ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. REGNIER

Théorèmes ergodiques individuels purement topologiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, nº 3 (1970), p. 271-280

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_3_271_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VI, n° 3, 1970, p. 271-280. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorèmes ergodiques individuels purement topologiques

par

A. REGNIER

SOMMAIRE. — Étendu à des fonctions absolument continues, le lemme de Fr. Riesz, classique en théorie ergodique, fournit une minoration utile de l'intégrale indéfinie d'une fonction bornée. Cela, appliqué à des moyennes de la forme $\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds$, où $T_s x$ est un semi-groupe de transformations continues d'un ensemble compact et où $f(x)$ est une fonction continue, donne des théorèmes ergodiques. Un équivalent topologique de la transitivité métrique est donné, physiquement significatif.

SUMMARY. — Extended to absolutely continuous functions, the lemma of Fr. Riesz, classical in ergodic theory, furnishes a useful minorant of the indefinite integral of bounded functions. Applied to $\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds$, where $T_s x$ is a semigroup of continuous transformations in a compact space, this gives some topological ergodic theorems. A topological equivalent of metrical transitivity is given, physically meaningful.

Soit $f(t)$ une fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$, mesurable et bornée par M. Pour $a > 0$, soit J_a l'ensemble nommé indifféremment

(1) $$\left\{ t : \operatorname*{Sup}_{t<r\leqslant t+a} \int_t^r f(s)ds > 0 \right\}$$

(2) $$\left\{ t : \exists r \in]t, t+a] : \int_t^r f(s)ds > 0 \right\}$$

$$(3) \qquad \bigcup_{r\in]0,a]} \left\{ t : \int_t^{t+r} f(s)ds > 0 \right\}$$

LEMME 1. — *$\{ J_a \}$ est une famille d'ensembles ouverts croissant avec a et l'on a $f(t) \geqslant 0$ presque partout sur $\bigcap_a J_a$.*

En effet, la continuité de $\int_t^{t+r} f(s)ds$ comme fonction de t fait que $\left\{ t : \int_t^{t+r} f(s)ds > 0 \right\}$ est un ensemble ouvert et (3) entraîne immédiatement que J_a est ouvert et croît avec a. De plus, (2) implique immédiatement

$$\bigcap_a J_a = \left\{ t : \forall a \, \exists r \in]t, t + a] : \int_t^r f(s)ds > 0 \right\}$$

Mais, lorsque $r \in]t, t+a]$, $\int_t^r f(s)ds > 0$ équivaut à $\frac{1}{r-t} \int_t^r f(s)ds > 0$, d'où

$$(4) \qquad J_a \subset \left\{ t : \limsup_{r \downarrow t} \frac{1}{r-t} \int_t^r f(s)ds \geqslant 0 \right\}$$

Or, presque partout, $\int_0^t f(s)ds$ possède une dérivée égale à $f(t)$, d'une part, et au dérivé supérieur à droite, d'autre part ; ce dernier étant positif sur $\bigcap_a J_a$, d'après (4), on a $f(t) \geqslant 0$ presque partout sur $\bigcap_a J_a$.

LEMME 2. — *Si $a' < a$ et $t \in J_a - J_{a'}$, il existe un $\tau \in [t + a', t + a]$ tel que $\int_t^\tau f(s)ds = 0$ et $[t, \tau] \subset J_a$.*

Par (2), $t \in J_a$ implique l'existence sur $]t, t + a]$ de nombres r tels que $\int_t^r f(s)ds > 0$; si τ est leur borne inférieure, on a $\tau \leqslant t + a$; mais $t \notin J_{a'}$ entraîne qu'aucun de ces r ne peut appartenir à $]t, t + a']$, on a donc $\tau \geqslant t + a'$ et, finalement, $\tau \in [t + a', t + a]$.

Par définition de τ, d'une part, $r \in]t, \tau]$ implique $\int_t^r f(s)ds \leqslant 0$ et, d'autre part, τ est adhérent à un ensemble de r tels que $\int_t^r f(s)ds > 0$; par continuité de l'intégrale, on a donc $\int_t^\tau f(s)ds = 0$.

