ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUES JANSSEN

Sur une généralisation du concept de promenade aléatoire sur la droite réelle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 3 (1970), p. 249-269

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_3_249_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 3, 1970, p. 249-269.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur une généralisation du concept de promenade aléatoire sur la droite réelle

par

Jacques JANSSEN
Chef de Travaux à l'U. L. B.

RÉSUMÉ. — Dans l'étude des promenades aléatoires sur la droite réelle — que nous qualifions de promenades aléatoires classiques — il est toujours supposé que les pas successifs sont des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. Dans cet article nous considérons un type de promenades aléatoires pour lequel il n'en est pas ainsi. Plus précisément, il s'agit de promenade aléatoire induite par un processus (J − X). Nous introduisons d'abord le concept de processus (J − X) positifs défectueux terminaux. Ceci et la loi forte des grands nombres pour les processus (J − X) permettent ensuite d'étudier le comportement asymptotique et de généraliser le concept de variables indices. Finalement nous donnons certains résultats concernant la variable sup $\{ 0, S_1, \ldots, S_n, \ldots \}$ où S_n est la position de la particule après le $n^{\text{ième}}$ pas et en particulier nous démontrons un théorème suspecté par H. D. Miller.

SUMMARY. — In the study of random walks on the real line—we call them classical random walks—it is supposed that the successive steps are independent and equidistributed random variables. In this article, we consider a type of random walks for which it is not the case. More precisely, we introduce random walks defined by a (J − X) process. First, we define the concept of positive, defective terminal (J − X) process. This and the strong law of large numbers for (J − X) processes lead to asymptotic results and to the generalization of the concept of indices variables.

Finally, we give some results about the variable sup $\{0, S_1, \ldots, S_n, \ldots\}$ which S_n is the position of the particle after the n[ième] step and in particular we proof a theorem suspected by H. D. Miller.

---

1. PRÉLIMINAIRES

Soit $\{(J_n, X_n), n \in \mathbb{N}\}$ un processus (J – X) se triplet $(m, \bar{p}, Q)$ défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ [4] à valeurs dans $I \times \mathbb{R}$. I représente soit l'ensemble

$$\{1, \ldots, m\}, m < \infty$$

soit l'ensemble des naturels exclu 0, $\mathbb{N}_0$ (cas $m = \infty$). Rappelons que cela revient à dire que:

(*i*)
$$X_0 = 0\ p{\cdot}s.$$
$$\mathbb{P}[J_0 = k] = p_k, \qquad k \in I$$
$$\sum_{k \in I} p_k = 1$$

(*ii*) $\mathbb{P}[J_n = k, X_n \leqslant x \mid J_0, J_1, X_1, J_2, X_2, \ldots, J_{n-1}, X_{n-1}] \overset{\text{p.s.}}{=} Q_{J_{n-1}k}(x), x \in \mathbb{R}, k \in I.$

Q est une matrice de fonctions de masse satisfaisant à

$$\lim_{x \to -\infty} Q_{ij}(x) = 0, \qquad i, j \in I$$
$$\lim_{x \to +\infty} Q_{ij}(x) = p_{ij}, \qquad i, j \in I$$
$$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, \qquad i \in I \tag{1.1}$$

Si pour tout $i, j \in I$, $Q_{ij}(x)$ est nulle pour $x < 0$ et $Q_{ij}(0+) < 1$, le processus (J – X) de triplet $(m, \bar{p}, Q)$ est appelé *processus* (J – Y) *positif*. Si

$$F_{ij}(x) = \begin{cases} Q_{ij}(x)/p_{ij} & \text{si} \quad p_{ij} > 0 \\ \mathscr{U}_1(x) & \text{si} \quad p_{ij} = 0 \end{cases} \qquad i, j \in I \tag{1.1'}$$

où

$$\mathscr{U}_c(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geqslant c \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}$$

on voit aisément que:

$$\mathbb{P}[X_n \leqslant x \mid J_0, \ldots, J_n] = F_{J_{n-1}J_n}(x)$$
$$\mathbb{P}[X_n \leqslant x \mid J_0, \ldots, J_{n-1}] = H_{J_{n-1}}(x) = \sum_{j \in I} Q_{J_{n-1}j}(x)$$

$$b_{J_{n-1}J_n} = \mathbb{E}[X_n \mid J_0, \ldots, J_n] = \int_{\mathbb{R}} x dF_{J_{n-1}J_n}(x)$$

$$\eta_{J_{n-1}} = \mathbb{E}[X_n \mid J_0, \ldots, J_{n-1}] = \sum_{j \in I} b_{J_{n-1}j} p_{J_{n-1}j}$$

lorsque ces espérances existent et sont finies. Par la suite, nous supposons toujours qu'il en est ainsi. Cela revient à dire que les b_{ij} $(i, j \in I)$ existent et que les séries $\sum_{j \in I} p_{ij} b_{ij}$, $i \in I$ sont absolument convergentes.

Rappelons que l'on caractérise souvent un processus (J – X) par le quadruplet $(m, \bar{p}, P, \mathscr{F})$ où P est une matrice de probabilités de transition et $\mathscr{F}$ une matrice de fonctions de distribution définies sur $\mathbb{R}$. Cela est possible en vertu des relations (1.1′).

Si dans la définition des processus (J – X) positifs, nous remplaçons la condition (1.1) par :

$$\sum_{j \in I} p_{ij} \leqslant 1, \qquad i \in I \tag{1.2}$$

avec au moins une inégalité stricte, nous appelons ces processus, les *processus* (J – X) *positifs défectueux*. Dans le paragraphe suivant, nous en donnons quelques propriétés.

