ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HERVÉ REINHARD

BERNARD ROYNETTE

# Recollement de deux processus de Markov et fonctionnelles additives

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 6, nº 1 (1970), p. 27-40

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_1_27_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* SECTION B :
VOL. VI, N° 1, 1970, P. 27-40. *Calcul des probabilités et Statistique.*

# Recollement de deux processus de Markov et fonctionnelles additives

par

**Hervé REINHARD**
(Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications »
dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités »
associée au C. N. R. S.,
11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris-5e).

et

**Bernard ROYNETTE**
(Département de Mathématiques
Faculté des Sciences d'Orsay, 91-Orsay).

RÉSUMÉ. — Soient $(\Omega^i, \mathscr{F}^i, \mathscr{F}_t^i, X_t^i, \theta_t^i, P_t^i)$ $(i = 1, 2)$ deux processus de Markov à valeurs dans $E^i$ $(i = 1, 2)$. $E^i$ est un espace localement compact à base dénombrable, $\delta_i$ son point de compactification, $\mathscr{B}_i$ est la tribu borélienne et $\mathscr{E}^i$ est la tribu des universellement mesurables. Nous supposons que les limites $X^1_{\zeta^1(\omega_1)^-}(\omega_1)$ existent presque-sûrement dans $E_1 \cup \delta_1$ (où $\zeta^1(\omega_1)$ est le temps de mort du premier processus). Nous supposons de plus que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. D'autre part, soit $\varphi(x, A)$ une probabilité de transition de $(E^1 \cup \delta^1, \mathscr{E}'^1)$ dans $(E^2, \mathscr{E}^2)$, où $\mathscr{E}'^1$ est la tribu universellement mesurable de $E^1 \cup \delta_1$. Les tribus $\mathscr{F}_t^i$ sont continues à droite et les trajectoires sont continues à droite, limitées à gauche presque sûrement.

Quand la trajectoire $\omega_1$ du premier processus meurt, nous recollons à sa suite une trajectoire du second processus. La loi du saut de $E^1$ dans $E^2$ au temps $\zeta^1(\omega_1)$ est régie par la probabilité de transition $\varphi(x, A)$. Nous montrons que le processus ainsi recollé est de Markov et qu'il possède la propriété de Markov forte dès que les processus initiaux la possèdent. Enfin, nous décrivons les fonctionnelles additives du processus recollé.

Nous remercions M. Revuz de l'aide qu'il nous a apportée pour ce travail.

SUMMARY. — Let $M_1$, $M_2$ be two Markov process on $E_1$ and $E_2$ respectively, such that $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. A Markov process M is constructed which extends both $M_1$ and $M_2$. We show that M satisfies the strong Markov property if both $M_1$ and $M_2$ satisfy it. We finally describe all the additive functionals of the process M.

## I. — LE PROCESSUS RECOLLÉ

Le lemme suivant nous sera utile pour la construction de la probabilité sur le processus recollé.

LEMME 1. — L'application $H: (\Omega^1 \times \mathscr{F}^2) \to (01)$ définie par :

$$H(\omega_1, A) = \int_{E^2} \varphi(X^1_{\zeta^-(\omega_1)}(\omega_1), dy) P^2_y(A)$$

est une probabilité de transition.

α) L'application $X^1_t(\Omega^1, \mathscr{F}^1_t) \to (E^1, \mathscr{B}^1)$ est mesurable et l'application $t: X^1_t(\omega_1)$ est continue à droite, donc :

$$(t, \omega_1) \to X^1_t(\omega_1) \text{ est progressivement mesurable.}$$

Si M est une variable aléatoire de $\Omega^1$ dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{F}^1$-mesurable, l'application

$$\omega_1 \to X^1_{M(\omega_1)}(\omega_1)$$

est mesurable de $(\Omega^1, \mathscr{F})$ dans $(E^1, \mathscr{B}^1)$.

