

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC LICHNEROWICZ

Un modèle d'échange économique (Économie et thermodynamique)

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 2 (1970), p. 159-200

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_2_159_0

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Un modèle d'échange économique (Économie et thermodynamique)

par

Marc LICHNEROWICZ

INTRODUCTION

La présentation moderne de la thermodynamique (par exemple Carathéodory, H. B. Callen [3], L. Tisza [4]) met en évidence une axiomatique d'échanges entre systèmes physiques d'un caractère extrêmement général. La distinction entre variables « extensives » et variables « intensives », par exemple, paraît adaptée à tout processus d'échange, quel que soit le domaine concret où s'opère un tel échange.

Nous nous sommes proposés de développer ici un modèle d'échange économique dont les principes soient « analogues » à ceux de la thermodynamique ou inspirés par ceux-ci. Si notre exposé n'utilise volontairement que du langage économique, il apparaît comme aisé à tout connaisseur de la thermodynamique de distinguer les identifications faites.

Dans les § 1, 2, 3, nous introduisons les notions de cellules économiques (simples ou composites) et de réservoirs extérieurs et nous explicitons les principes régissant la recherche des « états d'équilibre ». Dans ces principes intervient une fonction de satisfaction S qui joue un rôle identique à celui de l'entropie. Une interprétation des prix comme variables intensives s'en déduit.

Le § 4 est consacré à l'étude de la stabilité de l'équilibre d'une ou plusieurs cellules, l'analyse de la stabilité intrinsèque d'une cellule met en évidence d'une manière inattendue, la liaison entre les variations des quantités de lien détenues et celles des prix, voir (4-21) et (4-22) par exemple. Il s'agit là de l'une des conséquences les plus intéressantes du modèle.

Les § 5, 6, 7 sont relatifs à l'analyse mathématique d'un processus dyna-

mique caractérisant l'ajustement des quantités de bien détenues par une cellule lorsque les prix sont imposés par un réservoir extérieur (ou une agence). Sous des hypothèses générales de concavité, il y a convergence du processus vers un « état d'équilibre » solution du programme mis en évidence au § 1. Le § 8 procède à une analyse analogue en ce qui concerne les échanges de biens entre deux cellules. L'étude se généraliserait sans difficulté à un système de n cellules.

Le modèle « thermodynamique » d'échanges économiques, dont nous avons dessiné ses grandes lignes, nous paraît mériter une étude ultérieure plus approfondie.

1. CELLULE ÉCONOMIQUE SIMPLE

a) Nous appelons *cellule économique simple* Σ , un élément économique de taille quelconque (individu, agent économique, région, pays, etc.) que nous considérons uniquement d'un point de vue global, c'est-à-dire sous le seul aspect de ses relations avec l'extérieur, sans nous préoccuper de ce qui peut se passer en son sein.

A toute cellule simple nous associons une *fonction de satisfaction* S qui décrit complètement sa structure, et qui dépend des paramètres extensifs suivants :

U = quantité globale du bien 0 appelé *monnaie*, détenue dans Σ .

X_i = quantité globale du bien i ($i = 1, 2, \dots, n$) détenue dans Σ .

Ces paramètres ne peuvent évidemment être négatifs. On ne s'occupe pas de la manière dont sont réparties les quantités de monnaie et de biens à l'intérieur de la cellule. Ainsi nous pouvons écrire la relation :

$$S = S(U, X_i)$$

que nous appelons *relation fondamentale associée à la cellule simple* Σ . Nous faisons sur S les hypothèses suivantes :

(H) S est une fonction strictement croissante, de classe C^2 , homogène de degré 1 des paramètres U et X_i .

(C) S est une fonction concave des paramètres U et X_i .

(N) $S \geq 0$, et $S = 0$ si, et seulement si $U = X_i = 0$.

La troisième hypothèse exprime que la satisfaction associée à une cellule simple ne peut être négative, et qu'elle est nulle si et seulement si la cellule ne contient rien. Nous justifierons les deux premières hypothèses par la suite.

b) Nous allons mettre la cellule simple Σ en rapport avec un marché, où les prix lui sont imposés. Ceci signifie que le marché est beaucoup plus « important » que la cellule et que celle-ci ne peut le perturber. Nous reviendrons là-dessus à propos des « réservoirs extérieurs ». Si les quantités U_0 et X_{i0} de monnaie et de biens sont détenues initialement à l'intérieur de la cellule, nous pouvons lui associer une fortune F qui est un nombre exprimé en unités monétaires, et qui vaut

$$U_0 + \sum_{i=1}^n P^i X_{i0},$$

où les prix P^i sont ceux du marché. En achetant et vendant des biens sur ce marché la cellule va essayer d'augmenter sa satisfaction. Nous postulons qu'en l'absence de contraintes sur les paramètres U et X_i , la cellule cherche à maximiser sa satisfaction à fortune donnée, ce qui correspond à un état d'équilibre de la cellule par rapport au marché extérieur. Elle doit donc résoudre le programme suivant où les prix P^i , et la fortune F sont donnés :

$$(\pi) \begin{cases} \max S(U, X_i) \\ U + \sum P^i X_i = F \rightarrow \lambda \\ U \geq 0 \rightarrow \rho \geq 0 \\ X_i \geq 0 \rightarrow \sigma^i \geq 0 \end{cases}$$

Ici intervient l'hypothèse (C). Puisque S est concave, les conditions d'optimalité qui sont nécessaires, sont aussi suffisantes. Il est donc équivalent de résoudre ce programme, ou le système :

$$(D) \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial U} - \lambda + \rho = 0 & (1-1) \\ \frac{\partial S}{\partial X_i} - \lambda P^i + \sigma^i = 0 & (1-2) \\ \rho U = 0 & (1-3) \\ \sigma^i X_i = 0 & (1-4) \\ \rho \geq 0, \sigma^i \geq 0 \end{cases}$$

Les relations (1-1), (1-2), (1-3), (1-4), combinées avec l'identité d'Euler, impliquent qu'à l'équilibre on a :

$$S(\bar{U}, \bar{X}_i) \equiv \frac{\partial S}{\partial U} \cdot \bar{U} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial X_i} \cdot \bar{X}_i = \lambda \left(U + \sum_{i=1}^n P^i \bar{X}_i \right) = \lambda F$$

On en déduit d'après l'hypothèse (N) que, sauf si la solution (\bar{U}, \bar{X}_i) est nulle, $\lambda > 0$. De plus on peut interpréter à l'équilibre S comme la *valeur réelle* de la cellule par opposition à sa *valeur nominale* F, le multiplicateur λ étant le facteur qui permet de passer de l'une à l'autre.

Nous supposons à partir de maintenant, pour la clarté de l'exposé, que toute cellule possède de la monnaie, c'est-à-dire que U *ne peut être nul*.

Du système (D) on déduit que la solution (\bar{U}, \bar{X}_i) est optimale pour le programme si, et seulement si, pour les quantités effectivement possédées par la cellule, c'est-à-dire pour $\bar{U} > 0$, et pour ceux des \bar{X}_i strictement positifs, on a :

$$(1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\partial S}{\partial \bar{U}} = \text{utilité marginale de la monnaie} \\ P^i = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial S}{\partial \bar{X}_i} = \text{quotient de l'utilité marginale du bien par celle de la monnaie} \end{array} \right.$$

et pour les biens non détenus ($\bar{X}_k = 0$) :

$$(1-6) \quad P^k \geq \frac{1}{\lambda} \frac{\partial S}{\partial \bar{X}_k}$$

On peut simplement dire des biens non possédés par la cellule qu'ils sont « trop chers ».

c) En particulier, considérons maintenant une cellule simple, à laquelle est associée une fonction de satisfaction S, et qui possède des quantités de monnaie et de biens $\bar{U} > 0$ et \bar{X}_i . Comme nous l'étudierons plus loin cette cellule peut les échanger avec d'autres cellules. A cet effet, nous postulons qu'elle va d'abord se choisir un système de prix, et par suite une fortune, telle que sa satisfaction $\bar{S} = S(\bar{U}, \bar{X}_i)$ soit maximale pour cette fortune.

L'hypothèse (C) assure qu'il est nécessaire et suffisant de prendre des prix vérifiant (1-5) et (1-6). Puisque $\bar{U} > 0$, sont déterminés de manière unique

$$\bar{\lambda} = \frac{\partial S}{\partial \bar{U}} \quad , \quad F = \frac{\bar{S}}{\bar{\lambda}}$$

et les prix des biens effectivement possédés ($\bar{X}_i > 0$) qui valent $\frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{\partial S}{\partial \bar{X}_i}$.

Les prix des autres biens ($\bar{X}_k = 0$) sont seulement astreints à vérifier l'inégalité :

$$P^k \geq \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\partial S}{\partial \bar{X}_k}$$

Ainsi, à toute cellule simple détenant des quantités données \bar{U} et \bar{X}_i de monnaie et de biens, nous pouvons de cette façon associer un *ensemble de prix indépendants de tout marché extérieur* que nous appellerons *prix d'équilibre admissibles pour la cellule*, tels que (\bar{U}, \bar{X}_i) soit solution du programme (π) . Nous appellerons *prix limite*, le plus petit des prix d'équilibre admissibles. Il est clair que ce prix limite est *unique*, et qu'il vérifie :

$$\bar{\lambda} = \frac{\partial S}{\partial \bar{U}} \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\bar{P}^i = \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\partial S}{\partial \bar{X}_i}$$

On notera que, toutes choses étant égales ailleurs, *le prix limite \bar{P}^i d'un bien i est le seul prix au-dessus duquel la cellule n'achètera pas, et au-dessous duquel elle ne vendra pas du bien i .*

Vérifions-le dans le cas d'une cellule Σ , en rapport avec un marché où le prix P^i du bien i est supérieur au prix limite \bar{P}^i , pour ce bien, de la cellule. Si la cellule réalise un achat sur ce marché portant sur une quantité dX_i du bien i , à l'exclusion de tout autre bien, la variation de satisfaction engendrée peut s'écrire :

$$dS = \bar{\lambda}(dU + \bar{P}^i dX_i)$$

avec, si dX_i est compté positivement :

$$dU = - P^i dX_i$$

Ainsi, on obtient, puisque $\bar{\lambda} > 0$:

$$dS = \bar{\lambda}(\bar{P}^i - P^i)dX_i < 0$$

et la cellule réaliserait une opération, où elle « perdrait de la satisfaction », ce qui n'est pas possible.

Le prix limite d'une cellule, associé à des quantités \bar{U} et \bar{X}_i données, est donc le seul prix qui autorise des échanges avec l'extérieur dans les deux sens. C'est le prix « équitable » pour la cellule.

d) Remarques.

1) Nous allons justifier l'hypothèse du paragraphe (1. c) qui peut paraître un peu arbitraire. Nous venons de considérer au (b) du paragraphe 1 une cellule simple que nous désignerons par Σ_2 , en contact avec un marché extérieur que nous appellerons Σ_1 , qui lui fixe un système de prix. Nous pouvons supposer que le système économique formé de la cellule simple et de ce marché est isolé de l'extérieur, c'est-à-dire que les quantités glo-

bales $U = U_1 + U_2$ de monnaie, et $X_i = X_{i1} + X_{i2}$ de biens détenus dans ce système sont constantes.

