ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE RAOULT

Propriétés asymptotiques locales des tests

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, nº 1 (1970), p. 61-113
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_1_61_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, SECTION B :
VOL. VI, N° 1, 1970, P. 61-113. *Calcul des probabilités et Statistique.*

Propriétés asymptotiques locales des tests

par

Jean-Pierre RAOULT

(Faculté des Sciences de Rouen, 76-Mont-Saint-Aignan).

SUMMARY. — This paper is devoted to the study of envelope power functions (defined by Hajek in [5]) : the envelope power function of an asymptotical problem of test characterizes, when it exists, how difficult it is to distinguish between the hypothesis H_0 and the alternative hypothesis H_1, each of them being represented by a sequence of parameters, converging towards the boundary between H_0 and H_1, and named criterion (in H_1) and reference (in H_0) (see 1.2.).

Two existence theorems for envelope power functions are given (in 1.3.), using as tools equi-asympto-projective systems of measures and simple Lebesgue decomposition of sequences of probabilities : these notions are studied in a Thèse de Doctorat ès Sciences Mathématiques [*12*], which this paper is the last chapter of; they are quicly described here in 1.1.

These results are improved for samples of independent random variables (in 2.1.); following the track of Le Cam [*7*] and Hajek [*4*], one uses central limit theorems, and a sufficient condition of simple Lebesgue decomposition [*11*].

The results are still improved for location (in 2.2.) and scale (in 2.3.) problems; it is then possible to characterize, with the help of the speed of convergence of the criterion, in H_1, towards H_0, the different types of envelope power functions and of asympto-projective systems involved.

INTRODUCTION

Cet article est consacré à l'étude des fonctions de discrimination (« envelope power functions » pour Hajek, voir [5]), qui traduisent la difficulté qu'il y a à distinguer, dans un problème asymptotique de test, entre l'hypothèse H_0 et la contre-hypothèse H_1, représentées chacune par une suite de paramètres, convergeant vers la frontière entre H_0 et H_1 et dénommée critère (dans H_1) ou repère (dans H_0) (voir 1.2.).

Deux théorèmes d'existence de la fonction de discrimination sont donnés (voir 1.3.), à l'aide des notions de système équi-asympto-projectif et de décomposition de Lebesgue simple des suites de probabilités, notions dont l'étude fait l'objet d'une Thèse de Doctorat [*12*] dont le présent article constitue le dernier chapitre, et qui sont décrites ci-dessous en 1.1.

Ces résultats sont précisés dans le cas des échantillons de variables aléatoires indépendantes (voir 2.1.) ; on y fait usage de théorèmes de convergence vers la loi normale, suivant en cela la voie de Le Cam [7] et Hajek [5], ainsi que d'une condition suffisante de décomposition simple de Lebesgue (voir [*11*]).

Ces résultats sont encore précisés dans le cas des problèmes de test de position (voir 2.2.) ou d'échelle (voir 2.3.) où on caractérise, en fonction de la vitesse de convergence du critère, dans H_1, vers H_0, les différents types de fonctions de discrimination, ainsi que le caractère — équi-asympto-projectif ou simplement asympto-projectif — des systèmes préprojectifs en jeu ; enfin, on étudie directement quelques exemples simples ne rentrant pas dans le cadre des théorèmes généraux obtenus.

1. ÉTUDE GÉNÉRALE

1.1. PRÉLIMINAIRES

a) Systèmes préprojectifs

La notion de système projectif (d'ensembles, d'espaces mesurables ou d'espaces de mesure) est supposée connue du lecteur (il pourra par exemple se reporter à [*1*]).

Étant donné une suite projective d'espaces mesurables, soit

$$\mathscr{B} = (\Omega_n, \mathscr{B}_n, \pi_{nm})_{\mathbb{N}},$$

et sa limite $(\Omega_\infty, \mathscr{B}_\infty)$, on note, pour tout n,

π_n la projection canonique de Ω_∞ sur Ω_n (désormais toujours supposée surjective, comme dans [1]);

$$\mathscr{B}_n^* = \pi_n^{-1}(\mathscr{B}_n).$$

On appelle ici système *préprojectif* (ou suite préprojective) de mesures finies, de base $\mathscr{B}$, tout terme

$$\mathrm{M} = (\mathscr{B}, (\mu_n)_{\mathbb{N}})$$

où, pour tout n, μ_n est une mesure finie définie sur $(\Omega_n, \mathscr{B}_n)$; on notera μ_n^* l'unique mesure sur $\mathscr{B}_n^*$ dont l'image par π_n est μ_n.

Un système préprojectif M est dit :

— *asympto-projectif* si et seulement si, pour tout $n_0 \in \mathrm{I}$ et tout $\mathrm{B}_{n_0} \in \mathscr{B}_{n_0}$, la suite $(\mu_n(\pi_{n_0 n}^{-1}(\mathrm{B}_{n_0})))_{n \geqslant n_0}$ est convergente.

— *équi-asympto-projectif* si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathrm{I})(\forall n \geqslant n_0)(\forall m \geqslant n)(\forall \mathrm{B}_n \in \mathscr{B}_n) \mid \mu_m(\pi_{nm}^{-1}(\mathrm{B}_n)) - \mu_n(\mathrm{B}_n) \mid \leqslant \varepsilon$$

Le système (équi-)asympto-projectif M est dit *prolongeable* si et seulement si existe, sur $(\Omega_\infty, \mathscr{B}_\infty)$ une mesure μ_∞, appelée prolongement de M, et telle que

$$(\forall n_0 \in \mathrm{I})(\forall \mathrm{B}_{n_0} \in \mathscr{B}_{n_0}) \mu_\infty(\pi_{n_0}^{-1}(\mathrm{B}_{n_0})) = \lim_{n \geqslant n_0} \mu_n(\pi_{n_0 n}^{-1}(\mathrm{B}_{n_0}))$$

(voir [13] (où les systèmes (équi-)asympto-projectifs sont dénommés (équi-)asympto-martingales) et [12]).

b) Contiguïté. Décomposition de Lebesgue simple

Étant donné deux systèmes préprojectifs de mesures, de même base,

$$\mathrm{M} = (\mathscr{B}, (\mu_n)_{\mathbb{N}}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} = (\mathscr{B}, (\nu_n)_{\mathbb{N}}),$$

on dit que

— M est *contigu* à N (et on note $\mathrm{M} \sqsubseteq \mathrm{N}$) si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)(\forall \mathrm{B}_n \in \mathscr{B}_n)[\nu_n(\mathrm{B}_n) < \eta \Rightarrow \mu_n(\mathrm{B}_n) < \varepsilon]$$

— M et N sont *mitoyens* si et seulement si $\mathrm{M} \sqsubseteq \mathrm{N}$ et $\mathrm{N} \sqsubseteq \mathrm{M}$.

— M et N sont *asymptotiquement étrangers* (ou *orthogonaux*) si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)(\exists \mathrm{A}_n \in \mathscr{B}_n) \quad \mu_n(\mathrm{A}_n) + \nu_n(\complement \mathrm{A}_n) \leqslant \varepsilon$$

(on note $\mathrm{M} \amalg \mathrm{N}$).

— M est *simplement Lebesgue-décomposable* par rapport à N (ou encore le couple (M, N) est simplement décomposable) si et seulement si il existe deux systèmes préprojectifs de mesures,

$$\mathrm{M}^1 = (\mathscr{B}, (\mu_n^1)_{\mathbb{N}}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}^2 = (\mathscr{B}, (\mu_n^2)_{\mathbb{N}})$$

tels que

$$\mathrm{M}^1 \sqsubseteq \mathrm{N} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}^2 \amalg \mathrm{N}$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}^1 + \mathrm{M}^2 \quad (\text{i. e. } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mu_n = \mu_n^1 + \mu_n^2)$$

la suite $(\mu_n^2(\Omega_n))_{\mathbb{N}}$ *converge* (*soit* v *sa limite ; elle est appelée* valeur caractéristique *du couple* (M, N)).

Pour plus de détails sur la contiguïté, voir [7] (où elle est introduite) et [5] (VI.1) ; sur la décomposition de Lebesgue, voir [*11*] ; on y démontre en particulier que, si un couple (M, N) de systèmes préprojectifs de mesures admet une décomposition de Lebesgue simple, il est toujours possible de considérer une décomposition *par restrictions*, c'est-à-dire telle qu'existe, pour tout n, une partie $\mathrm{A}_n^0 (\in \mathscr{B}_n)$ telle que, avec les notations introduites ci-dessus, μ_n^1 soit la restriction de μ_n à $\complement \mathrm{A}_n^0$ et μ_n^2 la restriction de μ_n à A_n^0 ; A_n^0 vérifie de plus

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n(\mathrm{A}_n^0) = 0$$

c) Complément sur les fonctions concaves

Notation. — A toute application f de [0, 1] dans [0, 1], concave, croissante, continue, et vérifiant $f(1) = 1$, on peut associer l'application g de [0, 1] dans [0, 1], définie par :

$$\begin{array}{lll} si & x \in [0, f(0)] & g(x) = 0 \\ si & x \in]f(0), 1[& g(x) = f^{-1}(x) \\ si & x = 1 & g(x) = \inf \{ u \,;\, f(u) = 1 \}. \end{array}$$

Par abus de langage et de notation, cette application sera appelée *fonction réciproque* de f, et notée f^{-1} ; f^{-1} est convexe, croissante, continue et vérifiant $f^{-1}(0) = 0$.

Une définition analogue peut évidemment être donnée pour g, application de [0, 1] dans [0, 1] convexe, croissante, continue et vérifiant $g(0) = 0$;

alors $(g^{-1})^{-1} = g$, et de même, pour la fonction f ci-dessus, $(f^{-1})^{-1} = f$.
Nous ne démontrerons pas le lemme suivant :

LEMME 1.1. — *Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite d'applications de* $[0, 1]$ *dans* $[0, 1]$, *toutes concaves (resp. convexes), croissantes, continues et vérifiant* $f_n(1)=1$ (resp. $f_n(0)=0$) ; *on suppose que, pour tout* $x \in]0, 1]$ (resp. $x \in [0, 1[$), *la suite* $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ *converge, et on définit* f_∞ *par :*

$$(\forall x \in]0, 1[) \qquad f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
$$f_\infty(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_\infty(x) \qquad (\text{resp. } f_\infty(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_\infty(x))$$
$$f_\infty(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) \qquad (\text{resp. } f_\infty(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0))$$

(f_∞ *ainsi définie est aussi concave (resp. convexe), croissante, continue et telle que*

$$f_\infty(1) = 1 \qquad (\text{resp. } f_\infty(0) = 0))$$

Alors pour tout $y \in [0, 1[$ (resp. $y \in]0, 1]$), $f_n^{-1}(y)$ *tend vers* $f_\infty^{-1}(y)$ (*et cette convergence est uniforme sur tout intervalle* $[c, d]$ *tel que* $0 \leqslant c < d < 1$ (resp. $0 < c < d \leqslant 1$)).

1.2. DÉFINITIONS. PRÉSENTATION DES PROBLÈMES

a) Terminologie de théorie des tests

Un *problème (asymptotique) de test* est ici un terme

$$\mathcal{T} = (\Theta, H_0, H_1, \mathcal{B}, (\Pi^\theta)_\Theta)$$

où

— Θ est un espace topologique, et (H_0, H_1) une partition de Θ,
— $\mathcal{B}$ est un système projectif d'espaces mesurables

$$\mathcal{B} = (\Omega_n, \mathcal{B}_n, \pi_{nm})_{\mathbb{N}}$$

vérifiant l'hypothèse de surjectivité des projections π_n.
— pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\Pi^\theta = (\mathcal{B}, (P_n^\theta)_{n\in\mathbb{N}})$$

est un système projectif de probabilités de base $\mathcal{B}$.

Interprétations.

Θ est l'ensemble des paramètres susceptibles de régir le phénomène aléatoire étudié; H_0 est l'hypothèse à tester, H_1 la contre-hypothèse.

Le système projectif d'espaces mesurables $\mathscr{B}$ caractérise le déroulement de l'expérimentation effectuée; tout $n \in \mathbb{N}$ est appelé *stade expérimental :* ainsi, dans le cas où on effectue une suite d'expériences, donnant chacune un résultat sous forme d'un nombre réel on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad (\Omega_n, \mathscr{B}_n) = (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n_{\mathbb{R}}).$$

(*N. B.* : remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}_+$ permettrait d'étudier le cas où on procède à une analyse statistique continue dans le temps (voir par exemple [*14*]).

De même, l'usage d'ensembles d'indices I munis d'un ordre filtrant à droite mais non total permettrait d'envisager des expérimentations au cours desquelles on conserve une latitude sur le choix des observations à effectuer (voir modèle détaillé en [*15*]).

Le lecteur intéressé à ces généralisations peut s'assurer que, à part dans quelques cas où nous indiquons en remarque comment procéder, elles n'introduiraient aucune difficulté nouvelle).

On appelle *fonction de test* (ou en abrégé *test*) adaptée au problème $\mathscr{T}$ toute famille

$$\varphi = (\varphi_n)_{\mathbb{N}}$$

où, pour tout n, φ_n est une application mesurable de $(\Omega_n, \mathscr{B}_n)$ dans $[0, 1]$ (On rappelle (voir [*8*]) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\omega_n \in \Omega_n$, $\varphi_n(\omega_n)$ est la probabilité avec laquelle, si au stade expérimental n on a observé ω_n, on rejette l'hypothèse à tester (i. e. on décide que la « vraie valeur » du paramètre θ qui régit le phénomène aléatoire étudié appartient à H_1)).

Par abus de langage, on appellera aussi fonction de test l'application φ^* de $\mathbb{N} \times \Omega_\infty$ définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \Omega_\infty) \qquad \varphi^*(n, \omega) = \varphi_n[\pi_n(\omega)]$$

La fonction de test φ est de *seuil* a ($a \in [0, 1]$) si et seulement si

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \theta_0 \in H_0) \qquad \int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^{\theta_0} \leqslant a.$$

On appelle *puissance* de la fonction de test φ l'application Φ :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \Theta_1 &\to [0, 1] \\ (n, \theta_1) &\rightsquigarrow \int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^{\theta_1} \end{aligned}$$

et *puissance asymptotique*, si elle existe, l'application

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\to [0, 1] \\ \theta_1 &\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^{\theta_1} \end{aligned}$$

b) Étude asymptotique locale des tests

Étant donné deux fonctions de test de même seuil a, φ et φ', de puissances respectives Φ et Φ', φ est dite *asymptotiquement plus puissante* que φ' si et seulement si

$$(\forall \theta_1 \in \Theta_1) \qquad \liminf_{n\to\infty} [\Phi(n, \theta_1) - \Phi'(n, \theta_1)] \geqslant 0$$

autrement dit

$$(\forall \theta_1 \in \Theta_1) \qquad \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} (\varphi_n - \varphi_n') dP_n^{\theta_1} \geqslant 0$$

On sait (voir [*6*] 25.4 et [*3*] 7.3) que ce critère de comparaison est de peu d'intérêt, vu la facilité avec laquelle on peut, en général, trouver des tests convergents (« consistent tests »), c'est-à-dire de puissance asymptotique égale à 1.

Il importe donc de disposer d'un critère plus précis, permettant de comparer entre elles des fonctions de tests de même seuil et de puissance asymptotique 1.