β) Soit $\nu$ une loi initiale et $\mu(\Gamma) = P^1_\nu(X^1_M \in \Gamma)$ si $\Gamma \in \mathscr{B}^1$. Si $\Gamma \in \mathscr{E}^1$, il existe $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, $(\Gamma_i \in \mathscr{B}^1)$, $\Gamma_1 \subset \Gamma \subset \Gamma_2$ tels que :

$$\mu(\Gamma_1) = \mu(\Gamma) = \mu(\Gamma_2)$$

D'où :

$$P^1_\nu(X^1_M \in \Gamma_1) = P^1_\nu(X^1_M \in \Gamma_2)$$

donc

$$(X^1_M \in \Gamma) \in \mathscr{F}^1$$

et l'application :

$$\omega_1 \to X^1_{H(\omega_1)}(\omega_1)$$

est mesurable de $(\Omega^1, \mathscr{F}^1)$ dans $(E^1, \mathscr{E}^1)$.

$\gamma$) L'application $\omega_1 \to X_{\zeta^1(\omega_1)^-}(\omega_1)$ est mesurable de $(\Omega^1, \mathscr{F}^1)$ dans $(E^1, \mathscr{E}^1)$ car :

$$X_{\zeta^1(\omega_1)^-}(\omega_1) = \lim_{n\uparrow\infty} X_{\zeta^1(\omega_1)-\frac{1}{n}}(\omega_1)$$

et l'application

$$\omega_1 \to \zeta^1(\omega_1) - \frac{1}{n}$$

est $\mathscr{F}^1$-mesurable.

En conséquence, l'application

$$\omega_1 \to \varphi(X_{\zeta^1(\omega_1)^-}(\omega_1), B)$$

est $\mathscr{F}_1$-mesurable pour tout $B \in \mathscr{E}^2$.

$\delta$) Nous savons que pour tout $B \in \mathscr{E}^2$ l'application :

$$y \to E_y(B)$$

est $\mathscr{E}^2$-mesurable ; le lemme en résulte donc d'après le théorème de Fubini.

Nous allons maintenant construire le processus recollé. Nous le noterons $(\Phi, \mathscr{G}, \mathscr{G}_t, X_t, \theta_t, Q_x)$. Nous appellerons $\xi$ son temps de mort.

1) Soit

$$\Phi = \Phi^1 + \Phi^2 \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} \Phi^1 &= \Omega^1 \times \Omega^2 \\ \Phi^2 &= \Omega^2. \end{aligned}$$

Si $\omega \in \Phi^1$,

$$\begin{aligned} X_t(\omega) = X_t(\omega_1, \omega_2) &= X_t^1(\omega_1) && \text{si} \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= X^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2) && \text{si} \quad t \geqq \zeta^1(\omega_1). \end{aligned}$$
$$\zeta(\omega) = \zeta^1(\omega_1) + \zeta^2(\omega_2)$$

Si $\omega \in \Phi^2$,

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= X_t^2(\omega) \\ \zeta(\omega) &= \zeta^2(\omega_2). \end{aligned}$$

2) Les translations : nous définissons $\theta_t$ par :

Si $\omega \in \Phi^1$,

$$\begin{aligned} \theta_t(\omega) = \theta_t(\omega_1, \omega_2) &= (\theta_t^1 \omega_1, \omega_2) && \text{si} \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= (\theta^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2) && \text{si} \quad t \geqq \zeta^1(\omega_1). \end{aligned}$$

Si $\omega \in \Phi^2$,

$$\theta_t(\omega) = \theta_t^2(\omega).$$

3) Les tribus : nous dirons que $A \in \mathscr{G}$ si

$$A \cap \Phi^1 \in \mathscr{F}^1 \otimes \mathscr{F}^2 \qquad \text{et} \qquad A \cap \Phi^2 \in \mathscr{F}^2.$$

Si $A \subset \Phi^1 = \Omega^1 \times \Omega^2$, nous dirons que $A \in \mathscr{G}_t$ si

1) $A \in \mathscr{G}$. 1) $A \in \mathscr{G}$.

$$2)\ A_{\omega_1} = \emptyset \quad \text{ou} \quad \Omega^2 \quad \text{si} \quad t < \zeta^1(\omega_1)$$
$$\in \mathscr{F}_{t-\zeta^1(\omega_1)} \quad \text{si} \quad t \geqq \zeta^1(\omega_1)$$

où $A_{\omega_1}$ est la section de A par $\omega_1$.

3) $\mathrm{proj}_{\Omega^1}(A) \cap (t < \zeta^1(\omega_1)) \in \mathscr{F}_t^1$.

Si $A \subset \Phi^2$ ; $A \in \mathscr{G}_t$ si $A \in \mathscr{F}_t^2$.