2. PROCESSUS (J-X) POSITIFS DÉFECTUEUX

Considérons les variables aléatoires X_n à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ et ajoutons à l'espace I un état supplémentaire noté 0. Dans ces conditions, à l'aide de la matrice P, nous pouvons définir sur $\bar{I} = I \cup \{0\}$ la matrice stochastique $\mathring{P}$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathring{p}_{ij} &= p_{ij} & & i, j \in I \\ \mathring{p}_{0k} &= \delta_{0k} & & k \in \bar{I} \\ \mathring{p}_{j0} &= 1 - \sum_{k \in I} p_{jk} = 1 - \nu_j \end{aligned}$$

Le premier passage de la chaîne par l'état 0 — état absorbant — peut s'interpréter comme la fin du processus. Nous dirons alors que le processus se termine. En posant

$$\mathring{Q}_{ij}(x) = \mathbb{P}[X_n \leqslant x, J_n = j \mid J_0, X_1, J_1, \ldots, X_{n-1}, J_{n-1}]$$

nous avons

$$\mathring{Q}_{ij}(x) = Q_{ij}(x),\ \mathring{Q}_{ij}(+\infty) = p_{ij}, \qquad i, j \in \mathrm{I}$$

$$\mathring{Q}_{i0}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \\ \mathring{p}_{i0}, & x = +\infty \end{cases} \qquad i \in \mathrm{I}$$

Il est superflu de considérer les probabilités $\mathring{Q}_{0i}(x)$, $i \in \bar{\mathrm{I}}$ puisque si $J_{n+1} = 0$, nous considérons que le processus se termine à l'étape n. Néanmoins, il est clair que :

$$\mathring{Q}_{0i}(x) = 0,\ i \in \mathrm{I}, \quad \text{quel que soit } x \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\mathring{Q}_{00}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \\ 1 & x = +\infty \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\mathring{H}_i(x) = \mathbb{P}[X_n \leqslant x \mid J_{n-1} = i] = \sum_{j \in \bar{\mathrm{I}}} \mathring{Q}_{ij}(x), \qquad i \in \mathrm{I}$$

$$\mathring{H}_0(x) = \mathbb{P}[X_n \leqslant x \mid J_{n-1} = 0] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \\ 1 & x = +\infty \end{cases}$$

et par conséquent :

$$\mathbb{P}[X_n = +\infty \mid J_{n-1} = i] = 1 - \lim_{x \to \infty} \mathring{H}_i(x) = 1 - v_i, \quad i \in \mathrm{I}$$

Remarquons aussi que $X_n = +\infty$ si et seulement si $J_n = 0$ et que pour tout $i \in \mathrm{I}$, nous avons

$$\mathbb{P}[J_n = 0 \mid J_{n-1} = i] = \mathbb{P}[X_n = +\infty \mid J_{n-1} = i] = 1 - v_i.$$

Soit $T_{ij}(x; n)$ la probabilité pour que le processus se termine à la n^ième^ étape avec $J_n = j$ et au plus tard en x étant donné que $J_0 = i$ (évidemment $i, j \in \mathring{\mathrm{I}}$). Nous avons

$$\begin{aligned} T_{ij}(x; n) &= \mathbb{P}[S_n \leqslant x, J_n = j, J_{n+1} = 0 \mid J_0 = i], \\ &= (1 - v_j) \sum_{\alpha_1 \in \mathrm{I}, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathrm{I}} Q_{i\alpha_1} * \ldots * Q_{\alpha_{n-1}j}(x) \ (^1) \\ &= (1 - v_j)(Q^{(n)}(x))_{ij} \end{aligned} \tag{2.1}$$

en désignant par $Q^{(n)}(x)$ la $n^{\text{ième}}$ convoluée de la matrice $Q(x)$ [1].

---

[1] Par définition

$$K * L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - s) dL(s)$$

On pose

$$Q^{(0)}(x) = I(x) \quad \text{où} \quad (I(x))_{ij} = \delta_{ij} \mathscr{U}_0(x)$$

La probabilité pour que, partant de $i \in \mathrm{I}$, le processus se termine à l'étape n en j sans limitation de durée vaut

$$\mathrm{T}_{ij}(n) = \lim_{x \to \infty} \mathrm{T}_{ij}(x; n) = p_{ij}^{(n)}(1 - v_j) \tag{2.2}$$

et la probabilité pour que le processus, partant de $i \in \mathrm{I}$ se termine à la $n^{\text{ième}}$ étape :

$$\mathrm{T}_i(n) = \sum_{j \in \mathrm{I}} \mathrm{T}_{ij}(n) = \sum_{j \in \mathrm{I}} p_{ij}^{(n)}(1 - v_j) \tag{2.3}$$

Enfin, la probabilité pour que le processus, partant de $i \in \mathrm{I}$, se termine vaut

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{T}_i(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathrm{I}} p_{ij}^{(n)}(1 - v_j) \end{aligned} \tag{2.4}$$

En remplaçant dans cette dernière expression v_j par $\sum_{k \in \mathrm{I}} p_{jk}$, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_i &= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \sum_{j \in \mathrm{I}} p_{ij}^{(n)}\left(1 - \sum_{k \in \mathrm{I}} p_{jk}\right) \\ &= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(\sum_{j \in \mathrm{I}} p_{ij}^{(n)} - \sum_{k \in \mathrm{I}} p_{ik}^{(n+1)}\right) \\ &= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{j \in \mathrm{I}} (\delta_{ij} - p_{ij}^{(\mathrm{N}+1)}) \\ &= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \left(1 - \sum_{j \in \mathrm{I}} p_{ij}^{(\mathrm{N}+1)}\right) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathrm{T}_i = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \mathring{p}_{i0}^{(\mathrm{N}+1)} \tag{2.5}$$

Ce dernier résultat s'obtient plus aisément si nous écrivons

$$\mathrm{T}_i = \mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{J}_n = 0 \mid \mathrm{J}_0 = i]$$

c'est-à-dire avec les notations de K. L. Chung [*1*]

$$\mathrm{T}_i = f_{i0}^*$$

Or il est facile de voir que

$$\sum_{k=1}^{n} f_{i0}^{(k)} = \mathring{p}_{i0}^{(n)}$$

et par conséquent nous retrouvons (2.5) puisque

$$f_{i0}^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i0}^{(k)}$$

En d'autres termes, T_i est la probabilité d'absorption par la classe récurrente positive $\{0\}$ partant de l'état i. Par conséquent T_i est nul si l'état i est récurrent ($\neq 0$) dans la chaîne de matrice $\mathring{P}$.

