, y \in X$, pour tout $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Si cette propriété est vérifiée pour tout $g \in G$, on dit que G *opère sur* X *de manière affine*.

3) On dit qu'un groupe G a *la propriété de point fixe* si, lorsque G opère de manière affine dans un sous-ensemble convexe compact K d'un espace topologique localement convexe, il existe $x_0 \in K$ tel que $gx_0 = x_0$, $\forall g \in G$.

Théorème II. — *G moyennable* $\to$ *G a la propriété de point fixe* [3].

*Démonstration.* — Soit K un ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe E, sur lequel G opère continûment et de manière affine.

Soit $x_0 \in K$, $l$ un élément du dual $E^*$ de E.

L'application $g \to \langle gx_0, l \rangle$ est continue et comme $gx_0 \in K$, qui est compact, elle est bornée.

Soit $Tl$ cette application. $Tl \in CB(G)$. Étant donnée une moyenne invariante $m \in \mathcal{M}$ on sait donc définir $\langle m, Tl \rangle$.

L'application $l \to \langle m, Tl \rangle$ est linéaire. On peut donc poser

$$\langle m, Tl \rangle = \langle T^*m, l \rangle ;$$

$T^*m$ est un élément du dual algébrique $E^{*\prime}$ de $E^*$. L'espace E étant séparé, il s'identifie à un sous-espace de $E^{*\prime}$, si on identifie un élément $x \in E$, à la forme linéaire $\tilde{x}$ sur $E^*$, définie par $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in E^*$.

Dans ce qui suit, on munira $E^{*\prime}$ de la topologie faible $\sigma(E^{*\prime}, E^*)$.

*Le problème est de montrer que* $T^*m$ *est un élément de* K *invariant par* G.

1) K convexe compact de E, considéré comme sous-espace de $E^{*\prime}$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés limités par les hyperplans d'appui de K et contenant K. Pour tout $l$ de $E^*$, il existe donc un $a$ tel que

$$\langle gx_0, l \rangle \leqslant a \qquad \forall g \in G$$

On en déduit que $\langle T^*m, l \rangle = \langle m, Tl \rangle \leqslant a$ et par suite que $T^*m \in K$.

2) $T^*m$ *est un point fixe de* G.

Supposons démontré :

*a*)
$$_g[T^*_m] = T^*[_g m]$$

Ceci entraîne la proposition si $m$ est invariante à gauche.

La relation *a*) est vérifiée si $m = \delta_{g_0}$, $g_0 \in G$.

On a $_g[\delta_{g_0}] = \delta_{gg_0}$ et avec les notations de la première partie du théorème

$$T^*[\delta_{g_0}] = g_0 x_0$$

en effet

$$\langle T^*(\delta_{g_0}), l \rangle = \langle \delta_{g_0}, Tl \rangle = \langle g_0 x_0, l \rangle$$

On en déduit que

$$g[T^*(\delta_{g_0})] = gg_0 x_0 = T^*[g\delta_{g_0}]$$

*La propriété a) est vraie pour toute moyenne finie.*

Ceci se déduit de ce qui précède en utilisant la linéarité de T, et le fait que G opère de manière affine sur E.

*La propriété a) est vraie pour tout m.*

En effet l'ensemble des moyennes finies est faiblement dense dans $m$ et les transformations $m \to T^*m$ et $m \to {_g m}$ sont continues, pour tout $g \in G$.

*Remarque.* — Le point $T^*m$ dépend du point $x_0$ choisi dans K. Si on pose $T^*m = M(x_0)$ on remarque que l'application $x_0 \to M(x_0)$ est une application affine de K dans lui-même.

## II. APPLICATIONS A LA THÉORIE ERGODIQUE

On se propose dans ce chapitre d'utiliser les résultats de I pour démontrer un théorème analogue au théorème de convergence en moyenne dans $L^p$ de moyennes ergodiques.

Soit X un espace compact métrisable. $\mathscr{X}$ la tribu des boréliens de X. G est un groupe localement compact possédant la propriété (P), qui opère continûment sur X. $\mathscr{G}$ est la tribu des boréliens de G, $\lambda$ une mesure de Haar à gauche sur $\mathscr{G}$.

On définit sur $\mathscr{X}$ une mesure P invariante par G :

$$P(g^{-1}A) = P(A), \qquad \forall A \in \mathscr{X}, \qquad \forall g \in G.$$

Une telle mesure existe toujours puisque G est moyennable (théorème I) et X compact. On prendra P telle que $P(X) = 1$. On supposera en outre que G est à base dénombrable de sorte que la tribu produit $\mathscr{G} \times \mathscr{F}$ est identique à la tribu des boréliens de G × H. $L^p(X)$ (resp. $L^p(G)$) désigne l'ensemble des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable sur X (sur G) que l'on munira de la norme usuelle

$$\| f \|_p = \left[ \int_X | f(x) |^p dP(x) \right]^{1/p}.$$

$\mathscr{C}(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X muni de la norme de convergence uniforme.