Il est évident que les tribus $\mathscr{G}_t$ sont croissantes, continues à droite et que les $X_t$ sont adaptées aux $\mathscr{G}_t$.

4) Les probabilités $Q_x$ :

Si $x \in E^2$, $Q_x$ ne charge que $\Phi^2$, et

$$Q_x(A) = P_x^2(A) \qquad (A \subset \Phi^2).$$

Si $x \in E^1$, $Q_x$ ne charge que $\Phi^1$, et est égal au produit de la probabilité $P_x^1$ par la probabilité de transition $H(\omega_1, A)$. Soit :

$$Q_x(\Lambda) = \int_{\Omega_1} dP_x^1(\omega_1)H(\omega_1, \Lambda_{\omega_1}) \qquad (\Lambda \subset \Phi^1).$$

Ceci est bien défini d'après le lemme 1.

THÉORÈME 1. — Le processus $(\Phi, \mathscr{G}, \mathscr{G}_t, X_t, \theta_t, Q_x)$ est de Markov. Nous allons montrer que

$$\int 1_A \cdot 1_{B^1 \cup B^2}(X_{t+s})dQ_x = \int 1_A E_{X_t} 1_{B^1 \cup B^2}(X_s)dQ_x$$

où $B^1 \in \mathscr{B}_1$, $B^2 \in \mathscr{B}_2$, $A \in \mathscr{G}_t$.

Appelons (1) et (2) les deux termes de l'égalité à démontrer, et distinguons plusieurs cas :

1) $A \subset \Phi^2$.

*a)* $x \in E^2$. Alors $X_{t+s}$, $X_t$ appartiennent à $E^2$, $Q_x ps$. L'égalité (1) = (2) résulte du fait que le processus 2 est de Markov.

*b)* $x \in E^1$. $Q_x$ ne chargeant pas A, (1) = (2) = 0.

2) $A \subset \Phi^1$

*a)* $x \in E^2$. $Q_x$ ne chargeant pas A, (1) = (2) = 0.

*b)* $x \in E^1$ et $A \subset \{ t < \zeta^1(\omega_1) \}$.

$$(1) = \int_A 1_{B^1}(X^1_{t+s}(\omega_1))dP^1_x(\omega_1)$$

$$+ \int_{A\{t+s \geqslant \zeta^1(\omega_1)\}} dP^1_x(\omega_1)H(\omega_1, 1_{B^2}(X^2_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)))$$

Soit un $(\omega_1, \omega_2)$ tel que $t < \zeta^1(\omega_1)$ et calculons :

$$E_{X_t(\omega_1,\omega_2)}(1_{B^1 \cup B^2}(X_s)) = E_{X^1_t(\omega_1)}(1_{B^1}(X^1_s(\omega'_1)))$$

$$+ \int_{\zeta^1(\omega'_1) \leqq s} dP_{X^1_t(\omega_1)}(\omega'_1)H(\omega'_1, 1_{B^2}(X^2_{s-\zeta^1(\omega'_1)}(\omega_2)))$$

D'où :

$$(2) = \int_A E_{X^1_t(\omega_1)}1_{B^1}(X^1_s(\omega'_1))dP^1_x(\omega_1) + \int_A dP^1_x(\omega_1)E_{X^1_t(\omega_1)}(1_{\zeta^1(\omega'_1) \leqq s}f(\omega'_1))$$

où

$$f(\omega'_1) = H(\omega'_1, 1_{B^2}(X^2_{s-\zeta^1(\omega'_1)}(\omega_2)))$$

$$= \int_A 1_{B^1}(X^1_{t+s}(\omega_1))dP^1_x(\omega_1)$$

$$+ \int_{A \cdot \{\zeta^1(\omega_1) \leqq t+s\}} dP^1_x(\omega_1)H(\theta_t\omega_1, 1_{B^2}(X^2_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)))$$

car A est un cylindre à base dans $\mathscr{F}^1_t$ ce qui prouve que (1) = (2) car pour tout $B \in \mathscr{F}^2_t$,

$$H(\omega_1, B) = H(\theta_t\omega_1, B) \qquad \text{sur} \qquad t < \zeta^1(\omega_1)$$

*c)* $x \in E^1$ et $A \subset \{ t \geqq \zeta^1(\omega_1) \}$.