Nous savons que ([8], p. 227) les f_{i0}^{*} sont solution du système :

$$f_{i0}^{*} = \sum_{k \in T} p_{ik} f_{k0}^{*} + \mathring{p}_{i0}, \qquad i \in T \tag{2.6}$$

où T représente l'ensemble des états transitoires de la chaîne de matrice $\mathring{P}$. Si de plus $m < \infty$, la solution de (2.6) est unique.

Ce qui précède conduit aux définitions suivantes :

DÉFINITION 2.A. — Un processus (J – X) positif défectueux est *i-terminal* si et seulement si, partant de i, il se termine p. s.

Un processus (J – X) positif défectueux de triplet $(m, \bar{p}, Q)$ est *p-terminal* s'il se termine p. s.

Une classe de processus (J – X) positifs défectueux caractérisée par (m, Q) est *terminale* si quelle que soit la distribution initiale $\bar{p}$, le processus (J – X) de triplet $(m, \bar{p}, Q)$ est p-terminal.

La proposition suivante est alors immédiate :

PROPOSITION 2.A :

(*i*) Un processus (J – X) positif défectueux est i-terminal si et seulement si $T_i = 1$.

(*ii*) Le processus (J – X) positif défectueux (m, p, Q) est p-terminal si et seulement si $\sum_{i \in I} p_i T_i = 1$.

(*iii*) La classe de processus (J – X) positifs défectueux (m, Q) est terminale si et seulement si $T_i = 1$ pour tout $i \in I$.

Remarquons que dans le cas où $m < \infty$, si 0 est le seul état récurrent, alors $T_i = 1$ pour tout $i \in I$; nous avons donc une classe terminale. C'est notamment vrai lorsque l'ensemble

$$F = \{ j \in I : v_j < 1 \}$$

est identique à I.

Une variable particulièrement intéressante est la « durée » du processus. Elle se définit comme suit :

$$M = \sup_{0 \leqslant n \leqslant \sup\{k : J_{k-1} \neq 0\}} S_n \tag{2.7}$$

Il est clair que

$$\mathbb{P}[M \leqslant x \mid J_0 = i] = \sum_{j \in I} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ij}(x; n)$$

Grâce aux relations (2.1), l'égalité ci-dessus devient

$$\mathbb{P}[M \leqslant x \mid J_0 = i] = \sum_{j \in I} (1 - v_j) \sum_{n=0}^{\infty} (Q^{(n)}(x))_{ij}$$

ou encore

$$\mathbb{P}[M \leqslant x \mid J_0 = i] = \sum_{j \in I} (1 - v_j)(\mathcal{M}(x))_{ij} \tag{2.8}$$

en posant

$$\mathcal{M}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(x) \tag{2.9}$$

Nous avons évidemment

$$\lim_{x \to \infty} \mathbb{P}[M \leqslant x \mid J_0 = i] = T_i$$

Remarquons que si

$$M_i(x) = \mathbb{P}[M \leqslant x \mid J_0 = i], \qquad i \in I$$

les fonctions $M_i(x)$ vérifient le système

$$M_i(x) = (1 - v_i) + \sum_{j \in I} p_{ij} \int_0^x M_j(x - y) dF_{ij}(y), \quad i \in I \tag{2.10}$$

On vérifie sans peine que (2.8) est solution de ce système.

Si tous les $M_i(x)$ sont des fonctions de distribution propres [1] et si

$$\overline{M}_i = \int_0^\infty x dM_i(x) < +\infty, \qquad i \in I$$

de (2.10), il résulte que:

$$\overline{M}_i = \sum_{j \in I} p_{ij}(\overline{M}_j + b_{ij}), \qquad i \in I$$

c'est-à-dire

$$\overline{M}_i = \sum_{j \in I} p_{ij}\overline{M}_j + \eta_i, \qquad i \in I \tag{2.11}$$

Exemple. — Soit la classe de processus $(J - X)$ positifs défectueux $(m, P, \mathscr{F})$ où $\mathscr{F}$ est une matrice de fonctions de distribution et où

$$p_{ij} = p_j, \qquad i, j \in I$$
$$p_j > 0$$
$$\sum_{j \in I} p_j = a < 1$$

Il en résulte que pour $\mathring{P}$, tous les états de I sont transitoires et pour tout $i \in I$

$$1 - v_j = 1 - a = b > 0$$

Un calcul simple montre que, pour tout $i \in I$,

$$p_{i0}^{0(n)} = b(1 + a + \ldots + a^{n-1})$$
$$= b\frac{1 - a^n}{1 - a} \cdot$$

De (2.5), on en déduit que la classe considérée est terminale. Il en résulte que les fonctions de distribution $M_i(x)$ sont propres et

$$M_i(x) = b \lim_{x \to \infty} \sum_j (\mathscr{M}(x))_{ij}$$

Ceci généralise le théorème 1 de Feller ([*3*], p. 361).