Soit $t' \in]t, \tau]$; par définition de τ, on a $\int_t^{t'} f(s)ds \leqslant 0$, mais aussi, comme $t' + a > t + a \geqslant \tau$, et sachant que $\int_t^{\tau} f(s)ds = 0$, on peut trouver un $r_0 \in]\tau, t' + a]$ tel que $\int_t^{r_0} f(s)ds > 0$. On a donc

$$\int_{t'}^{r_0} f(s)ds = \int_t^{r_0} f(s)ds - \int_t^{t'} f(s)ds > 0$$

et, comme $r_0 \in]\tau, t' + a] \subset]t', t' + a]$, ceci implique $t' \in J_a$. Ainsi, $]t, \tau] \subset J_a$, et, puisque $t \in J_a$ par hypothèse, $[t, \tau] \subset J_a$.

LEMME 3. — *Si $a' < a$, tout intervalle $[u, v[\subset J_a$, $(v \leqslant +\infty)$ tel que $v \notin J_a$ est réunion d'une famille d'intervalles disjoints deux à deux, les uns de longueur comprise entre a' et a et sur chacun desquels l'intégrale de f est nulle, les autres contenus dans $J_{a'}$.*

Ou bien $[u, v[\subset J_{a'}$, auquel cas le lemme est vrai, ou bien $[u, v[- J_{a'} \neq \phi$. Dans ce second cas, soit u_0 la borne inférieure de $[u, v[- J_{a'}$; on a $u_0 \in [u, v[$ et $[u, u_0[\subset J_{a'}$; de plus $u_0 \in J_a - J_{a'}$ car, d'une part, $u_0 \in [u, v[\subset J_a$ et, d'autre part, u_0, comme borne inférieure de $[u, v[- J_{a'}$ est adhérent à celui-ci, donc au complémentaire de $J_{a'}$; et comme $J_{a'}$ est ouvert son complémentaire est fermé, donc contient u_0. Ainsi nous avons un intervalle $[u, u_0[$, éventuellement vide, contenu dans $J_{a'}$ et dont l'extrémité droite, u_0, appartient à $J_a - J_{a'}$.

Le lemme 2 affirme alors l'existence d'un $u_1 \in [u_0 + a', u_0 + a]$ tel que $\int_{u_0}^{u} f(s)ds = 0$ et $[u_0, u_1] \subset J_a$. Comme $u_0 < v$ et $v \notin J_a$ on a donc $u_1 < v$ et le nouvel intervalle $[u_1, v[$, contenu dans $[u, v[$, donc dans J_a, possède les propriétés requises pour le présent lemme, tandis que $[u, u_1[$ en vérifie la conclusion, tout en étant de longueur supérieure à a'. Par itération, on en déduit que le lemme est vrai pour $[u, v[$.

LEMME 4. — *Si $]u, v[$ est un intervalle borné contenu dans J_a on a*

$$\int_u^v f(s)ds \geqslant - Ma ;$$

si de plus $v \notin J_a$ on a $\int_u^v f(s)ds \geqslant 0$.

Vu la continuité de l'intégrale, il suffit de démontrer le lemme pour les intervalles semi-ouverts $[u, v[$: si elles sont vraies pour des

$$\left[u + \frac{1}{n}, v\right[, \qquad (n \to +\infty),$$

les inégalités annoncées se prolongeront à $]u, v[$.

Soit $\varepsilon > 0$; puisque les J_a décroissent avec a et que $[u, v[$ est supposé borné, nous pouvons trouver un $a' < a$ tel que, m désignant la mesure de Lebesgue,

$$\mathrm{M}m\left\{(J_{a'} - \bigcap_a J_a) \cap [u, v + a]\right\} \leqslant \varepsilon$$

J_a, étant ouvert, est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints ; donc $[u, v[$, contenu dans J_a, est contenu dans un intervalle $[u, v_1[\subset J_a$ tel que $v_1 \notin J_a$ ($v_1 \leqslant +\infty$), et si $v \notin J_a$ on a $v = v_1$. Appliquons le lemme 3 à $[u, v_1[$: cet intervalle est réunion d'intervalles deux à deux disjoints, les uns de longueur comprise entre a' et a et sur chacun desquels l'intégrale de f est nulle, les autres contenus dans $J_{a'}$. Mais alors, on peut trouver un $v' \in [v, v + a]$ tel que $[u, v'[$ possède cette même propriété et, si $v \notin J_a$, on peut certainement prendre $v' = v$.