Pour cela, guidé par la remarque que la valeur en θ_1 de la puissance d'une fonction de test donnée est, en général, à stade expérimental n fixé, d'autant plus faible que, en un sens à préciser, la probabilité P_{θ_1} est « plus proche » des probabilités P_{θ_0} (où $\theta_0 \in H_0$) — autrement dit, en général, que le paramètre θ_1 est plus proche de H_0 dans l'espace topologique Θ — Neyman a proposé (voir [*10*]) de caractériser un test en étudiant comment cette perte de puissance qui survient quand on se rapproche de H_0 peut être compensée par le renforcement simultané des renseignements expérimentaux, c'est-à-dire la convergence de n vers l'infini ; de manière précise, nous poserons les définitions suivantes :

DÉFINITION 2.1. — *Étant donné un problème de test*

$$\mathcal{T} = (\Theta, H_0, H_1, \mathcal{B}, (\Pi^\theta)_\Theta)$$

on appelle critère local (*ou en bref* critère) *toute application* γ_1 *de* $\mathbb{N}$ *dans* Θ_1 *vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_1(n) \in \overline{H}_0$$

(ou, plus généralement, si Θ est muni d'une métrique δ,

$$\lim_{n \to \infty} \delta(\gamma_1(n), \overline{\mathrm{H}}_0) = 0).$$

Étant donné un test φ, adapté à $\mathscr{T}$, de puissance Φ, on appelle puissance asymptotique locale de φ selon le critère γ_1 *la limite, si elle existe, de la suite* $(\Phi(n, \gamma_1(n)))_{\mathbb{N}}$.

Étant donné deux tests φ et φ', de puissances respectives Φ et Φ', et de même seuil a, on dit que φ est (asymptotiquement localement) plus puissant *que φ'* selon le critère γ_1 *si et seulement si*

$$\liminf_{n \to \infty} [\Phi(n, \gamma_1(n)) - \Phi'(n, \gamma_1(n))] \geqslant 0$$

(c'est-à-dire, dans le cas ou φ et φ' admettent chacun une puissance asymptotique locale selon γ_1, soit Φ_{γ_1} et Φ'_{γ_1},

$$\Phi_{\gamma_1} \geqslant \Phi'_{\gamma_1}).$$

Remarque. — Le Cam [7] déclare, à propos de cette définition, qu'elle introduit « la pratique, classique, mais traîtresse, de considérer que le problème posé n'est qu'un élément d'une suite de problèmes analogues » (i. e. pour tout n, on teste H_0 contre $\{\gamma_1(n)\}$).

c) **Thème de l'étude présente**

Notre but ne sera pas, ici, de rechercher des fonctions de tests possédant de bonnes propriétés asymptotiques locales (par exemple uniformément les plus puissantes pour une certaine classe de critères), mais de chercher une caractérisation de la difficulté d'un problème de test, relativement à un critère ; il pourra alors, dans certains cas, être possible de comparer, pour un problème de test donné, les différents critères, suivant que, selon eux, la distinction entre H_0 et H_1 est plus ou moins difficile ; on s'attend en particulier, dans le cas où $\Theta = \mathbb{R}$ et où H_0 est simple (soit par exemple $\mathrm{H}_0 = \{0\}$) à ce que le critère γ_1 rende la discrimination entre H_0 et H_1 d'autant plus difficile que la suite $\gamma_1(n)$ tend plus vite pour 0 : c'est effectivement ce que nous rencontrerons dans les cas particuliers étudiés en 2., et on y caractérisera des vitesses de convergence critiques).

De manière précise, nous introduirons la définition suivante (où on note, pour tout a, S_a l'ensemble des fonctions de test de seuil a) :

DÉFINITION 1.2.2. — *Étant donné un problème de test*

$$\mathscr{T} = (\Theta, \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathscr{B}, (\Pi^\theta)_\Theta)$$

et un critère γ_1, *on appelle, si elle existe,* fonction de discrimination stricte *entre* H_0 *et* H_1, *pour le critère* γ_1, *l'application* D_{γ_1} *de* $[0, 1]$ *dans* $[0, 1]$ *qui est définie par*

$$(\forall a \in]0, 1]) \qquad D_{\gamma_1}(a) = \lim_{n \to \infty} \sup_{\varphi \in S_a} \left[\int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^{\gamma_1(n)} \right]$$

$$D_{\gamma_1}(0) = \lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} D_{\gamma_1}(a).$$

En général, il est difficile de calculer, pour tout $a \in]0, 1]$, et tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur

$$\sup_{\varphi \in S_a} \left(\int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^{\gamma_1(n)} \right)$$

C'est pourquoi nous introduirons la définition suivante :

DÉFINITION 1.2.3. — *Étant donné un problème de test*

$$\mathcal{T} = (\Theta, H_0, H_1, \mathcal{B}, (\Pi^\theta)_\Theta)$$

on appelle repère *toute application* γ_0 *de* $\mathbb{N}$ *dans* H_0 ; *étant donné un repère* γ_0 *et un critère* γ_1, *on appelle, si elle existe, fonction de discrimination entre* H_0 *et* H_1 *pour le repère* γ_0 *et le critère* γ_1 (*ou, plus brièvement* fonction de discrimination entre γ_0 et γ_1) *l'application* D_{γ_0, γ_1} *de* $[0, 1]$ *dans* $[0, 1]$ *définie par*

$$(\forall a \in]0, 1]) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(a) = \lim_{n \to \infty} \left[\sup \left\{ x \,;\, (\exists \varphi_n) \int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^{\gamma_1(n)} = x \ \text{ et } \int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^{\gamma_0(n)} \leqslant a \right\} \right)$$

$$D_{\gamma_0,\gamma_1}(0) = \lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} D_{\gamma_0,\gamma_1}(a).$$

Remarque. — Dans la pratique, les cas où on sait déterminer D_{γ_1} sont en fait ceux où on connaît γ_0 tel que $D_{\gamma_1} = D_{\gamma_0, \gamma_1}$.

Si on reprend l'interprétation de Le Cam donnée en Remarque dans *b* ci-dessus, on peut dire qu'on s'est ramené pour tout *n*, au test de $\{\gamma_0(n)\}$ contre $\{\gamma_1(n)\}$.

Pour chaque valeur du seuil *a*, on connaît, pour chacun de ces problèmes élémentaires, le test le plus puissant, à savoir le test de « rapport de vraisemblance » ; la suite de ces tests de rapport de vraisemblance constitue évidemment le test asymptotiquement localement le plus puissant pour le repère γ_0 et le critère γ_1 ; si elle existe, sa puissance asymptotique locale, constitue un bon indicateur de « ce que l'on peut faire de mieux » pour distinguer H_0 de H_1 à l'aide de γ_0 et γ_1.

Nous adopterons désormais les *conventions de notation* suivantes : on notera, pour tout $j \in \{0, 1\}$,

$$P_n^j \textit{ pour } P_n^{\gamma_j(n)}$$
$$\overline{\Pi}^j \textit{ pour } (\mathscr{B}, (P_n^{\gamma_j(n)})_{\mathbb{N}}).$$

d) Selon la terminologie de [*11*], pour tout n, la fonction f_n :

$$a \rightsquigarrow \sup \left\{ x\,;\, (\exists \varphi_n) \int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^1 = x \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_n} \varphi_n dP_n^0 = a \right\}$$

est la *fonction de concentration régularisée* de P_n^1 par rapport à P_n^0 ; si la probabilité P_n^0 est sans atomes, f_n est égale (voir [*11*]) à la *fonction de concentration* de P_n^1 par rapport à P_n^0, soit :

$$a \rightsquigarrow \sup \{ x\,;\, (\exists \mathscr{B}_n \in \mathscr{B}_n) P_n^1(B_n) = x \quad \text{et} \quad P_n^0(B_n) \leqslant a \}$$

Nous ferons alors l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE $\mathscr{H}$. — *Toutes les probabilités* P_n^0 *sont* sans atomes.

Cette hypothèse ne nous fait rien perdre de la généralité de notre étude ; tout ce que nous dirons s'appliquera au cas de probabilités admettant des atomes à condition d'accoler l'épithète *régularisée* à « fonction de concentration » (et, ci-dessous, « d'étalement »).

Si, pour tout n, on note $g_n = f_n^{-1}$ (notations de 1.1.*c*), g_n est appelée *fonction de dispersion* de P_n^0 par rapport à P_n^1. On démontre dans [*11*] que, pour que $\overline{\pi}^1$ soit simplement Lebesgue-décomposable par rapport à $\overline{\pi}^0$, il suffit que la suite des fonctions g_n converge vers une fonction g_∞, et alors

$$v = \sup \{ x\,;\, g_\infty(x) = 0 \}$$

De plus la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie alors :

$$(\forall x \in [0, 1]) \qquad \liminf_{n \to \infty} f_n(x) \geqslant v$$
$$\lim_{x \to 0} (\limsup_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{x \to 0} (\liminf_{n \to \infty} f_n(x)) = v$$

Si on note $\overline{\pi}^{12} (= (\mathscr{B}, (P_n^{12})_{\mathbb{N}}))$ la partie asymptotiquement étrangère dans cette décomposition et, pour tout n, f_n^2 la fonction de concentration de P_n^{12} par rapport à P_n^0, les mêmes résultats impliquent que

$$(\forall x \in]0, 1]) \quad \lim_{n \to \infty} f_n^2(x) = v$$

d) Cas particuliers

Il est clair que, sous l'hypothèse $\mathscr{H}$, les fonctions de concentration sont des applications croissantes, concaves, de [0, 1] dans [0, 1]; il en est de même, si elle existe de la fonction de discrimination D_{γ_0,γ_1}, ce qui implique que D_{γ_0,γ_1} est continue sur]0, 1]; la définition de D_{γ_0,γ_1} a été choisie de manière à la rendre continue sur [0, 1], ce qui permettra ci-dessous de l'interpréter elle-même, dans certains cas, comme une fonction de concentration.

En particulier

$$(\forall a \in [0, 1]) \qquad a \leqslant D_{\gamma_0,\gamma_1}(a) \leqslant 1$$

ce qui conduit à examiner les deux cas extrêmes suivants:

1. Si

$$(\forall a \in [0, 1]) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(a) = a$$

nous dirons que H_0 et H_1 *ne peuvent pas être discriminés* par le repère γ_0 et le critère γ_1 (ou plus brièvement que γ_0 et γ_1 ne peuvent pas être discriminés); en effet, dans ces conditions, tout test de seuil a est asymptotiquement localement moins puissant, selon le critère γ_1 et le repère γ_0, que le test consistant, sans considération des résultats expérimentaux, à choisir de rejeter l'hypothèse à tester avec la probabilité a; on remarque qu'il est *a fortiori*, de même, asymptotiquement localement moins puissant selon le critère γ_1 (sans référence à un repère particulier γ_0; voir la Définition 1.2.1.) et on dira que H_0 et H_1 ne peuvent pas être discriminés par γ_1.

2. Si

$$(\forall a \in [0, 1]) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(a) = 1$$

nous dirons que H_0 et H_1 sont *parfaitement discriminés* par le repère γ_0 et le critère γ_1 (ou que γ_0 et γ_1 sont parfaitement discriminés).

1.3. EXISTENCE ET PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE DISCRIMINATION

a) Soient désormais fixés un problème de test, un repère γ_0 et un critère γ_1; d'après la définition de la fonction de discrimination D_{γ_0,γ_1} (définition 1.2.3.) notre but est d'obtenir des renseignements sur le comportement limite des fonctions de concentration f_n, c'est-à-dire sur le comportement limite des probabilités P_n^1, « repérées » respectivement par rapport aux probabilités P_n^0 (on applique ici la convention de notation donnée à la fin de 1.2.*c*). Dans cet ordre d'idées, nous disposons d'un théorème obtenu en [*13*], qui établit que, si le système préprojectif

$$\overline{\Pi}^0 = (\mathscr{B}, (P_n^0)_{\mathbb{N}})$$

est équi-asympto-projectif prolongeable, alors tout système asympto-projectif de mesures contigu à $\overline{\Pi}^0$ est aussi prolongeable ; c'est ce résultat qui explique le rôle essentiel que va jouer l'équi-asympto-projectivité de $\overline{\Pi}^0$ dans cette étude.

En fait, si $\overline{\Pi}^0$ est équi-asympto-projectif, il est aisé de se ramener au cas où il est projectif (autrement dit où le repère γ_0 est constant) ; c'est l'objet de la proposition suivante

Proposition 1.3.1. — *Soient fixés*

— *un problème de test*

$$\mathscr{T} = (\Theta, H_0, H_1, \mathscr{B}, (\overline{\Pi}^\theta)_\Theta)$$

— *un repère γ_0 tel que $\overline{\Pi}^0$ soit un système équi-asympto-projectif de probabilités.*

On note

$$\overline{\Pi}'^0 = (\mathscr{B}, (P_n'^0))$$

le système projectif de probabilités associé à $\overline{\Pi}^0$ *en définissant, pour tout n,* $P_n'^0$ par

$$B_n \rightsquigarrow \lim_{m\to\infty} P_m^0(\pi_{nm}^{-1}(B_n))$$

Étant donné un critère γ_1, on note, pour tout n,

— *f_n la fonction de concentration de P_n^1 par rapport à P_n^0,*

— *f_n' la fonction de concentration de P_n^1 par rapport à $P_n'^0$.*

Alors, pour que l'une des suites de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ et $(f_n')_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $0 < a < b \leqslant 1$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de l'autre, et elles ont même limite.

Remarque. — Le caractère projectif de $\overline{\Pi}'^0$ est une conséquence élémentaire du théorème de Vitali-Hahn-Sachs.

Démonstration. — On a, avec les notations introduites en 1.1.*c*, et grâce à l'hypothèse $\mathscr{H}$,

$$f_n^{-1}(a) = \inf\{u ; (\exists B_n \in \mathscr{B}_n)\ P_n^0(B_n) = u \quad \text{et} \quad P_n^1(B_n) = a\}$$
$$f_n'^{-1}(a) = \inf\{u ; (\exists B_n \in \mathscr{B}_n)\ P_n'^0(B_n) = u \quad \text{et} \quad P_n^1(B_n) = a\}.$$

Il résulte de l'hypothèse selon laquelle $(\mathscr{B}, (P_n^0)_{\mathbb{N}})$ est un système équi-asympto-projectif que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall B_n \in \mathscr{B}_n) \qquad |P_n^0(B_n) - P_n'^0(B_n)| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$(1) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall a \in [0, 1]) \qquad |f_n^{-1}(a) - f_n'^{-1}(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Supposons que l'une des deux suites de fonctions, par exemple $(f_n')_{\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f_∞ sur $]0, 1]$ (et donc uniformément sur tout $[a, b]$ tel que $0 < a < b \leqslant 1$) ; alors, d'après le lemme 1.1, la suite $(f_n'^{-1})_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_∞^{-1} sur tout $[c, d]$ tel que $0 \leqslant c < d < 1$; d'après la formule (1), il en est de même de la suite $(f_n^{-1})_{\mathbb{N}}$ et donc, toujours d'après le lemme 1.1, la suite $(f_n')_{\mathbb{N}}$ converge également vers f_∞, uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $0 < a < b \leqslant 1$.

N. B. — Si on veut étendre ce résultat au cas où $\mathbb{N}$ est remplacé par un ensemble ordonné filtrant à droite I quelconque, il faut remarquer qu'alors le théorème de Vitali-Hahn-Sachs n'est plus valable et que donc il faut introduire l'hypothèse supplémentaire que $\overline{\Pi}'^0$ est bien un système projectif de probabilités ; on pourrait par exemple introduire dès cette proposition l'hypothèse, dont nous aurons de toute façon besoin plus loin que $\overline{\Pi}^0$ est un système équi-asympto-projectif prolongeable.

c) PROPOSITION 1.3.2.