Le processus suivant peut alors s'engager :

Σ_1 prend l'initiative de fixer des prix P^1, P^2, \dots, P^n , et s'engage à acheter et à vendre à ces prix. Σ_2 ne prend aucune initiative, et profite uniquement de la situation créée par Σ_1 ; Σ_2 réalise donc les biens qu'elle possédait au début, ce qui lui procure une fortune F , et utilise au mieux cette fortune en maximisant sa satisfaction S_2 , sous la contrainte de fortune, ce qui détermine les quantités U_2 et X_{i2} . Par contrecoup, les quantités U_1 et X_{i1} se trouvent également déterminées, à cause de l'isolement du système cellule-marché :

$$\begin{cases} U_1 = U = U_2 \\ X_{i1} - X_i = X_{i2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Si nous attribuons à ce marché une fonction de satisfaction S_1 , il se trouve obtenir la satisfaction $S_1(U_1, X_{i1})$, qui dépend des prix qu'il a adoptés. Il choisira donc les prix P^1, P^2, \dots, P^n de manière à maximiser sa satisfaction S_1 .

Nous appellerons M_{11} le maximum de S_1 quand Σ_1 prend l'initiative. M_{21} sera la valeur de S_2 quand Σ_1 prend l'initiative.

Si Σ_2 prend l'initiative, c'est-à-dire si on inverse les rôles de Σ_1 et Σ_2 on obtient des satisfactions qui prennent les valeurs M_{12} et M_{22} .

Il peut s'ensuivre une lutte entre Σ_1 et Σ_2 pour prendre l'initiative. Nous excluons dans cette étude un tel processus de choix des prix à cause de l'obligation pour Σ_1 d'acheter et de vendre à un prix qui peut ne pas être son prix limite, ce qui entraînerait une baisse de satisfaction.

Nous supposons au (c) du paragraphe 1 qu'une cellule simple possédant des quantités données de monnaie et de biens, choisit des prix en fonction de ses besoins intérieurs sans souci de ce qui peut se passer ailleurs : on peut penser que le système de prix adopté en France, est d'abord celui qui procure certains avantages aux Français, et non celui qui permet les meilleurs échanges avec l'Allemagne. Il peut ne pas y avoir incompatibilité, mais c'est ensuite que ces prix choisis « de l'intérieur » peuvent se trouver éventuellement modifiés par des rapports avec l'extérieur. C'est ce que nous étudierons au paragraphe suivant.

2) Sur la variété des états d'équilibre d'une cellule simple nous avons vu que :

$$S = \lambda \left(U + \sum_{i=1}^n P^i X_i \right)$$

d'où :

$$dS = \lambda \left(dU + \sum_{i=1}^n P^i dX_i + \sum_{i=1}^n X_i dP^i \right) + \left(U + \sum_{i=1}^n P^i X_i \right) d\lambda$$

D'autre part, on peut aussi écrire sur la variété des états d'équilibre :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial U} \cdot dU + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial X_i} \cdot dX_i = (\lambda - \rho) dU + \sum_{i=1}^n (dP^i - \sigma^i) dX_i$$

Comparant ces deux expressions de dS , il vient :

$$\lambda \sum_{i=1}^n X_i dP^i + (U + \sum_{i=1}^n P^i X_i) d\lambda + \rho dU + \sum_{i=1}^n \sigma^i dX_i = 0$$

Or, on a :

$$\rho U = 0 \Rightarrow d(\sigma U) = \rho dU + U d\rho = 0$$

$$\sigma^i X_i = 0 \Rightarrow d(\sigma^i X_i) = \sigma^i dX_i + X_i d\sigma^i = 0$$

On en déduit :

$$(1-7) \quad \lambda \sum_{i=1}^n X_i dP^i + \left(U + \sum_{i=1}^n P^i X_i \right) d\lambda = U d\rho + \sum_{i=1}^n X_i d\sigma^i$$

c'est-à-dire que sur la variété des états d'équilibre d'une cellule simple $\log \lambda$ dépend de P^i, ρ, σ^i . Par suite, on peut écrire :

$$\lambda = \lambda(P^i, \rho, \sigma^i)$$

3) Si on suppose (hypothèse (H)) S homogène de degré 1 par rapport aux variables U et X_i , on voit que pour le prix limite,

$$\lambda = \frac{\partial S}{\partial U} \quad \text{et} \quad P^i = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial S}{\partial X_i}$$

sont des *fonctions homogènes de degré 0 des variables U et X_i* . On retrouve ainsi une propriété importante des prix d'équilibre classiques. En réalité, comme nous allons le voir, l'hypothèse (H) est une conséquence du fait que nous voulons pouvoir « ajouter les satisfactions ». Cette remarque justifie encore notre postulat du paragraphe (1-c) sur le choix des prix.

2. CELLULES ÉCONOMIQUES COMPOSITES

a) Une cellule économique Σ est dite *composite*, si elle est la réunion de plusieurs cellules simples. Soit, par exemple, une cellule Σ composée de deux cellules simples $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$. Pour les paramètres extensifs déjà introduits, on aura :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ X_i &= X_{i1} + X_{i2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

où U_1, X_{i1} et U_2, X_{i2} sont des paramètres extensifs respectivement des cellules Σ_1 et Σ_2 . Il est clair que U et X_i ne forment pas un système de paramètres extensifs complet pour décrire Σ . Si nous faisons l'hypothèse que la variable S est elle-même extensive :

$$S = S_1(U_1, X_{i1}) + S_2(U_2, X_{i2})$$

où S apparaît comme dépendant des variables U_1, U_2, X_{i1}, X_{i2} . Ces variables sont donc les *paramètres extensifs décrivant* Σ .

b) Nous allons maintenant définir et étudier l'équilibre d'une telle cellule composite. A cet effet, explicitons les postulats suivants qui englobent les hypothèses formulées jusqu'à présent, si nous considérons qu'une cellule simple est une forme particulière de cellule composite.

POSTULAT I. — *Il existe des états particuliers (appelés états d'équilibre) des cellules composites qui sont complètement déterminés par les valeurs des paramètres extensifs décrivant la cellule.*

La cellule est libre de choisir un quelconque de ses états. Dans toute cette étude nous raisonnerons *uniquement* sur la variété de ces états d'équilibre « potentiels ». Il existe évidemment d'autres sortes d'états qui ne sont pas des états d'équilibre. On peut imaginer par exemple entre les cellules simples formant une cellule composite, un flux incessant de monnaie et de biens, c'est-à-dire un processus dynamique. C'est ce que nous écartons ici.

POSTULAT II. — *Il existe une fonction S concave, strictement croissante, et de classe C^2 (appelée fonction de satisfaction) des paramètres extensifs de toute cellule composite Σ , définie sur les états d'équilibre, et extensive, c'est-à-dire que si Σ est formée de deux cellules simples Σ_1 et Σ_2 , on a :*

$$S = S_1(U_1, X_{i1}) + S_2(U_2, X_{i2})$$

De plus S ne peut être négative, et elle est nulle si et seulement si la cellule ne contient rien.

On remarquera que l'extensivité de S implique l'homogénéité de degré 1 de S par rapport à l'ensemble des variables U_1, U_2, X_{i1}, X_{i2} .

POSTULAT III. — 1) *En présence des seules contraintes d'isolement d'une cellule composite par rapport à l'extérieur, les valeurs supposées prises par ses paramètres extensifs sont celles qui maximisent sa satisfaction sur la variété des états d'équilibre.*

2) *En l'absence de contraintes portant sur eux, les valeurs supposées prises à l'équilibre pour les paramètres extensifs d'une cellule simple en rapport avec l'extérieur, sont celles qui maximisent la satisfaction de la cellule à fortune donnée, celle-ci étant définie par les prix de l'extérieur.*

En définitive, pour une cellule simple échangeant avec l'extérieur des biens et de la monnaie, deux cas peuvent se présenter :

— ou il y a des contraintes sur les quantités que peut acquérir la cellule et on devra en tenir compte pour maximiser S ;

— ou l'extérieur est suffisamment vaste pour qu'il n'y ait pas de limitation sur les quantités que peut acquérir la cellule. Dans ce cas nous montrerons que les prix lui sont imposés, la cellule alors est limitée par sa fortune.

Signalons que nous montrerons au paragraphe 3 que la deuxième partie du postulat III peut être tenue comme découlant de la première. Nous l'explicitons ici cependant dans un but de clarté.

c) Considérons une cellule composite Σ , composée de deux cellules simples Σ_1 et Σ_2 . On suppose que la cellule Σ est isolée, c'est-à-dire sans rapport avec l'extérieur. D'après les postulats II et III, l'état d'équilibre de la cellule Σ correspond à la maximisation, sous les contraintes d'isolement, de la satisfaction $S = S_1 + S_2$. On doit donc résoudre le programme :

$$(\pi_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } S_1(U_1, X_{i1}) + S_2(U_2, X_{i2}) \\ U_1 + U_2 = U (> 0) \rightarrow \mu_0 \\ X_{i1} + X_{i2} = A_i (> 0) \rightarrow \mu_i \\ U_1 \geq 0 \rightarrow \sigma_{01} \geq 0 \\ U_2 \geq 0 \rightarrow \sigma_{02} \geq 0 \\ X_{i1} \geq 0 \rightarrow \sigma_{i1} \geq 0 \\ X_{i2} \geq 0 \rightarrow \sigma_{i2} \geq 0 \end{array} \right.$$

On suppose évidemment que les quantités globales sur lesquelles portent

les échanges ne sont pas nulles. Les conditions d'optimalité de ce programme impliquent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial U_1} - \mu_0 + \sigma_{01} = 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial X_{i1}} - \mu_i + \sigma_{i1} = 0 \\ \frac{\partial S_2}{\partial U_2} = \mu_0 + \sigma_{02} = 0 \\ \frac{\partial S_2}{\partial X_{i2}} - \mu_i + \sigma_{i2} = 0 \end{cases}$$

Éliminant les multiplicateurs μ_i ($i = 0, 1, \dots, n$), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial U_1} + \sigma_{01} &= \frac{\partial S_2}{\partial U_2} + \sigma_{02} \\ \frac{\partial S_1}{\partial X_{i1}} + \sigma_{i1} &= \frac{\partial S_2}{\partial X_{i2}} + \sigma_{i2} \end{aligned}$$

Nous supposons $U_1, U_2 > 0$ et il vient

$$(2-1) \quad \frac{\partial S_1}{\partial U_2} = \frac{\partial S_2}{\partial U_2}$$

De même, pour les biens i détenus effectivement à l'équilibre par chacune des cellules Σ_1 et Σ_2 ($X_{i1}, X_{i2} > 0$) on aura :

$$(2-2) \quad \frac{\partial S_1}{\partial X_{i1}} = \frac{\partial S_2}{\partial X_{i2}}$$

Si par contre un bien k est uniquement possédé par une seule des deux cellules simples, soit Σ_1 ($X_{k1} = X_k, X_{k2} = 0$), on a :

$$(2-3) \quad \frac{\partial S_1}{\partial X_{k1}} = \frac{\partial S_2}{\partial X_{k2}} + \sigma_{k2} \geq \frac{\partial S_2}{\partial X_{k2}}$$

Revenons alors aux deux cellules simples. A l'équilibre, chacune possède des quantités $(\bar{U}_1, \bar{X}_{i1})$ et $(\bar{U}_2, \bar{X}_{i2})$ de monnaie et de biens. Considérant leurs prix limites respectifs, on peut alors écrire d'après (2-1) :

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2$$

De même, d'après (2-2), on a :

$$\bar{\lambda}_1 \bar{P}_1^i = \bar{\lambda}_2 \bar{P}_2^i \Rightarrow \bar{P}_1^i = \bar{P}_2^i$$

A l'équilibre, il y a donc égalité des prix des biens possédés par les deux cellules. (2-3) implique également :

$$\bar{\lambda}_1 \bar{P}_1^k \geq \bar{\lambda}_2 \bar{P}_2^k \Rightarrow \bar{P}_1^k \geq \bar{P}_2^k$$

Si, à l'équilibre, un bien k est entièrement possédé par une des cellules simples soit Σ_1 , Σ_2 n'en détenant pas, son prix limite dans Σ_1 est supérieur à son prix limite dans Σ_2 .