THÉORÈME III. — 1° *Pour tout p,* $1 \leqslant p < \infty$, *la suite*

$$M_n(f) = \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} f(gx)d\lambda(g) \qquad f \in L_p(X)$$

*converge en moyenne d'ordre p vers une fonction* $M(f)$ *de* $L^p(X)$.

2° *L'application* M *de* $L^p(X)$ *dans lui-même qui à f fait correspondre* $M(f)$ *est telle que*

$$Ma = aM = M^2 = M \qquad \forall a \in G.$$

3° *Quel que soit* $F \in a$, *invariant par* G $({}_a\mathbf{1}_F \underset{\text{p.p.}}{=} \mathbf{1}_F, \ \forall a \in G)$

$$\int_F h(x)dP(x) = \int_F M(h)(x)dP(x) \qquad h \in L^1(X)$$

*(la notation p. p. signifie presque partout).*

*Si* $\mathscr{F}$ *est la sous-algèbre des invariants de* $\mathscr{X}$, *on a donc* $M(h) = E^{\mathscr{F}}(h)$ *(espérance conditionnelle).*

LEMMES PRÉLIMINAIRES

LEMME 1. — *Soit* $f \in L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$. *L'application de* G *dans* $L^p(X)$ *définie par* $g \to {}_g f$ *est continue.*

La mesure P étant invariante par G, il suffit de montrer la propriété au point $e$ (élément neutre de G).

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathscr{C}(X)$ tel que $\| f - k \|_p < \varepsilon$.

$k$ étant continue sur X compact est uniformément continue.

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de $e$ tel que pour tout $g \in V$ $\| {}_g k - k \|_p < \varepsilon$, et alors à cause de l'invariance de P

$$\| {}_g f - f \|_p \leqslant \| {}_g f - {}_g k \|_p + \| {}_g k - k \|_p + \| k - f \|_p < 3\varepsilon$$

LEMME 2. — *Soit* $f \in L^p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Pour tout* $h \in L^q(X)$,

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right);$$

*l'application*

$$g \to \int_X f(gx)h(x)dP(x)$$

*est continue et bornée par* $\| f \|_p \| h \|_q$.

Ceci résulte immédiatement de l'inégalité de Hölder et du lemme 1.

LEMME 3. — *Si* $f$ *est* $\mathscr{X}$*-mesurable, la fonction* $s$: $G \times X \to R$ *définie par* $s(g, x) = f(gx)$ *est* $\mathscr{G} \times \mathscr{X}$ *mesurable.*

Soit E un ouvert de X, et $h$ l'application de $G \times X$ dans X définie par $h(g, x) = gx \cdot h$ est continue, par suite $h^{-1}(E)$ est ouvert dans $G \times X$ et par suite appartient à $\mathscr{G} \times \mathscr{X}$. Comme on a

$$h^{-1}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \bigcup_{i=1}^{\infty} h^{-1}(E_i), \quad h^{-1}(E^c) = [h^{-1}(E)]^c \quad \text{et} \quad h^{-1}(\Phi) = \Phi,$$

il en résulte que si $E \in \mathscr{X}$, $h^{-1}(E) \in \mathscr{G} \times \mathscr{X}$.

Soit alors $E = \{ y ; f(y) < a \}$, $h^{-1}(E) = \{ (g, x) \mid f(g, x) < a \}$, $f$ étant $\mathscr{X}$-mesurable, on en déduit que $(g, x) \to gx$ est $\mathscr{G} \times \mathscr{X}$ mesurable.

*Remarque.* — Dans [2] et [7], l'application $(g, x) \to f(gx)$ est supposée $G \times X$ mesurable si $f$ est mesurable. Il est alors inutile de faire une hypothèse supplémentaire concernant la tribu produit $\mathscr{G} \times \mathscr{X}$ comme il est fait ici dans l'introduction.

LEMME 4. — *Si* $f \in L^p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$ *et si* $s \in L^1(G)$, *alors l'intégrale* $x \to \int_G f(gx)s(g)d\lambda(g)$ *existe pour* P *presque tout* $x$, *et définit une fonction dans* $L^p(X)$ *de norme inférieure ou égale à* $\| f \|_p \| s \|_1$.

D'après le lemme 2 on sait définir, si $h \in L^q(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\int_{G \times X} |f(gx)h(x)s(g)| \, d(\lambda \otimes P) = \int_G |s(g)| \left[ \int_X |f(gx)h(x)| \, dP(x) \right] d\lambda(g)$$

La fonction $(g, x) \to f(gx)s(g)$ est $\mathscr{G} \times \mathscr{X}$ mesurable (lemme 3) et par suite, d'après le théorème de Fubini, pour P presque tout $x$ l'application

$$g \to f(gx)s(g)$$

est $\mathscr{G}$-mesurable et on a :

$$\left| \int_X \left[ \int_G f(gx)s(g)d\lambda(g) \right] h(x)dP(x) \right| \leqslant \int_G |s(g)| \int_X |f(gx)h(x)| \, dP(x)d\lambda(g)$$
$$\leqslant \|s\|_1 \|f\|_p \|h\|_q \qquad \forall h \in L^q(X)$$

Ceci montre que pour P presque tout $x$, $x \to \int_G f(gx)s(g)d\lambda$ est dans $L^p(X)$ et que sa norme dans $L^p(X)$ est majorée par $\|f\|_p \|s\|_1$.