1. *Étant donné :*

— *un système projectif d'espaces mesurables*

$$\mathscr{B} = (\Omega_n, \mathscr{B}_n, \pi_{nm})_{\mathbb{N}}$$

— *un système projectif de probabilités*

$$\Pi = (\mathscr{B}, P_n)_{\mathbb{N}}$$

— *un système équi-asympto-projectif de mesures finies*

$$M = (\mathscr{B}, \mu_n)_{\mathbb{N}}$$

soit, pour tout n, f_n la fonction de concentration de μ_n par rapport à P_n.

Alors la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente (soit f_∞ sa limite).

2. *Si de plus le système projectif Π admet une limite P_∞, et le système équi-asympto-projectif M un prolongement μ_∞, alors f_∞ est la fonction de concentration de μ_∞ par rapport à P_∞.*

Démonstration.

1. Avec les notations introduites en 1.1.*a* sur les systèmes projectifs de mesures, on peut écrire que

$$f_n(x) = \sup \{ u ; (\exists B_n^* \in \mathscr{B}_n^*) \ \mu_n^*(B_n^*) = u \quad \text{et} \quad P_n^*(B_n^*) = x \}$$

Si $m > n$, on sait que

$$\mathscr{B}_n^* \subset \mathscr{B}_m^*$$
P_n^* est la restriction de P_m^* *à* $\mathscr{B}_n^*$

et donc, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\{ B_n^* ; P_n^*(B_n^*) = x \} \subset \{ B_m^* ; P_m^*(B_m^*) = x \}.$$

De plus

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall B_n^* \in \mathscr{B}_n^*)(\forall m > n) \quad | \mu_n^*(B_n^*) - \mu_m^*(B_n^*) | < \varepsilon$$

Donc

$$(\forall x \in [0, 1])(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall m > n) \quad f_m(x) \geqslant f_n(x) - \varepsilon$$

(autrement dit, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ est asymptotiquement croissante). Or, elle est majorée par $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\Omega_n)$ (fini en raison du caractère asympto-projectif de M) ; elle est donc convergente.

2. Soit $\hat{f}_\infty$ la fonction de concentration de μ_∞ par rapport à P_∞, et soit $\mathscr{C} = \bigcup \mathscr{B}_n^*$ le clan qui engendre $\mathscr{B}_\infty$; on démontre aisément (voir par exemple [*12*]) que les fonctions de concentration définies sur $\mathscr{B}_\infty$ et sur $\mathscr{C}$ coïncident ; autrement dit, pour tout x,

$$\hat{f}_\infty(x) = \sup \{ u ; (\exists C \in \mathscr{C}) \ P_\infty(C) = x \quad \text{et} \quad \mu_\infty(C) = u \} ;$$

donc, quel que soit N,

$$\hat{f}_\infty(x) = \sup_{n > \mathbb{N}} (\sup \{ u ; (\exists B_n^* \in \mathscr{B}_n^*) \ P_\infty(B_n^*) = x \quad \text{et} \quad \mu_\infty(B_n^*) = u \})$$

ce qu'on notera

$$\hat{f}_\infty(x) = \sup_{n > \mathbb{N}} (f_n^*(x))$$

Or, par définition de μ_∞ et P_∞, on a pour tout $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} | f_n(x) - f_n^*(x) | = 0$$

et donc

$$\lim_{n \to \infty} | \hat{f}_\infty(x) - \sup_{m > n} f_m(x) | = 0.$$

La suite $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ étant asymptotiquement croissante, il en résulte que

$$\hat{f}_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$$

d) THÉORÈME 1.3.1.

1. *Soient fixés*

— *un problème de test*

$$\mathscr{T} = (\Theta, \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathscr{B}, (\Pi^\theta)_\Theta)$$

(avec $\mathscr{B} = (\Omega_n, \mathscr{B}_n, \pi_{nm})$

$$(\forall \Theta \in \Theta)\ \Pi^\theta = (\mathrm{P}_n^\theta)_{\mathbb{N}}),$$

— *un repère* γ_0 *tel que*

$$\overline{\Pi}^0 = (\mathscr{B}, (P_n^{\gamma_0(n)})_{\mathbb{N}})$$

soit un système équi-asympto-projectif de probabilités,

— *un repère* γ_1 *tel que*

$$(\Omega_n, \mathscr{B}_n, \mathrm{P}_n^{\gamma_1(n)}, \mathrm{P}_n^{\gamma_0(n)})_{\mathbb{N}}$$

soit une suite simplement décomposable (notation :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \mathrm{P}_n^{\gamma_1(n)} = \mathrm{P}_n^{11} + \mathrm{P}_n^{12}$$

avec

$$\begin{gathered}(\mathrm{P}_n^{11})_{\mathbb{N}} \sqsubseteq (\mathrm{P}_n^{\gamma_0(n)})_{\mathbb{N}} \\ (\mathrm{P}_n^{12})_{\mathbb{N}} \perp\!\!\!\perp (\mathrm{P}_n^{\gamma_0(n)})_{\mathbb{N}} \\ v = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{P}_n^{12}(\Omega_n))\end{gathered}$$

et que

$$\overline{\Pi}^{11} = (\mathscr{B}, (\mathrm{P}_n^{11})_{\mathbb{N}})$$

soit un système équi-asympto-projectif de mesures.

Il existe alors une fonction de discrimination entre γ_0 *et* γ_1, $\mathrm{D}_{\gamma_0,\gamma_1}$, *vérifiant :*

$$\mathrm{D}_{\gamma_0,\gamma_1}(0) = v.$$

2. *Si de plus le système équi-asympto-projectif* $\overline{\Pi}^0$ *est prolongeable (soit* P_∞^0 *son prolongement), il en est de même de* $\overline{\Pi}^{11}$ *(soit* P_∞^{11} *son prolongement).* *et* $\mathrm{D}_{\gamma_0,\gamma_1}$ *est la fonction de concentration de*

$$(\Omega_\infty, \mathscr{B}_\infty, \mathrm{P}_\infty^0, \mathrm{P}_\infty^1)$$

où P_∞^1 *est une probabilité dont la partie absolument continue, dans la décomposition de Lebesgue par rapport à* P_∞^0, *est* P_∞^{11} *(et dont la partie étrangère est de masse totale* v*).*

Remarque. — Dans l'énoncé du théorème ci-dessus, l'hypothèse « $\overline{\Pi}^{11}$ est un système équi-asympto-projectif de mesures », se justifie par le fait que, si elle est satisfaite pour une certaine décomposition de Lebesgue, elle l'est pour toutes les autres (voir [*11*]).

Démonstration.

1. D'après la proposition 1.3.1, nous pourrons dans toute cette démonstration supposer que $\overline{\Pi}^0$ est un système projectif de probabilités.

Soit, pour tout n, f_n^1 (resp. f_n^2) la fonction de concentration de

$$(\Omega_n, \mathscr{B}_n, P_n^0, P_n^{11}) \qquad (\text{resp. } (\Omega_n, \mathscr{B}_n, P_n^0, P_n^{12})).$$

D'après la proposition 1.3.2, la suite des fonctions f_n^1 converge vers une fonction concave, croissante et continue, notée f_∞^1. Nous allons démontrer que

$$(\forall x \in]0, 1]) \qquad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v + f_\infty^1(x)$$

Il résulte des résultats sur la décomposition de Lebesgue simple, rappelés en 1.2.d, que

$$(\forall x \in]0, 1]) \qquad v = \lim_{n\to\infty} f_n^2(x)$$

Or, par définition même,

$$f_n \leqslant f_n^1 + f_n^2$$

et donc

$$(\forall x \in]0, 1]) \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f_\infty^1(x) + v$$

Pour démontrer maintenant que

$$(\forall x \in]0, 1]) \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geqslant f_\infty^1(x) + v$$

on utilise le fait que la décomposition de Lebesgue peut toujours être prise « par restrictions » (voir 1.1.b) ; soit $(A_n^0)_{\mathbb{N}}$ la suite à laquelle elle est associée, suite qui vérifie

$$\lim_{n\to\infty} P_n^0(A_n^0) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n^1(A_n^0) = v$$

D'autre part il résulte immédiatement de la contiguïté de $\overline{\Pi}^{11}$ par rapport à $\overline{\Pi}^0$ que la suite des fonctions f_n est terminalement uniformément également continue.

Étant fixés $\varepsilon > 0$ et $x \in]0, 1]$, soient donc $\eta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n > N$, on ait :

$$(\forall (x', x'') \in [0, 1]^2) \qquad [|x' - x''| < \eta \Rightarrow |f_n^1(x') - f_n^1(x'')| < \varepsilon]$$
$$P_n^0(A_n^0) < \inf(\eta, x)$$
$$P_n^1(A_n^0) > v - \varepsilon$$

Pour tout $n > N$, soit alors A_n^1 tel que

$$A_n^1 \subset \complement A_n^0$$
$$P_n^0(A_n^1) = x - P_n^0(A_n^0)$$
$$P_n^1(A_n^1) = f_n^1(x - P_n^0(A_n^0))$$

(A_n^1 existe en vertu de l'hypothèse $\mathscr{H}$).
Alors

$$f_n(x) \geqslant P_n^1(A_n^0 \cup A_n^1) > v - \varepsilon + f_n^1(x - P_n^0(A_n^0)) > v + f_n^1(x) - 2\varepsilon$$

et donc

$$\liminf_{n \to \infty} f_n(x) \geqslant v + \lim_{n \to \infty} f_n^1(x).$$

1*b*) On a obtenu en 1*a* l'existence de la fonction de discrimination D_{γ_0, γ_1}, qui vérifie

$$(\forall x \in]0, 1]) \qquad D_{\gamma_0, \gamma_1}(x) = v + f_\infty^1(x).$$

Or f_∞^1 est continue sur [0, 1], et $f_\infty^1(x) = 0$. Donc, par définition :

$$D_{\gamma_0, \gamma_1}(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} [v + f_\infty^1(x)] = v.$$

2. Si $\overline{\Pi}^0$ est prolongeable, et de prolongement P_∞^0, il résulte de la contiguïté de $(P_n^{11})_{\mathbb{N}}$ par rapport à $(P_n^0)_{\mathbb{N}}$, et des résultats rappelés en 1.3.*a*, que le système équi-asympto-projectif $\overline{\Pi}^{11}$ est également prolongeable ; soit P_∞^{11} son prolongement, de masse totale $1 - v$, absolument continue par rapport à P_∞^0.

D'après la proposition 1.3.2, f_∞^1 est la fonction de concentration de $(\Omega_\infty, \mathscr{B}_\infty, P_\infty^0, P_\infty^{11})$; $(f_\infty^1 + v)$ est bien alors la fonction de concentration d'une probabilité dont la partie absolument continue, dans la décomposition de Lebesgue (au sens usuel) par rapport à P_∞^0, est P_∞^{11} (et dont la partie orthogonale est de masse totale v).

e) Le théorème ci-dessous fournit un cas important de réalisation des hypothèses de la première partie du théorème 1.3.1 (dont on conserve les notations).

THÉORÈME 1.3.2. — *Soient fixés*

— *un problème de test* $\mathcal{T}$,

— *un repère* γ_0 *et un critère* γ_1, *tels que*

$$\overline{\Pi}^0 (= (\mathscr{B}, (P_n^0)_{\mathbb{N}}))$$

et

$$\overline{\Pi}^1 (= (\mathscr{B}, (P_n^1)_{\mathbb{N}}))$$

soient des systèmes équi-asympto-projectifs.

Alors la suite

$$(\Omega_n, \mathscr{B}_n, P_n^1, P_n^0)_{\mathbb{N}}$$

est simplement décomposable, et $\overline{\Pi}^{11}$ *et* $\overline{\Pi}^{12}$ *sont des systèmes équi-asympto-projectifs de mesures.*

Démonstration.

1. D'après les propositions 1.3.1. et 1.3.2., la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ des fonctions de concentration est convergente sur]0, 1] et donc, d'après le lemme 1.1., la suite $(g_n)_{\mathbb{N}}$ des fonctions d'étalement est convergente sur [0, 1[(pour tout n, $g_n = f_n^{-1}$), ce qui, nous l'avons dit (voir 1.2.*d*) est une condition suffisante de simple décomposabilité ; soit désormais v la valeur caractéristique.

2. Démontrons que $\overline{\Pi}^{22}$ est un système équi-asympto-projectif de mesures (le fait que $\overline{\Pi}^{11}$ en est un s'en déduit immédiatement, puisque $\overline{\Pi}^1$ en est un).

La décomposition de Lebesgue étant supposée du type « par restriction », soit $(A_n)_{\mathbb{N}}$ la suite à laquelle elle est associée.

Nous remarquons que, pour tout couple (n, m), et tout $B_n \in \mathscr{B}_n$

$$\begin{aligned} &| P_n^{11}(B_n) - P_m^{11}[\pi_{nm}^{-1}(B_n)] | \\ &\qquad = | P_n^1(B_n \cap A_n) - P_m^1(\pi_{nm}^{-1}(B_n) \cap A_m) | \\ &\qquad \leqslant | P_n^1(B_n \cap A_n) - P_m^1(\pi_{nm}^{-1}(B_n \cap A_n)) | + P_m^1[\pi_{nm}^{-1}(B_n) \cap (A_m \triangle \pi_m^{-1}(A_n)] \end{aligned}$$

Alors, $\overline{\Pi}^1$ étant un système équi-asympto-projectif, il suffit, pour que $\overline{\Pi}^1$ en soit aussi un que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall m > n) \qquad P_m^1[\pi_{nm}^{-1}(A_n) \triangle A_m] < \varepsilon$$

autrement dit, en opérant sur l'espace Ω_∞ (on pose pour tout n,

$$\begin{aligned} A_n^* &= \pi_n^{-1}(A_n) \\ P_n^* &= P_n^1 \circ \pi_n \\ P_n^{0*} &= P_n^0 \circ \pi_n \end{aligned}$$

(les applications π_n sont, par hypothèse, surjectives))

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall m > n) \qquad P_m^*(A_n^* \triangle A_m^*) < \varepsilon.$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire qu'existe $h > 0$ tel que :

$$(\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N})(\exists n > \mathrm{N})(\exists m > n) \qquad \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^* \triangle \mathrm{A}_m^*) \geqslant h$$

Étant fixé $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon < \frac{h}{6}$, soit N_0 tel que, pour tout $n > \mathrm{N}_0$,

$$(\forall \mathrm{B}_n^* \in \mathscr{B}_n^*)(\forall m > n) \qquad |\, \mathrm{P}_n^*(\mathrm{B}_n^*) - \mathrm{P}_m^*(\mathrm{B}_n^*) \,| \leqslant \varepsilon$$
$$|\, \mathrm{P}_n^*(\mathrm{A}_n^*) - v \,| \leqslant \varepsilon$$

(et donc aussi

$$(\forall m > n) \qquad |\, \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^*) - v \,| \leqslant 2\varepsilon).$$

Alors, pour tout $\mathrm{N} > \mathrm{N}_0$, il existe $n > \mathrm{N}$ et $m > n$ tels que :

$$|\, \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^* \setminus \mathrm{A}_m^*) - \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_m^* \setminus \mathrm{A}_n^*) | = |\, \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^*) - \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_m^*) \,| \leqslant 3\varepsilon < \frac{h}{2}$$

$$|\, \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^* \setminus \mathrm{A}_m^*) + \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_m^* \setminus \mathrm{A}_n^*) \,| = |\, \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^* \triangle \mathrm{A}_m^*) \,| \geqslant h$$

et donc

$$\mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^* \setminus \mathrm{A}_m^*) > \frac{h}{4}$$

$$\mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_m^* \setminus \mathrm{A}_n^*) > \frac{h}{4}$$

et alors :

$$\mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^* \cup \mathrm{A}_m^*) = \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_m^*) + \mathrm{P}_m^*(\mathrm{A}_n^* \setminus \mathrm{A}_m^*) \geqslant v - \varepsilon + \frac{h}{4} \geqslant v + \frac{h}{8}$$

D'autre part, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer N_1 tel que, pour tout $n > \mathrm{N}_1$,

$$(\forall \mathrm{B}_n^* \in \mathscr{B}_n^*)(\forall m > n) \qquad |\, \mathrm{P}_n^{0*}(\mathrm{B}_n^*) - \mathrm{P}_m^{0*}(\mathrm{B}_n^*) \,| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\mathrm{P}_n^{0*}(\mathrm{A}_n^*) < \frac{\varepsilon}{3}$$

et donc aussi :

$$(\forall m > n) \qquad \mathrm{P}_m^{0*}(\mathrm{A}_n^*) < 2\frac{\varepsilon}{3}$$

et donc

$$(\forall m > n) \qquad \mathrm{P}_m^{0*}(\mathrm{A}_n^* \cup \mathrm{A}_m^*) < \varepsilon$$

On peut ainsi mettre en évidence une suite cofinale J de $\mathbb{N}$ et, pour tout $m \in \mathrm{J}$, une partie $\hat{\mathrm{A}}_m$ appartenant à $\mathscr{B}_m$ (du type $\pi_{nm}^{-1}(\mathrm{A}_n) \cup \mathrm{A}_m$, où $n < m$) telle que :

— la suite $(\mathrm{P}_m^0(\hat{\mathrm{A}}_m))_{m \in \mathrm{J}}$ converge vers 0,

— $(\forall m \in \mathrm{J}) \qquad \mathrm{P}_m^1(\hat{\mathrm{A}}_m) \geqslant v + \frac{h}{8}$

Ceci est incompatible avec le fait que v est la valeur caractéristique de la suite simplement décomposable $(\Omega_n, \mathscr{B}_n, P_n^1, P_n^0)_{\mathbb{N}}$.

f) CAS PARTICULIER. — Si les systèmes préprojectifs $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$, supposés tous deux équi-asympto-projectifs comme dans l'énoncé du théorème précédent, ont même prolongement, ils sont mitoyens et γ_0 et γ_1 ne peuvent pas être discriminés.