$$(1) = \int_A 1_{B^1 \cup B^2}(X_{t+s})dQ_x = \int dP^1_x(\omega_1)H(\omega_1, d\omega_2)1_{A_{w_1}}(\omega_2)(1_{B^2}(X^2_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)))$$

D'autre part, si $(\omega_1, \omega_2)$ est tel que $t \geqq \zeta^1(\omega_1)$, on a :

$$E_{X_t(\omega_1,\omega_2)}1_{B^1 \cup B^2}(X_s) = E^2_{X^2_{t-\xi^1(\omega\ )}(\omega_2)}(1_{B^2}(X^2_S(\omega'_2)))$$

D'où :

$$(2) = \int_A dQ_x(\omega_1, \omega_2)E^2_{X^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)}(1_{B^2}(X^2_s(\omega'_2)))$$

$$= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} dP^1_x(\omega_1)H(\omega_1, d\omega_2)1_{A_{\omega_1}(\omega_2)}E^2_{X^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)}(1_{B^2}(X^2_s(\omega_2)))$$

Or $A_{\omega_1}$ appartient à $\mathscr{F}^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}$ pour $t \geqq \zeta(\omega_1)$

$$= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} dP^1_x(\omega_1) H(\omega_1, d\omega_2) 1_{A_{\omega_1}(\omega_2)} 1_{B^2}(X^2_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)) = (1).$$

## II. — LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV FORTE

Nous allons d'abord étudier les temps d'arrêt de la famille $\mathscr{G}_T$, puis les tribus $\mathscr{G}_T$, où T est un temps d'arrêt de $\mathscr{G}_t$. Nous pourrons alors établir la propriété de Markov forte pour le processus prolongé.

LEMME 2. — Soit $T^1$ un $\mathscr{F}_t$ temps d'arrêt, soit $T^2(\omega_1, \omega_2)$ une variable définie sur $\Phi^1$ et $\mathscr{G}$ mesurable telle que pour tout $\omega_1$ satisfaisant à

$$T^1(\omega_1) \geqq \zeta^1(\omega_1),$$

la section $T^2_{\omega_1}(\omega_2)$ soit un $\mathscr{F}^2_t$-temps d'arrêt. Alors T défini sur $\Phi^1$ par :

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \omega_2) &= T^1(\omega_1) && \text{si} \quad T^1(\omega_1) < \zeta^1(\omega_1) \\ &= \zeta^1(\omega_1) + T^2(\omega_1, \omega_2) && \text{si} \quad T^1(\omega_1) \geqq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

est un temps d'arrêt de la famille $\mathscr{G}_t$.

En effet :

$$\begin{aligned} \{ T(\omega_1, \omega_2) \leqslant u \} = \{ \omega_1, \omega_2 ;\ & T^1(\omega_1) < \zeta^1(\omega_1) ; T^1(\omega_1) \leqq u \} \\ \cup \{ \omega_1, \omega_2 ;\ & T^1(\omega_1) \geqq \zeta^1(\omega_1) ;\ \zeta^1(\omega_1) + T^2(\omega_1, \omega_2) \leqq u \} \end{aligned}$$

Le premier des termes de la réunion est un cylindre ; or

$$\{ T^1(\omega_1) < \zeta^1(\omega_1) \}$$

appartient à $\mathscr{F}^1_{T_1}$ et l'intersection avec $T^1 \leqq u$ appartient à $\mathscr{F}^1_u$.

La section du second terme de la réunion par un $\omega_1$ tel que $u < \zeta^1(\omega_1)$ est vide, et cette section par un $\omega_1$ tel que $u \geqq \zeta^1(\omega_1)$ appartient à $\mathscr{F}^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}$. Ceci prouve que $\{ T(\omega_1, \omega_2) \leqq u \} \in \mathscr{G}_u$ et démontre le lemme.

Nous allons établir une réciproque de ce lemme.

LEMME 3. — Tous les temps d'arrêt de la famille $\mathscr{G}_t$ ont la forme de ceux décrits au lemme 2.