*Démonstration de la première partie du théorème.*

1. Supposons tout d'abord $1 < p < \infty$

Soient $f$ un élément fixé de $L^p(X)$, $1 < p < \infty$, $\|f\|_p = r$ sa norme, $0(f) = \{ {}_af : a \in G \}$, $K_f$ l'enveloppe convexe de $0(f)$, $\overline{K_f}$ l'enveloppe convexe fermée de $0(f)$. Pour $1 < p < \infty$, $L^p(X)$ est un espace réflexif, donc la boule $B(0, r) = \{ \varphi \in L^p(X) \, \| \varphi \|_p \leqslant r \}$ est faiblement compacte. $0(f)$ est contenue dans $B(0, r)$ car $\| {}_af \|_p = \|f\|_p$, $\forall a \in G$. Par suite $\overline{K_f} \subset B(0, r)$ et $\overline{K_f}$ est faiblement compact.

a) *Il existe dans* $\overline{K_f}$ *un point fixe sous l'action de* G. — En raison du théorème II, il suffit de montrer que G opère continûment et de manière affine sur $\overline{K_f}$.

$L^p(X)$ étant complet, $\overline{K_f} \in L^p(X)$. Or l'application $(g, \varphi) \to {}_g\varphi$ de $G \times L^p(X)$ dans $L^p(X)$ est continue, en raison du lemme 1, car on a

$$\| {}_g\varphi - {}_{g_0}\varphi_0 \|_p \leqslant \| {}_g\varphi - {}_{g_0}\varphi \|_p + \| \varphi - \varphi_0 \|_p$$

D'autre part on a, si $\varphi$ appartient à $K_f$

$$\varphi = \sum_I \lambda_i [{}_{a_i}f], \quad \lambda_i > 0, \qquad \sum_I \lambda_i = 1, \quad a_i \in G$$

et pour tout $g \in G$

$$_g\varphi(x) = \Sigma\lambda_i(_{a_i}f)(gx) = \sum_I \lambda_i\, _g(_{a_i}f)(x) = \sum_I \lambda_i(_{a_ig}f)(x)$$

ce qui montre que $_g\varphi \in K_f$ et que G opère de manière affine sur $K_f$ et par suite sur $\overline{K_f}$.

b) *Détermination du point fixe.* — On conserve ici les notations du théorème II.

Pour tout $l \in L^q(X)$, l'application $Tl$ définie par

$$g \to \int_X f(gx)l(x)dP(x) = \langle {}_gf, l \rangle = Tl(g)$$

est continue et bornée par $\|f\|_p \|h\|_q$.

Considérons les moyennes $m_j$ définies comme dans le théorème I par

$$m_j(\varphi) = \frac{1}{\lambda(H_j)} \int_{H_j} \varphi(g)d\lambda(g) \qquad \varphi \in CB(G)$$

on a ici :

$$\langle m_j, Tl \rangle = m_j(Tl) = \frac{1}{\lambda(H_j)} \int_{H_j} \left[ \int_X f(gx)l(x)dP(x) \right] d\lambda$$
$$= \left\langle \frac{1}{\lambda(H_j)} \int_{H_j} {}_gf\, d\lambda(g), l \right\rangle$$

c'est-à-dire $\langle T^*_{m_j}, l \rangle$ d'après le lemme 4. D'où

$$T^*_{m_j} = \frac{1}{\lambda(H_j)} \int_{H_j} {}_gf d\lambda(g)$$

qui est donc dans $\overline{K_f}$. L'ensemble des moyennes $\mathcal{M}$ étant faiblement compact, on peut extraire de la suite $\{ m_j \}$ une sous-suite $\{ m_{jk} \}$ convergeant faiblement vers une moyenne $m$ invariante et l'on a :

$$\langle T^*_m, l \rangle = \langle m, Tl \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle m_{jk}, Tl \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle T^*_{m_{jk}}, l \rangle$$
$$= \langle \lim_{k \to \infty} T^*_{m_{jk}}, l \rangle$$

par continuité sur $L_p$ muni de la topologie faible. On en déduit que de la suite $\{ T^*_{m_j} \}$ on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers un élément $T^*_m$ de $\overline{Kf}$. En outre $T^*_m$ est invariant par G (comme $m$).

c) *Autre notation.* — Si on veut mettre en évidence la relation entre $T^*_{m_j}$ et $f$, posons $T^*_{m_j} = M_j(f)$.

L'application $f \to M_j f$ est linéaire de $L^p(X)$ dans $\overline{Kf}$ et $\| M_j f \|_p \leqslant \| f \|_p$.
On a en outre la propriété suivante

$$\lim_{j \to \infty} \| M_j({}_a f) - M_j(f) \|_p = 0 \qquad \forall a \in G$$

En effet un calcul facile montre que l'on a

$$\| M_j({}_a f) - M_j(f) \|_p \leqslant \| f \|_p \frac{\lambda(aH_j \triangle H_j)}{\lambda(H_j)}$$

On posera de même $M(f) = T^* m$. D'après ce qui précède $M(f)$ est limite faible d'une sous-suite extraite des $M_j(f)$.