En ce qui concerne la durée moyenne du processus, le système (2.11) devient, lorsque $m < \infty$

$$\overline{M}_i = \sum_{j=1}^{m} p_j\overline{M}_j + \eta_i$$

[1] La fonction de distribution $F(x)$ est propre $\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Nous en déduisons que :

$$\overline{M}_i = \frac{\begin{vmatrix} p_1 - 1 & & & -\eta_1 & p_m \\ & p_2 - 1 & & \vdots & \\ & & p_{i-1} - 1 & -\eta_i & \\ p_1 & & & -\eta_m & p_m - 1 \end{vmatrix}}{\left(1 - \sum_{j=1}^{m} p_j\right)(-1)^m}$$

Dans le cas particulier où la classe $[m, \mathrm{P}, \mathscr{F}]$ définit un processus (J – X) positif défectueux d'ordre zéro (c'est-à-dire où non seulement $p_{ij} = p_j$ mais aussi $\mathrm{F}_{ij}(x) = \mathrm{F}_j(x)$, voir [*4*]), les fonctions de distribution conditionnelles (2.8) ne dépendent pas de i et le système (2.11) se réduit à l'équation

$$\overline{\mathrm{M}} = \sum_{j \in \mathrm{I}} p_j \overline{\mathrm{M}} + \eta$$

qui a pour solution

$$\overline{\mathrm{M}} = \frac{\eta}{1 - \sum_{j \in \mathrm{I}} p_j}$$

si $\eta = \sum_{i \in \mathrm{I}} p_j b_j, \quad b_j = \int_0^\infty t d\mathrm{F}_j(t)$

Lorsque $m = 1$, nous retrouvons un résultat de Feller ([*3*], p. 362).

3. PROMENADES ALÉATOIRES ÉVOLUANT SELON UN PROCESSUS (J-X). COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Considérons un processus (J – X) $\{(\mathrm{J}_n, \mathrm{X}_n), n \in \mathbb{N}\}$. Le processus $\{\mathrm{X}_n, n \in \mathbb{N}\}$ définit une promenade aléatoire sur la droite réelle partant de l'origine (puisque $\mathrm{X}_0 = 0$ p. s.). Evidemment, au contraire des promenades aléatoires « classiques », les variables X_n, qui représentent les pas successifs, ne sont plus indépendantes. Leur dépendance résulte de la définition des processus (J – X) et particulièrement de la présence de la chaîne de Markov $\{\mathrm{J}_n, n \in \mathbb{N}\}$. D'ailleurs certains auteurs (voir notamment [*5*], [*7*]) disent que les variables aléatoires $\{\mathrm{X}_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont « définies sur la chaîne de Markov $\{\mathrm{J}_n, n \in \mathbb{N}\}$ ».

La position de la promenade aléatoire à la $n^{\text{ième}}$ étape est donnée par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i.$$

Dans ce qui suit, nous supposons que la chaîne de Markov $\{ J_n, n \in \mathbb{N} \}$ est irréductible récurrente. Définissons alors les processus $\{ r_n^{(j)}, n \in \mathbb{N} \}$ des indices de récurrence (j fixé) :

$$r_0^{(j)} = 0$$
$$r_n^{(j)} = \sup_k \{ k \in \mathbb{N}_0 : k > r_{n-1}^{(j)}, \quad J_l \neq j, \quad r_{n-1}^{(j)} < l < k \}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

et

$$m_{jj} = \mathbb{E}[r_{n+1}^{(j)} - r_n^{(j)}], \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Au processus de renouvellement $\{ r_{n+1}^{(j)} - r_n^{(j)}, n \in \mathbb{N}_0 \}$ associons le processus

$$\mathscr{U}_s^{(j)} = \sum_{n=r_s^{(j)}+1}^{r_{s+1}^{(j)}} X_n$$

$\{ \mathscr{U}_s^{(j)}, s \in \mathbb{N}_0 \}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées sur $\mathbb{R}$.

En posant

$$\Pi_i^j = {}_jp_{ji}^{*} \; (= \frac{m_{jj}}{m_{ii}} = m_{jj} \cdot \tilde{\Pi}_i \text{ dans le cas récurrent positif,}$$
$$(\tilde{\Pi}_1, ..., \tilde{\Pi}_i, ...) \text{ étant l'unique distribution stationnaire}) \; (^1)$$

il résulte de la proposition 5. A de [4] que si les séries

$$\sum_k p_{ik} b_{ik}, \quad i \in I, \quad \sum_i \Pi_i^j \eta_i \tag{4.1}$$

convergent absolument (pour un j), alors $\mathbb{E}(\mathscr{U}_s^{(j)})$ existe pour tout j et

$$\mu_{jj} = \mathbb{E}(\mathscr{U}_s^{(j)}) = \sum_{i \in I} \Pi_i^j \eta_i$$

De plus, les μ_{jj} sont bien tous nuls, ou bien tous de même signe (cfr. Proposition 5. B de [4]) ce signe étant, dans le cas d'une chaîne incluse récurrente positive, celui de $\sum_i \tilde{\Pi}_i \eta_i$ (Corollaire 5. C de [4]).

(*) Nous adoptons les notations de Chung [1].

Nous allons étudier maintenant le comportement asymptotique d'une promenade aléatoire évoluant selon un processus (J – X). Dans le cas récurrent positif, nous savons que, sous certaines conditions sur les moments d'ordre 2, la variable

$$\frac{S_n - n\Sigma\tilde{\Pi}_i\eta_i}{\sqrt{n}}$$

est asymptotiquement normale (voir [*4*], proposition 8.A). Nous avons même un résultat analogue pour le processus bi-dimensionnel $\{ (J_n, X_n), n \in \mathbb{N} \}$ ([*4*], proposition 8.B).

En vue d'introduire la proposition suivante, nous dirons, suivant Spitzer [*11*] ou Feller [*3*], qu'une promenade aléatoire *dérive vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si

$$\mathbb{P}\,[\limsup_n \{ \omega : S_n(\omega) < 0 \}] = 0$$

$$(\text{resp. } \mathbb{P}\,[\limsup_n \{ \omega : S_n(\omega) > 0 \}] = 0)$$

et qu'elle est *oscillante* (autour de 0) si

$$\mathbb{P}\,[\limsup_n \{ \omega : S_n(\omega) < 0 \}] = \mathbb{P}\,[\limsup_n \{ \omega : S_n(\omega) > 0 \}] = 1$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 3.A. — Soit une promenade aléatoire évoluant suivant un processus (J – X) satisfaisant

(*i*) $\{ J_n, n \in \mathbb{N} \}$ est irréductible récurrente

(*ii*) les séries $\sum_k p_{ik}b_{ik}$, $i \in I$, $\sum_k \Pi_k^j \eta_k$ (pour un $j \in I$) (3.1)

convergent absolument.