1) Soit T un temps d'arrêt de la famille $\mathscr{G}_t$. Montrons que :

$$T^1(\omega_1, \omega_2) = T(\omega_1, \omega_2) \wedge \zeta^1(\omega_1)$$

ne dépend que de $\omega_1$ et est un $\mathscr{F}_t^1$ temps d'arrêt.

$$\{\omega_1, \omega_2 ; T(\omega_1, \omega_2) \wedge \zeta^1(\omega_1) \leqq s\} = A \cup B$$

où :

$$A = \{\omega_1 ; \zeta^1(\omega_1) \leqq s\} ; \quad B = \{\omega_1, \omega_2 ; T(\omega_1, \omega_2) \leqq s ; \zeta^1(\omega_1) > s\}$$

Il est clair que A est un cylindre. Quant à B, sa section $B_{\omega_1}$ par $\omega_1$ est vide si $s \geqq \zeta^1(\omega_1)$ et elle est soit vide, soit égale à $\Omega^2$ si $s < \zeta^1(\omega_1)$.

Donc $A \cup B$ est un cylindre, ce qui prouve que $T^1$ ne dépend que de $\omega_1$. Pour voir que $T^1(\omega_1)$ est un temps d'arrêt de la famille $\mathscr{F}_t^1$, il suffit de remarquer que la base du cylindre $A \cup B$ appartient à $\mathscr{F}_s^1$.

2) Soit

$$T^2(\omega_1, \omega_2) = T(\omega_1, \omega_2) - \zeta^1(\omega_1).$$

Si nous montrons que $T^2_{\omega_1}(\omega_2)$ est un temps d'arrêt de la famille $\mathscr{F}_t^2$ si

$$T^1(\omega_1) \geqq \zeta^1(\omega_1)$$

le lemme sera démontré.

Soit donc un $\omega_1'$ tel que $T^1(\omega_1') \geqq \zeta^1(\omega_1')$. Soit $s = u - \zeta^1(\omega_1')$, avec $u = T^1(\omega_1')$. Soit $R(\omega_1, \omega_2) = s + \zeta^1(\omega_1)$. R est un $\mathscr{G}_t$ temps d'arrêt.

L'ensemble

$$A = \{T(\omega_1, \omega_2) \geqq \zeta^1(\omega_1) ; T(\omega_1, \omega_2) \leqq s + \zeta^1(\omega_1)\} \in \mathscr{G}_R.$$

D'où, pour tout $u$ :

$$B = \{T(\omega_1, \omega_2) \geqq \zeta^1(\omega_1) ; T(\omega_1, \omega_2) \leqq s + \zeta^1(\omega_1)\}\{s + \zeta^1(\omega_1) \leqq u\} \in \mathscr{G}_u.$$

Donc, la section de B par $\omega_1'$ appartient à $\mathscr{F}^2_{u-\zeta^1(\omega_1')} = \mathscr{F}_s^2$ et cette section $B_{\omega_1'}$ est égale à :

$$\{\omega_2 ; T(\omega_1', \omega_2) - \zeta^1(\omega_1') \leqq s\} = \{\omega_2 ; T^2(\omega_1', \omega_2) \leqq s\}$$

ce qui prouve le lemme.

Nous allons montrer que les $\sigma$-algèbres $\mathscr{G}_T$ possèdent des propriétés analogues à celles des $\sigma$-algèbres $\mathscr{G}_t$.

LEMME 4. — Si $A \in \mathscr{G}_T$, où T est un temps d'arrêt de la famille $\mathscr{G}_t$, alors $A \cap (T < \zeta^1(\omega_1))$ est un cylindre de base dans $\mathscr{F}^1_{T^1}$. Si un $\omega_1$ est tel que $T(\omega_1, \omega_2) \geqq \zeta^1(\omega_1)$, alors $A_{\omega_1} \in \mathscr{F}^2_{T-\zeta}$.

Soit un $\omega_1'$ tel que $T(\omega_1', \omega_2) < \zeta^1(\omega_1')$.

Alors

$$T(\omega_1', \omega_2) = T^1(\omega_1') = s.$$

Soit

$$A \in \mathscr{G}_T \qquad \{A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leqq s\} \in \mathscr{G}_s.$$

Donc

$$\{ A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leqq s \}_{\omega'_1} = \emptyset \text{ ou } \Omega^2.$$

ce qui prouve que $\{ A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leqq \zeta^1(\omega_1) \}$ est un cylindre. Soit un $\omega'_1$ tel que $T(\omega'_1, \omega_2) \geqq \zeta^1(\omega'_1)$ et soit $u = \zeta^1(\omega'_1) + s$

$$\{ A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leqq u \}_{\omega'_1} \in \mathscr{F}^2_s$$

Or:

$$\{ A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leqq u \}_{\omega'_1} = A_{\omega'_1} \cap \{ \omega_2 \,; T^2_{\omega'_1}(\omega_2) \leqq s \}$$

ce qui prouve la dernière phrase du lemme.