*d)* $M(f)$ *est limite au sens de la norme de* $L^p$ $(1 < p < \infty)$ *des* $M_j(f)$ (il est donc indépendant de la sous-suite $M_{j_k}(f)$ qui a permis de le définir).
D'après ce qui précède $M(f) \in \overline{Kf}$.
Par suite $\forall \varepsilon > 0$, $\exists v \in L_p(X)$ avec

$$\| v \|_p < \varepsilon, \quad \alpha_i > 0 \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1, \quad a_i \in G$$

tels que

$$M(f) = v + \sum_{i \in I} \alpha_i [a_i f]$$

et par suite

$$M(f) - f = v + \sum_{i \in I} \alpha_i [a_i f - f].$$

Appliquons l'opérateur $M_j$ aux 2 membres. $M(f)$ étant invariant par G $M_j[M(f)] = M(f)$, $\forall j$ et d'autre part $\| M_j(v) \|_p \leqslant \varepsilon$.
On a donc

$$\| M(f) - M_j(f) \|_p \leqslant \varepsilon + \sum_{i \in I} \alpha_i \| M_j(a_i f) - M_j(f) \|_p.$$

La propriété des $M_j(f)$ démontrée dans *c)* entraîne alors

$$\lim_{j \to \infty} \| M(f) - M_j(f) \|_p < \varepsilon$$

2. Cas où $p = 1$

$L^2(X)$ est dense dans $L^1(X)$ par suite,

$$\forall f \in L^1(X), \quad \exists \varphi \in L^2(X) \quad \text{tel que} \quad \| f - \varphi \|_1 < \varepsilon,$$

et d'après ce qui précède

$$\lim_{n\to\infty} \left\| M(\varphi) - \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \varphi(Tx)d\lambda(T) \right\|_2 = 0.$$

On en déduit, à cause de l'inégalité de Schwarz, que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| M(\varphi) - \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \varphi(Tx)d\lambda(T) \right\|_1 = 0.$$

D'autre part

$$\| M_n(f) - M_n(\varphi) \|_1$$
$$= \int_X \left| \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \left[ f(Tx) - \varphi(Tx) \right] d\lambda(T) \right| dP(x) \leqslant \| f - \varphi \|_1.$$

On a donc

$$\| M_n(f) - M_p(f) \|_1 \leqslant \| M_n(f) - M_n(\varphi) \|_1 + \| M_n(\varphi) - M(\varphi) \|_1$$
$$+ \| M(\varphi) - M_p(\varphi) \|_1 + \| M_p(\varphi) - M_p(f) \|_1$$

et ceci montre que la suite $M_n(f)$ est une suite de Cauchy dans $L^1(X)$, donc converge vers un élément $M(f)$ de $L^1(X)$.

*Démonstration de la dernière partie du théorème.*

2) a été montré au cours de la démonstration de 1). Pour montrer 3), soit F un sous-ensemble invariant de $\mathscr{X}$.

Alors ${}_T\mathbf{1}_F = \mathbf{1}_F$ p. s. $\forall T \in G$

$$\int_F h(X)dP(X) = \int_X {}_T(\mathbf{1}_F h(x)dP(x) \text{ car P est invariante par G}$$
$$= \int_X \mathbf{1}_F(x)({}_Th)(x)dP(x) = \int_F ({}_Th)(x)dP(x)$$

et par suite

$$\int_F hdP = \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \left[ \int_F hdP \right] d\lambda(T) = \int_F \left[ \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} {}_Thd\lambda \right] dP$$

et en passant à la limite

$$\int_F hdp = \int_F M(h)dp.$$

Cette formule permet de définir $M(h)$ comme un représentant de l'espérance conditionnelle $E^{\mathscr{F}}(h)$ si $\mathscr{F}$ est la sous-algèbre des invariants de $\mathscr{X}$.

## III. ÉTUDE DU THÉORÈME DE CONVERGENCE PRESQUE SÛRE DE MOYENNES ERGODIQUES

On reprend les hypothèses précédentes avec les conditions supplémentaires suivantes $(P_1)$

1) $\lambda(H_n H_n^{-1}) \leqslant K\lambda(H_n)$, $\forall n$, avec K constante $\geqslant 1$.

2) $\bigcup_n H_n = G$.

3) Les $H_n$ forment une famille croissante.

*Conséquences.* — Le groupe G est unimodulaire.

En effet soit $\Delta$ la fonction modulaire de G.

$\lambda[H_n g] = \Delta(g)\lambda[H_n]$. Prenons $g \in H_n^{-1}$, alors $H_n g \subset H_n H_n^{-1}$ d'où

$$\Delta(g)\lambda[H_n] \leqslant \lambda[H_n H_n^{-1}] \leqslant K\lambda[H_n]$$

et par suite $\Delta(g) \leqslant K$. Comme les $H_n$ recouvrent G, quel que soit $g$, il existe $n_0$ tel que $g^{-1} \in H_{n_0}$ et par suite $g \in H_{n_0}^{-1}$. Donc quel que soit $g \in G$, $\Delta(g) \leqslant K$. En particulier, $\forall n \in Z^+$, $\Delta(g^n) = [\Delta(g)]^n \leqslant K$, ce qui implique $\Delta(g) \leqslant 1$, et comme $\Delta(g^{-1}) = \dfrac{1}{\Delta(g)} \leqslant 1$, on a bien $\Delta(g) = 1$, $\forall g \in G$.