Alors, si μ_{jj} est nul poue un $j \in I$ et si $\mathbb{P}[\mathcal{U}_1^{(j)} = 0] < 1$, la promenade aléatoire est oscillante, tandis que, dans le cas récurrent positif, μ_{jj} positif (resp. négatif) pour un $j \in I$ entraîne que la promenade aléatoire dérive vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. — Supposons que μ_{jj} soit nul et que $J_0 = j$. Introduisons les variables aléatoires suivantes

$$Z_1 = \mathcal{U}_1^{(j)}$$
$$Z_2 = \mathcal{U}_1^{(j)} + \mathcal{U}_2^{(j)}$$
$$\vdots$$
$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{U}_k^{(j)}$$

La suite $\{ Z_n, n \in \mathbb{N}_0 \}$ définit une promenade aléatoire « classique » (car les variables $\{ \mathcal{U}_n^{(j)}, n \geqslant 1 \}$ sont indépendantes et équi-distribuées; Z_n est la position de la particule après le $n^{\text{ième}}$ pas d'amplitude $\mathcal{U}_n^{(j)}$. Puisque $\mu_{jj} = 0$, il résulte de deux théorèmes de Feller ([*3*], théorème 4, p. 203 et théorème 1, p. 379) que

$$\mathbb{P}\,[\limsup_n \{ Z_n < 0 \} \mid J_0 = j] = \mathbb{P}\,[\limsup_n \{ Z_n > 0 \} \mid J_0 = j] = 1$$

Comme

$$\limsup_n \{ Z_n < 0 \} \subset \limsup_n \{ S_n < 0 \}$$
$$\limsup_n \{ Z_n > 0 \} \subset \limsup_n \{ S_n > 0 \}$$

et que

$$\mathbb{P}\,[\limsup_n \{ S_n < 0 \}] = \sum_j p_j \mathbb{P}\,[\limsup \{ S_n < 0 \} \mid J_0 = j]$$
$$\mathbb{P}\,[\limsup_n \{ S_n > 0 \}] = \sum_j p_j \mathbb{P}\,[\limsup \{ S_n > 0 \} \mid J_0 = j],$$

la première partie de la proposition est démontrée.

Supposons maintenant que la chaîne soit irréductible récurrente positive et que par exemple μ_{jj} soit positif. Considérons l'événement suivant:

$$E_n = \left\{ \omega : \left| \frac{S_n}{n} - \frac{\mu_{jj}}{m_{jj}} \right| > \frac{\mu_{jj}}{2m_{jj}} \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.2}$$

Il est clair que

$$\{ \omega : S_n(\omega) < 0 \} \subset E_n, \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}_0$$

et par conséquent

$$\limsup_n \{ \omega : S_n(\omega) < 0 \} \subset \limsup_n E_n$$

De plus, en vertu de la loi forte des grands nombres des processus $(J - X)$ ([*4*], proposition 6.C) applicable en vertu des hypothèses (*i*) et (*ii*), nous avons

$$\mathbb{P}\,[\limsup_n E_n] = 0$$

Ce dernier point termine la démonstration.

4. VARIABLES INDICES

Soit la promenade aléatoire déterminée par un processus $(J - X)$ de triplet $(m, \bar{p}, Q)$. Nous allons étendre dans ce cas le concept de variables indices introduit par Feller (voir par exemple [*4*]).

La variable aléatoire $\mathscr{J}_1$, appelée *premier indice ascendant strict* est par définition :

$$\mathscr{J}_1 = \begin{cases} \min\{n : S_n > 0\} & \\ \infty & \text{si} \quad S_n \leqslant 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On peut alors définir sur $\bar{I}$ la variable γ_1 :

$$\gamma_1 = \begin{cases} J_{\mathscr{J}_1} & \text{si} \quad \mathscr{J}_1 < \infty \\ 0 & \text{si} \quad \mathscr{J}_1 = \infty \end{cases} \tag{4.1}$$

Si $\mathscr{J}_1 < \infty$, γ_1 représente donc l'état de I du processus à l'étape $\mathscr{J}_1$. Enfin posons

$$\mathscr{H}_1 = \begin{cases} S_{\mathscr{J}_1} & \text{si} \quad \mathscr{J}_1 < \infty \\ +\infty & \text{si} \quad \mathscr{J}_1 = +\infty \end{cases}$$

Nous pouvons aussi introduire les probabilités suivantes $(i, j \in I)$

$$\begin{aligned} H_n^i(x) &= \mathbb{P}\,[\mathscr{J}_1 = n, \mathscr{H}_1 \leqslant x \mid J_0 = i] \\ H_n^{ij}(x) &= \mathbb{P}[\mathscr{J}_1 = n, \mathscr{H}_1 \leqslant x, \gamma_1 = j \mid J_0 = i] \end{aligned} \tag{4.1'}$$

et pour les distributions marginales, nous avons :

$$\mathbb{P}[\mathscr{J}_1 = n \mid J_0 = i] = \lim_{x \to \infty} H_n^i(x)$$

$$\mathbb{P}[\mathscr{H}_1 \leqslant x \mid J_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^i(x) = H^i(x)$$