De plus, si on sait que $\overline{\Pi}^0$ est équi-asympto-projectif prolongeable, il faut et il suffit pour que $\overline{\Pi}^1$ le soit aussi, et de même prolongement, que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} |P_n^1(B_n) - P_n^0(B_n)| = 0$$

Ce sont là des conséquences immédiates de la définition de la mitoyenneté.

2. TESTS SUR ÉCHANTILLONS DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

2.1. CAS GÉNÉRAL

a) Cadre de l'étude

Dans toute cette section 2, on étudie un problème de test

$$\mathscr{T} = (\Theta, H_0, H_1, \mathscr{B}, (\Pi^\theta)_{\theta\in\Theta})$$

et on suppose que $\mathscr{B}$

$$(\mathscr{B} = (\Omega_n, \mathscr{B}_n, \pi_{nm})_{\mathbb{N}})$$

et, pour tout θ, le système projectif Π^θ

$$(\Pi^\theta = (\mathscr{B}, P_n^\theta)_{\mathbb{N}})$$

vérifient la propriété suivante : il existe

une suite d'espaces mesurables $(X_n, \mathscr{X}_n)$,
pour tout n, une famille (Q_θ^n) *de probabilités sur* $(X_n, \mathscr{X}_n)$

telles que

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \qquad (\Omega_n, \mathscr{B}_n) = \prod_{i=1}^n (X_i, \mathscr{X}_i)$$

pour tout n et tout $m > n$, π_{nm} est la projection canonique de

$$\prod_{i=1}^{m} X_i \quad \text{sur} \quad \prod_{i=1}^{n} X_i$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \theta \in \Theta) \qquad P_n^\theta = \prod_{i=1}^{n} Q_\theta^n$$

On dira que $\mathscr{T}$ est un *problème de test sur échantillons indépendants*, de *base*

$$\mathscr{U} = (\Theta, H_0, H_1, (X_i, \mathscr{X}_i, (Q_\theta^i)_{\theta\in\Theta})_{i\in\mathbb{N}})$$

Étant donné un critère, ou un repère, γ, le système préprojectif

$$(\mathscr{B}, (P_n^{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}})$$

est dit du type *produit dénombrable.* On démontre (voir [*12*]) que, pour que ce soit un système asympto-projectif, il faut et il suffit que, pour tout i, pour tout $A_i \in \mathscr{X}_i$, la suite

$$(Q_{\gamma(n)}^i(A_i))_{n\in\mathbb{N}}$$

converge; de plus ce système asympto-projectif est alors prolongeable.

b) Normalité asymptotique régulière

Étant fixés un repère γ_0 et un critère γ_1, on note, pour tout couple (n, i), où $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$,

$$l_{n,i}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Log} \frac{\partial Q_{\gamma_1(n)}^i(x_i)}{\partial Q_{\gamma_0(n)}^i(x_i)} (\in \overline{\mathbb{R}})$$

Pour tout n, les $l_{n,i}$ $(1 \leqslant i < n)$ sont indépendants, que $(\Omega_n, \mathscr{B}_n)$ soit muni de la probabilité P_n^1 $(= P_n^{\gamma_1(n)})$ ou de la probabilité P_n^0 $(= P_n^{\gamma_0(n)})$.

Alors on définit pour tout n,

$$L_n = \operatorname{Log} \frac{\partial P_n^1}{\partial P_n^0} = \sum_{i=1} l_{n,i}.$$

(L_n est bien défini, sur $(\Omega_n, \mathscr{B}_n, P_n^0)$ comme sur $(\Omega_n, \mathscr{B}_n, P_n^1)$, puisque les $l_{n,i}$ sont tous $< +\infty$ avec une P_n^0-probabilité égale à 1 et tous $> -\infty$ avec une P_n^1-probabilité égale à 1.)

D'autre part on sait (voir [11] que, si la suite des probabilités, définies sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$,

$$\left(\mathrm{P}_n^0 \circ \left(\frac{\partial \mathrm{P}_n^1}{\partial \mathrm{P}_n^0}\right)^{-1}\right)_{\mathbb{N}}$$

(autrement dit la suite des lois des $\exp(\mathrm{L}_n)$ selon les P_n^0) converge faiblement vers une probabilité de fonction de répartition F, alors $(\mathrm{P}_n^1)_{\mathbb{N}}$ admet une décomposition de Lebesgue simple par rapport à $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, de valeur caractéristique

$$v = 1 - \int_0^\infty x d\mathrm{F}(x)$$

(on dit aussi dans ce cas que la suite $(\exp(\mathrm{L}_n))_{\mathbb{N}}$ converge en loi, selon $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$).

Cette propriété, jointe à l'expression de L_n comme somme de n variables aléatoires indépendantes, nous conduit à considérer en particulier le cas où la suite $(\mathrm{L}_n)_{\mathbb{N}}$ appartient au domaine d'attraction, selon $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, de la loi normale, c'est-à-dire où existent deux suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ $(\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ $(\in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}})$ telles que la suite des lois, selon $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, des $\dfrac{\mathrm{L}_n - a_n}{b_n}$, converge vers la loi normale centrée réduite ; on dira que la suite des lois, selon $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, des L_n est *asymptotiquement équivalente* à la suite des lois normales de moyenne a_n et écart-type b_n, et on notera

$$\mathscr{L}_{\mathrm{P}_n^0}\left(\frac{\mathrm{L}_n - a_n}{b_n}\right) \to \mathscr{N}(0, 1)$$

ou

$$\mathscr{L}_{\mathrm{P}_n^0}(\mathrm{L}_n) \sim \mathscr{N}(a_n, b_n)$$

Un cas particulier remarquable est celui où les suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ convergent vers des nombres réels notés respectivement μ et σ, et où donc

$$\mathscr{L}_{\mathrm{P}_n^0}(\mathrm{L}_n) \to \mathscr{N}(\mu, \sigma).$$

Alors, pour que la suite $(\mathrm{P}_n^1)_{\mathbb{N}}$ soit contiguë à la suite $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, il faut et il suffit que l'espérance mathématique de la loi limite, selon $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, des $\exp(\mathrm{L}_n)$, soit égale à 1, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(x - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx = 1$$

ce qui est équivalent à

$$\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$$

Cette condition est utilisée par Hajek dans son étude sur les lois limites des tests de rang (voir [5], chap. VI). Nous aurons besoin des conditions plus générales qui font l'objet de la définition suivante.

DÉFINITION 2.1.1. — *Soient donnés deux systèmes préprojectifs de même base, du type produit dénombrable,* $\overline{\Pi}^0$ *et* $\overline{\Pi}^1$.

$$(\overline{\Pi}^0 = (\mathscr{B}, (P_n^0)_{\mathbb{N}}) \qquad et \qquad \overline{\Pi}^1 = (\mathscr{B}, (P_n^1)_{\mathbb{N}}))$$

On dit que le couple $(\overline{\Pi}^0, \overline{\Pi}^1)$ (*ou le couple* $((\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}, (\mathrm{P}_n^1)_{\mathbb{N}})$) *est* régulièrement asymptotiquement normal *si et seulement si il existe une suite* $(a_n)_{\mathbb{N}}$ $(\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *et une suite* $(b_n)_{\mathbb{N}}$ $(\in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}})$, *telles que*

— $a_n \sim -\frac{1}{2} b_n^2$,

— $\mathscr{L}_{\mathrm{P}_n^0}(\mathrm{L}_n) \sim \mathscr{N}(a_n, b_n)$,

— *les variables aléatoires* $\frac{l_{n,i}}{b_n}$ *sont uniformément asymptotiquement négligeables selon* (P_n^0)

$$\left(\text{i. e. } \lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{P}_n^0\left[\left|\frac{l_{n,i}}{b_n}\right| \geqslant \varepsilon\right] = 0\right)$$

c) Condition suffisante de normalité asymptotique régulière

Si, pour tout n, L_n admet, pour P_n^0, espérance mathématique et écart-type finis, il est clair que, si la suite des lois des L_n est, pour $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, asymptotiquement équivalente à une suite $(\mathscr{N}(a_n, b_n))_{\mathbb{N}}$, alors elle est en particulier asymptotiquement équivalente à la suite $(\mathscr{N}(\mathrm{E}_n^0(\mathrm{L}_n), \sigma_n^0(\mathrm{L}_n)))_{\mathbb{N}}$.

En fait, L_n n'admettant pas toujours de premier et second moments finis, Le Cam a proposé de remplacer l'étude de la suite $(\mathrm{L}_n)_{\mathbb{N}}$ par celle de la suite $(\mathrm{W}_n)_{\mathbb{N}}$ définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \qquad w_{n,i} = 2[\sqrt{\exp(l_{n,i})} - 1]$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \mathrm{W}_n = \sum_{i=1}^{n} w_{n,i}$$

En effet, pour tout n, W_n admet, pour P_n^0, une espérance mathématique ($E_n^0(W_n)$) et un écart-type ($\sigma_n^0(W_n)$) finis ; la possibilité d'utiliser la suite $(W_n)_{\mathbb{N}}$ dans notre étude relève des deux lemmes ci-dessous.

LEMME 2.1.1. — *Quelle que soit la suite de nombres réels strictement positifs $(b_n)_{\mathbb{N}}$, il y a équivalence entre l'uniforme asymptotique négligeabilité de chacune des familles $(u_{n,i})_{1 \leqslant i \leqslant n, n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires suivantes :*

$$1.\ u_{n,i} = \frac{1}{b_n}(\exp(l_{n,i}) - 1)$$

$$2.\ u_{n,i} = \frac{1}{b_n} l_{n,i}$$

$$3.\ u_{n,i} = \frac{1}{b_n} w_{n,i}$$

Démonstration. — Résulte immédiatement de la considération, au voisinage de 1, des fonctions

$$x \rightsquigarrow x - 1$$
$$x \rightsquigarrow \operatorname{Log} x$$
$$x \rightsquigarrow 2(\sqrt{x} - 1)$$

LEMME 2.1.2. — *On suppose que les $w_{n,i}$ et les W_n vérifient les hypothèses suivantes :*

$$E_n^0(W_n) \sim -\frac{1}{4}(\sigma_n^0(W_n))^2,$$

les variables aléatoires $\dfrac{w_{n,i}}{\sigma_n^0(W_n)}$ sont uniformément asymptotiquement négligeables,

$$\mathscr{L}_{P_n^0}(W_n) \sim \mathscr{N}(E_n^0(W_n), \sigma_n^0(W_n)).$$

Alors, si de plus

$$\limsup_{n \to \infty} \sigma_n^0(W_n) < \infty,$$

$$1. \qquad \lim_{n \to \infty} P_n^0\left[\frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}\left| L_n - W_n + \frac{1}{4}(\sigma_n^0(W_n))^2 \right| > \varepsilon\right] = 0$$

2. *Le couple $((P_n^0)_{\mathbb{N}}, (P_n^1)_{\mathbb{N}})$ est régulièrement asymptotiquement normal.*

Remarque. — L'hypothèse supplémentaire

$$(\limsup_{n \to \infty} \sigma_n^0(W_n) < \infty)$$

est, pensons-nous, sans doute inutile, mais nous n'avons pu l'éviter dans les démonstrations ci-dessous ; en fait, il nous suffira pour la suite de remarquer que, si

$$\limsup_{n\to\infty} \ \sigma_n^0(\mathrm{W}_n) = +\infty,$$

la loi limite, selon $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, de la suite des W_n est dégénérée en $-\infty$, et il en est alors de même de celle de la suite des L_n, ainsi qu'il résulte de l'inégalité

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad \operatorname{Log} x \leqslant 2(\sqrt{x} - 1)$$

Démonstration.

La *conclusion 2* résulte immédiatement

— du lemme précédent (pour ce qui est de l'uniforme asymptotique négligeabilité),

— de la conclusion 1 (pour ce qui est de l'équivalence asymptotique entre $\mathscr{L}_{\mathrm{P}_n^0}(\mathrm{L}_n)$ et $\mathscr{N}(a_n, b_n)$, où

$$b_n = \sigma_n^0(\mathrm{W}_n)$$
$$a_n = \mathrm{E}_n^0(\mathrm{W}_n) - \frac{1}{4}(\sigma_n^0(\mathrm{W}_n))^2$$

(et donc $a_n \sim -\frac{1}{2}(b_n)^2$)).

La *conclusion 1* s'obtient en démontrant que, pour tout ultra-filtre $\mathscr{U}$ convergeant vers l'infini sur $\mathbb{N}$,

$$\lim_{\mathscr{U}} \mathrm{P}_n^0\left[\frac{1}{\sigma_n^0(\mathrm{W}_n)}\left|\mathrm{L}_n - \mathrm{W}_n + \frac{1}{4}(\sigma_n^0(\mathrm{W}_n))^2\right| > \varepsilon\right] = 0$$

Si

$$\lim_{\mathscr{U}} \sigma_n^0(\mathrm{W}_n) = \sigma_{\mathscr{U}} \neq 0,$$

la propriété cherchée est équivalente à

$$\lim_{\mathscr{U}} \mathrm{P}_n^0\left[\frac{1}{\sigma_{\mathscr{U}}}\left|\mathrm{L}_n - \mathrm{W}_n + \frac{1}{4}\sigma_{\mathscr{U}}^2\right| > \varepsilon\right] = 0$$

et a été démontrée par Hajek [5], VI, 1.3) ; nous ne referons pas cette démonstration, mais en reprendrons certains éléments pour les adapter à nos besoins dans le cas où $\sigma_{\mathscr{U}}$ est égal à 0 (le cas où $\sigma_{\mathscr{U}} = +\infty$ est exclu par l'hypothèse complémentaire).