On voit, puisque le prix limite associé à une cellule simple est le plus petit des prix d'équilibre admissibles pour cette cellule, qu'à l'équilibre de la cellule Σ , les seuls prix d'équilibre admissibles à la fois pour Σ_1 et Σ_2 sont tels que :

$$\begin{aligned} \lambda &= \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 \\ P^i &= \bar{P}_1^i = \bar{P}_2^i && (\text{si } X_{i1}, X_{i2} > 0) \\ P^k &\geq \bar{P}_1^k \geq \bar{P}_2^k && (\text{si } X_{k1} = X_k, X_{k2} = 0) \end{aligned}$$

Nous les appellerons *prix d'équilibre admissibles pour Σ* . De même nous définirons le *prix limite associé à Σ* , comme la borne inférieure des prix d'équilibre admissibles pour Σ . Il est clair que ce prix est unique et qu'il vérifie :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 \\ \bar{P}^j &= \text{Sup}_{1,2} \bar{P}_1^j, \bar{P}_2^j && (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

d) Nous avons montré l'existence de prix d'équilibre admissibles et d'un prix limite unique pour une cellule composite formée de deux cellules simples. Ce résultat se généralise aisément au cas où la cellule composite Σ est la réunion de n cellules simples.

Prenons le cas d'une cellule composite Σ isolée, réunissant trois cellules simples Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 . On peut envisager quatre façons de les composer :

— ou bien, on réunit d'abord Σ_1 et Σ_2 , on aboutit à un équilibre entre ces deux cellules, puis on met en rapport la cellule (Σ_1, Σ_2) avec Σ_3 . Par permutation circulaire, on obtient deux autres manières de procéder ;

— ou bien, on réunit « en même temps » $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Nous allons montrer :

THÉORÈME. — *Étant donné n cellules simples formant une cellule composite isolée, quelle que soit la manière dont on met en rapport les cellules simples les unes avec les autres, on aboutit à un même ensemble d'états d'équilibre pour la cellule composite.*

En effet quelle que soit la façon dont on compose les cellules simples, on doit en dernier lieu résoudre le même programme. Pour $n = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } S_1(U_1, X_{i1}) + S_2(U_2, X_{i2}) + S_3(U_3, X_{i3}) \\ U_1 + U_2 + U_3 = U \ (> 0) \\ X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} = X_i \ (> 0) \\ U_1 \geq 0 \\ U_2 \geq 0 \\ U_3 \geq 0 \\ X_{i1} \geq 0 \\ X_{i2} \geq 0 \\ X_{i3} \geq 0 \end{array} \right.$$

Cette « associativité » des états d'équilibre résulte directement de l'extensivité de S .

De même qu'au paragraphe (2-c), on voit que les conditions d'optimalité impliquent, toujours dans le cas où U_1, U_2, U_3 sont strictement positifs :

$$(2-4) \quad \frac{\partial S_1}{\partial U_1} = \frac{\partial S_2}{\partial U_2} = \frac{\partial S_3}{\partial U_3}$$

Pour les biens i possédés par les 3 cellules ($X_{i1}, X_{i2}, X_{i3} > 0$) on a :

$$(2-5) \quad \frac{\partial S_1}{\partial X_{i1}} = \frac{\partial S_2}{\partial X_{i2}} = \frac{\partial S_3}{\partial X_{i3}}$$

Pour les biens j possédés par 2 cellules seulement, soit, par exemple $X_{j1}, X_{j2} > 0, X_{j3} = 0$, il vient

$$(2-6) \quad \frac{\partial S_1}{\partial X_{j1}} = \frac{\partial S_2}{\partial X_{j2}} \geq \frac{\partial S_3}{\partial X_{j3}}$$

Pour les biens k détenus par une seule cellule, soit par exemple $X_{k1} > 0, X_{k2} = X_{k3} = 0$, on aura :

$$(2-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_1}{\partial X_{k1}} \geq \frac{\partial S_2}{\partial X_{k2}} \\ \frac{\partial S_1}{\partial X_{k1}} \geq \frac{\partial S_3}{\partial X_{k3}} \end{array} \right.$$

Revenant alors aux cellules simples, et considérant leurs prix limites respectifs, on voit que (2-4), (2-5), (2-6), (2-7) peuvent s'écrire respectivement :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 \\ \bar{\lambda}_1 \bar{P}_1^i &= \bar{\lambda}_2 \bar{P}_2^i = \bar{\lambda}_3 \bar{P}_3^i & \Rightarrow \bar{P}_1^i &= \bar{P}_2^i = \bar{P}_3^i \\ \bar{\lambda}_1 \bar{P}_1^j &= \bar{\lambda}_2 \bar{P}_2^j \geq \bar{\lambda}_3 \bar{P}_3^j & \Rightarrow \bar{P}_1^j &= \bar{P}_2^j \geq \bar{P}_3^j \\ \bar{\lambda}_1 \bar{P}_1^k &\geq \text{Sup}_{2,3} (\bar{\lambda}_2 \bar{P}_2^k, \bar{\lambda}_3 \bar{P}_3^k) & \Rightarrow \bar{P}_1^k &\geq \text{Sup}_{2,3} (\bar{P}_2^k, \bar{P}_3^k) \end{aligned}$$

Nous définirons exactement de la même manière qu'au paragraphe 2-c les prix d'équilibre admissibles pour Σ et les prix limites qui vérifieront également :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 \\ \bar{P}_i &= \text{Sup}_{1,2,3} (\bar{P}_1^i, \bar{P}_2^i, \bar{P}_3^i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Remarques.

1) Nous ne nous sommes pas occupés jusqu'ici de l'unicité des états d'équilibre d'une cellule composite. Cependant, si au lieu de supposer que les satisfactions S sont des fonctions concaves de (U, X_i), nous les supposons quasi strictement concaves (voir § 7), l'unicité d'un état d'équilibre en résulte aisément.

2) Tout état d'équilibre d'une cellule composite $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$ est un optimum au sens de Pareto. En effet, on a à l'équilibre, en vertu de l'additivité de S :

$$dS = dS_1 + dS_2 = 0$$

Il est clair qu'il n'est possible d'augmenter la satisfaction de l'une des cellules simples, sans diminuer celle de l'autre.

3. RÉSERVOIRS EXTÉRIEURS

Jusqu'à présent, nous avons étudié entre les cellules les rapports d'échange où s'exercent des contraintes sur les paramètres extensifs. Or nous avons postulé qu'en l'absence de contraintes sur ces paramètres, la cellule maximisait sa satisfaction à fortune donnée. Ceci implique que pour la cellule envisagée les prix sont imposés, c'est-à-dire qu'elle ne peut agir sur eux. C'est ce qui se produit quand on met en rapport d'échanges deux cellules de tailles très différentes. C'est ce que nous allons étudier dans ce paragraphe.

a) Pour simplifier les notations, considérons la monnaie comme le bien 0 et posons $U = X_0$. La *taille* d'une cellule Σ (simple ou composite), dont la *structure* est décrite par la fonction S dépend du domaine D_Σ où les variables X_α ($\alpha = 0, 1, \dots, n$) peuvent varier. Nous sommes ainsi amenés à compléter la description d'une cellule Σ par la donnée de D_Σ . Il semble raisonnable d'introduire pour décrire la taille de Σ , le nombre

$$M_\Sigma = \text{Sup}_\alpha \max_{D_\Sigma} X_\alpha$$

Nous dirons que deux cellules Σ_1 et Σ_2 sont *a-comparables* si l'on a :

$$\frac{1}{a} M_{\Sigma_2} \leq M_{\Sigma_1} \leq a M_{\Sigma_2}$$

où a est un nombre donné ≥ 1 .

Nous dirons que deux cellules *simples* Σ_1 et Σ_2 sont *homothétiques l'une de l'autre* si elles admettent la même fonction de satisfaction et si les domaines correspondants D_{Σ_1} et D_{Σ_2} se déduisent l'un de l'autre par homothétie de rapport k . Nous noterons $\Sigma_2 = k\Sigma_1$. Nous dirons qu'une cellule Σ_1 est négligeable devant une cellule simple Σ s'il existe une cellule simple Σ_0 *a-comparable* à Σ_1 et dont l'homothétie dans un rapport k tel que a/k soit négligeable, coïncide avec Σ .

Considérons les cellules Σ_0 et Σ . On sait d'après la remarque 2 du paragraphe 1 que λ est une fonction homogène de degré 0 par rapport à $\{X_\alpha\}$ et par suite que $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X_\beta}$ est une fonction homogène de degré -1 par rapport aux mêmes variables.

Si $\{X_\alpha\} \in D_\Sigma$, il existe $X_{\alpha_0} \in D_{\Sigma_0}$ tel que $X_\alpha = kX_{\alpha_0}$ et l'on a :

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X_\beta}(X_\alpha) = \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X_\beta}(X_{\alpha_0})$$

$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X_\beta}(X_\alpha)$ peut donc être rendu arbitrairement petit pourvu que k soit suffisamment grand.

On est ainsi amené à supposer que si Σ est très grand en taille par rapport aux autres cellules qu'on peut mettre en rapport avec elle, λ peut être considéré pratiquement comme ayant une valeur constante, indépendante de tout état d'équilibre. Il en est évidemment de même pour les P^i ($i = 1, \dots, n$).

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

DÉFINITION. — *On appelle réservoir extérieur une cellule simple E (idéale) telle que toute cellule, simple ou composite, qu'on pourra mettre en rapport avec elle pouvant être considérée comme négligeable devant elle, λ et les prix limites de E aient des valeurs constantes, indépendantes de tout état envisagé.*

b) Considérons un réservoir extérieur E échangeant de la monnaie et des biens avec une cellule simple Σ_0 . A l'équilibre, on doit résoudre le programme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } S_E(U_E, X_{iE}) + S_0(U_0, X_{i0}), \\ U_E + U_0 = U (> 0), \\ X_{iE} + X_{i0} = X_i (> 0) \\ U_E \geq 0, \quad U_0 \geq 0, \quad X_{iE} \geq 0, \quad X_{i0} \geq 0, \end{array} \right.$$

Il est normal de supposer que E détient effectivement les biens sur lesquels portent l'échange et la monnaie ($U_E > 0, X_{iE} > 0$). On en déduit comme au paragraphe 2-c, la monnaie étant toujours supposée possédée par Σ_0 :

$$\begin{array}{ll} \bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_E & \\ \bar{P}_0^i = \bar{P}_E^i & \text{si } X_{i0} > 0 \\ \bar{P}_0^k \leq \bar{P}_E^k & \text{si } X_{k0} = 0 \end{array}$$

et le seul prix d'équilibre admissible par E et par Σ est

$$\begin{array}{l} \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_E \\ \bar{P}_i = \bar{P}_E^i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array}$$

Ainsi, à l'équilibre, le prix limite de la cellule (Σ_0, E) s'aligne sur celui du réservoir extérieur E.