Il en résulte encore que :

$$\mathbb{P}[\mathscr{H}_1 \leqslant x, J_{\mathscr{J}_1} = j \mid J_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{ij}(x) = H^{ij}(x) \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathscr{H}_1 = \infty, J_{\mathscr{J}_1} = j \mid J_0 = i] &= \delta_{j0}\mathbb{P}[J_{\mathscr{J}_1} = 0 \mid J_0 = i] \\ &= \delta_{j0}\mathbb{P}[\mathscr{J}_1 = \infty \mid J_0 = i] \\ &= \delta_{j0}(1 - \lim_{x \to \infty} H^i(x)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

De (4.2) et de (4.3), nous déduisons évidemment que

$$\mathbb{P}[J_{\mathscr{J}_1} = j \mid J_0 = i] = \begin{cases} \lim_{x \to \infty} H^{ij}(x), & j \neq 0 \\ 1 - \lim_{x \to \infty} H^i(x), & j = 0 \end{cases}$$

On définit le deuxième indice ascendant strict comme étant le premier indice ascendant strict de la promenade aléatoire induite par

$$\{X_{\mathscr{J}_1 + 1}, X_{\mathscr{J}_1 + 2}, \ldots\}$$

soit comme le deuxième indice n tel que :

$$S_n > S_k, \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

étant entendu que si $\mathscr{J}_1 = \infty$, le processus des indices est considéré comme terminé. Dans le cas contraire, le deuxième indice ascendant strict est du type $(\mathscr{J}_1 + \mathscr{J}_2, \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2)$ et on pose

$$\gamma_2 = J_{\mathscr{J}_1 + \mathscr{J}_2}.$$

En procédant de la même façon pour les indices suivants, nous obtenons le processus

$$\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), \qquad n \in \mathbb{N} \}$$

où

$$\gamma_0 = J_0$$
$$\mathscr{H}_0 = 0 \text{ p. s.}$$

Par construction même, il est clair que nous avons un processus $(J - X)$ positif éventuellement défectueux caractérisé par le triplet $(m, \bar{p}, \mathscr{H})$ où $\mathscr{H}$ est la matrice des fonctions de masse $H^{ij}(x)$.

Supposons maintenant que le processus $(J - X)$ de départ soit de chaîne incluse récurrente positive satisfaisant (3.1) pour un $j \in I$. Avec les notations du paragraphe 2, nous avons pour le processus $\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N} \}$

$$\begin{aligned} 1 - \nu_i &= \mathbb{P}[\mathscr{H}_n = +\infty \mid \gamma_{n-1} = i] \\ &= \mathbb{P}[\mathscr{J}_n = +\infty \mid \gamma_{n-1} = i] \\ &= \mathbb{P}[\mathscr{J}_1 = +\infty \mid J_0 = i] \end{aligned}$$

Comme, en vertu de la proposition 3.A, nous avons :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\mathscr{J}_1 = \infty \mid J_0 = i] = 0 \quad \text{si} \quad \mu_{jj} \geqslant 0 \\ &\mathbb{P}[\mathscr{J}_1 = \infty \mid J_0 = i] > 0 \quad \text{si} \quad \mu_{jj} < 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

nous obtenons la proposition

PROPOSITION 4.A. — Soit la promenade aléatoire induite par un processus $(J - X)$ à chaîne incluse irréductible récurrente positive satisfaisant (3.1) pour un $j \in I$. Le processus $(J - X)$ positif $\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in N \}$ est défectueux ou non suivant que $\mu_{ii} < 0$ ou $\mu_{ii} \geqslant 0$ pour un $i \in I$.

Remarquons que dans le cas d'une chaîne induite récurrente nulle, on peut seulement dire que si $\mu_{ii} = 0$ pour un $i \in I$, le processus $\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N} \}$ est non défectueux, ceci en vertu de la même proposition 3.A.

Lorsque le processus $\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N} \}$ est défectueux, le problème qui se pose est de voir si ce processus est terminal ou non. La proposition suivante répond à cette question dans le cas où card $I = m$ est fini.

PROPOSITION 4.B. — Soit la promenade aléatoire induite par le processus (J – X) de chaîne incluse irréductible récurrente à un nombre fini d'états. Si les variables X_n ($n \in \mathbb{N}$) sont intégrables et si $\mu_{ii} = 0$ pour un $i \in I$, alors le processus (J – X) positif $\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N} \}$ est p-terminal quelle que soit la distribution initiale $\bar{p}$ de J_0.

Démonstration. — Nous savons que (cfr. (4.4))

$$1 - v_i = \mathbb{P}[\mathscr{I}_1 = \infty \mid J_0 = i] > 0$$

Par conséquent la formule (2.4) implique que T_i — probabilité pour que, partant de i, le processus $\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N} \}$ se termine — est positif et ceci quel que soit $i \in I$. Nous en déduisons que, dans la chaîne définie sur I, tout état $i \in I$ de la chaîne incluse du processus $\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in N \}$ est transitoire et par conséquent que la seule classe récurrente est $\{ 0 \}$. Mais comme $m < \infty$, la probabilité d'absorption par cette unique classe récurrente vaut 1 et par conséquent

$$T_i = 1, \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

5. DISTRIBUTION DE LA VARIABLE

Les deux dernières propositions permettent d'obtenir des résultats intéressants concernant la variable aléatoire

$$M = \sup \{ S_0, S_1, \dots \}$$

En effet, toujours sous les hypothèses de la proposition 4.B, il est clair que si $\mu_{ii} > 0$ pour un $i \in I$, alors

$$\mathbb{P}[M \leqslant x \mid J_0 = i] = 0$$

quel que soit le réel x. Cela est également vrai pour $\mu_{ii} = 0$ (en écartant le cas trivial) puisque le processus de renouvellement markovien

$$\{ (\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N} \}$$

est à un nombre fini d'états et par conséquent régulier [9].

Par contre, si $\mu_{ii} < 0$, en vertu de la relation (2.8), nous obtenons

$$M_i(x) = P \mid M \leqslant x \mid J_0 = i \mid = \sum_j [1 - v_j](\tilde{\mathscr{M}}(x))_{ij} \tag{5.1}$$

où $\tilde{\mathscr{M}}(x)$ est la matrice des fonctions de renouvellement du processus $\{(\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N}\}$.