Hajek démontre que les $w_{n,i}$, W_n et L_n sont liés par la relation

$$L_n = W_n - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} w_{n,i}^2 \int_0^1 \frac{2(1-x)}{\left(1+\frac{1}{2}w_{n,i}\right)^2}\,dx$$

D'autre part, que $\sigma_{\mathscr{U}}$ soit nul ou non, la suite $(W_n)_{\mathbb{N}}$ est, selon $(P_n^0)_{\mathbb{N}}$, asymptotiquement normale, et les $w_{n,i}$ sont uniformément asymptotiquement négligeables; donc, pour tout $k > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} P_n^0[|w_{n,i}| > k] \underset{\mathscr{U}}{\rightarrow} 0$$

ce qui, joint au fait que la fonction

$$x \rightsquigarrow \int_0^1 \frac{2(1-u)}{\left(1+\frac{1}{2}ux\right)^2}\,du$$

décroît strictement de 2 à 0 quand x croît de -2 à $+\infty$, en prenant la valeur 1 en 0, implique que

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_{n,i}^2 \int_0^1 \frac{2(1-u)}{\left(1+\frac{1}{2}uw_{n,i}\right)^2}\,du}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_{n,i}^2}$$

tend en (P_n^0)-probabilité, selon l'ultra-filtre $\mathscr{U}$, vers 1.

La relation à démontrer équivaut alors à

$$\lim_{\mathscr{U}} P_n^0\left[\frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}\left|\sum_{i=1}^{n} w_{n,i}^2 - \sigma_n^0(W_n)\right| > \varepsilon\right] = 0$$

ce qui, dans le cas où $\sigma_{\mathscr{U}} = 0$, équivaut à la convergence en (P_n^0)-probabilité, selon l'ultra-filtre $\mathscr{U}$, vers 0, de

$$\frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}\sum_{i=1}^{n} w_{n,i}^2$$

Il suffit pour cela que

$$E_n^0\left[\frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}\sum_{i=1}^{n} w_{n,i}^2\right] \underset{\mathscr{U}}{\to} 0$$

ce qui, puisque

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}(\sigma_n^0(w_{n,i}))^2 = \frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}(\sigma_n^0(W_n))^2 = \sigma_n^0(W_n)$$

et que

$$\lim_{\mathscr{U}} \sigma_n^0(W_n) = 0,$$

est équivalent à

$$\frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}\sum_{i=1}^{n}(E_n^0(w_{n,i}))^2 \underset{\mathscr{U}}{\to} 0$$

Or on remarque que (voir [5], p. 207)

$$-2 \leqslant E_n^0(w_{n,i}) \leqslant 0$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}\sum_{i=1}^{n}(E_n^0(w_{n,i}))^2 \leqslant \frac{1}{\sigma_n^0(W_n)}\left(\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |E_n^0(w_{n,i})|\right)\left|\sum_{n=1}^{n}E_n^0(w_{n,i})\right|$$

$$\leqslant 2\frac{|E_n^0(W_n)|}{\sigma_n^0(W_n)}$$

Or, par hypothèse,

$$E_n^0(W_n) \sim -\frac{1}{4}(\sigma_n^0(W_n))^2$$

et donc

$$\frac{E_n^0(W_n)}{\sigma_n^0(W_n)} \underset{\mathscr{U}}{\to} 0$$

ce qui achève la démonstration.

d) **Application de la normalité asymptotique régulière à la discrimination**

THÉORÈME 2.1.1. — *Soient donnés*

— *un problème de test sur échantillons indépendants, de base*

$$\mathscr{U} = (\Theta, H_0, H_1, (X_i, \mathscr{X}_i, (Q_0^i))$$

— *un repère* γ_0, *auquel est associé le système préprojectif* $\overline{\Pi}^0$,

— *un critère γ_1, auquel est associé le système préprojectif $\overline{\Pi}^1$.*

On suppose que

A. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $A_i \in \mathscr{X}_i$, les suites $(Q^i_{\gamma_0(n)}(A_i))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q^i_{\gamma_1(n)}(A_i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.*

B. *$\bar{\pi}^0$ est un système équi-asympto-projectif de probabilités.*

C. *Le couple $(\bar{\pi}^0, \pi^1)$ est régulièrement asymptotiquement normal ; soient $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ les suites qui lui sont associées* (voir Définition 2.1.1.).

D. *La suite $(b_n)_{\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, notée σ.*

Alors

1. *Si $\sigma = 0$, la suite $(L_n)_{\mathbb{N}}$ tend en loi, à la fois selon $(P^0_n)_{\mathbb{N}}$ et selon $(P^1_n)_{\mathbb{N}}$, vers la variable aléatoire « dégénérée » 0.*

$\overline{\Pi}^1$ *est* contigu *à* $\overline{\Pi}^0$, *et* $\overline{\Pi}^1$ *est un* système équi-asympto-projectif, *de même prolongement que* $\overline{\Pi}^0$.

γ_0 *et* γ_1 ne peuvent pas être discriminés.

2. *Si* $0 < \sigma < +\infty$,

$$\mathscr{L}_{P^0_n}(L_n) \to \mathscr{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma\right)$$

$$\mathscr{L}_{P^1_n}(L_n) \to \mathscr{N}\left(+\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma\right)$$

$\overline{\Pi}^1$ *est* contigu *à* $\overline{\Pi}^0$ (*Hajek*), *mais ne peut pas être un système équi-asympto-projectif.*

Si elle existe, *la fonction de discrimination entre γ_0 et γ_1, D_{γ_0,γ_1}, vérifie les propriétés suivantes*

$$D_{\gamma_0,\gamma_1}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(1) = 1$$
$$(\forall x \in]0, 1[) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) > x$$

3. *Si $\sigma = +\infty$, $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$ sont* asymptotiquement étrangères, *et γ_0 et γ_1 sont* parfaitement discriminés.

DÉMONSTRATION

0. *Notations.*

F_n : fonction de répartition de $\exp L_n$ selon la probabilité P^0_n,

F : limite faible (c'est-à-dire au sens de la convergence en tout point de continuité de F) de la suite (F_n),

G_n : fonction de répartition, selon la probabilité P^0_n, de

$$\frac{L_n - a_n}{b_n}$$

G : fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. *Cas où* $\sigma = 0$.

1.*a*. *Contiguïté de* $\overline{\Pi}^1$ *par rapport à* $\overline{\Pi}^0$. — On note δ_0 la probabilité de Dirac en 0, et δ_1 la probabilité de Dirac en 1. Alors

$$\mathscr{L}_{P_n^0}(L_n) \to \delta_0$$

et donc

$$\mathscr{L}_{P_n^0}(\exp L_n) \to \delta_1$$

Donc

$$\int_0^\infty x dF(x) = 1$$

ce qui, d'après le théorème de décomposition rappelé en *b* ci-dessus, implique que $\overline{\Pi}^1$ est simplement décomposable au sens de Lebesgue par rapport à $\overline{\Pi}^0$, et de valeur caractéristique 0, c'est-à-dire contigu à $\overline{\Pi}^0$.

1.*b*. *Convergence en loi de la suite* $(L_n)_{\mathbb{N}}$ *selon* $(P_n^1)_{\mathbb{N}}$. — On va démontrer une propriété un peu plus forte que celle annoncée dans l'énoncé, à savoir que si

$$\mathscr{L}_{P_n^0}(L_n) \sim \mathscr{N}(a_n, b_n),$$

alors

$$\mathscr{L}_{P_n^1}(L_n) \sim \mathscr{N}(a_n, b_n)$$

En effet on a, pour tout nombre réel x,

$$P_n^1\left[\frac{L_n - a_n}{b_n} \leqslant x\right] = \int_{\left[\frac{L_n - a_n}{b_n} \leqslant x\right]} \exp L_n dP_n^0$$

$$= \int_{[v \leqslant x]} \exp(vb_n + a_n) G_n(dv)$$

La suite des fonctions de répartition G_n converge uniformément vers G, continue ; d'autre part, a_n et b_n tendant tous deux vers 0, la suite des fonctions

$$v \rightsquigarrow \exp(vb_n + a_n)$$

converge uniformément vers 1 sur tout intervalle fermé borné. Donc, si existaient $x \in \mathbb{R}$, une sous-suite (n_i) et un nombre $k \neq 0$ tels que

$$\lim_{i \to \infty} \int_{[v \leqslant x]} \exp(vb_{n_i} + a_{n_i}) G_{n_i}(dx) = G(x) + k,$$

il en serait de même pour tout nombre réel x (ce qui, puisque

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$$

et

$$\int_{[v \leqslant x]} \exp(vb_n + a_n) G_n(dx) \geqslant 0$$

imposerait $k > 0$).

Il existerait donc une suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ extraite de $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$(\forall j \in \mathbb{N}) \qquad P^1_{n_j}\left[\frac{L_{n_j} - a_{n_j}}{b_{n_j}} \leqslant -j\right] \geqslant \frac{k}{2}$$

alors que

$$\lim_{j\to\infty} P^0_{n_j}\left[\frac{L_{n_j} - a_{n_j}}{b_{n_j}} \leqslant -j\right] = \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(-j) = 0\,;$$

ceci est contradictoire avec la contiguïté de $(P^1_{n_j})_{\mathbb{N}}$ par rapport à $(P^0_{n_j})_{\mathbb{N}}$, et achève la démonstration de ce que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \lim P^1_n\left[\frac{L_n - a_n}{b_n} \leqslant x\right] = G(x)$$

1.*c*. $\overline{\Pi}^1$ *est équi-asympto-projectif.* — $\overline{\Pi}^0$ étant équi-asympto-projectif, il suffit, pour que $\overline{\Pi}^1$ le soit aussi, que

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} |P^0_n(B_n) - P^1_n(B_n)|] = 0$$

(voir 1.3.*f*)).

Or

$$\sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} |P^0_n(B_n) - P^1_n(B_n)| = |P^0_n[L_n \leqslant 0] - P^1_n[L_n \leqslant 0]|$$

$$= \left|P^0_n\left[\frac{L_n - a_n}{b_n} \leqslant \frac{a_n}{b_n}\right] - P^1_n\left[\frac{L_n - a_n}{b_n} \leqslant \frac{a_n}{b_n}\right]\right|$$

d'où, comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} |P^0_n(B_n) - P^1_n(B_n)|] = G(0) - G(0) = 0$$

1.*d*. *Fonction de discrimination.* — $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$ sont prolongeables (car du type produit dénombrable) et il résulte de la démonstration 1.*c*. ci-dessus qu'ils ont même prolongement. Il résulte alors du théorème 1.3.2. que la fonction de discrimination entre γ_0 et γ_1 n'est autre que la fonction de concentration de ce prolongement par rapport à lui-même, c'est-à-dire la fonction identique ; γ_0 et γ_1 ne peuvent donc pas être discriminés.

2. *Cas où* $0 < \sigma < +\infty$.

2.*a*. *Contiguïté de* $\overline{\Pi}^1$ *par rapport à* $\overline{\Pi}^0$. — L'hypothèse de normalité asymptotique régulière du couple $(\overline{\Pi}^0, \overline{\Pi}^1)$ exprime ici que

$$\mathscr{L}_{P_n^0}(L_n) \to \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma\right),$$

ce qui (voir *c*)) implique la contiguïté de $\overline{\Pi}^1$ par rapport à $\overline{\Pi}^0$.

2.*b*. *Convergence en loi de la suite* $(L_n)_{\mathbb{N}}$, *selon* $(P_n^1)_{\mathbb{N}}$. — Cette convergence, vers $\mathcal{N}\left(+\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma\right)$, est un cas particulier d'un lemme dû à Le Cam [7] et Hajek [5] (p. 208, « Le Cam's second lemma »). Ici, on peut constater immédiatement que, d'après le théorème de Helly-Bray (voir par exemple [9], p. 182),

$$\lim_{n\to\infty} P_n^1[L_n \leqslant x] = \int_{[v\leqslant x]} \exp(v)\exp\left(-\frac{(v-\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}\right)dv$$
$$= \int_{[v\leqslant x]} \exp\left(-\frac{(v+\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}\right)dv$$

2.*c*. $\overline{\Pi}^1$ *ne peut pas être équi-asympto-projectif.* — Cette propriété résulte de l'hypothèse A qui traduit l'idée de convergence de γ_0 et γ_1 vers un même point de la frontière entre H_0 et H_1 et implique que $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$ sont asympto-projectifs, prolongeables et de même prolongement (à savoir la probabilité produit des Q^i_∞, définis par

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ (\forall A_i \in \mathscr{X}_i) \quad Q^i_\infty(A_i) = \lim_{n\to\infty} Q^i_{\gamma_0(n)}(A_i) = \lim_{n\to\infty} Q^i_{\gamma_1(n)}(A_i))$$

Dans ces conditions, on aurait, si $\overline{\Pi}^1$ était équi-asympto-projectif,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} |P_n^0(B_n) - P_n^1(B_n)|\right] = 0$$

(voir 1.3.*f*)).

Or

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} |P_n^0(B_n) - P_n^1(B_n)|\right] = \lim_{n\to\infty} |P_n^0[L_n \geqslant 0] - P_n^1[L_n \geqslant 0]|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left|\int_0^\infty \exp\ -\frac{\left(v-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} - \exp\left(-\frac{\left(v+\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx\right| \neq 0$$

2.*d*. *Propriétés de la fonction de discrimination, si elle existe.* — Les hypothèses du théorème 1.3.2. ne sont plus satisfaites et donc nous ne pouvons plus affirmer l'existence d'une fonction de discrimination.

On remarque cependant (voir (1.1.*b*) que, f_n désignant, pour tout n, la fonction de concentration de P_n^1 par rapport à P_n^0,

$$\lim_{x\to 0}(\limsup_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{x\to 0}(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)) = 0$$

Donc, s'il existe une fonction de discrimination D_{γ_0,γ_1}, elle vérifie

$$D_{\gamma_0,\gamma_1}(0) = 0.$$

Nous allons démontrer d'autre part qu'elle ne peut pas être égale à l'application identique de [0, 1]. En effet la suite des fonctions f_n, croissantes, concaves et vérifiant toutes

$$f_n(1) = 1,$$

convergerait alors uniformément vers l'application identique ; on rappelle que, les espaces étant sans atomes (hypothèse $\mathscr{H}$),

$$f_n(x) = \sup \{ u ; (\forall B_n \in \mathscr{B}_n)\ P_n^1(B_n) = u \quad \text{et} \quad P_n^0(B_n) = x \}$$

On aurait alors

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} (P_n^1(B_n) - P_n^0(B_n))] = 0$$

Or

$$\inf_{B_n\in\mathscr{B}_n} (P_n^1(B_n) - P_n^0(B_n)) = - \sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} \left(P_n^1\left(\complement B_n\right) - P_n^0\left(\complement B_n\right)\right)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{B_n\in\mathscr{B}_n} | P_n^1(B_n) - P_n^0(B_n) |] = 0$$

ce qui est contradictoire avec les conclusions de 2.*c*.

Il résulte enfin de la concavité de D_{γ_0,γ_1} que, s'il existe une valeur de $x \in]0, 1[$ telle que $D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) > x$, alors il en est de même sur tout]0, 1[.

3. *Cas où* $\sigma = +\infty$.