Pour cette cellule (Σ_0, E), on a à l'équilibre

$$d(S_0 + S_E) = dS_0 + \bar{\lambda} \left(dU_E + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i dX_{iE} \right) = 0$$

et

$$d^2(S_0 + S_E) < 0$$

avec

$$d(U_0 + U_E) = 0 \quad d(X_{i0} + X_{iE}) = 0$$

soit

$$dU_E = -dU_0 \quad dX_{iE} = -dX_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Par suite, on a d'après la constance de $\bar{\lambda}_E$ et \bar{P}_E^i :

$$d(S_0 + S_E) = dS_0 - \bar{\lambda}_E dU_0 + \sum \bar{P}_E^i dX_{i0} = 0$$

soit

$$(3-1) \quad d \left\{ S_0 - \bar{\lambda}_E \left(U_0 + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X_{i0} \right) \right\} = 0$$

D'autre part sur la variété des états d'équilibres, les prix limites étant constants, il vient :

$$d^2 S_E = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \bar{\lambda}_E}{\partial U} (dU_E)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_E}{\partial X_i} + \frac{\partial \bar{P}_E^i}{\partial U} \right) dU_E dX_{iE} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{P}_E^i}{\partial X_j} dX_{iE} dX_j \right\}$$

et

$$d^2 \left\{ \bar{\lambda}_E \left(U_0 + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X_{i0} \right) \right\} = 0$$

On en déduit :

$$d^2 \left\{ S_0 - \bar{\lambda}_E \left(U_0 + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X_{i0} \right) \right\} = d^2 S_0 = d^2 (S_0 + S_E)$$

soit

$$(3-2) \quad d^2 \left\{ S_0 - \bar{\lambda}_E \left(U_0 + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X_{i0} \right) \right\} < 0$$

Nous pouvons énoncer

THÉORÈME. — *Les valeurs d'équilibres des paramètres extensifs d'une cellule simple Σ_0 en rapport avec un réservoir extérieur E maximisent la fonction :*

$$G = S_0 - \bar{\lambda}_E \left(U_0 + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X_{i0} \right)$$

G est une « transformée de Legendre » de S.

Ainsi une cellule simple Σ en rapport avec un réservoir extérieur E doit résoudre le programme (π') suivant, ou $\bar{\lambda}_E$ et \bar{P}_E^i sont imposés :

$$(\pi') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } S(U, X_i) - \bar{\lambda}_E \left(U + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X_i \right), \\ U \geq 0 \rightarrow \rho \geq 0, \\ X_i \geq 0 \rightarrow \sigma^i \geq 0. \end{array} \right.$$

Les conditions d'optimalité correspondantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial U} - \bar{\lambda}_E + \rho &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial X_i} - \bar{\lambda}_E \bar{P}_E^i + \sigma^i &= 0, \\ \rho U &= 0 \quad , \quad \sigma^i X_i = 0 \quad (\rho \geq 0, \sigma^i \geq 0) \end{aligned}$$

Soit $(U' > 0, X'_i)$ une solution du programme (π') . On déduit de l'identité d'Euler :

$$F' = U' + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X'_i = \frac{1}{\bar{\lambda}_E} S(U', X'_i)$$

et la « fortune » de la cellule Σ est fournie par $S(U', X'_i)/\bar{\lambda}_E$.

Or nous avons introduit au paragraphe 1, lorsque les prix \bar{P}_E^i sont donnés, ainsi que la fortune F , le programme :

$$(\pi) \begin{cases} \text{Max } S(U, X_i) \\ U + \sum_{i=1}^n \bar{P}_E^i X_i = F, \\ U \geq 0 \quad , \quad X_i \geq 0 \end{cases}$$

Il est clair que toute solution $(U' > 0, X'_i)$ du programme (π') est solution du programme (π) pour la fortune $F' = S(U', X'_i)/\bar{\lambda}_E$. Inversement toute solution du programme (π) est solution du programme (π') pour $\bar{\lambda} = S(U, X_i)/F$ et pour les \bar{P}_E^i imposés.

Ainsi l'étude de l'interaction entre un réservoir extérieur et une cellule simple justifie les considérations relatives aux prix du paragraphe 1 et l'introduction a priori du programme (π) .

c) Si l'on met en contact une cellule composite Σ avec un réservoir extérieur E , l'analyse précédente s'applique à chacune des cellules simples composant Σ .

On pouvait imaginer d'autre part d'introduire des réservoirs extérieurs E qui au lieu d'être des cellules simples, soient des cellules composites. Deux cas peuvent se présenter

1) Ou bien E contient parmi ses cellules composantes une cellule simple de grande taille par rapport à toutes les autres cellules considérées et assimilable à un réservoir extérieur au sens précédent.

3-b s'applique alors d'elle-même. Il en est de même si E comprend q cellules de grande taille comparables à l'une d'elles et par rapport auxquelles les autres cellules envisagées sont négligeables.

2) Ou bien E est formé d'un grand nombre N de cellules simples Σ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) comparables à l'une d'entre elles Σ_1 . Nous pouvons alors substituer à E la cellule *simple* $N\Sigma_1$ et l'étude du paragraphe 3-b s'applique encore.

Il n'y a donc intérêt qu'à considérer des réservoirs extérieurs qui soient identifiés à des *cellules simples*.

4. STABILITÉ

Nous avons vu que l'équilibre d'une cellule, simple ou composite, est défini à partir de la *maximisation* de la satisfaction. Il est raisonnable de modifier dans la suite la terminologie et d'appeler équilibre ce qui correspond à un *extremum* de « l'entropie » et de classer ces « états d'équilibre » du point de vue de la stabilité. Pour simplifier, nous considérons uniquement dans ce paragraphe le cas où les paramètres extensifs envisagés sont *strictement positifs* : les prix d'équilibre se confondent alors avec les prix limites et par abus de langage, nous parlerons seulement ici de prix.

A un déplacement virtuel (permis) décrit par (dU, dX_i) autour d'un état d'une cellule simple, on peut associer un changement virtuel ΔS de satisfaction. L'équilibre est caractérisé par la condition d'extremum

$$(4-1) \quad dS = 0$$

qui doit être vérifiée par tout déplacement virtuel infinitésimal.

La condition de maximisation se traduit par

$$(4-2) \quad \Delta S \leq 0$$

Nous sommes conduits comme en mécanique ou thermodynamique aux définitions suivantes :

Un équilibre est dit *stable* si

$$(4-3) \quad d^2S < 0$$

est vérifié pour tout déplacement virtuel infinitésimal non nul.

Un équilibre est dit critique (ou métastable) si :

$$(4-4) \quad d^2S \leq 0$$

est vérifié pour tout déplacement et s'il existe des déplacements non triviaux tels que $d^2S = 0$.

Un équilibre est dit instable s'il existe des déplacements vérifiant

$$(4-5) \quad d^2S > 0$$

a) *Stabilité intrinsèque d'une cellule simple à un bien matériel.*

Soit une cellule simple Σ' , isolée, comportant un bien matériel et de la monnaie. Nous allons étudier sa *stabilité intrinsèque*, c'est-à-dire les conditions assurant la stabilité d'un équilibre résultant d'un partage fictif de Σ' , en deux parties dont l'une est négligeable devant l'autre.

Effectuons par l'esprit une partition de la cellule Σ' en deux cellules simples Σ et $\bar{\Sigma}$, où Σ est négligeable devant $\bar{\Sigma}$; on peut écrire pour les paramètres extensifs de la cellule Σ' :

$$\begin{aligned} U' &= U + \bar{U} \\ X' &= X + \bar{X} \end{aligned}$$

En vertu d'un raisonnement analogue à celui du paragraphe (2-3-a) on établit que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}$ sont négligeables vis-à-vis de leurs homologues dans la cellule Σ .

Considérons un transfert virtuel de monnaie et de bien entre les cellules Σ et $\bar{\Sigma}$. Les contraintes d'isolement impliquent :

$$(4-6) \quad dU' = d(U + \bar{U}) = 0 \Rightarrow d\bar{U} = -dU$$

$$(4-7) \quad dX' = d(X + \bar{X}) = 0 \Rightarrow d\bar{X} = -dX$$

A ce transfert est associé un accroissement virtuel de la satisfaction S' de la cellule Σ' , soit au troisième ordre près, et puisqu'on peut négliger les dérivées secondes de S dans la cellule Σ :

$$\begin{aligned} \Delta S' &= \left(\frac{\partial S}{\partial U} dU + \frac{\partial S}{\partial X} dX \right) + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{U}} d\bar{U} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{X}} d\bar{X} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU^2 + 2 \frac{d^2 S}{\partial U \partial X} dU dX + \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} dX^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

A l'équilibre, on doit avoir :

$$dS' = d(S + \bar{S}) = dS + d\bar{S} = 0$$

Soit d'après (4-6) et (4-7) :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{U}}\right)dU + \left(\frac{\partial S}{\partial X} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{X}}\right)dX = 0$$

et cette relation étant vérifiée quels que soient dU et dX , on en déduit d'après la définition des prix d'équilibre (qui se confondent ici avec les prix limites, les paramètres extensifs U, \bar{U}, X, \bar{X} étant tous supposés positifs)

$$\begin{aligned}\lambda &= \bar{\lambda} \\ P &= \bar{P}\end{aligned}$$

On retrouve ici un résultat exposé au paragraphe 3, à propos des réservoirs extérieurs.

De plus, d'après le postulat III, la satisfaction devant être maximale on devra avoir :

$$d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X} dU dX + \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \right] < 0$$

La forme quadratique d^2S devra donc être définie négative.