La proposition 4.B permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{M}_i(x) = 1 \quad \text{quel que soit} \quad i \in \mathrm{I} \tag{5.2}$$

Ce résultat a été prévu par Miller [7] mais il n'en a pas donné la démonstration.

Remarquons que :

$$\mathrm{M}_i(0) = 1 - \nu_i, \qquad i \in \mathrm{I}.$$

Les relations (5.1) montrent que la recherche des fonctions $\mathrm{M}_i(x)$ revient à trouver la matrice $(\mathrm{H}^{ij}(x))$ du processus $(\mathrm{J}-\mathrm{X})$ positif $\{(\gamma_n, \mathscr{H}_n), n \in \mathbb{N}\}$ ou ce qui revient au même les fonctions $\mathrm{H}_n^{ij}(x)$ définies par (4.1'). Ce problème est extrêmement difficile et déjà pour $m = 1$ les difficultés sont quasi insurmontables sauf dans quelques cas bien particuliers. On peut ramener le problème à la résolution d'un système d'équations intégrales du type Wiener-Hopf à l'aide d'un raisonnement probabiliste élémentaire :

$$\mathrm{M}_i(x) = \begin{cases} \sum_j \int_{-\infty}^{x} \mathrm{M}_j(x-s)d\mathrm{Q}_{ij}(s), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad i = 1, \dots, m \tag{5.3}$$

Sous les hypothèses faites, nous savons qu'il existe une P-solution, c'est-à-dire un vecteur m-dimensionnel de fonctions de distribution solution de (5.3).

De plus, nous allons démontrer la

Proposition 5.A. — Si le processus $(\mathrm{J}-\mathrm{X})$ de triplet $(m\text{-}p, \mathrm{Q})$ est de chaîne incluse irréductible récurrente à un nombre fini d'états et si $\sum_{i=1}^{m} \tilde{\Pi}_i \eta_i$ est négatif, alors le système (5.3) a une et seule P-solution.

Démonstration. — En vertu de ce qui précède, il suffit de prouver l'unicité. Soit donc $\mathrm{M}_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ la solution telle que

$$\mathrm{M}_i(x) = \mathbb{P}\,[\sup\{\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \dots\} \leqslant x \mid \mathrm{J}_0 = i] \tag{5.4}$$

et supposons que $\overline{\mathrm{M}}_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ soit également une P-solution mais différente de (5.4).

Introduisons sur la chaîne $\{ J_n, n \in \mathbb{N} \}$ les variables aléatoires θ_n non négatives telles que :

$$\mathbb{P}[\theta_n \leqslant x \mid J_n = i] = \overline{M}_i(x), \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

(ce faisant, nous étendons le principe d'une démonstration de Lindley [6]). Considérons alors les variables suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &= S_1 + \theta_1 \\ \overline{S}_2 &= S_2 + \theta_2 \\ &\vdots \\ \overline{S}_n &= S_n + \theta_n \end{aligned}$$

Posons

$$G_i^n(x) = \mathbb{P}[S_0 \leqslant x, S_1 \leqslant x, \ldots, S_{n-1} \leqslant x, S_n + \theta_n \leqslant x \mid J_0 = i], \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Il vient

$$G_i^1(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j \in I} p_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{M}_j(x - s) dF_{ij}(s) & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j \in I} p_{ij} \int_{-\infty}^{x} \overline{M}_j(x - s) dF_{ij}(s) & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

car la variable θ_n est p. s. non négative.

Comme $\{ \overline{M}_i(x), i \in I \}$ est une solution de (5.3), nous obtenons de la précédente égalité

$$G_i^1(x) = \overline{M}_i(x) \tag{5.5}$$

Quel que soit $n \geqslant 2$, nous avons :

$$G_i^n(x) = \sum_j p_{ij} \int_{-\infty}^{x} G_j^{n-1}(x - s) dF_{ij}(s)$$

Par induction, il résulte alors de (5.5) que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $i \in I$;

$$G_i^n(x) = \overline{M}_i(x) \tag{5.6}$$

De plus, nous avons d'une part, en vertu de la non-négativité de θ_n

$$\begin{aligned} G_i^n(x) &= \mathbb{P}[S_k \leqslant x, k = 0, \ldots, n - 1 ; S_n + \theta_n \leqslant x \mid J_0 = i] \\ &\leqslant \mathbb{P}[S_k \leqslant x, k = 0, \ldots, n \mid J_0 = i] \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{\lim_{n}}\ G_i^n(x) \leqslant M_i(x) \tag{5.7}$$

D'autre part,

$$G_i^n(x) \geqslant \mathbb{P}[S_k \leqslant x, k = 0, \ldots, n-1 \mid J_0 = i] - \mathbb{P}[S_n + \theta_n > x \mid J_0 = i]$$

et comme θ_n est finie p. s., de la loi forte des grands nombres pour les processus (J − X), il résulte que $\mathbb{P}[S_n + \theta_n > x \mid J_0 = i]$ tend vers 0 pour $n \to \infty$ et ainsi

$$\underline{\lim_{n}}\ G_i^n(x) \geqslant M^i(x) \tag{5.8}$$

A partir des relations (5.6), (5.7) et (5.8), nous obtenons

$$M_i(x) \equiv \overline{M}_i(x), \qquad i \in I$$

La résolution effective du système (5.3) est un problème très difficile ; déjà dans le cas $m = 1$, on ne parvient qu'à donner la transformée de Laplace-Stieltjes de $M(x)$ sous forme d'une limite d'une exponentielle dont l'exposant est une intégrable double ; c'est le fameux résultat de Spitzer [*10*], conséquence directe de la formule portant le même nom citée ci-dessous.