La normalité asymptotique régulière implique ici que la loi limite, selon $(P_n^0)_{\mathbb{N}}$, de la suite $(L_n)_{\mathbb{N}}$ est concentrée en $-\infty$, et donc celle de la suite $\left(\frac{\partial P_n^1}{\partial P_n^0}\right)_{\mathbb{N}}$ $(= (\exp L_n)_{\mathbb{N}})$ est concentrée en 0 ; son espérance mathématique est nulle, ce qui (voir 1.1.*b*) implique l'orthogonalité asymptotique de $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$, ainsi que la convergence de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ des fonctions de concentration vers la fonction constante égale à 1 (et donc la discrimination parfaite entre γ_0 et γ_1).

Ceci achève la démonstration du théorème 2.2.1.

Remarques.

1. Il résulte de la démonstration de la conclusion 3 qu'elle reste valable, même si l'hypothèse C (normalité asymptotique régulière) n'est pas satisfaite, sous la seule hypothèse C' :

La suite $(L_n)_{\mathbb{N}}$ *tend en loi, selon* $(P_n^0)_{\mathbb{N}}$, *vers la loi « dégénérée » concentrée en* $-\infty$.

2. L'hypothèse A n'a été utilisée que dans la partie 2.*c* de la démonstration (cas où $0 < \sigma < +\infty$) ; de plus, dans le cas où σ est nul, elle peut être déduite des autres, *via* la conclusion que $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$ sont équi-asymptoprojectifs et de même prolongement.

3. Sous les hypothèses B, C, D, la décomposition de Lebesgue de $\overline{\Pi}^1$ par rapport à $\overline{\Pi}^0$ est banalement assurée, puisqu'il y a soit contiguïté, soit orthogonalité asymptotique.

e) Cas particuliers des échantillons classiques

De nombreux statisticiens réservent le nom d'échantillon aux suites de valeurs prises par des variables aléatoires indépendantes *et de même loi.* Nous parlerons ici, dans ce cas, d'échantillon classique. De manière précise, nous poserons :

DÉFINITION 2.1.2. — *Un problème de test sur échantillons indépendants, de base*

$$\mathscr{U} = (\Theta, H_0, H_1, (X_i, \mathscr{X}_i, (Q_\theta^i)_{\theta\in\Theta})_{i\in\mathbb{N}}),$$

est dit classique *si et seulement si il existe*

— *un espace mesurable* $(X, \mathscr{X})$,

— *une famille de probabilités sur* $(X, \mathscr{X})$, *soit* $(Q_\theta)_\Theta$ *tels que, pour tout i,* $(X_i, \mathscr{X}_i, (Q_\theta^i)_{\theta\in\Theta})$ *soit isomorphe à* $(X, \mathscr{X}, (Q_\theta)_{\theta\in\Theta})$.

Nous appellerons base *du problème classique le terme*

$$\mathscr{V} = (\Theta, H_0, H_1, X, \mathscr{X}, (Q_\theta)_{\theta\in\Theta})$$

Notation. — Vu l'emploi d'indices supérieurs, nous distinguerons les exposants, dans la notation d'une probabilité produit, en les mettant entre crochets ; ainsi :

$$(\forall i \in \{0, 1\}) \qquad P_n^i = Q_{\gamma_i(n)}^{[n]}.$$

THÉORÈME 2.1.2. — *Dans le cas d'un problème de test sur échantillons indépendants* classique, *le théorème* 2.1.1. *peut être énoncé en faisant abstraction de l'hypothèse A.*

Démonstration. — Ainsi qu'il est relevé à la Remarque 2 du *d*) ci-dessus, l'hypothèse A n'intervient que dans la partie 2.*c* de la démonstration du théorème 2.1.1, c'est-à-dire après qu'ait été démontrée la contiguïté de $\overline{\Pi}^1$ par rapport à $\overline{\Pi}^0$; or, dans le cas d'un problème classique, cette hypothèse A peut se déduire de la contiguïté de $\overline{\Pi}^1$ par rapport à $\overline{\Pi}^0$, ainsi qu'il résulte immédiatement :

— du fait que, pour tout A appartenant à $\mathscr{X}$, la suite

$$(Q_{\gamma_0(n)}(A))_{\mathbb{N}}$$

converge (en vertu du caractère équi-asympto-projectif de $\overline{\Pi}^0$),

— de la proposition ci-dessous (qui peut être interprétée comme signifiant que la topologie « naturelle » dont doit être muni Θ est la moins fine rendant continue l'application

$$\theta \rightsquigarrow (Q_\theta(A))_{A\in\mathscr{X}}$$

de Θ dans $[0, 1]^{\mathscr{X}}$ muni de la topologie produit).

PROPOSITION 2.1.1. — *Soit un problème de test sur échantillons indépendants, classique, de base*

$$\mathscr{V} = (\Theta, H_0, H_1, X, \mathscr{X}, Q_\theta)_\Theta)$$

et soient γ_0 un repère et γ_1 un critère.

On suppose qu'il existe A_0, appartenant à $\mathscr{X}$, tel que

$$\limsup_{n\to\infty} Q_{\gamma_0(n)}(A_0) < \liminf_{n\to\infty} Q_{\gamma_0(n)}(A_0)$$

(*ou bien*

$$\limsup_{n\to\infty} Q_{\gamma_1(n)}(A_0) < \liminf_{n\to\infty} Q_{\gamma_0(n)}(A_0))$$

Alors les suites, adaptées à $(X^n, \mathscr{X}^n)_{\mathbb{N}}$, $(Q^{[n]}_{\gamma_0(n)})_{\mathbb{N}}$ *et* $(Q^{[n]}_{\gamma_1(n)})_{\mathbb{N}}$ *sont asymptotiquement étrangères (autrement dit $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$ sont asymptotiquement orthogonaux).*

Démonstration. — Soit $\mathscr{A} = \left\{ \emptyset, X, A_0, \complement A_0 \right\}$.

On note encore, pour tout θ,

Q_θ *la restriction de* Q_θ *à* $\mathscr{A}$
$Q_\theta^{[n]}$ *la restriction de* Q_θ^n *à* $\mathscr{A}^n$

Nous devons démontrer qu'existe, pour tout n, $A_n \in \mathscr{X}^n$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \left[Q^{[n]}_{\gamma_0(n)}(A_n) + Q^{[n]}_{\gamma_1(n)}\left(\complement A_n\right)\right] = 0$$

En fait, on obtiendra ce résultat avec, pour tout n, A_n appartenant à $\mathscr{A}_n$, et de ce fait, dans la suite de cette démonstration, toutes les suites de probabilités considérées vont être prises adaptées à $(X^n, \mathscr{A}^n)_{\mathbb{N}}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = Q_{\gamma_0(n)}(A_0) \qquad \text{et} \qquad b_n = Q_{\gamma_1(n)}(A_0)$$

Soient alors a, b, et N tels que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad 0 \leqslant a_n < a < b < b_n \leqslant 1.$$

Soit

$\hat{Q}_0$ *la probabilite définie sur* $\mathscr{A}$ *par* $\hat{Q}_0(A_0) = a$,
$\hat{Q}_1$ *la probabilit définie sur* $\mathscr{A}$ *par* $\hat{Q}_1(A_0) = b$.

On sait que les suites de probabilités

$$(\hat{Q}_0^{[n]})_{\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad (\hat{Q}_1^{[n]})_{\mathbb{N}}$$

sont asymptotiquement étrangères (elles sont en effet prolongeables, et (voir [*2*], VII, 9 ou [*16*]) de prolongements étrangers.

Soit, pour tout n, $\hat{A}_n \in \mathscr{A}^n$ tel que

$$\hat{Q}_0^{[n]}(\hat{A}_n) + \hat{Q}_1^{[n]}\left(\complement \hat{A}_n\right) = \inf_{A'_n \in \mathscr{A}^n} (\hat{Q}_0^{[n]})(A'_n) + \hat{Q}_1^{[n]}\left(\complement A'_n\right)$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ \hat{Q}_0^{[n]}(\hat{A}_n) + \hat{Q}_1^{[n]}\left(\complement \hat{A}_n\right)\right] = 0$$

On vérifie aisément que

$$\hat{Q}_0^{[n]}(\hat{A}_n) + \hat{Q}_1^{[n]}\left(\complement \hat{A}_n\right) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \inf\,(a^p(1-a)^{n-p}, b^p(1-b)^{n-p})$$

Soit de même, pour tout n, $A_n \in \mathscr{A}^n$, tel que :

$$Q_{\gamma_0(n)}^{[n]}(A_n) + Q_{\gamma_1(n)}^{[n[}(A_n) = \inf_{A'_n \in \mathscr{A}_n} (Q_{\gamma_0(n)}^{[n]}(A'_n) + Q_{\gamma_1(n)}^{[n]}(A'_n))$$

et alors

$$Q_{\gamma_0(n)}^{[n]}(A_n) + Q_{\gamma_1(n)}^{[n]}(A_n) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \inf a_n^p(1-a_n)^{n-p}, b_n^p(1-b_n)^{n-p})$$

Soit $n > N$; il résulte alors de la concavité sur [0, 1] des fonctions

$$x \rightsquigarrow x^p(1-x)^{n-p} \qquad (\text{où } p \in \{0, \ldots, n\})$$

et des inégalités

$$0 \leqslant a_n < a < b < b_n \leqslant 1$$

que, pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$

$$\inf(a^p(1-a)^{n-p}, b^p(1-b)^{n-p}) \geqslant \inf(a_n^p(1-a_n)^{n-p}, b_n^p(1-b_n)^{n-p})$$

et donc

$$\hat{Q}_0^{[n]}(A_n) + \hat{Q}_1^{[n]}\left(\complement A_n\right) \geqslant Q_{\gamma_0(n)}^{[n]}(A_n) + Q_{\gamma_1(n)}^{[n]}\left(\complement A_n\right)$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} Q_{\gamma_0(n)}^{[n]}(A_n) + Q_{\gamma_1(n)}^{[n]}\left(\complement A_n\right) = 0$$

ce qui établit le résultat annoncé.

Exemple : test sur le paramètre d'une loi de Bernoulli.

On considère le problème classique de base

$$([0, 1], [0, p_0],]p_0, 1], \{0, 1\}, 2^{\{0,1\}}, (Q_p)_{p\in[0,1]})$$

où — $p_0 \in [0, 1]$,

— pour tout p appartenant à $[0, 1]$, Q_p est la probabilité qui affecte la masse p à 1 et la masse $1-p$ à 0.

On remarque que, le problème étant « à rapport de vraisemblance monotone » (voir [*8*]), la fonction de discrimination stricte entre H_0 et H_1, pour un critère quelconque γ_1 (voir Définition 1.2.2.) est identique, si elle existe, à la fonction de discrimination entre H_0 et H_1, pour le critère γ_1 et le repère γ_0 défini par

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \gamma_0(n) = p_0$$

ce qui assure l'hypothèse B du théorème 2.1.1. ($\overline{\Pi}^0$ est même projectif).

Soit un critère γ_1 ; on note, pour tout n, $\gamma_1(n) = p_n$ et on suppose que la suite $(p_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers p_0 (ce qui assure la condition A du théorème 2.1.1.).

On remarque que (notations introduites en 2.1.*b*))

$$\int l_{n,i}\,dQ_{\gamma_0(n)}^i = p_0 \operatorname{Log}\frac{p_n}{p_0} + (1-p_0)\operatorname{Log}\frac{1-p_n}{1-p_0} \sim -\frac{(p_n-p_0)^2}{2p_0(1-p_0)}$$

et

$$\int l_{n,i}^2\,dQ_{\gamma_0(n)}^i - \left[\int l_{n,i}\,dQ_{\gamma_0(n)}^i\right]^2 = \sqrt{p_0(1-p_0)}\operatorname{Log}\frac{p_n}{p_0}\frac{1-p_0}{1-p_n} \sim \frac{p_n-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$$

Il résulte alors du théorème central-limite, avec condition de Lindeberg, que

$$\mathscr{L}_{P_n^0}(L_n) \sim \mathcal{N}\left(-\frac{n(p_n - p_0)^2}{2p_0(1-p_0)},\ \sqrt{n}\frac{p_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$$

ce qui assure la condition C du théorème 2.1.1.

Alors :

— si $p_n - p_0 = \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\overline{\Pi}^1$ est équi-asympto-projectif et contigu à $\overline{\Pi}^0$, et γ_0 et γ_1 ne peuvent être discriminés.

— si $\frac{1}{\sqrt{n}} = \circ(p_n - p_0)$, $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$ sont asymptotiquement orthogonaux et γ_0 et γ_1 sont parfaitement discriminés,

— si $\sqrt{n}(p_n - p_0)$ converge vers une limite $k(0 < k < +\infty)$, une étude directe permet de constater que la fonction de discrimination D_{γ_0,γ_1} existe et vérifie, N étant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et N^{-1} sa réciproque,

$$(\forall x \in [0, 1]) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) = 1 - N\left(\frac{k}{\sqrt{p_0 q_0}} + N^{-1}(1-x)\right)$$

2.2. TESTS DE POSITION

a) Présentation du problème

DÉFINITION 2.2.1. — *Un problème de test sur échantillons indépendants, de base*

$$= (\Theta, H_0, H_1, (X_i, \mathscr{X}_i, (Q_\theta^i)_{\theta\in\Theta})_{i\in\mathbb{N}})$$

est dit de position *si et seulement si*

— $\Theta \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

— $(\forall i \in \mathbb{N}) \qquad (X_i, \mathscr{X}_i) = (\mathbb{R}, \mathscr{B})$,

— *il existe une probabilité* Q, *sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, *telle que*

$$Q^i_{(d_1,\dots,d_i,\dots)} = Q \circ \tau_{d_i}$$

(où τ_{d_i} désigne la translation d'amplitude d_i).

On appellera base *du problème de position le terme*

$$\mathscr{P} = (\Theta, H_0, H_1, Q)$$

b) Hypothèses complémentaires

Nous serons amenés à faire un certain nombre d'hypothèses techniques supplémentaires que nous rassemblons dans la définition suivante.

DÉFINITION 2.2.2. — *Un problème de test de position, de base*

$$(\Theta, H_0, H_1, Q)$$

est dit standard *si et seulement si* Q *est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue* λ*) et sa densité admet un représentant* φ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

A) φ *est continue et dérivable, sauf éventuellement sur un ensemble* E *de points exceptionnels tels que, pour tout intervalle borné* I, *le cardinal de* $E \cap I$ *soit fini.*

B) *Étant donné deux points consécutifs de* E, a *et* b, *et*

$$\varepsilon \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[,$$

φ' *est bornée sur l'intervalle* $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ *(ceci est en particulier vrai si* φ' *est continue).*

C) *L'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)dx$$

a un sens et est nulle (ceci est en particulier vérifié si φ *est une fonction absolument continue).*

Dans toute la suite, les problèmes étudiés seront standards, et nous parlerons indifféremment de la base

$$(\Theta, H_0, H_1, Q)$$

ou de la base

$$(\Theta, H_0, H_1, \varphi)$$

Remarque. — La condition

$$Q^i_{(d_1,\ldots,d_i,\ldots)} = Q \circ \tau_{d_i}$$

qui figure dans la définition 2.2.1. exprime, dans le cas standard, que toute probabilité Q^i_θ est absolument continue et que sa densité admet un représentant φ^i_θ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^i{}_{(d_1,\ldots,d_i,\ldots)} = \varphi(x - d_i)$$

c) Information de Fisher

Nous appellerons *information de Fisher* du problème de position standard de base

$$(\Theta, H_0, H_1, Q)$$

le nombre réel

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi'}{\varphi}\right]^2 dQ = \int_{D} \left[\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]^2 \varphi(x)dx$$

(où $D = \{ x ; \varphi(x) \neq 0 \}$).

Justification (voir Hajek [5], p. 17) : pour tout $d_0 \in \mathbb{R}$, I coïncide avec l'information de Fisher, au sens classique, de la famille de probabilités, sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, $(Q \circ \tau_d)_{d \in \mathbb{R}}$, prise en d_0.

d) Conditions suffisantes de réalisation des hypothèses du théorème 2.1.1.