*Remarques.*

*a*) $H_n^{-1}H_n = \{ h \in G : hH_n \cap H_n \neq \varnothing \}$.

*b*) Si la suite $\{ H_n \}$ possède les propriétés (P) et $P_1$, la suite $\{ aH_n \}$ possède ces propriétés, pour $a$ fixé dans G.

En effet

$$\frac{\lambda[g(aH_n) \triangle aH_n]}{\lambda[aH_n]} = \frac{\lambda[a^{-1}gaH_n \triangle H_n]}{\lambda[H_n]} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

En outre

$$\lambda[(aH_n)(aH_n)^{-1}] \leqslant K\lambda[aH_n].$$

On pourra donc choisir sans hypothèses supplémentaires une suite $\{ H_n \}$ telle que $e \in H_n$ pour tout $n$ et dans ces conditions, pour tout sous-ensemble A de G, $H_n A \supset A$.

*Exemples de groupes moyennables possédant la propriété* $(P_1)$.

— Tout groupe compact (on prendra $H_n = G$, $\forall n$ et $K = 1$).

— Tout groupe abélien $\sigma$-compact (voir [*4*]). Dans $R^n$, la famille de pavés de centre 0 et de côté $2n$ peuvent être pris pour $H_n$ et alors $K = 2^n$.

— Soient G et T deux groupes possédant les propriétés (P) et $(P_1)$ avec respectivement les suites $\{ H_n \}$ et $\{ V_n \}$ et les constantes $K_1$ et $K_2$, le produit $G \times T$, muni de la mesure produit $\lambda \otimes \mu$ possède les propriétés P et $P_1$ avec la famille d'ensembles $\{ W_n \} = \{ H_n \times V_n \}$ et la constante $K_1K_2$.

— Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe compact distingué de G. Si G/H possède les propriétés (P) et ($P_1$), G possède les propriétés (P) et ($P_1$). En particulier si l'on a $G = MH$, M sous-groupe fermé de G, H compact, G possède les propriétés P et $P_1$, si M les a.

THÉORÈME IV. — *Soit* $f \in L^1(X)$ *à valeurs dans* $R^+$.
*Posons*

$$F(x) = \sup_n \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} f(Tx)d\lambda(T)$$

$$\boxed{P\{ x \mid F(x) \geqslant \alpha \} \leqslant \frac{K}{\alpha} \int_X f(x)dx \qquad \alpha > 0 \text{ donné}}$$

LEMME PRÉLIMINAIRE. — *Soit* $\varphi$ *une fonction à valeurs réelles positives sur* G, $\mathcal{G}$ *mesurable, intégrable sur chaque* $H_n$. *On suppose que* $\forall h \in G$,

*soit* $\varphi(h) \geqslant \alpha$,
*soit, si* $\varphi(h) < \alpha$,

$$\sup_{n \leqslant p} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \varphi(Th)d\lambda(T) \geqslant K\alpha$$

Alors

$$\int_{H_pH_p^{-1}} \varphi(T)d\lambda(T) \geqslant \alpha\lambda(H_pH_p^{-1})$$

*Démonstration du lemme.* — G étant unimodulaire

$$\frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \varphi(Th)d\lambda(T) = \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_nh} \varphi(T)d\lambda(T).$$

On construit une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles disjoints $H_mh$; $h \in H_p^{-1}$, formant un recouvrement partiel du sous-ensemble de G où $\varphi(h) < \alpha$, de la manière suivante :

Soit tout d'abord

$\mathcal{F}_0$ : une famille maximale d'éléments disjoints de la forme $H_ph$, $h \in H_p^{-1}$, vérifiant

$$\frac{1}{\lambda(H_ph)} \int_{H_ph} \varphi(T)d\lambda(T) \geqslant K\alpha, \tag{1}$$

puis $\mathscr{F}_1$ une famille maximale d'éléments disjoints de la forme $H_{p-1}h$, $h \in H_p^{-1}$, ne recoupant pas les précédents et vérifiant

$$\frac{1}{\lambda(H_{p-1}h)} \int_{H_{p-1}h} \varphi(T)d\lambda(T) \geqslant K\alpha.$$

$\mathscr{F}_m$ une famille maximale d'éléments disjoints de la forme $H_{p-m}h$, $h \in H_p^{-1}$, vérifiant une condition du type (1) et ne recoupant pas les éléments des familles précédentes.

On note par $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes ces familles. On a $\bigcup_{\mathscr{F}} H_m h \subset H_p H_p^{-1}$.

A tout élément $H_m h$, on peut associer l'élément $H_m^{-1} H_m h$ qui est bien défini, et contient $H_m h$.