On a alors une réunion d'intervalles X telle que

$$\int_u^{v'} f(s)ds = \int_{X \cap J_{a'}} f(s)ds = \int_{X \cap \bigcap_a J_a} f(s)ds + \int_{X \cap (J_{a'} - \bigcap_a J_a)} f(s)ds$$

Dans le dernier membre, la première intégrale est positive puisque f l'est presque partout sur $\bigcap_a J_a$ (lemme 1), la seconde est $\geqslant -\varepsilon$ par le théorème de la moyenne et le choix que nous avons fait de a'. Mais alors

$$\int_u^v f(s)ds = \int_u^{v'} f(s)ds - \int_v^{v'} f(s)ds \geqslant -\varepsilon - \int_v^{v'} f(s)ds$$

Si $v \notin J_a$, on a $v' = v$, l'intégrale du dernier membre est ici nulle. Si $v \in J_a$, on sait que $v' \in [v, v + a]$, et le théorème de la moyenne permet de minorer cette intégrale par $-\mathrm{M}a$.

Finalement, ε étant arbitraire, le lemme en résulte immédiatement.

THÉORÈME 1. — *Soit $f(t)$ une fonction numérique définie sur* $[0, +\infty[$, *mesurable et bornée par* M ; *soit m la mesure de Lebesgue ; soit*

$$\mathrm{K}_a = \left\{t : \sup_{0 < r \leqslant a} \frac{1}{r}\int_t^{t+r} f(s)ds \leqslant 0\right\} \tag{5}$$

on a pour tout $t > 0$ et tout $a > 0$

$$\int_0^t f(s)ds \geqslant - \mathrm{M}\{a + m([0, t] \cap \mathrm{K}_a)\} \tag{6}$$

En effet, K_a est le complémentaire de J_a, car

$$\operatorname*{Sup}_{0<r\leqslant a} \frac{1}{r}\int_t^{t+r} f(s)ds \leqslant 0$$

est la négation de

$$\operatorname*{Sup}_{0<r\leqslant a} \frac{1}{r}\int_t^{t+r} f(s)ds > 0$$

qui équivaut à $t \in \mathrm{J}_a$. Par ailleurs on a

$$\int_{[0,t]\cap \mathrm{J}_a} f(s)ds \geqslant - \mathrm{M}a.$$

En effet, J_a est, comme ensemble ouvert, réunion d'intervalles deux à deux disjoints $]u_j, v_j[$ tels que $v_j \notin \mathrm{J}_a$, donc sur chacun desquels l'intégrale de f est $\geqslant 0$, par le lemme 4. L'ensemble $[0, t[\cap \mathrm{J}_a$ est lui-même une réunion de tels intervalles, plus, éventuellement, un intervalle $]u, t[$ pour lequel le lemme 4 nous permet d'écrire $\int_u^t f(s)ds \geqslant - \mathrm{M}a$.

On a donc

$$\int_0^t f(s)ds = \int_{[0,t]\cap \mathrm{J}_a} f(s)ds + \int_{[0,t]\cap \mathrm{K}_a} f(s)ds \geqslant - \mathrm{M}a + \int_{[0,t]\cap \mathrm{K}_a} f(s)ds$$

et le théorème de la moyenne entraîne (6).

*
* *

Dorénavant, nous ferons l'hypothèse :

(A) : Soit E un ensemble topologique compact, $x \in \mathrm{E}$, $t \in [0, +\infty[$. Soit $\mathrm{T}_t x$ une famille d'applications de E dans lui-même telle que $\mathrm{T}_0 x = x$ et $\mathrm{T}_{t+s} = \mathrm{T}_t \mathrm{T}_s$ pour tous t et s appartenant à $[0, +\infty[$. Soit $f(x)$ une fonction numérique bornée sur E, telle que, pour chaque $x \in \mathrm{E}$, $f(\mathrm{T}_t x)$ est une fonction mesurable de t et telle que, pour chaque $t > 0$

$$\mathrm{S}(t, x) = \frac{1}{t}\int_0^t f(\mathrm{T}_s x)ds) \tag{7}$$

est une fonction continue sur E.