On va la réduire à la forme canonique $A\xi_1^2 + B\xi_2^2$. A cet effet remarquons que :

$$d\lambda = \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU + \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X} dX$$

On en déduit que :

$$d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} (d\lambda)^2 + \left[\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X}\right)^2}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} \right] (dX)^2 \right]$$

Évaluons le coefficient de $(dX)^2$ dans la relation précédente. Il vient

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X}\right)^2}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} = \frac{\partial(\lambda P)}{\partial X} - \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial X} \frac{\partial(\lambda P)}{\partial U}}{\frac{\partial \lambda}{\partial U}}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X}\right)^2}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial U} \frac{\partial(\lambda P)}{\partial X} - \frac{\partial \lambda}{\partial X} \frac{\partial(\lambda P)}{\partial U}}{\frac{\partial \lambda}{\partial U}}$$

Or on peut écrire :

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial U} dU + \frac{\partial \lambda}{\partial X} dX$$

et

$$d(\lambda P) = \frac{\partial(\lambda P)}{\partial U} dU + \frac{\partial(\lambda P)}{\partial X} dX$$

on en déduit, par combinaison de ces deux dernières relations :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial U} d(dP) - \frac{\partial(dP)}{\partial U} \cdot d\lambda = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial U} \cdot \frac{\partial(dP)}{\partial X} - \frac{\partial \lambda}{\partial X} \cdot \frac{\partial(dP)}{\partial U} \right] \cdot dX$$

soit :

$$d(\lambda P) = \frac{\frac{\partial(\lambda P)}{\partial U}}{\frac{\partial \lambda}{\partial U}} \cdot d\lambda + \frac{\left[\frac{\partial \lambda}{\partial U} \frac{\partial(\lambda P)}{\partial X} - \frac{\partial \lambda}{\partial X} \frac{\partial(\lambda P)}{\partial U} \right]}{\frac{\partial \lambda}{\partial U}} \cdot dX$$

Par suite, le coefficient de $(dX)^2$ dans la forme quadratique d^2S , réduite à la forme canonique s'écrit :

$$\left[\frac{\partial(\lambda P)}{\partial X} \right]_{\lambda} = \lambda \left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_{\lambda}$$

Il en résulte qu'on a :

$$d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} (d\lambda)^2 + \lambda \left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_{\lambda} (dX)^2 \right]$$

et les conditions nécessaires et suffisantes pour que d^2S soit définie négative, et par suite de stabilité intrinsèque pour la cellule Σ' s'écrivent :

$$(4-8) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial U} \right]_{\lambda} < 0$$

et

$$(4-9) \quad \left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_{\lambda} < 0$$

(4-8) signifie que si la quantité X de bien déterminé dans Σ est fixée, une variation de la quantité de monnaie possédée dans Σ , entraîne une variation en sens inverse de λ .

(4-9) exprime que si λ est donné, une variation de la quantité X du bien détenue dans Σ entraîne une variation en sens inverse du prix de ce bien.

On peut noter que, pour $U > 0$, $X > 0$, la relation (1-7) s'écrit

$$\lambda X dP + (U + PX) d\lambda = 0$$

On en déduit :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial U} \right]_X = \left[\frac{dP}{d\lambda} \right] \left[\frac{\partial \lambda}{\partial U} \right]_X \quad \text{avec} \quad \left[\frac{dP}{d\lambda} \right] = - \frac{U + PX}{\lambda X} < 0$$

ce qui, avec (4-8), implique :

$$(4-10) \quad \left[\frac{\partial P}{\partial U} \right]_X > 0$$

On voit ainsi apparaître une condition nécessaire de stabilité intrinsèque de la cellule : à quantité de bien constante, une variation de la quantité de monnaie entraîne une variation dans le même sens du prix du bien.

On a vu (remarque 2 du paragraphe 1) que P est une fonction homogène de degré 0 des variables U et X . L'identité d'Euler s'écrit :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial U} \right]_X \cdot U + \left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_U \cdot X = 0$$

Les conditions de stabilité intrinsèque du système impliquent alors par l'intermédiaire de (4-10) que :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_U < 0$$

On peut donc énoncer de même, une autre condition nécessaire de stabilité intrinsèque de la cellule : à quantité de monnaie donnée, une variation de la quantité du bien détenue dans la cellule entraîne une variation en sens inverse du prix de ce bien.

b) *Stabilité mutuelle de deux cellules simples à un bien matériel.*

On considère deux cellules simples en contact l'une avec l'autre. On peut se préoccuper de la stabilité d'un état d'équilibre déterminé par une certaine partition des quantités de monnaie et de bien entre les deux cellules. Cet état d'équilibre est défini par le postulat III. Nous montrerons que cet état d'équilibre est stable, si chacune des deux cellules est dans un

état intrinsèquement stable. Ainsi les problèmes de stabilité mutuelle peuvent se ramener à des problèmes de stabilité intrinsèque.

Considérons donc deux cellules simples Σ_1 et Σ_2 en contact l'une avec l'autre. La variation de satisfaction engendrée par un processus virtuel de transfert de monnaie et de bien entre les deux cellules s'écrit :

$$\Delta S = (dS_1 + d^2S_1 + \dots) + (dS_2 + d^2S_2 + \dots)$$

les termes d'ordre un déterminant l'état d'équilibre, et ceux d'ordre deux la stabilité. Avec les contraintes d'isolement de la cellule (Σ_1, Σ_2) :

$$\begin{aligned} d(X_1 + X_2) = 0 &\Rightarrow dX_2 = -dX_1 \\ d(U_1 + U_2) = 0 &\Rightarrow dU_2 = -dU_1 \end{aligned}$$

les termes d'ordre deux prennent la forme :

$$\begin{aligned} d^2S = d^2S_1 + d^2S_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial U^2} \right) dU_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial U \partial X} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial U \partial X} \right) dU_1 dX_1 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial X^2} \right) dX_1^2 \right] \end{aligned}$$

Ainsi d^2S est une forme quadratique des variables dU_1 et dX_1 , et la condition de stabilité mutuelle des cellules Σ_1, Σ_2 est que cette forme soit définie négative. Par analogie avec les relations (4-8) et (4-9) les conditions de stabilité s'écrivent :

$$(4-11) \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial U^2} < 0$$

et

$$(4-12) \quad \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial U^2} \right) \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial X^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial U \partial X} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial U \partial X} \right)^2 > 0$$

Or les conditions de stabilité intrinsèque des cellules Σ_1 et Σ_2 impliquent :

$$(4-13) \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial U^2} < 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial U^2} < 0$$

et

$$(4-14) \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial U^2} \cdot \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^2} - \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial U \partial X} \right)^2 > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial U^2} \cdot \frac{\partial^2 S_2}{\partial X^2} - \left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial U \partial X} \right)^2 > 0$$

Les relations (4-13) entraînent trivialement (4-11). En vertu de l'identité aisément vérifiable :

$$(A_1 + A_2)(C_1 + C_2) - (B_1 + B_2)^2 \equiv \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right)(A_2 C_2 - B_2^2) + \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)(A_1 C_1 - B_1^2) + \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2}{A_1 A_2}$$

de (4-14), on déduit (4-12).

Nous avons ainsi montré, que la stabilité mutuelle d'un état d'équilibre entre deux cellules simples à un bien matériel est garantie par la stabilité intrinsèque de chacune des deux cellules.

c) *Stabilité intrinsèque d'une cellule simple à plusieurs biens matériels.*

On peut généraliser à une cellule à plusieurs biens matériels l'analyse du paragraphe 4-a. Soit donc une cellule simple Σ' à n biens matériels décrite par une fonction de satisfaction S' fonction des paramètres extensifs U', X'_1, \dots, X'_n . Effectuons par l'esprit une partition de la cellule Σ' en deux cellules simples Σ et $\bar{\Sigma}$, où Σ est négligeable devant $\bar{\Sigma}$. D'après le même argument qu'au paragraphe 4-a, un état d'équilibre de la cellule Σ , sera intrinsèquement stable si la forme quadratique :

$$(4-15) \quad d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} (dU)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_k} dU dX_k + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial X_j \partial X_k} dX_j dX_k \right]$$

est définie négative. On va la réduire à la forme canonique. A cet effet introduisons λ dont la différentielle peut s'écrire :

$$d\lambda = \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_k} dX_k$$

Par suite :

$$(d\lambda)^2 = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right] (dU)^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_k} dU dX_k + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_j} \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_k} dX_j dX_k$$

On peut donc écrire (4-15) sous la forme :

$$(4-16) \quad d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} (d\lambda)^2 + \sum_{nj,k=1}^n \left[\frac{\partial^2 S}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_k}}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} \right] dX_j dX_k \right]$$

Nous pouvons interpréter les coefficients de $dX_j dX_k$ dans cette dernière expression de d^2S . Considérant (4-16), il est en effet clair que :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial X_k}}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial X_j \partial X_k} \right]_{\lambda, X_i (i \neq j, k)}$$

Remarquant que :

$$\left[\frac{\partial^2 S}{\partial X_j \partial X_k} \right]_{\lambda, X_i (i \neq j, k)} = \left[\frac{\partial^2 (S - \lambda U)}{\partial X_j \partial X_k} \right]_{\lambda, X_i (i \neq j, k)} = \lambda \left[\frac{\partial P^j}{\partial X_k} \right]_{\lambda, X_i (i=j, k)}$$

et posant :

$$\varphi^{(0)} = S - \lambda U$$

on peut écrire à nouveau :

$$d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} (d\lambda)^2 + \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_j \partial X_k} dX_j dX_k \right]$$

Itérant le procédé avec la variable dX_1 dans le rôle joué à l'étape précédente par dU , on introduit la variable P^1 par :

$$\lambda dP^1 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1 \partial X_k} dX_k$$

Supposant $\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial X_1^2}$ non nul, nous obtenons de la même façon qu'en (4-16) :

$$(4-17) \quad d^2S = \left[\frac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} (d\lambda)^2 + \frac{1}{\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1^2}} (\lambda dP^1)^2 + \sum_{j, k=2}^n \left[\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1 \partial X_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1 \partial X_k}}{\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1^2}} \right] dX_j dX_k \right]$$

Nous pouvons interpréter les coefficients de $dX_j dX_k$ dans cette nouvelle expression de d^2S . En effet, examinant (4-17) on voit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_j \partial X_k} &= \frac{\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1 \partial X_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1 \partial X_k}}{\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1^2}} \\ &= \left[\frac{\partial^2 S}{\partial X_j \partial X_k} \right]_{\lambda, P^1, X_2, \dots} = \left[\frac{\partial^2 (S - dU - \partial P^1 X_1)}{\partial X_j \partial X_k} \right]_{\lambda, P^1, X_2, \dots} \end{aligned}$$

Posant comme précédemment :

$$\varphi^{(1)} = S - dU - \lambda P^1 X_1$$

on voit que la forme quadratique d^2S peut s'écrire :

$$d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}} (d\lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial X_1^2}} (dP_1)^2 + \sum_{j,k=2}^n \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial X_j \partial X_k} dX_j dX_k \right]$$

Procédant par étapes successives, on obtient enfin :

$$(4-18) \quad d^2S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\partial^1 S}{\partial U^2}} (d\lambda)^2 + \lambda^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\frac{\partial^2 \varphi^{(j-1)}}{\partial X_j^2}} (dP^j)^2 \right]$$

où :

$$\varphi^{(k)} = S - \lambda \left[U + \sum_{j=1}^k P^j X_j \right]$$

on a ainsi réduit d^2S à la forme canonique. Il y a stabilité si, et seulement si, tous les coefficients dans la relation (4-18) sont négatifs, c'est-à-dire si :

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(j-1)}}{\partial X_j^2} = \lambda \left[\frac{\partial P^j}{\partial X_j} \right]_{\lambda, P^1, \dots, P^{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

et :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial U} \right]_{X_i} < 0$$