Soit

$$A = \cup H_m^{-1} H_m h \quad | H_m h \in \mathscr{F} \quad A' = H_p H_p^{-1} - A$$

On a

$$\cup H_m h \cap A' = \Phi \quad A' \cup A = H_p H_p^{-1} \cup A \supset H_p H_p^{-1}$$

*Pour tout* $h \in A'$, $\varphi(h) \geqslant \alpha$. Supposons le contraire et soit $h_0$ un point de A' tel que $\varphi(h_0) < \alpha$.

Par hypothèse il existe un $r$, $0 \leqslant r \leqslant p$ tel que

$$\frac{1}{\lambda(H_r h_0)} \int_{H_r h_0} \varphi(h)d\lambda(h) \geqslant K\alpha$$

et $H_r h_0$ n'appartient à aucune des familles $\mathscr{F}_n$ précédentes, donc il existe un $H_m h$, $m \geqslant r$ tel que $H_r h_0 \cap H_m h \neq \Phi$ et par suite

$$h_0 \in H_r^{-1} H_m h \subset H_m^{-1} H_m h \subset A$$

D'où une contradiction.

On peut alors écrire :

$$\int_{H_p H_p^{-1}} \varphi(g)d\lambda(g) \geqslant \int_{\bigcup_{\mathscr{F}} H_m h} \varphi(g)d\lambda(g) + \int_{A'} \varphi(g)d\lambda(g)$$

$$\geqslant \alpha K \sum_{\mathscr{F}} \lambda(H_m h) + \alpha\lambda(A')$$

Or

$$\lambda(H_m h) \geqslant \frac{\lambda(H_m^{-1} H_m h)}{K}.$$

Donc

$$\int_{H_pH_p^{-1}} \varphi(g)d\lambda(g) \geqslant \alpha \sum_{\mathscr{F}} \lambda(H_m^{-1}H_m h) + \alpha\lambda(A')$$
$$\geqslant \alpha\lambda\left[\bigcup_{\mathscr{F}} H_m^{-1}H_m h\right] + \alpha\lambda(A') \geqslant \alpha\lambda(H_pH_p^{-1})$$

*Démonstration du théorème.* — Soit $f \in L^1(X)$, à valeurs dans $R^+$.

Posons
$$F_p(x) = \sup_{n \leqslant p} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} f(Tx)d\lambda(T)$$
$$D_p = \{ x \in X \mid F_p(x) \geqslant \alpha \}$$
$$D = \{ x \in X \mid F(x) \geqslant \alpha \}$$

On a $D_{p+1} \supset D_p \qquad \cup D_p = D$.

Définissons une fonction $G_p$ par

$$G_p(x) = f(x) \qquad \text{si} \quad x \in D_p$$
$$= \sup\left[\frac{\alpha}{K}, f(x)\right] \qquad \text{si} \quad x \notin D_p$$

et soit

$$D'_p = \{ x : f(x) = G_p(x) \}$$

On a

$$D'_p \supset D_p, \quad G_p(x) \geqslant f(x) \quad \text{et} \quad G_p(x) = \frac{\alpha}{K} \quad \text{sur} \quad X - D'_p$$

D'où

$$\text{si} \quad hx \in D_p \quad \sup_{n \leqslant p} \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} G_p(Thx)d\lambda(T) \geqslant \alpha$$
$$\text{si} \quad hx \notin D_p \quad G_p(hx) \geqslant \frac{\alpha}{K}$$

D'après le lemme 4, première partie, si $G_p$ appartient à $L^1(X)$, pour P presque tout $x$, l'application $g \to G_p(gx)\mathbf{1}_{H_n}(g)$ est $\mathscr{G}$-mesurable et l'application du théorème de Fubini montre que

$$\int_X \int_{H_n} G_p(gx)d\lambda(g)dP(x) = \lambda(H_n) \| G_p \|_1^x$$

On en déduit que pour P presque tout $x$, la fonction $g \to G_p(gx)$ est intégrable sur chaque $H_n$ ; en outre elle vérifie les hypothèses du lemme.

Par suite on a :

$$\int_{H_pH_p^{-1}} G_p(Tx)d\lambda(T) \geqslant \frac{\alpha}{K}\lambda(H_pH_p^{-1})$$

pour P presque tout $x$.

Intégrons par rapport à $x$ les deux membres de cette inégalité.

$$\frac{\alpha}{K}P(x) \leqslant \int_X \frac{dP(x)}{\lambda(H_pH_p^{-1})}\int_{H_pH_p^{-1}} G_p(Tx)d\lambda(T)$$

$$= \frac{1}{\lambda(H_pH_p^{-1})}\int_{H_pH_p^{-1}} d\lambda(T)\int_X G_p(Tx)dP(x) = \int_X G_p(x)dP(x)$$

Mais d'après la définition de G on a :

$$\int_X G_p(x)dP(x) = \int_{D'_p} f(x)dP(x) + \frac{\alpha}{K}[P(X) - P(D'_p)]$$

On en déduit, que pour tout $p$,

$$P(D'_p) \leqslant \frac{K}{\alpha}\int_X f(x)dP(x)$$

Si $p \to \infty$, $D'_p \to D$ en croissant, et à la limite on a

$$P(D) \leqslant \frac{K}{\alpha}\int_X f(x)dPx$$

Théorème V. — *Soit $f$ une fonction de $L^1(X)$, à valeur dans $R^+$*

*a*) $$P\{x : F(x) \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{2K}{\alpha}\int_{\left\{x : f(x) \geqslant \frac{\alpha}{2}\right\}} f(x)dP(x)$$

*b*) $$\int_X F(x)dP(x) \leqslant 2\left[P(X) + K\int_X f(x)\log^+ f(x)dP(x)\right],$$

où $\log^+ f(x) = \max[\log f(x), 0]$.