Pour prouver que la base du cylindre $\{ A \cap (T(\omega_1, \omega_2) < \zeta^1(\omega_1)) \}$ appartient à $\mathscr{F}^1_T$ remarquons que:

$$\{ A \cap (T < \zeta^1) \} \cap (T^1 < u) \} = \bigcup_{\substack{q < u \\ q \in Q}} \{ A \cap (T^1 < q < \zeta^1) \} \cap \{ T^1 < u \}$$

$$= \bigcup_{\substack{q < u \\ q \in Q}} A \cap (T^1 < q) \cap (q < \zeta^1)$$

et que $A \cap (T^1 > q) \cap (q < \zeta^1)$ a une projection qui appartient à $\mathscr{F}^1_q$ car $T^1 = T$ sur $T < \zeta^1$ et $A \cap (T^1 < q) \in \mathscr{G}_q$.

Le théorème suivant en résulte immédiatement:

THÉORÈME 2. — Si les deux processus initiaux ont la propriété de Markov forte, il en est de même du processus recollé.

En effet, il résulte du lemme 4, que l'on peut remplacer dans la démonstration du théorème 1 le temps fixe $t$ par un temps d'arrêt T quelconque.

*Remarques.*

1) Soit $T_n$ une suite de temps d'arrêt de la famille $\mathscr{G}_t$, $T_n \uparrow T$. Calculons

$$Q_x(X_{T_n} \nrightarrow X_T \,; T < \zeta) = (1) + (2) + (3)$$

avec

$$(1) = Q_x(X_{T_n} \nrightarrow X_T \,; T < \zeta^1(\omega_1)) \,; \quad (2) = Q_x(X_{T_n} \nrightarrow X_T \,; T > \zeta^1(\omega_1))$$
$$(3) = Q_x(X_{T_n} \nrightarrow X_T \,; T = \zeta^1(\omega_1) \,; T_n < T \quad \forall n).$$

Il résulte du lemme 3 que (1) et (2) sont nuls dès que les processus initiaux ont la propriété de Blumenthal. Il est donc nécessaire et suffisant pour que le processus recollé ait la propriété de Blumenthal que $\zeta_1$ soit totalement inaccessible c'est-à-dire qu'il n'existe pas de temps d'arrêt $T^1_n$ tels que

$$P^1(T^1_n(\omega_1) \uparrow \zeta^1(\omega_1) \,; T^1_n < \zeta^1 < \infty \; \forall_n) > 0.$$

2) Si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, on peut remplacer $E_1$ et $E_2$ par $E_1' = E_1 \times \{1\}$ et $E_2' = E_2 \times \{2\}$.

L'hypothèse $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ est essentielle : on peut trouver facilement des exemples où le processus recollé n'est pas de Markov si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ (par exemple : le processus 1 est la translation vers la droite sur (01) et le processus 2 la translation vers la gauche).

3) Si $x \in E^1$, on a, avec $B^1 \in \mathscr{E}^1$, $B^2 \in \mathscr{E}^2$ :

$$Q_t(1_{B^1 \cup B^2})(x) = P_t^1 1_{B^1}(x) + \int_0^t \int_{E_2} \psi(x, ds, dy)\varphi(y, dz) P_{t-s}^2 1_{B^2}(z)$$

où

$$\psi(x, ds, dy) = P_x^1(\zeta^1(\omega_1) \in ds\,;\, X^1_{\zeta^1(\omega_1)-} \in dy)$$

## III. — LES FONCTIONNELLES ADDITIVES DU PROCESSUS RECOLLÉ

Nous nous proposons de construire toutes les fonctionnelles additives du processus recollé. Soit $A_t^i$ ($i = 1, 2$) une f. a. du processus $i$. Définissons, pour $\omega \in \Phi^1$ :

$$\begin{aligned} A_t(\omega) = A_t(\omega_1, \omega_2) &= A_t^1(\omega_1) && \text{si} \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= A^1_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1) + A^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2) && \text{si} \quad t \geqq \zeta^1(\omega_1). \end{aligned}$$