Soit, ce qui est équivalent :

$$(4-19) \quad \left[\frac{\partial \lambda}{\partial U} \right]_{X_i} < 0$$

et :

$$(4-20) \quad \left[\frac{\partial P^j}{\partial X_j} \right]_{\lambda, P^1, \dots, P^{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n} < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

qui sont les *conditions nécessaires et suffisantes de stabilité intrinsèque de la cellule Σ'*. Nous allons mettre en évidence des conditions nécessaires de stabilité, dont l'interprétation sera plus aisée. Posons $U = X_0$ et $\lambda = P^0$. Les conditions (4-19) et (4-20) s'écrivent ensemble :

$$\left[\frac{\partial P^i}{\partial X_i} \right]_{P^0, \dots, P^{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n} < 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

En particulier, on a :

$$\left[\frac{\partial P^0}{\partial X_0} \right]_{X_1, \dots, X_n} < 0$$

et :

$$\left[\frac{\partial P^n}{\partial X_n} \right]_{P^0, \dots, P^{n-1}} < 0$$

On peut échanger les rôles des indices 0 et n. Il vient :

$$\left[\frac{\partial P^0}{\partial X_0} \right]_{P^1, \dots, P^n} < 0$$

et :

$$\left[\frac{\partial P^n}{\partial X_n} \right]_{X_0, \dots, X_{n-1}} < 0$$

Par suite, en amenant successivement chaque indice à la première et à la dernière place, on obtient des *conditions nécessaires de stabilité intrinsèque pour la cellule Σ'*.

$$(4-21) \quad \left[\frac{\partial P^j}{\partial X_j} \right]_{P^k (k \neq j)} < 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

et :

$$(4-22) \quad \left[\frac{\partial P^j}{\partial X_j} \right]_{X_k (k \neq j)} < 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

On peut interpréter (4-21) et (4-22) de la manière suivante :

Les prix (λ compris), ou les quantités détenues dans Σ, de tous les biens (y compris la monnaie) autres que le bien j étant fixées, à une variation de la quantité détenue dans Σ d'un bien j (qui peut être la monnaie) correspond une variation en sens inverse du prix de ce bien (éventuellement de λ).

5. INTRODUCTION D'UN PROCESSUS DYNAMIQUE [5]

a) Reprenons la situation décrite au § 1, b : une cellule simple dont la structure est décrite par une fonction S est en rapport avec un réservoir extérieur *qui impose les prix*. Pour la simplicité des notations, nous pouvons poser $X_0 = U$, $P^0 = 1$.

Plus généralement, dans la suite, les hypothèses et notations sont les suivantes : $P = (P^0, P^1, \dots, P^n)$ est un vecteur donné de \mathbb{R}^{n+1} de composantes $P^i > 0$ fixes. Les quantités de biens détenues par Σ sont définies par le vecteur $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$. On désigne par

$$F(X) = \sum_{i=0}^n P^i X_i$$

la fortune de la cellule aux prix P^i fixés.

La fonction $S(X)$ vérifie les hypothèses suivantes :

(H) S est de classe C^2 et homogène de degré 1 par rapport à X .

(N) $S \geq 0$, et $S = 0$ si et seulement si $X = 0$.

$F_0 > 0$ étant une constante donnée, nous désignons par Ω le borné de \mathbb{R}^{n+1}

$$\Omega = \{ X_0 > 0, \dots, X_n > 0, F(X) = F_0 > 0 \}$$

et par $\bar{\Omega}$ le compact

$$\bar{\Omega} = \{ X_0 \geq 0, \dots, X_n \geq 0, F(X) = F_0 > 0 \}$$

b) S étant supposée provisoirement *concave*, reprenons le programme π (§ 1, b) qui s'écrit dans les notations présentes :

$$(\pi) \quad \begin{cases} \max S(X) \\ \Sigma P^i X_i = F_0 \\ X_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

Les solutions de (π) sont les solutions des relations d'optimalité de Kuhn-Tucker : $\exists \lambda, \sigma^i$ tels que

$$\frac{\partial S}{\partial X_i} - \lambda P^i + \sigma^i = 0 \quad \sigma^i X_i = 0 \quad \sigma^i \geq 0$$

On en déduit :

$$\sum_i X_i \frac{\partial S}{\partial X_i} - \lambda F = 0$$

soit $\lambda = S/F$. Posons :

$$(5-1) \quad Q^i(X) \equiv P^i - \frac{F}{S} \frac{\partial S}{\partial X_i}$$

et $\rho^i = (F/S)\sigma^i$. Les conditions de Kühn-Tucker peuvent s'écrire :

$$Q^i = \rho^i \quad \rho^i X_i = 0 \quad \rho^i \geq 0$$

Désignons par E_π l'ensemble des solutions du programme π . Si $Z \in E_\pi$, $S(Z)$ est égal au maximum absolu de S dans le compact Ω . Pour que $Z \in E_\pi$, il faut et il suffit que les $Q^i(Z)$ vérifient :

$$Q^i(Z) = 0 \quad \text{pour } Z_i \neq 0 \quad , \quad Q^i(Z) \geq 0 \quad \text{pour } Z_i = 0$$

c) $S(X)$ étant une fonction indépendante du temps, vérifiant les hypothèses (H) et (N) (et non pour le moment l'hypothèse de concavité), nous nous proposons, dans la suite, d'étudier un processus dynamique régissant l'évolution au cours du temps t du vecteur X et pouvant traduire la manière dont la cellule ajuste ses prix propres aux prix imposés $P = \{ P^i \}$. D'après ce qui précède, les Q^i sont homogènes à des prix et, à l'équilibre $X_i Q^i(X) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Si $t \in \mathbb{R}$, nous postulons que $X(t)$ est solution du système différentiel

$$(5-2) \quad \frac{dX_i}{dt} = -\omega \frac{X_i}{P^i} Q^i(X) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

où ω est une constante > 0 , ayant la dimension de l'inverse d'un temps (temps qui peut s'interpréter comme un « temps de relaxation » associé à la cellule Σ). Le système (5-2) s'écrit explicitement

$$(5-3) \quad \boxed{\frac{dX_i}{dt} = -\omega \frac{X_i}{P^i} \left(P^i - \frac{F}{S} \frac{\partial S}{\partial X_i} \right)}$$

Il représente la plus simple et plus directe caractérisation du processus d'ajustement. Nous ne nous intéressons, bien entendu, qu'aux solutions correspondant à un vecteur initial $X(t_0) = \{ X_i(t_0) \} \geq 0$.

PROPOSITION. — *Pour une telle solution de (5-2), on a constamment, selon l'indice i , soit $X_i(t) = 0$, soit $X_i(t) > 0$.*

De (5-2) on déduit :

$$\frac{dX_i}{X_i} = - \frac{\omega}{P^i} Q^i dt$$

Il en résulte par intégration :

$$X_i(t) = X_i(t_0) \exp \left(- \frac{\omega}{P^i} \int_{t_0}^t Q^i(X(u)) du \right)$$

Si $X_i(t_0) = 0$, on a $X_i(t) = 0$. Si $X_i(t_0)$ est > 0 , $X_i(t)$ est > 0 pour tout t .

En négligeant les indices i pour lesquels $X_i(t_0) = 0$, on peut ne s'intéresser à l'avenir qu'aux solutions $X(t) > 0$, c'est-à-dire telles que $X_i(t) > 0$ pour tout t et tout i .

6. ÉTUDE DU SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

a) Il résulte de la définition des $Q^i(X)$:

$$\sum_i Q^i(X) X_i = F - \frac{F}{S} \sum_i X_i \frac{\partial S}{\partial X_i}$$

soit d'après l'homogénéité de S :

$$\sum_i Q^i(X) X_i = 0$$

Nous énonçons :

LEMME 1. — *Les $Q^i(X)$ vérifient l'identité en X*

$$(6-1) \quad \sum_i Q^i(X) X_i = 0$$

Étudions la fonction $F(X(t))$. De (5-2) et du lemme précédent on déduit :

$$\frac{d}{dt} F(X(t)) = \sum_i P^i \frac{dX_i}{dt} = - \omega \sum_i Q^i(X(t)) X_i(t) = 0$$

Ainsi $F(X)$ est une intégrale première du système (5-2). Désignons par F_0 la constante positive définie par $F(X(t_0))$. De la relation

$$\sum_i P^i X_i(t) = F_0 > 0$$

on déduit que, pour les solutions envisagées, $X(t)$ reste pour tout t sur le borné Ω .

Étudions maintenant la fonction $S(X(t))$. On a :

$$\frac{d}{dt} S(X(t)) = \sum_i \frac{\partial S}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} = -\omega \sum_i \frac{\partial S}{\partial X_i} \frac{X_i}{P_i} L^i$$

Or, d'après la définition des Q^i :

$$\frac{\partial S}{\partial X_i} = \frac{S}{F} (S^i - Q^i)$$

Il en résulte

$$\frac{d}{dt} S(X(t)) = -\omega \frac{S}{F} \sum_i (P^i - Q^i) \frac{X_i}{P^i} Q^i = -\omega \frac{S}{F} \sum_i Q^i X_i + \omega \frac{S}{F} \sum_i \frac{X_i (Q^i)^2}{P^i}$$

soit, en vertu du lemme :

$$(6-2) \quad \frac{d}{dt} S(X(t)) = \omega \frac{S}{F} \sum_i \frac{X_i (Q^i)^2}{P^i}$$

Ainsi $S(X(t))$ est une fonction croissante de t .

b) On a le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME. — *A tout vecteur initial $X(t_0) > 0$ correspond une solution $X(t)$, définie pour tout t , du système différentiel (5-2).*

Nous avons vu, en effet, que la solution $X(t)$ correspondant à $X(t_0)$ reste sur le borné Ω . Il résulte d'autre part des hypothèses faites sur S qu'il existe une constante strictement positive a^2 telle que, sur le compact Ω , on ait $S(X) \geq a^2$. Par suite les fonctions qui figurent aux seconds membres de (5-2) :

$$\omega \frac{X_i}{P^i} Q^i(X) = \omega \frac{X_i}{P^i} \left(P^i - \frac{F}{S(X)} \frac{\partial S}{\partial X_i}(X) \right)$$

sont uniformément lipschitziennes sur Ω , ce qui entraîne le théorème.

c) Nous allons maintenant établir deux lemmes qui nous seront utiles par la suite. Considérons d'abord les fonctions de X définies par :

$$\dot{X}_i(X) = -\omega \frac{X_i}{P^i} Q^i(X) \quad \dot{S}(X) = \omega \frac{S}{F} \sum \frac{X_i(Q^i)^2}{P^i}$$

Il est clair que les Q^i , \dot{X}_i , S et \dot{S} sont bornés sur le compact $\bar{\Omega}$. Étudions $Q^i(X(t))$. En dérivant par rapport à t , il vient :

$$\frac{1}{F} \frac{d}{dt} Q^i(X(t)) = -\frac{1}{S} \left\{ \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j} \dot{X}_j - \frac{\dot{S}}{S} \frac{\partial S}{\partial X_i} \right\}_{X=X(t)}$$

Nous sommes amenés à introduire les fonctions de X :

$$\dot{Q}^i(X) = -\frac{F}{S} \left\{ \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j} \dot{X}_j - \frac{\dot{S}}{S} \frac{\partial S}{\partial X_i} \right\}$$

qui sont bornées sur le compact $\bar{\Omega}$.