*c*) $$\int_X F^p(x)dP(x) \leqslant \frac{2^p pK}{p-1}\int_X f^p dP(x) \qquad 1 < p < \infty$$

*Demonstration de a*). — Posons

$$g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad f(x) > \frac{\alpha}{2}\,; \quad g(x) = 0 \text{ autrement.}$$

On a

$$0 \leqslant f \leqslant g + \frac{\alpha}{2}.$$

Soit

$$G(x) = \sup_n \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} g(Tx)d\lambda(T).$$

Alors

$$F(x) \leqslant G(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

$$P\{x : F(x) > \alpha\} \leqslant P\left\{x : G(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leqslant \frac{2K}{\alpha} \int_X g(x)dP(x) = \frac{2K}{\alpha} \int_{\left\{x : f(x) \geqslant \frac{\alpha}{2}\right\}} f(x)dP(x)$$

*Démonstration de b).* — Posons

$$D^*(\alpha) = \{x : F(x) \geqslant \alpha\} \qquad D(\alpha) = \{x : f(x) \geqslant \alpha\}$$

On a

$$\int_X F(x)dP(x) = \int_0^\infty P(D_a^*)da = \int_0^2 P(D_a^*)da + \int_2^{\infty 2} P(D_a^*)da \leqslant 2P(X) + \int_2^\infty P(D_a)da$$

où $da$ correspond à la mesure de Lebesgue sur R.

$$\int_2 P(D_a^*)da \leqslant 2K \int_2^\infty \int_{D\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{f(x)dP(x)}{a} da \quad \text{d'après le théorème I}$$

$$= 2K \int_2^\infty \int_X \frac{f(x)}{a} \mathbf{1}_{D\left(\frac{a}{2}\right)}(x)dP(x)da$$

$$= 2K \int_1^\infty \int_X \frac{f(x)}{b} \mathbf{1}_{D(b)}(x)dP(x)db$$

$$= 2K \int_X f(x) \int_1^{\max f(x), 1} f(x), 1 \frac{db}{b}$$

$$= 2K \int_X f(x) \log^+ f(x)dx.$$

où $\log^+ f(x) = \max[\log f(x), 0]$.

*Démonstration de c).*

$$\int_X [F(x)]^p dP(x) = p \int_X \left( \int_0^{F(x)} a^{p-1} da \right) dP(x) = p \int_0^\infty a^{p-1} P[D^*(a)]da$$

$$\leqslant 2pK \int_0^\infty a^{p-2} \left( \int_{D\left(\frac{a}{2}\right)} f(x)dP(x) \right) da = 2pK \int_0^\infty a^{p-2} \left[ \int_X f(x) \mathbf{1}_{D\left(\frac{a}{2}\right)} dP(x) \right] da$$

ou par changement de variable

$$= 2^p p\mathrm{K} \int_0^{\infty} b^{p-2} \int_{\mathrm{X}} f(x)\mathbf{1}_{\mathrm{D}(b)}(x)d\mathrm{P}(x)db$$

$$= 2^p p\mathrm{K} \int_{\mathrm{X}} f(x)\left[\int_0^{f(x)} b^{p-2}db\right]d\mathrm{P}(x) = 2^p \frac{p}{p-1}\mathrm{K}\int_{\mathrm{X}} [f(x)]^p d\mathrm{P}(x)$$

THÉORÈME VI (Birkhoff). — *Soit* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X})$, *a valeurs positives,*

$$\mathrm{M}_j(f)(x) = \frac{1}{\lambda(\mathrm{H}_j)} \int_{\mathrm{H}_j} f(\mathrm{T}x)d\lambda(\mathrm{T})$$

*Les* $\mathrm{M}_j(f)$ *convergent presque sûrement vers* $\mathrm{M}(f)$.

Posons $f_j = \mathrm{M}_j(f)$.