Remarque. — (A) est vérifiée si f est continue sur E et si $T_t x$ est continue comme fonction de x et borélienne comme fonction de t.

L'adhérence d'une partie X de E sera notée $\overline{X}$. L'ensemble des $T_t x$ pour x donné sera appelé *orbite de* x et noté $O(x)$. Une partie X de E sera dite invariante si elle contient l'orbite de chacun de ses points.

LEMME 5. — *Si* X *est une partie fermée de* E *et si* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\tau > 0$ *tel que pour tout* $t > \tau$ *et tout* x *tel que* $O(x) \subset X$

$$S(t, x) \geqslant \inf_{y \in X} \operatorname{Sup}_{t>0} S(t, y) - \varepsilon \tag{8}$$

Posons :

$$g(x) = f(x) - \inf_{y \in X} \operatorname{Sup}_{t>0} S(t, y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cette fonction ne diffère de $f(x)$ que par l'addition d'une constante, donc :

1) elle est une fonction bornée, et nous noterons M′ sa borne,

2) $g(T_t x)$ est, pour chaque x, une fonction mesurable de t,

3) $\frac{1}{t}\int_0^t g(T_s x)ds$ est pour chaque $t > 0$ continue sur E. Enfin on a

$$\inf_{y \in X} \operatorname{Sup}_{t>0} \frac{1}{t}\int_0^t g(T_s y)ds = \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

Les fonctions $\frac{1}{t}\int_0^t g(T_s x)ds$ étant, pour chaque $t > 0$, continues sur E, les ensembles

$$Y_a = \left\{ x : \operatorname{Sup}_{0<r\leqslant a} \frac{1}{r}\int_0^r g(T_s x)ds \leqslant 0 \right\}$$

sont fermés, comme intersections d'images réciproques d'un fermé par des fonctions continues. De plus ils décroissent lorsque a croît et, comme on a sur X

$$\operatorname{Sup}_{0<r} \frac{1}{r}\int_0^r g(T_s x)ds \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

à cause de (9), il en résulte que $\bigcap_a Y_a \cap X = \phi$ et, vu la compacité de E, il existe donc un a_ε tel que $Y_{a_\varepsilon} \cap X = \phi$; c'est-à-dire que $x \in X$ entraîne

$$\operatorname{Sup}_{0<r\leqslant a_\varepsilon} \frac{1}{r}\int_0^r g(T_s x)ds > 0.$$

Si $O(x) \subset X$ on a, pour tout $t > 0$, $T_t x \in X$, donc, d'après ce que nous venons de voir

$$\text{(10)} \qquad \operatorname*{Sup}_{0<r\leqslant a_\varepsilon} \frac{1}{r}\int_0^r g(T_s T_t x)ds > 0$$

Mais

$$\int_0^r g(T_s T_t x)ds = \int_0^r g(T_{s+t}x)ds = \int_t^{t+r} g(T_s x)ds,$$

et (10) signifie que pour la fonction de t $g(T_t x)$ l'ensemble K_{a_ε} du théorème 1 est vide. Ce théorème nous donne donc

$$\int_0^t g(T_s x)ds \geqslant - M' a_\varepsilon$$

c'est-à-dire, compte tenu de la définition de $g(x)$

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds - \inf_{y\in X} \operatorname*{Sup}_{t>0} S(t, y) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant - \frac{M' a_\varepsilon}{t}$$

d'où le lemme résulte, en prenant $\tau = \dfrac{2M' a_\varepsilon}{\varepsilon}$.