En dérivant (6-2) par rapport à t , il vient :

$$\frac{d^2}{dt^2} S(X(t)) = \frac{\omega}{F} \left\{ \dot{S} \sum_i \frac{X_i(Q^i)^2}{P^i} + S \sum_i \frac{\dot{X}_i(Q^i)^2}{P^i} + 2S \sum_i \frac{X_i Q^i}{P^i} \dot{Q}^i \right\}_{X=X(t)}$$

Il est clair que la fonction de X définie par :

$$\ddot{S}(X) = \frac{\omega}{F} \left\{ \dot{S} \sum_i \frac{X_i(Q^i)^2}{P^i} + S \sum_i \frac{\dot{X}_i(Q^i)^2}{P^i} + 2S \sum_i \frac{X_i Q^i}{P^i} \dot{Q}^i \right\}$$

est bornée sur $\bar{\Omega}$. On obtient ainsi le lemme suivant :

LEMME 2. — F_0 étant fixé, il existe une constante A telle que les fonctions de X :

$$S(X), Q^i(X), \dot{X}_i(X), \dot{S}(X), \dot{Q}^i(X), \ddot{S}(X) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

soient majorées en valeur absolue par A sur le compact $\bar{\Omega}$.

Nous allons maintenant établir le

LEMME 3. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 . Si l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(u) du$$

converge et s'il existe une constante B telle que $|f'(t)| < B$ pour tout $t \geq t_0$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

En effet, d'après la formule des accroissements finis, sur tout intervalle $I_t : (t - h, t + h)$, d'amplitude $2h$, tel que $t - h \geq t_0$, on a :

$$(6-3) \quad \max_{I_t} f - \min_{I_t} f < \varepsilon$$

pourvu que $h < \frac{\varepsilon}{2B}$. Nous fixons désormais h satisfaisant à cette inégalité.

Il est clair que :

$$0 \leq 2h \min_{I_t} f \leq \int_{t-h}^{t+h} f(u) du$$

Le dernier membre tendant vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, il en est de même du médian et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \min_{I_t} f = 0$$

Ainsi à $\varepsilon > 0$ correspond T tel que $t > T$ entraîne :

$$\min_{I_t} f < \varepsilon$$

et d'après (6-3)

$$\max_{I_t} f < 2\varepsilon$$

On a en particulier $f(t) < 2\varepsilon$, ce qui démontre le lemme.

d) Nous pouvons appliquer les résultats des lemmes précédents à l'étude de la fonction $S(X(t))$.

Nous avons vu que c'est une fonction croissante et bornée de t ; par suite il existe S_∞ telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(X(t)) = S_\infty$$

Envisageons l'intégrale :

$$S(X(t)) - S(X(t_0)) = \int_{t_0}^t \dot{S}(X(u)) du$$

La fonction $f(u) = \dot{S}(X(u))$ vérifie les hypothèses du lemme 3 : c'est une fonction à valeurs positives de classe C^1 telle que l'intégrale

$$\int_{t_0}^{+\infty} \dot{S}(X(u)) du$$

converge; de plus, d'après le lemme 2, il existe A tel que $\frac{df}{du} = \ddot{S}(X(u))$ vérifie l'inégalité $|\ddot{S}(X(u))| < A$ pour tout u . On déduit du lemme 3 :

$$(6-4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{S}(X(t)) = 0$$

et d'après (6-2) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) \{ Q^i(X(t)) \}^2 = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Il en résulte immédiatement :

$$(6-5) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) Q^i(X(t)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Désignons par E l'ensemble des vecteurs d'équilibre Z de (5-2) dans $\bar{\Omega}$:

$$E = \{ Z/Z \text{ dans } \bar{\Omega}, Z_i Q^i(Z) = 0, (i = 0, 1, \dots, n) \}$$

Si \bar{Z} est point limite de X(t), il résulte de (6-5) que \bar{Z} appartient nécessairement à E.

e) Définissons la distance à E d'un vecteur X de $\bar{\Omega}$ par :

$$V(X) = \inf_{Z \in E} \| X - Z \|$$

où $\| \dots \|$ désigne la norme euclidienne. Désignons par X(t, X(t₀)) la solution de (5-2) correspondant à une position initiale X(t₀) dans Ω . Le système différentiel (5-2) sera dit *quasi stable* (au sens de Uzawa), si pour tout vecteur initial X(t₀) dans Ω :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V \{ X(t, X(t_0)) \} = 0$$

Une condition suffisante de quasi-stabilité est qu'il existe sur $\bar{\Omega}$ une fonction $\varphi(X)$ de classe C¹ telle que l'on ait

$$\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \frac{X_i}{P^i} Q^i < 0$$

pour tout X dans $\bar{\Omega} - E$. Or, d'après le raisonnement conduisant à (6-2), l'inégalité précédente est vérifiée pour $\varphi = S$. On obtient donc le résultat, plus faible que celui obtenu au d : *sous les hypothèses (H̄) et (N), le système différentiel (5-2) est quasi stable sur Ω .*

7. CAS OU S EST SUPPOSÉ CONCAVE

a) Parmi les indices $i = 0, 1, \dots, n$ distinguons l'indice 0 et écrivons $F(X)$ sous la forme

$$F(X) = P^0 X_0 + \sum_{\alpha} P^{\alpha} X_{\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n)$$

Sur l'hyperplan $F(X) = F_0$, on a donc

$$X_0 = \frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} X_{\alpha}$$

Nous notons \tilde{X} le vecteur de R^n de composantes X_{α} ($\alpha = 1, \dots, n$) et introduisons la fonction :

$$(7-1) \quad S_{F_0}(\tilde{X}) = S\left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} X_{\alpha}, X_{\beta}\right)$$

qui définit la restriction de S à l'hyperplan $F = F_0$.

Nous supposons, dans la suite, S concave (hypothèse (C)) : pour tout couple X, Y et pour $0 \leq u \leq 1$, on a

$$(7-2) \quad S(uX + (1 - u)Y) \geq uS(X) + (1 - u)S(Y)$$

S étant homogène de degré 1, nous pouvons introduire la notion suivante : nous dirons que S concave est *quasi strictement concave* si, dans (7-2), l'inégalité stricte tient chaque fois que X et Y sont *non colinéaires* et $0 < u < 1$. Ainsi si, pour tel u , on a :

$$S(uX + (1 - u)Y) = uS(X) + (1 - u)S(Y)$$

on en déduit qu'il existe un réel b tel que $Y = bX$.

LEMME. — 1° Si $S(X)$ est concave, $S_{F_0}(\tilde{X})$ est concave.

2° Si $S(X)$ est quasi strictement concave, $S_{F_0}(\tilde{X})$ est strictement concave.

Il en résulte que E_{π} est réduit à un point.

Supposons $S(X)$ concave et considérons pour $0 \leq u \leq 1$:

$$S_{F_0}(u\tilde{X} + (1 - u)\tilde{Y}) = S\left[\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} (uX_{\alpha} + (1 - u)Y_{\alpha}), uX_{\beta} + (1 - u)Y_{\beta}\right]$$

On a :

$$\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} (uX_{\alpha} + (1-u)Y_{\alpha}) = u \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} X_{\alpha} \right) + (1-u) \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} Y_{\alpha} \right)$$

$S(X)$ étant concave, il vient :

$$S_{F_0}(u\tilde{X} + (1-u)\tilde{Y}) \geq uS \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} X_{\alpha}, X_{\beta} \right) + (1-u)S \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} Y_{\alpha}, Y_{\beta} \right)$$

soit :

$$S_{F_0}(u\tilde{X} + (1-u)\tilde{Y}) \geq uS_{F_0}(\tilde{X}) + (1-u)S_{F_0}(\tilde{Y})$$

ce qui établit le 1^o.

$S(X)$ étant quasi strictement concave, supposons que pour un u tel que $0 < u < 1$, on ait :

$$S_{F_0}(u\tilde{X} + (1-u)\tilde{Y}) = uS_{F_0}(\tilde{X}) + (1-u)S_{F_0}(\tilde{Y})$$

ce qui s'écrit, en termes de S ,

$$\begin{aligned} S \left[u \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} X_{\alpha} \right) + (1-u) \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} Y_{\alpha} \right), uX_{\beta} + (1-u)Y_{\beta} \right] \\ = uS \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} X_{\alpha}, X_{\beta} \right) + (1-u)S \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} Y_{\alpha}, Y_{\beta} \right) \end{aligned}$$

De l'hypothèse faite sur S , il résulte qu'il existe un réel b tel que :

$$Y_{\beta} = bX_{\beta} \quad (\beta = 1, \dots, n) \quad , \quad \frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} Y_{\alpha} = b \left(\frac{F_0}{P_0} - \sum_{\alpha} \frac{P^{\alpha}}{P_0} X_{\alpha} \right)$$

On a donc $F_0/P_0 = b(F_0/P_0)$, c'est-à-dire $b = 1$. Ainsi pour $S_{F_0}(\tilde{X})$, l'inégalité stricte tient chaque fois que $\tilde{Y} \neq \tilde{X}$ et $0 < u < 1$: $S_{F_0}(\tilde{X})$ est strictement concave.

b) Partons du système différentiel (5-2) écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} P^i \log X_i = -\omega Q^i(X) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Z étant un vecteur fixe de $\bar{\Omega}$, multiplions par Z_i et sommions en i ; il vient :

$$\frac{d}{dt} \sum_i P^i Z_i \log X_i(t) = -\omega \sum_i Z_i Q^i(X(t))$$

soit, d'après le lemme 1 du § 6,

$$(7-3) \quad \frac{d}{dt} \sum_i P^i Z_i \log X_i(t) = \omega \left\{ \sum_i (X_i - Z_i) Q^i(X) \right\}_{X=X(t)}$$

Or l'on a :

$$\Sigma(X_i - Z_i) Q^i(X) = \Sigma(X_i - Z_i) \left(P^i - \frac{F_0}{S(X)} \frac{\partial S}{\partial X_i}(X) \right) = \frac{F_0}{S(X)} \sum_i (Z_i - X_i) \frac{\partial S}{\partial X_i}(X)$$

La fonction $S(X)$ étant concave, il résulte d'une inégalité classique que :

$$\sum_i (Z_i - X_i) \frac{\partial S}{\partial X_i}(X) \geq S(Z) - S(X)$$

et que par suite

$$(7-4) \quad \Sigma(X_i - Z_i) Q^i(X) \geq F_0 \left(\frac{S(Z)}{S(X)} - 1 \right)$$

Si l'on choisit Z dans E_n , $S(Z)$ est égal au maximum absolu de S dans $\bar{\Omega}$ et le second membre de (7-4) est certainement ≥ 0 . Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \sum_i P^i Z_i \log X_i(t) \geq 0$$

c) Pour $Z \in E_n$, posons :

$$W_Z(X) = \sum_i P^i \left(Z_i \log \frac{X_i}{Z_i} - X_i + Z_i \right)$$

où si $Z_i = 0$ le terme logarithmique correspondant est omis. Chaque terme de $W_Z(X)$ est ≤ 0 . $W_Z(X(t))$ est une fonction croissante et bornée supérieurement de la variable t ; par suite il existe $W_{Z\infty}$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W_Z(X(t)) = W_{Z\infty}$$