Notations. — Soient donnés un repère γ_0 et un critère γ_1 ; on note pour $j = 0$ *ou* $j = 1$,

$$\gamma_j(n) = (d^n_{j,1}, \ldots, d^n_{j,i}, \ldots)$$

Dans tout cet alinéa *d*), on reprend les notations du théorème 2.1.1, et on suppose le problème standard ; on ne le précisera plus dans les lemmes ci-dessous.

LEMME 2.2.1 (réalisation de l'hypothèse A du théorème 2.1.1.). — *Pour que, pour tout i, et tout* $A_i \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, *les suites*

$$(Q^i_{\gamma_0(n)}(A_i))_{n \in \mathbb{N}} \quad et \quad (Q^i_{\gamma_1(n)}(A_i))_{n \in \mathbb{N}}$$

convergent et aient même limite, il suffit que, pour tout i, les suites

$$(d^n_{0,i})_{n \in \mathbb{N}} \quad et \quad (d^n_{1,i})_{n \in \mathbb{N}}$$

convergent et aient même limite d_i.

Démonstration. — Fixons $j \in \{0, 1\}$ et $i \in \mathbb{N}$; il résulte du théorème de Riemann-Lebesgue que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} | \varphi(x - d^n_{j,i}) - \varphi(x - d_i) | \, dx = 0$$

ce qui entraîne immédiatement le résultat désiré.

LEMME 2.2.2. (réalisation de l'hypothèse C du théorème 2.1.1.). — *Pour que le couple de systèmes préprojectifs* $(\overline{\Pi}^0, \overline{\Pi}^1)$ *soit régulièrement asymptotiquement normal, il suffit que*

— *l'information de Fisher soit finie non nulle ;*

— $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |d^n_{0,i} - d^n_{1,i}| = 0$

— $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |d^n_{0,i} - d^n_{1,i}|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} [d^n_{0,i} - d^n_{1,i}]^2}} = 0$

— $\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} [d^n_{0,i} - d^n_{1,i}]^2 < \infty$

Les suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{\mathbb{N}}$ *associées à* $(\overline{\Pi}^0, \overline{\Pi}^1)$ (voir Définition 2.1.1.) *sont alors définies par*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left| \begin{array}{l} b_n^2 = \mathrm{I} \sum\limits_{i=1}^{n} [d^n_{0,i} - d^n_{1,i}]^2 \\ a_n = -\dfrac{1}{2} b_n^2 \end{array} \right.$$

Remarque. — La nécessité d'introduire l'hypothèse

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [d^n_{0,i} - d^n_{1,i}]^2 < \infty$$

est due au fait que nous avons dû introduire au lemme 2.1.2., dont nous allons faire usage ici, l'hypothèse « supplémentaire »

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n^0(\mathrm{W}_n) < \infty$$

Le lemme 2.2.2'. ci-dessous nous permettra cependant de constater que cette hypothèse ne nous fait rien perdre pour le présent problème.

Démonstration. — Dans le cas où φ est absolument continue, et où la suite

$$\left(\sum_{i=1}^{n} [d^n_{0,i} - d^n_{1,i}]^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

admet une limite non nulle, ce lemme a été démontré par Hajek (voir [5], p. 211-213).

1. Eliminant les cas banaux où

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \qquad d_{0,i}^n - d_{1,i}^n = 0,$$

posons

$$b_n = \left(\mathrm{I} \sum_{i=1}^{n} [d_{0,i}^n - d_{1,i}^n]^2 \right)^{1/2} \qquad (0 < b_n < +\infty)$$

et démontrons que les variables aléatoires $\frac{l_{n,i}}{b_n}$ sont uniformément asymptotiquement négligeables; il suffit (voir lemme 2.1.1.) que les variables aléatoires $\frac{1}{b_n}(\exp(l_{n,i}) - 1)$ le soient, c'est-à-dire ici que

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_{\gamma_0(n)}^i \left[\left\{ x ; \frac{1}{b_n} \left| \frac{\varphi(x - d_{1,i}^n)}{\varphi(x - d_{0,i}^n)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} \right] = 0$$

autrement dit

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} Q \left[\left\{ x ; \frac{1}{b_n} \left| \frac{\varphi(x - d_{1,i}^n + d_{0,i}^n)}{\varphi(x)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} \right] = 0$$

Soient fixés $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$; il existe un intervalle borné $[a, b]$ et $k > 0$ tel que

$$Q\left[\complement [a, b] \cup [\varphi < k] \right] < \frac{\eta}{2}.$$

Soient alors $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les éléments, rangés par ordre croissant, de $E \cap [a, b]$ (voir Définition 2.2.2.); Q étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que, si on pose

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i - \varepsilon', a_i + \varepsilon'],$$

alors

$$Q(B) < \frac{\eta}{2}.$$

$[a, b] \cap \complement B$ est une union finie d'intervalles sur chacun desquels la dérivée φ' existe et est bornée (voir Définition 2.2.2.); soit

$$S = \sup_{x \in [a,b] \cap \complement B} |\varphi'(x)|.$$

Alors, pour tout entier n, et tout i compris entre 1 et n, on a

$$(\forall x \in [a, b] \cap [\varphi \geqslant k] \cap \mathrm{B}) \quad \frac{1}{b_n}\left|\frac{\varphi(x - d^n_{1,i} + d^n_{0,i})}{\varphi(x)} - 1\right| \leqslant \frac{\mathrm{S} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |d^n_{0,i} - d^n_{1,i}|}{k\sqrt{\mathrm{I}\sum\limits_{i=1}^{n}(d^n_{0,i} - d^n_{1,i})^2}}$$

et donc, puisque, par hypothèse, le second membre de cette inégalité tend vers 0,

$(\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N})(\forall n > \mathrm{N})(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$

$$\mathrm{Q}\left[\left\{x \in [a, b] \cap [\varphi \geqslant k] \cap \mathrm{B}\,;\ \frac{1}{b_n}\left|\frac{\varphi(x - d^n_{1,i})}{\varphi(x - d^n_{0,i})} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right] = 0$$

ce qui achève la démonstration.

2. Les notations sont ici celles de l'alinéa 2.1.c). Démontrons que

$$\mathscr{L}_{\mathrm{P}^0_n}(\mathrm{W}_n) \sim \mathscr{N}(\mathrm{E}^0_n(\mathrm{W}_n), \sigma^0_n(\mathrm{W}_n))$$

et

$$\mathrm{E}^0_n(\mathrm{W}_n) \sim -\frac{1}{4}(\sigma^0_n(\mathrm{W}_n))^2$$

ce qui, d'après le lemme 2.1.2., entraîne le résultat demandé relatif au couple $(\overline{\Pi}^0, \overline{\Pi}^1)$.

Nous introduisons, comme Hajek, les variables $t_{n,i}$ et T_n définies sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n})$ par

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \quad t_{n,i}(x_1, \ldots, x_n) \left|\begin{array}{l} = \dfrac{\varphi'(x_i - d^n_{0,i})}{\varphi(x_i - d^n_{0,i})} \\ (\text{si } \varphi(x_i - d^n_{0,i}) \neq 0) \\ = 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \mathrm{T}_n = -\sum_{i=1}^{n}(d^n_{1,i} - d^n_{0,i})t_{n,i}$$

On vérifie immédiatement que les variables aléatoires $t_{n,i}$ sont, selon $(\mathrm{P}^0_n)_{\mathbb{N}}$, toutes de même loi (c'est-à-dire la loi image de Q par l'application Log φ), aux caractéristiques suivantes :

— espérance mathématique nulle (en vertu de la définition 2.2.2., condition C) (et donc

$$\mathrm{E}^0_n\left(\frac{\mathrm{T}_n}{b_n}\right) = 0)$$

— écart-type I (et donc

$$\sigma_n^0\left(\frac{T_n}{b_n}\right) = 1)$$

On en déduit, en vertu du théorème central limite avec condition de Lindeberg, que la suite $\left(\frac{T_n}{b_n}\right)_{\mathbb{N}}$ converge en loi, selon $(P_n^0)_{\mathbb{N}}$ vers $\mathcal{N}(0, 1)$, et ceci sans aucune hypothèse sur la suite (b_n).

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Hajek pour la démonstration des résultats suivants, qui restent valables quoique nos hypothèses sur φ soient légèrement différentes des siennes, et ne font intervenir aucune hypothèse sur la suite (b_n) :

$$E_n^0(W_n) \sim -\frac{1}{4}b_n^2$$

$$\sigma_n^0(W_n - T_n) \leqslant 2\sqrt{\frac{b_n}{I}}\,g(d_{1,i}^n - d_{0,i}^n)$$

(où g est une fonction positive ou nulle, qui s'annule à l'origine où elle est continue).

En conséquence,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^0\left(\frac{W_n - T_n}{b_n}\right) = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^0(W_n)}{b_n} = 1$$

On a donc la convergence en probabilité, selon la suite $(P_n^0)_{\mathbb{N}}$, de la suite $\left(\frac{W_n - T_n}{b_n} + \frac{1}{4}b_n\right)_{\mathbb{N}}$, vers 0, ce qui entraîne que

$$\mathcal{L}_{P_n^0}\left(\frac{W_n + \frac{1}{4}b_n^2}{b_n}\right) \to \mathcal{N}(0, 1)$$

autrement dit que

$$\mathcal{L}_{P_n^0}(W_n) \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{4}b_n^2, b_n\right)$$

(ou encore, puisque

$$E_n^0(W_n) \sim -\frac{1}{4}b_n^2$$

et

$$\sigma_n^0(\mathrm{W}_n) \sim b_n$$
$$\mathscr{L}_{\mathrm{P}_n^0}(\mathrm{W}_n) \sim \mathscr{N}(\mathrm{E}_n^0(\mathrm{W}_n), \sigma_n^0(\mathrm{W}_n)))$$

Ceci achève la démonstration du lemme 2.2.2.

LEMME 2.2.2′. (réalisation de l'hypothèse C′ du théorème 2.1.1. (voir la Remarque 1 suivant ce théorème)).

Si
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (d_{0,i}^n - d_{1,i}^n)^2 = +\infty,$$

la suite $(\mathrm{L}_n)_{\mathbb{N}}$ *tend en loi, selon* $(\mathrm{P}_n^0)_{\mathbb{N}}$, *vers la variable aléatoire dégénérée en* $-\infty$.

Démonstration. — Il suffit, d'après la remarque qui suit l'énoncé du lemme 2.1.2., de démontrer que, si on note $\delta_{-\infty}$ la probabilité de Dirac en $-\infty$,

$$\mathscr{L}_{(\mathrm{P}_n^0)}(\mathrm{W}_n) \to \delta_{-\infty}$$

et ceci résulte immédiatement des résultats suivants, obtenus dans la démonstration du lemme précédent (2.2.2.), mais dont nous avons remarqué qu'ils ne faisaient intervenir aucune hypothèse sur la suite (b_n) :

$$\frac{\mathrm{W}_n - \mathrm{T}_n}{b_n} + \frac{1}{4} b_n \overset{\mathrm{P}_0}{\to} 0$$
$$\mathscr{L}_{\mathrm{P}_n^0}\left(\frac{\mathrm{T}_n}{b_n}\right) \to \mathscr{N}(0, 1)$$

LEMME 2.2.3. (réalisation de l'hypothèse B du théorème 2.1.1.). — *Pour que* $\overline{\Pi}^0$ *soit un système équi-asympto-projectif, il suffit que toutes les suites* $(d_{0,i}^n)_{n\geqslant i}$ *convergent vers une même limite d, et vérifient*

$$-\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (d_{0,i}^n - d)^2 = 0$$

$$-\ \lim_{n\to\infty} \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |d_{0,i}^n - d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_{0,i}^n - d)^2}} = 0$$

Démonstration. — $\overline{\Pi}^0$ est un système projectif, donc *a fortiori* équi-asympto-projectif, dans le cas particulier où le repère est constant, c'est-à-dire où tous les $d_{0,i}^n$ sont égaux à une même valeur.

Étant donné un système $\overline{\Pi}^0$ satisfaisant aux hypothèses du lemme, à démontrer, soit $\overline{\Pi}^{00}$ le système projectif associé à l'application constante de $\mathbb{N}$ dans Θ ($\subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), de valeur $(d, \ldots, d, \ldots)$.

Il résulte des lemmes 2.2.1. et 2.2.2. que les hypothèses du théorème 2.1.1. sont satisfaites, en y remplaçant le couple $(\overline{\Pi}^0, \overline{\Pi}^1)$ par le couple $(\overline{\Pi}^{00}, \overline{\Pi}^0)$; on se trouve de plus dans le cas 1 ($\lim_{n\to\infty} b_n = 0$), et donc Π^0 est équi-asympto-projectif.

e) Récapitulation des résultats

L'application des quatre lemmes précédents au théorème 2.1.1. permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Soit donné un problème de* test de position standard, *de base*

$$\mathscr{P} = (\Theta, \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \varphi)$$

et

— *un repère γ_0 (auquel est associé le système préprojectif $\overline{\Pi}^0$),*

— *un repère γ_1 (auquel est associé le système préprojectif $\overline{\Pi}^1$) (pour tout $j \in \{0, 1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$\gamma_j(n) = (d_{j,i}^n)_{i\in\mathbb{N}})$$

On suppose que

(1) *l'information de Fisher* I *est finie non nulle,*

(2) $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |d_{0,i}^n - d_{1,i}^n| = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |d_{0,i}^n - d_{1,i}^n|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (d_{0,i}^n - d_{1,i}^n)^2}}$

(4) *il existe d tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n (d_{0,i}^n - d)^2 = 0$$

(5) *la suite* $\left(\sum_{i=1}^{n}(d_{0,i}^{n} - d_{1,i}^{n})^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet, dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *une limite notée* $\frac{\sigma}{\mathrm{I}}$.

Alors :

— *si* $\sigma < +\infty$, $\overline{\Pi}^1$ *est contigu à* $\overline{\Pi}^0$ *; de plus :*

— *si* $\sigma = 0$, $\overline{\Pi}^1$ *est équi-asympto-projectif, et* γ_0 *et* γ_1 *ne peuvent être discriminés.*

— *si* $0 < \sigma < +\infty$, $\overline{\Pi}^1$ *ne peut pas être équi-asympto-projectif; si existe* D_{γ_0,γ_1}, *fonction de discrimination entre* γ_0 *et* γ_1, *elle vérifie*

$$— (\forall x \in \{0, 1\}) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) = x$$
$$— (\forall x \in]0, 1[) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) > x$$

— *si* $\sigma = +\infty$, $\overline{\Pi}^0$ *et* $\overline{\Pi}^1$ *sont asymptotiquement orthogonaux et* γ_0 *et* γ_1 *sont parfaitement discriminés.*

f) Cas particuliers

(1) $H_0 = \Delta$ (DIAGONALE DE $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), $H_1 = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} - \Delta$

Le problème est ici, pour tout n, de tester l'identité des n lois $Q_\theta^1, \ldots, Q_\theta^n$. Nous renvoyons le lecteur à Hajek [5] pour plus de détails, étant donné que ce problème est, dans le cas où $0 < \sigma < +\infty$, un des thèmes principaux de son ouvrage ; rappelons seulement (en le transcrivant dans notre propre vocabulaire) que, à tout critère γ_1, Hajek associe systématiquement le repère γ_0 défini par

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \qquad d_{0,i}^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{1,i}^n$$

qui est le repère « le plus défavorable » relatif à γ_1 (autrement dit tel que, si elle existe, la fonction de discrimination D_{γ_0,γ_1} soit identique à la fonction de discrimination stricte entre H_0 et γ_1).