Malheureusement, cette formule ne semble pas susceptible d'être généralisée au problème posé ici. La raison est simple si l'on se souvient que la formule de Spitzer est basée sur un lemme combinatoire qui ne peut s'appliquer ici puisque les variables aléatoires X_n — pas successifs de la promenade aléatoire — ne sont pas indépendantes ni même en dépendance symétrique. Néanmoins, dans le cas des processus (J − X) d'ordre zéro [*4*], nous verrons ci-dessous que le résultat de Spitzer est utile.

Dans le cas général, il nous semble intéressant de signaler les résultats de H. D. Miller [*7*] qui permettent de trouver une solution approximative du système (5.3) lorsque la chaîne incluse est en plus de nos hypothèses apériodiques. En fait, H. D. Miller calcule approximativement les probabilités

$\Pi_{ij}(x) = \mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N}_0 \max \{ S_0, \ldots, S_n \} > x$ pour la première fois et $J_n = j \mid J_0 = i]$.

Il en résulte que :

$$M_i(x) = 1 - \sum_j \Pi_{ij}(x)$$

A l'aide de méthodes algébriques faisant intervenir une décomposition de Wiener-Hopf, il donne une approximation de $\Pi_{ij}(x)$, sous des hypothèses suffisantes pour les applications. Néanmoins, le problème de trouver explicitement la décomposition de Wiener-Hopf n'est pas résolu.

A titre d'exemple, nous allons traiter le cas des processus (J − X) d'ordre 0. Dans ce cas :

$$p_{ij} = p_j > 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$
$$F_{ij}(x) = F_j(x) \qquad j = 1, \ldots, m$$

Du système (5.3), nous déduisons alors que :

$$M_i(x) = M_j(x) \qquad i, j \in I$$

et le système se réduit à une équation :

$$M(x) = \int_{-\infty}^{x} M(x - s)d\left(\sum_{j=1}^{m} p_j F_j(s)\right) \tag{5.9}$$

La condition $\sum_i \tilde{\Pi}_i \eta_i < 0$ devient ici

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} p_j b_j < 0 \tag{5.10}$$

où

$$b_j = \int_{\mathbb{R}} x dF_j(x)$$

Sous (5.10), nous pouvons appliquer la formule de Spitzer [*10*] pour obtenir

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dM(x) = \lim_{t \to 1} \exp\left[\frac{1}{2\Pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\xi(\zeta - is)} \frac{\varphi(\xi) - 1}{(1 - \tau) | 1 - \tau\varphi(\xi)} d\xi\right] \tag{5.11}$$

où $\varphi(\xi)$ est la fonction caractéristique de la fonction de distribution

$$\sum_{j=1}^{m} p_j F_j(x)$$

De (5.9), nous déduisons que

$$t(x) = 1 - M(x) \tag{5.12}$$

est la probabilité d'entrée dans (x, ∞) pour la promenade aléatoire « classique » caractérisée par la fonction de distribution $\sum_{j=1}^{m} p_j F_j(x)$. On peut donc appliquer les résultats de Dreze ([*2*], théorème 2.8, p. 155) pour obtenir l'expression de la transformée de Laplace de $t(x)$. Dans le cas particulier où

$$F_j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_j(x+y)dA(y)$$

$$A(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y \geqslant 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

et $K_j(y)$ est une fonction de distribution quelconque mais nulle sur $(-\infty, 0)$, nous obtenons

$$b_j = \alpha_j - \frac{1}{\lambda}, \qquad \alpha_j = \int_{-\infty}^{+\infty} y dK_j(y)$$

et de (5.10)

$$\eta = \sum_j p_j\alpha_j - \frac{1}{\lambda}$$

Alors, si $\eta < 0$, de la relation (5.11) ou du théorème 2.13 de Dreze ([*2*], p. 164), il résulte que

$$M(x) = \left(1 - \lambda \sum_j p_j\alpha_j\right) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \overline{L}^{(n)}(x)$$

$\overline{L}^{(n)}(x)$ étant la $n^{\text{ième}}$ convoluée de la fonction

$$\overline{L}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \left[1 - \sum_j p_j K_j(y)\right] dy, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Nous citons ce cas particulier car il admet une interprétation intéressante en théorie collective du risque (capitaux positifs). En effet, la fonction $t(x)$ définie par (5.12) représente la probabilité de ruine dans le cas où les arrivées des sinistres forment un processus de Poisson de paramètre λ et où il y a m types de sinistres possibles (au lieu d'un seul dans la théorie habituelle) ; la probabilité pour que, lorsqu'un sinistre se réalise, il soit du type j est p_j et la distribution du montant de ce sinistre est donnée par la fonction de distribution $K_j(x)$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] K. L. CHUNG, *Markov chains with stationary transition probabilities*, Springer, Berlin, 1960.

[*2*] J.-P. DREZE, Problème de la ruine en théorie collective du risque, I et II. *Cahiers du C. E. R. O.*, **10**, 1968, 127-173 et 227-246.

[*3*] W. FELLER, An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2, Wiley, New York, 1966.

[*4*] J. JANSSEN, Les processus (J-X). *Cahiers du C. E. R. O.*, **11**, 1969.

[*5*] J. KEILSON and P. M. G. WISHART, A central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **60**, 1964, 547-567.

[*6*] D. V. LINDLEY, The theory of queues with a single server. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 1952, 277-289.

[*7*] H. D. MILLER, Absorption probabilities for sums of random variables defined on a finite Markov chain. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **58**, 1962, 286-298.

[*8*] E. PARZEN, Stochastic processes, Holden-Day, San Francisco, 1962.

[*9*] R. PYKE, Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. *Ann. Math. Stat.*, **32**, 1961, 1231-1242.

[*10*] F. SPITZER, The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density. *Duke Math. J.*, **24**, 1957, 327-344.

[*11*] F. SPITZER, *Principles of Random Walk*. Van Nostrand, New York, 1964.

(Manuscrit reçu le 22 décembre 1969).