Envisageons l'intégrale :

$$W_Z(X(t)) - W_Z(X(t_0)) = \omega \int_{t_0}^t \sum_i (X_i(u) - Z_i) Q^i(X(u)) du$$

La fonction :

$$f(u) = \sum_i (X_i(u) - Z_i) Q^i(X(u)) = - \sum_i Z_i Q^i(X(u))$$

vérifie les hypothèses du lemme 3 : c'est, d'après (7-4), une fonction à valeurs positives de classe C^1 telle que l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(u) du$$

converge ; de plus, d'après le lemme 2, il existe B tel que la dérivée

$$\frac{df}{du} = - \sum_i Z_i \dot{Q}^i(X(u))$$

vérifie pour tout u :

$$\frac{df}{du}(u) < B$$

On déduit du lemme 3 :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_i (X_i(t) - Z_i) Q^i(X(t)) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} Z_i Q^i(X(t)) = 0$$

et d'après l'inégalité (7-4)

$$(7-5) \quad S_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} S(X(t)) = S(Z)$$

Ainsi S_∞ coïncide avec le maximum absolu de S dans $\bar{\Omega}$. Nous énonçons

PROPOSITION. — Si S est concave, $S(X(t))$ tend, pour $t \rightarrow t_\infty$, vers le maximum absolu S_∞ de S dans le compact $\bar{\Omega}$.

d) Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — $S(X)$ étant supposé concave

1° toute solution $X(t)$ correspondant à $X(t_0) > 0$ converge vers un point Z appartenant à l'ensemble E_π des solutions du programme π ;

2° si, pour un indice k , on a $\lim X_k(t) = 0$, on a $Z_k = 0$ pour tout point Z de E_π ;

3° si S est quasi strictement concave, E_π est réduit à un point Z vers lequel converge toute solution $X(t)$ correspondant à $X(t_0) > 0$.

1° Soit Z un point limite de $X(t)$: il existe une suite $t_\mu \rightarrow +\infty$ telle que

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} X(t_\mu) = \bar{Z}$$

On en déduit d'après (7-5) :

$$S_\infty = \lim_{\mu \rightarrow \infty} S(X(t_\mu)) = S(\bar{Z})$$

et $S(\bar{Z})$ étant égal au maximum absolu de S dans $\bar{\Omega}$, \bar{Z} appartient à E_π .
On a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_i P^i \left(\bar{Z}_i \log \frac{X_i(t)}{\bar{Z}_i} - X_i(t) \right) = W_{\bar{Z}, \infty}$$

\bar{Z} étant point limite, $W_{\bar{Z}, \infty} = 0$ et $X_i(t)$ converge vers \bar{Z}_i .

2° Supposons que, pour un indice k , $\lim X_k(t) = 0$. Comme pour tout $Z \in E_\pi$

$$\sum_i P^i Z_i \log X_i(t)$$

converge, on voit que nécessairement $Z_k = 0$

3° Si S est *quasi strictement concave*, E_π est réduit à un point unique Z et pour toute solution $X(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = Z$$

8. PROCESSUS DYNAMIQUE ASSOCIÉ A UNE CELLULE COMPOSITE

a) Reprenons le programme π_1 introduit au § 2, c : on considère deux cellules simples Σ_1 et Σ_2 et les échanges entre elles de $(n + 1)$ biens. Pour alléger les notations, les vecteurs quantités de biens détenues sont notés ici respectivement :

$$X = \{ X_i \} \quad X' = \{ X'_i \} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Les structures sont décrites par deux fonctions $S_1(X)$ et $S_2(X')$ *satisfaisant chacune aux hypothèses (H) et (N)* (voir (voir par exemple § 5).

S_1 et S_2 étant supposées provisoirement *concaves*, le programme π_1 s'écrit dans les présentes notations :

$$(\pi_1) \quad \begin{aligned} & \max \{ S_1(X) + S_2(X') \} \\ & X_i + X'_i = A_i > 0 \\ & X_i \geq 0 \quad , \quad X'_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \end{aligned}$$

où le vecteur $A = \{ A_i \}$ représente les quantités totales de biens détenues dans la cellule composite.

Ce programme peut s'exprimer uniquement à l'aide de X . Posons

$$S(X) = S_1(X) + S_2(A - X)$$

On vérifie immédiatement que la concavité de S_1 et S_2 entraîne celle de S .
Le programme π_1 peut encore s'écrire

$$(\pi_1) \quad \begin{cases} \max S(X) \\ 0 \leq X_i \leq A_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

Nous désignons par E_{π_1} l'ensemble des vecteurs X solutions de ce programme.

Si

$$\frac{\partial S}{\partial X_i}(X) = \frac{\partial S_1}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial S_2}{\partial X_i}(A - X)$$

ce programme conduit aux relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial X_i}(X) = 0 \quad \text{pour } X_i \neq 0, A_i, \quad \frac{\partial S}{\partial X_i}(X) \leq 0 \quad \text{pour } X_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial X_i}(X) \geq 0 \quad \text{pour } X_i = A_i \end{aligned}$$

b) Si $t \in \mathbb{R}$, nous postulons que $X(t)$ et $X'(t)$ sont solutions du système différentiel

$$(8-1) \quad \begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\omega}{S} X_i X'_i \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial S_2}{\partial X'_i}(X') \right\} \\ \frac{dX'_i}{dt} = -\frac{\omega}{S} X_i X'_i \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial S_2}{\partial X'_i}(X') \right\} \end{cases} \quad (S_1, S_2 \text{ pas nécessairement concaves})$$

Nous nous intéressons aux solutions correspondant à des vecteurs initiaux $X_i(t_0) > 0$, $X'_i(t_0) > 0$; (8-1) admet les intégrales premières

$$X_i + X'_i = A_i > 0$$

et l'étude du système (8-1) se ramène à celle du système différentiel :

$$(8-2) \quad \frac{dX_i}{dt} = \omega X_i (A_i - X_i) \frac{1}{S(X)} \frac{\partial S}{\partial X_i}(X)$$

L'étude de (8-2) étant tout à fait analogue à celle de (5-2), nous nous bornons à expliciter les résultats. Nous désignons par Ω le parallépipède

$$\Omega = \{ 0 < X_0 < A_0, \dots, 0 < X_n < A_n \}$$

et par $\bar{\Omega}$ le compact :

$$\bar{\Omega} = \{ 0 \leq X_0 \leq A_0, \dots, 0 \leq X_n \leq A_n \}$$

Pour $X(t_0) \in \Omega$, la solution $X(t)$ correspondante reste dans Ω et cette solution est définie pour tout t . On a :

$$\frac{d}{dt} S(X(t)) = \frac{\omega}{S} \sum_i X_i(A_i - X_i) \left(\frac{\partial S}{\partial X_i} \right)^2$$

$S(X(t))$ est une fonction croissante et bornée de t ; par suite il existe S_∞ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(X(t)) = S_\infty$$

Par application du lemme 3 du § 6, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t)(A_i - X_i(t)) \frac{\partial S}{\partial X_i}(X(t)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Soit E l'ensemble des vecteurs d'équilibre de (8-2) dans $\bar{\Omega}$. Tout point limite \bar{Z} de $X(t)$ appartient nécessairement à E .

c) Supposons de nouveau S_1 et S_2 concaves. Le lemme suivant nous sera utile.

LEMME. — Si S_1 et S_2 sont quasi strictement concaves et si $S_1(A) \neq S_2(A)$, l'ensemble E_{π_1} est réduit à un point Z .

En effet si pour un u tel que $0 < u < 1$, on a :

$$S(uX + (1 - u)Y) = uS(X) + (1 - u)S(Y)$$

cette relation entraîne :

$$\begin{cases} S_1(uX + (1 - u)Y) = uS_1(X) + (1 - u)S_1(Y) \\ S_2(u(A - X) + (1 - u)(A - Y)) = uS_2(A - X) + (1 - u)S_2(A - Y) \end{cases}$$

Il existe donc deux réels b, c tels que :

$$Y = bX \quad A - Y = c(A - X)$$

où :

$$(b - c)X = (1 - c)A$$

ainsi ou bien $b \neq c$ et X et Y sont colinéaires à A , ou bien $b = c = 1$ et $X = Y$.

Cela posé, supposons qu'il existe $Z, Z' \in E_{\pi_1}$ avec $Z' \neq Z$. On a

$$S(Z') = S(Z) = \max_{\bar{\Omega}} S(X)$$

résulte de la concavité de S que pour $0 < u < 1$, on a :

$$S(uZ + (1 - u)Z') = uS(Z) + (1 - u)S(Z')$$

Comme $Z' \neq Z$, on a $Z = kA$, avec $0 \leq k \leq 1$. Mais :

$$S(kA) = S_2(A) + k(S_1(A) - S_2(A))$$

Pour $S_1(A) > S_2(A)$, on a nécessairement $k = 1$ et $Z = Z' = A$, ce qui contredit $Z' \neq Z$. De même pour $S_1(A) < S_2(A)$, on a nécessairement $Z = Z' = 0$, ce qui démontre le lemme.

Revenons à S_1, S_2 concaves ; Z étant un vecteur fixe de E_{π_1} on déduit de (8-2) :

$$\frac{d}{dt} \sum_i \left\{ \frac{Z_i}{A_i} \log X_i(t) + \left(1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) \log (A_i - X_i(t)) \right\} = \frac{\omega}{S(X)} \sum_i (Z_i - X_i) \frac{\partial S}{\partial X_i}(X)$$

d'après la concavité de S :

$$3) \quad \frac{d}{dt} \sum_i \left\{ \frac{Z_i}{A_i} \log X_i(t) + \left(1 - \frac{Z_i}{A_i} \right) \log (A_i - X_i(t)) \right\} \geq \omega \left(\frac{S(Z)}{S(X)} - 1 \right) \geq 0$$

déduite de (8-3) que, pour $t \rightarrow +\infty$, $S(X(t))$ tend vers le maximum de S dans le compact. On établit alors, par un raisonnement identique à celui du § 7, le théorème suivant

THÉORÈME. — S_1 et S_2 étant concaves,

1° toute solution $X(t)$ vérifiant $0 < X_i(t_0) < A_i$ converge, quand $t \rightarrow +\infty$, vers un point Z l'ensemble E_{π_1} des solutions du programme π_1 .

2° Si, pour un indice k , $\lim X_k(t) = 0$ (resp. A_k), on a $Z_k = 0$ (resp. $Z_k = A_k$) pour tout point de E_{π_2} .

3° Si S_1 et S_2 sont quasi strictement concaves et si $S_1(A) \neq S_2(A)$, E_{π_1} est réduit à un point Z et pour toute solution $X(t)$ vérifiant $0 = X_i(t_0) < A_i$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = Z$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARROW, HURWICZ et UZAWA, *Studies in linear and non-linear programming*. Stanford Math. Stud., 2^e éd., 1964.
 [2] S. KARLIN, *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*, Pergamon Press, London, t. 1, 1959.
 [3] H. B. CALLEN. *Thermodynamics*. John Wiley, New York, 1960.
 [4] L. TISZA, *Generalized Thermodynamics*. M. I. T. Press, 1966.
 [5] M. LICHNEROWICZ, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, t. 269, 1969, p. 665-668 et p. 750-753.

Manuscrit reçu le 3 novembre 1969.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.