Lemme 6. — *Si* X *est une partie invariante de* E, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\tau > 0$ *tel que pour tout* $t > \tau$ *et tout* $x \in \overline{X}$ *on ait*

$$\text{(10)} \qquad \inf_{y\in \overline{X}} \operatorname*{Sup}_{t>0} S(t, y) - \varepsilon \leqslant S(t, x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y\in \overline{X}} \inf_{t>0} S(t, y) + \varepsilon$$

En effet, pour $x \in X$ on a $O(x) \subset X$, puisque X est invariant, donc $O(x) \subset \overline{X}$ et, $\overline{X}$ étant fermé, le lemme 5 appliqué à f et $\overline{X}$ donne la première inégalité pour t supérieur à un certain τ_1. Appliqué à $-f$ et $\overline{X}$, le même lemme donne la seconde inégalité pour t supérieur à un certain τ_2. Avec

$$\tau > \operatorname{Sup}(\tau_1, \tau_2)$$

on a les deux inégalités, que la continuité de $S(t, x)$ sur E permet de prolonger à tous les $x \in \overline{X}$.

Définition. — *Sous l'hypothèse* A, *si* X *est une partie invariante de* E, *on appellera asymptote ergodique de* X *l'intervalle*

$$[\inf_{x\in \overline{X}} \operatorname*{Sup}_{t>0} S(t, x) \quad , \quad \operatorname*{Sup}_{x\in \overline{X}} \inf_{t>0} S(t, x)]$$

Cet intervalle n'est jamais vide car, en prenant ε arbitrairement petit, (10) implique

$$\inf_{x\in \overline{X}} \operatorname*{Sup}_{t>0} S(t, x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in \overline{X}} \inf_{t>0} S(t, x)$$

Remarque. — La longueur de l'asymptote ergodique de X est

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Sup}_{x\in\overline{X}}\ \inf_{t>0}\ S(t, x) - \inf_{x\in\overline{X}}\ \operatorname*{Sup}_{t>0}\ S(t, x) = \\ &\operatorname*{Sup}_{\substack{x\in\overline{X}\\ x'\in\overline{X}}}\ [\inf_{t>0}\ S(t, x) - \operatorname*{Sup}_{t>0}\ S(t, x')] = \\ &\operatorname*{Sup}_{\substack{x\in\overline{X}\\ x'\in\overline{X}}}\ \inf_{\substack{t>0\\ t'>0}}\ |S(t, x) - S(t', x')|\end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — *Sous l'hypothèse* A, *lorsque* $t \to +\infty$, $\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds$ *tend uniformément sur l'adhérence d'un ensemble invariant vers l'asymptote ergodique de cet ensemble.*

Ce théorème n'est qu'un autre énoncé du lemme 6. De plus, il suffit de prendre dans (10) la limite supérieure et la limite inférieure pour $t \to +\infty$ pour voir que l'asymptote ergodique est le meilleur intervalle donnant lieu à une telle propriété.

THÉORÈME 3. — *Sous l'hypothèse* A, *si* X *est un ensemble invariant, pour que, lorsque* $t \to +\infty$, $\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds$ *converge uniformément sur l'adhérence* $\overline{X}$ *de* X *vers une même limite, il faut et il suffit que pour tout* x *et tout* x' *appartenant* à X

$$\inf_{\substack{t>0\\ t'>0}}\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds - \frac{1}{t'}\int_0^{t'} f(T_s x')ds\right| = 0 \tag{11}$$

Cela résulte immédiatement du théorème 2 et de la remarque qui le précède : la condition nécessaire et suffisante pour que l'asymptote ergodique soit réduite à un point est (11)

THÉORÈME 4. — *Pour que, sous l'hypothèse* A *et lorsque* t *tend vers* $+\infty$, $\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds$ *converge pour tout* x *et que la limite soit une fonction continue sur* E, *il faut et il suffit que, pour tout* x_0,

$$\limsup_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x)ds - \frac{1}{t}\int_0^t f(T_s x_0)ds\right|$$

tende vers zéro lorsque x *tend vers* x_0. *Alors, sur l'adhérence de chaque orbite, la convergence est uniforme et la limite constante.*