Il s'agit de montrer que $\limsup_j f_j = \liminf_j f_j$ presque sûrement. D'après la première partie, la suite $f_j$ converge en moyenne d'ordre 1 vers une fonction $\mathrm{M}(f) = f^*$ telle que pour presque tout $g \in \mathrm{G}$, $f^*(gx) = f^*(x)$ pour presque tout $x$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N}(\varepsilon)\cdot n > \mathrm{N} \Rightarrow f_n(x) = \varphi(x) + f^*(x) \quad \text{avec} \quad \|\varphi\|_1 < \frac{\varepsilon^2}{\mathrm{K}}.$$

Soit

$$\varphi_n(x) = \mathrm{M}_n[|\varphi|](x) = \frac{1}{\lambda(\mathrm{H}_n)} \int_{\mathrm{H}_n} |\varphi(\mathrm{T}x)|\, d\lambda(\mathrm{T}).$$

Le théorème IV implique que

$$\mathrm{P} : \{ x : \sup_n \varphi_n(x) \geqslant \varepsilon \} \leqslant \frac{\mathrm{K}}{\varepsilon}\|\varphi\|_1 = \varepsilon$$

et par suite

$$\sup_n \varphi_n(x) < \varepsilon$$

sur un ensemble E de mesure $\mathrm{P}(\mathrm{X}) - \varepsilon$.

D'autre part, sur E

$$\mathrm{M}_m(f_n)(x) = f^*(x) + \mathrm{M}_m(\varphi)(x)$$
$$\overline{\lim_m}\, \mathrm{M}_m(f_n)(x) \leqslant \overline{\lim_m}\, \mathrm{M}_m(\varphi)(x) + f^*(x) \leqslant \varepsilon + f^*(x)$$
$$- \underline{\lim_m}\, \mathrm{M}_m(f_n)(x) = \overline{\lim}\, \mathrm{M}_m[(-f)_n(x)] \leqslant \varepsilon - f^*(x).$$

Par suite

$$\overline{\lim_m}\, \mathrm{M}_m[f_n(x)] - \underline{\lim_m}\, \mathrm{M}_m[(f_n(x)] \leqslant 2\varepsilon \qquad \forall x \in \mathrm{E}$$

On va montrer dans un lemme que

$$\overline{\lim_m}\, f_m(x) \leqslant \overline{\lim_m}\, M_m[f_n(x)]$$
$$\underline{\lim_m}\, f_m(x) \geqslant \underline{\lim_m}\, M_m[f_n(x)].$$

Dans ces conditions

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \overline{\lim_m}\, f_m(x) - \underline{\lim}\, f_m(x) \leqslant 2\varepsilon$$

sur un ensemble de mesure $P(X) - \varepsilon$.

La convergence presque sûre en résulte.

LEMME

1) $$\forall h \in G, \qquad \overline{\lim_n}\, f_n(hx) = \overline{\lim_n}\, f_n(x)$$

2) $$\overline{\lim_m}\, f_m(x) \leqslant \overline{\lim_m}\, M_m[f_n(x)].$$

1) Si G est compact, $H_n = G$, $f_n(hx) = f_n(x) \forall h$.
Si G est non compact, $\lim_{n\to\infty} \lambda(H_n) = +\infty$.

$$f_n(hx) = \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n h} f(Tx)d\lambda(T)$$
$$H_n = (H_n \cap H_n h) \cup (H_n - H_n h)$$

par suite

$$f_n(x) = \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n h \cap H_n} f(Tx)d\lambda(T) + \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n - H_n h} f(Tx)d\lambda(T)$$

$$f_n(x) \leqslant f_n(hx) + \frac{1}{\lambda(H_n)} \| f \|_1.$$

Faisons tendre $n$ vers l'infini

$$\overline{\lim_n}\, f_n(x) \leqslant \overline{\lim_n}\, f_n(hx) \quad \text{car} \quad \frac{\| f \|_1}{\lambda(H_n)} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

En refaisant des calculs identiques, à partir de l'égalité

$$H_n h = (H_n \cap H_n h) \cup (H_n h - H_n),$$

on obtient l'égalité cherchée.

2) $$\overline{\lim_m}\, M_m[f_n(x)] = \overline{\lim_m}\, \frac{1}{\lambda(H_m)} \int_{H_m} f_n(Tx)d\lambda(T)$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \overline{\lim_m}\, f_m(Tx)d\lambda(T) = \frac{1}{\lambda(H_n)} \int_{H_n} \overline{\lim}\, f_m(x)d\lambda(T) = \overline{\lim_m}\, f_m(x).$$

Les inégalités correspondantes se démontreraient de la même manière avec des limites inférieures.

---

Je prie M. Avez de trouver ici le témoignage de ma gratitude pour l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de m'accorder pendant l'élaboration de ce travail.

---

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, *Intégration XIII*, chap. 3.
[2] A. P. CALDERON, *Ann. of Maths*, 2, t. **58**, 1953, p. 182-191.
[3] M. M. DAY, Fixed point theorems for compact convex sets. *Ill. J. Math.*, t. **5**, 1961, p. 585-590.
[4] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators I*, Interscience, New York, 1958.
[5] W. R. EMERSON, Ratio properties in locally compact amenable groups. *Trans. Ann. Math. Soc.*, t. **133**, 1968, n° 1.
[6] Neil W. RICKERT, Amenable groups and groups with the fixed point property. *Trans. Ann. Math. Soc.*, 1967, p. 221-232.
[7] A. A. TEMPELMAN, Ergodic theorems for general dynamic systems, *Soviet Math. Dokl.*, vol. **8**, 1967, n° 5, p. 1213-1216.

*(Manuscrit reçu le 27 avril 1970).*