(2) PROBLÈME À « ÉCHANTILLON CLASSIQUE » (VOIR 2.1.*e*)

Pour qu'un problème de test de position soit classique, il faut et il suffit évidemment que Θ soit contenu dans la diagonale de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; par abus de langage, on considérera alors que $\Theta \in \mathbb{R}$ (et donc γ_0 et γ_1 seront à valeurs dans $\mathbb{R}$; on posera

$$\gamma_0(n) = d_0^n \qquad \text{et} \qquad \gamma_1(n) = d_1^n)$$

Les conditions du théorème 2.2. s'expriment alors (pour un problème *standard* et *classique*) :

(1) l'information de Fisher I est finie non nulle,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} |d_0^n - d_1^n| = 0$,

(3) inutile, car toujours vérifiée ($\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1/2} = 0$),

(4) il existe d tel que

$$\lim_{n\to\infty} n[d_0^n - d]^2 = 0$$

(5) la suite $(n[d_0^n - d_1^n]^2)_{\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Dans le cas particulier où γ_0 est constante (soit, par exemple,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \gamma_0(n) = 0)$$

la condition (4) est vérifiée, et les conditions (2) et (5) s'expriment :

— $\lim\limits_{n\to\infty} d_1^n = 0$

— la suite $(n(d_1^n)^2)_{\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Il résulte alors du théorème 2.2. que :

— si $d_1^n = 0\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, γ_0 et γ_1 ne peuvent être discriminés,

— si $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0(d_1^n)$, γ_0 et γ_1 sont parfaitement discriminés.

Le lecteur pourra s'assurer que les hypothèses sont bien réalisables dans les exemples suivants :

— loi normale,

— loi « γ_p » (avec $p > 1$),

— loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme (avec $n \geqslant 3$) ;

mais que par contre elles ne le sont pas dans les cas suivants

— loi exponentielle (loi « γ_1 ») car le problème n'est pas standard (en effet

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx \neq 0),$$

— loi uniforme, car l'information de Fisher est nulle,

— loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme (l'information de Fisher est infinie),

— loi de Cauchy (l'information de Fisher est infinie).

La situation particulière détaillée ci-dessus, où le repère γ_0 est constant, est celle qu'on rencontre dans les problèmes suivants :

— test de position *bilatère* ($H_0 = \{0\}$, $H_1 = \mathbb{R} - 0$),

— test de position *unilatère* ($H_0 = \mathbb{R}_-$, $H_1 = \mathbb{R}_+^*$) et *rapport de vraisemblance monotone* (en effet, voir Lehmann [*8*], p. 68), pour tout critère γ_1, la fonction de discrimination entre le critère γ_1 et le repère constant 0 coïncide avec la fonction de discrimination stricte entre H_0 et H_1 pour le critère γ_1.

Exemples d'étude dans certains des cas d'échec de la méthode

A) *Cas de la loi uniforme.*

Soit Q la loi uniforme sur [0, 1] ; on considère le repère constant 0 et le critère γ_1 (on pose $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_1(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$).

Une étude directe fondée sur :

— les théorèmes 1.3.1. et 1.3.2.,

— la remarque que, si $|\theta_n| \leqslant 1$,

$$\sup_{B_n \in \mathscr{B}_n} |P_n^0(B_n) - P_n^1(B_n)| = 1 - (1 - |\theta_n|)^n$$

— la considération de la fonction f_n de concentration de P_n^0 relativement à P_n^1, définie par :

$$\begin{aligned} &f_n(0) = 1 - (1 - |\theta_n|)^n \\ &\text{si } 0 \leqslant x \leqslant (1 - |\theta_n|)^n,\ f_n(x) = 1 - (1 - |\theta_n|)^n + x \\ &\text{si } x \geqslant (1 - |\theta_n|)^n,\ f_n(x) = 1 \end{aligned}$$

permet de conclure que

— $\overline{\Pi}^1$ est un système équi-asympto-projectif si et seulement si

$$\theta_n = 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

(et alors γ_0 et γ_1 ne peuvent pas être discriminés) ;

— $\overline{\Pi}^0$ et $\overline{\Pi}^1$ sont asymptotiquement étrangères, et donc γ_0 et γ_1 sont parfaitement discriminés si et seulement si

$$\frac{1}{n} = 0(\theta_n)$$

— si l'on n'est dans aucun des deux cas précédents, $\overline{\Pi}^1$ est simplement

Lebesgue-décomposable, et il existe une fonction de discrimination si et seulement si la suite $(n|\theta_n|)_{\mathbb{N}}$ admet une limite $\alpha(\in \mathbb{R}_+^*)$; on a alors

— si $0 \leqslant x \leqslant e^{-\alpha}$, $D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) = 1 - e^{-\alpha} + x$,
— si $x \geqslant e^{-\alpha}$, $D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) = 1$.

On constate qu'on a ici une décomposition de Lebesgue non banale, situation qui était exclue sous les hypothèses de théorème 2.1.1. (voir la remarque 3 du 2.1.*d*)).

Peut-on, comme c'était le but du théorème 1.3.1., interpréter D_{γ_0,γ_1} à l'aide de la décomposition de Lebesgue de $\overline{\Pi}^1$ par rapport à $\overline{\Pi}^0$? Remarquons qu'on peut prendre pour partie contiguë dans cette décomposition le système préprojectif $\overline{\Pi}^{11}$ tel que, pour tout n, P_n^{11} soit la restriction de P_n^1 à $[0, 1 + \theta_n]^n$ si $\theta_n < 0$ et à $[\theta_n, 1]^n$ si $\theta_n > 0$; $\overline{\Pi}^{11}$ est un système asympto-projectif de mesures, dont le prolongement est P_∞^{11}, produit par $e^{-\alpha}$ de la probabilité uniforme sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$; en effet, puisque P_n^0 est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^n$, on a pour tout $B_n \in \mathscr{B}_n$ et tout $m \geqslant n$, si, par exemple, $\theta_n > 0$,

$$P_m^{11}[\pi_{nm}^{-1}(B_n)] = P_n^0(B_n \cap [\theta_m, 1]^n).(1 - \theta_m)^{m-n}$$

et donc

$$\lim_{m\to\infty} P_m^{11}[\pi_{nm}^{-1}(B_n)] = P_n^0(B_n).e^{-\alpha} = P^{11}(\pi_n^{-1}(B_n))$$

La fonction de concentration f_∞ de P_∞^0 par rapport à une probabilité dont la partie absolument continue, dans la décomposition de Lebesgue, par rapport à P_∞^0, serait P_∞^{11}, vérifierait

$$(\forall x \in [0, 1]) \qquad f_n(x) = 1 - e^{-\alpha} + xe^{-\alpha}.$$

f_∞ ne coïncide donc pas avec D_{γ_0,γ_1}. Dans ces conditions, Π^{11} ne peut pas être un système équi-asympto-projectif ; en effet, on serait alors dans les conditions d'application du théorème 1.3.1. qui impliquerait la coïncidence de f_∞ et D_{γ_0,γ_1} ; on peut d'ailleurs remarquer directement que, pour tout n, si, par exemple, $\theta_n > 0$

$$P_\infty^{11}(\pi_n^{-1}([\theta_n, 1]^n)) = e^{-\alpha}(1 - \theta_n)^n$$
$$P_n^{11}([\theta_n, 1]^n) = (1 - \theta_n)^n$$

et que donc on ne peut avoir

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B_n \in \mathscr{B}_n} |P_\infty^{11}(\pi_n^{-1}(B_n)) - P^{11}(B_n)| = 0$$

B) *Cas de la loi exponentielle.*

Mêmes notations qu'en A, Q désignant maintenant la loi exponentielle de paramètre 1 sur $\mathbf{R}_+$ (de densité φ définie par :

si $x < 0$, $\varphi(x) = 0$
si $x > 0$, $\varphi(x) = e^{-x}$.

L'étude est très analogue à la précédente. On a, pour tout entier n,

$$\sup_{\mathrm{B}_n \in \mathscr{B}_n} |\mathrm{P}_n^0(\mathrm{B}_n) - \mathrm{P}_n^1(\mathrm{B}_n)| = 1 - \exp(-n\theta_n)$$

Ici, la forme de la fonction f_n varie suivant le signe de θ_n

— si $\theta_n > 0$,

$$\text{— si } 0 \leqslant x \leqslant \exp(-n\theta_n),\ f_n(x) = \frac{x}{\exp(-n\theta_n)}$$

$$\text{— si } x \leqslant \exp(-n\theta_n),\ f_n(x) = 1\ ;$$

— si $\theta_n < 0$,

pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = 1 - \exp(n\theta_n) + x \exp(n\theta_n)$.

Comme dans l'étude précédente, on aura donc à comparer la suite $(\theta_n)_{\mathbb{N}}$ à la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{N}}$; mais ici ce n'est que si $n\theta_n$ (et non plus $|n\theta_n|$) tend vers une limite quand n tend vers l'infini qu'on peut conclure à l'existence d'une décomposition de Lebesgue de $\overline{\Pi}^1$ par rapport à $\overline{\Pi}^0$ et à l'existence d'une fonction de discrimination. Cette décomposition est banale si la limite de $n\theta_n$ est > 0 ; en effet alors $\overline{\Pi}^1$ est contigu à $\overline{\Pi}^0$.

Par contre la décomposition n'est pas banale dans le cas où la limite de $n\theta_n$ est < 0. On peut prendre pour partie contiguë le système préprojectif $\overline{\Pi}^{11}$ obtenu en prenant, pour tout n, la mesure P_n^{11} égale à la restriction de P_n^1 à $\mathbb{R}_+^n$.

Mais alors (propriété classique des probabilités exponentielles), la mesure P_n^{11} n'est autre que le produit par $\exp(n\theta_n)$ de P_n^0.

Notons alors P_∞^{11} la mesure définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme produit par

$$\exp(\lim_{n\to\infty} n\theta_n)$$

de la probabilité P_∞^0 $(= \mathrm{Q}^{[\mathbb{N}]})$; on a, pour tout n et tout $\mathrm{B}_n \in \mathscr{B}_n$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n^{11}(\mathrm{B}_n) &= \mathrm{P}_n^0(\mathrm{B}_n).\exp(n\theta_n) \\ \mathrm{P}_\infty^{11}(\pi_n^{-1}(\mathrm{B}_n)) &= \mathrm{P}_\infty^0(\pi_n^{-1}(\mathrm{B}_n)).\exp(\lim_{n\to\infty} n\theta_n) \\ &= \mathrm{P}_n^0(\mathrm{B}_n).\exp(\lim_{n\to\infty} n\theta_n) \end{aligned}$$

et donc $\overline{\Pi}^{11}$ est un système équi-asympto-projectif admettant P_{∞}^{11} pour prolongement ; on est, *dans ce cas*, dans les conditions d'application du théorème 1.3.1. et on constate bien en effet que la fonction de discrimination D_{γ_0,γ_1}, définie par

$$(\forall x \in [0, 1]) \qquad D_{\gamma_0,\gamma_1}(x) = 1 + (x - 1) \lim_{n\to\infty} (\exp (n\theta_n))$$

est à la fois :

— la limite des fonctions f_n,

— la fonction de concentration de P_{∞}^{0} par rapport à toute probabilité dont la partie absolument continue dans la décomposition de Lebesgue par rapport à P_{∞}^{0} est P_{∞}^{11} (et dont la partie étrangère est de masse

$$1 - \lim_{n\to\infty} (\exp (n\theta_n))$$

2.3. TESTS D'ÉCHELLE

a) Présentation du problème

DÉFINITION 2.3.1. — *Reprendre la définition* 2.2.1. *en y remplaçant*

— de position *par* d'échelle,

— *la translation* τ_{d_i} *par l'homothétie, notée* ρ_{d_i},

$$x \to x \exp(-d_i)$$

b) Hypothèses complémentaires

DÉFINITION 2.3.2. — Problème de test d'échelle *standard*; reprendre la définition 2.2.2. en posant

$$\psi : x \to x\varphi(x)$$

et en y remplaçant :

— dans B : φ' est bornée par ψ' est bornée

— dans C :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)dx \qquad \text{par} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)dx$$

(ici encore l'hypothèse C est vérifiée en particulier si φ est une fonction absolument continue).

c) Information de Fisher

Ici

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\psi'}{\varphi}\right]^2 dQ = \int_{D} \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi(x)}\right]^2 \varphi(x)dx$$

(où $D = \{ x ; \varphi(x) > 0 \}$

d) Résultats

Les énoncés des lemmes 2.2.1., 2.2.2. (et 2′) et 2.2.3., ainsi que du théorème 2.3. restent valables dans ce cas, avec les nouvelles interprétations de l'information de Fisher et des coefficients $d^n_{0,i}$ et $d^n_{1,i}$. Nous n'en reprendrons pas les démonstrations, très analogues à celles relatives aux tests de position (et faisant, comme elles, usage de méthodes introduites par Hajek ([5], p. 213 à 215); on remplace partout $\varphi'(x - d^n_{j,i})$ par $\psi(x \exp(- d^n_{j,i}))$.

Dans le cas particulier des théorèmes classiques, on obtient le même résultat qu'en 2.2.*f* (2), mais on remarque que, cette fois, les hypothèses nécessaires (problème standard et information de Fisher finie non nulle) sont encore satisfaites pour la loi exponentielle (mais la première ne l'est pas pour la loi uniforme).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] S. Bochner and R. S. Phillips, Additive set functions and vector lattices. *Annals of Math.*, t. **42**, 1941, p. 316-324.
[*2*] J. L. Doob, *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1953.
[*3*] D. A. S. Fraser, *Non parametric methods in Statistics*, Wiley, New York, 1956.
[*4*] J. Hajek, Asymptotically most powerful rank-order tests. *Annals Math. Stat.*, t. **33**, p. 1124-1147.
[*5*] J. Hajek et Z. Sidak, *Theory of rank tests*. Academic Press, New York, 1967.
[*6*] M. G. Kendall and A. Stuart, *The advanced theory of statistics*, vol. 2, Griffin, London, 1961.
[*7*] L. Lecam, Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. of Calif. publications in Statistics*, t. **3**, n° 2, 1960, p. 37-98.
[*8*] E. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, Wiley, New York, 1939.
[*9*] M. Loeve, *Probability theory*, 2e édition, Van Nostrand, Princeton, 1960.
[*10*] J. Neymann, Optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses. *The H. Cramer Jubilee Volume*, Alinquist and Wiksell, Uppsala, 1958.
[*11*] J.-P. Raoult, Contiguïté. Décomposition de Lebesgue des suites de mesures. *Bulletin des Sciences Mathématiques* (*à paraître* en 1969 ou 1970).
[*12*] J.-P. Raoult, Asympto-martingales. Contiguïté. Propriétés asymptotiques locales des tests. *Thèse de Doctorat es-Sciences Mathématiques*, Faculté des Sciences de Paris, 1969.

[13] J.-P. RAOULT, Asympto-martingales et contiguïté. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **264**, 1967, p. 329-332.

[14] J.-P. RAOULT, Limites projectives de probabilités. Application à l'analyse statistique séquentielle ou continue. *Actes de la 35e Session de l'institut International de Statistique*, Belgrade, 1965.

[15] G. ROMIER, Modèle d'expérimentation statistique. *Introduction à la Statistique Mathématique* (ouvrage collectif à paraître. Institut de Statistique de l'Université de Paris, 1968).

[16] D. VAGUELSY, Exhaustivité asymptotique et sous-tribus convergentes. *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **264**, 1967, p. 764-766.

(Manuscrit reçu le 11 juillet 1969).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1702*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5955. 2-1970