Si, lorsque $t \to +\infty$, $S(t, x)$ a pour chaque x une limite $S(x)$, alors

$$\limsup_{t\to+\infty} |S(t, x) - S(t, x_0)| = |S(x) - S(x_0)|$$

et la condition

$$(12) \qquad \forall x_0 : x \to x_0 \Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} |S(t, x) - S(t, x_0)| \to 0$$

équivaut alors à la continuité de $S(x)$ sur E. Ainsi, (12) est nécessaire pour que $S(t, x)$ ait, lorsque $t \to +\infty$, une limite continue sur E et, réciproquement, si (12) entraîne la convergence de $S(t, x)$ pour $t \to +\infty$, elle entraîne aussi la continuité de la limite.

Nous allons voir que (12) implique que (11) est vraie sur l'adhérence de chaque orbite. Il en résultera, par le théorème 3, la convergence de $S(t, x)$ pour chaque x et, par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, la continuité de la limite. De plus, le théorème 2 nous assure aussi que sur l'adhérence de chaque orbite cette limite est constante et la convergence uniforme. Pour établir le théorème 4 il nous suffit donc maintenant de démontrer que (12) entraîne, quel que soit x_0

$$(13) \qquad x, x' \in \overline{O}(x_0) \Rightarrow \inf_{\substack{t>0\\ t'>0}} |S(t, x) - S(t', x')| = 0$$

Comme

$$\inf_{\substack{t>0\\ t'>0}} |S(t, x) - S(t', x')| \leqslant \limsup_{t\to+\infty} |S(t, x) - S(t, x')|$$

il nous suffit de montrer que

$$(14) \qquad x, x' \in \overline{O}(x_0) \Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} |S(t, x) - S(t, x')| = 0$$

Si l'on a $x, x' \in O(x_0)$ c'est-à-dire si l'on a un $a > 0$ et un $a' > 0$ tels que $x = T_a x_0$, $x' = T_{a'} x_0$, alors

$$\begin{aligned} S(t, x) - S(t, x') = S(t, T_a x_0) - S(t, T_{a'} x_0) & \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t f(T_s T_a x_0)ds - \frac{1}{t}\int_0^t f(T_s T_{a'} x_0)ds \\ &= \frac{1}{t}\int_a^{a+t} f(T_s x_0)ds - \frac{1}{t}\int_{a'}^{a'+t} f(T_s x_0)ds \\ &= \frac{1}{t}\left[\int_a^{a'} f(T_s x_0)ds - \int_{a+t}^{a'+t} f(T_s x_0)ds\right] \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est majorée en valeur absolue par $\frac{2}{t} M |a' - a|$, eu égard au théorème de la moyenne, elle tend donc vers zéro, et nous avons, la limite supérieure n'étant ici rien d'autre que la limite,

$$(15) \qquad x, x' \in O(x_0) \Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} |S(t, x) - S(t, x')| = 0$$

De (15) nous pourrons déduire (14) si la fonction

$$\limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x')|$$

est continue sur E × E. Or, c'est justement ce que (12) implique, comme nous allons le voir, ce qui achèvera la démonstration du théorème.

C'est simplement une propriété de la limite supérieure que

$$\limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x')| \leqslant \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x_0)| + \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x_0) - S(t, x'_0)| + \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x'_0) - S(t, x')|$$

ou encore

$$\limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x')| - \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x_0) - S(t, x'_0)| \leqslant \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x_0)| + \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x'_0) - S(t, x')|$$

En permutant x et x_0 entre eux et x' et x'_0 entre eux, le second membre de cette inégalité ne change pas alors que le premier change de signe, on a donc toujours

$$\left| \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x')| - \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x_0) - S(t, x'_0)| \right| \leqslant \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x_0)| + \limsup_{t \to +\infty} |S(t, x') - S(t, x'_0)|$$

Si, dans E × E, (x, x') tend vers (x_0, x'_0), x tend vers x_0 et x' vers x'_0, (12) implique que le second membre de cette inégalité tend vers zéro, il en est de même du premier et la continuité de $\limsup_{t \to +\infty} |S(t, x) - S(t, x')|$ sur sur E × E en résulte.

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1970)

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1702*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6065. 9-1970