Si $\omega \in \Phi^2$

$$A_t(\omega) = A_t^2(\omega).$$

LEMME 5. — La fonctionnelle $A_t$ est une f. a. du processus recollé. Nous l'appellerons la fonctionnelle obtenue par recollement de $A^1$ et $A^2$. Soient $t$ et $s$. Nous allons montrer qu'il existe un ensemble $\Lambda$, dépendant de $s$ et $t$, tel que $Q_x(\Lambda) = 1$ pour tout $x$, et tel que si $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$,

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_s \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2).$$

$\alpha$) Il existe $\Lambda^1 \subset \Omega^1$, tel que $P_s^1(\Lambda^1) = 1$ et tel que pour tout $\omega_1 \in \Lambda^1$ on ait :

(1) $$A^1_{t+s}(\omega_1) = A^1_t(\omega_1) + A^1_s \circ \theta^1_t(\omega_1).$$

$\beta$) Soit $R(\omega_1) = (\zeta(\omega_1) - t)1_{\{\zeta^1(\omega_1) \geqq t\}}$. Il existe $\Lambda'^1 \subset \Omega^1$ tel que pour tout $x$, $P_x^1(\Lambda'^1) = 1$, et pour tout $\omega_1' \in \Lambda'^1$ : on ait :

(2) $$A^1_{R+t}(\omega_1') = A^1_t(\omega_1') + A^1_R \circ \theta^1_t(\omega_1').$$

Soit

$$\Lambda = \Lambda^1 \cap \Lambda'^1 \qquad (\forall x,\ P^1_x(\Lambda) = 1).$$

$\gamma$) Soit

$$A = \{\Lambda \cap t + s < \zeta^1(\omega_1)\}, \qquad B = \{\Lambda \cap t < \zeta^1(\omega_1) \leqq t + s\}$$
$$C = \{\Lambda \cap \zeta^1(\omega_1) \leqq t\}.$$

Soit $\omega_1 \in C$, et considérons les nombres $t - \zeta^1(\omega_1)$, $s$. Il existe $\Lambda^2_{\omega_1}$ tel que $P^2_x(\Lambda^2_{\omega_1}) = 1$ pour tout $x$ et tel que si $\omega_2 \in \Lambda^2_{\omega_1}$ on ait :

(3) $$A^2_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2) = A^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2) + A^2_s \circ \theta_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2).$$

$\delta$) Définissons :

$$\Lambda = (A \cup B) \times \Omega^2 + \bigcup_{\omega_1 \in C} \{\omega_1 \times \Lambda^2_{\omega_1}\}.$$

Il est clair que pour tout $x$, $Q_x(\Lambda = 1)$.

Si $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$, montrons que

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1) + A_s \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2).$$

1) Si $\omega_1 \in A$, cela résulte de (1).

2) Si $\omega_1 \in B$, on a

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A^1_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1) + A^2_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)$$
$$A_t(\omega_1, \omega_2) = A^1_t(\omega_1)$$
$$A_s \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2) = A_s(\theta^1_t\omega_1, \omega_2) = A^1_{\zeta^1(\omega_1)}(\theta^1_t\omega_1) + A^2_{s-\zeta^1(\theta^1_t\omega_1)}(\omega_2)$$
$$= A^1_{\zeta^1(\omega_1)-t}(\theta^1_t\omega_1) + A^2_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)$$

et l'égalité recherchée résulte de (2).

3) Si $\omega_1 \in C$, on a :

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A^1_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1) + A^2_{t+s-\zeta^1)\omega_1)}(\omega_2)$$
$$A_t(\omega_1, \omega_2) = A^1_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1) + A^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2)$$
$$A_s\theta_t(\omega_1, \omega_2) = A^2_s(\theta^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2))$$

et l'égalité recherchée résulte de (3).

Il nous reste encore à prouver que $A_t \in \mathscr{G}_t$ pour tout $t$. Or :

$$\{A_t(\omega_1, \omega_2) < u\} \cap \{t < \zeta^1(\omega_1)\} = \{A^1_t(\omega_1) < u\} :$$

c'est bien un cylindre à base dans $\mathscr{F}^1_t$ ; si

$t \geqq \zeta^1(\omega_1)$, $\{\omega_2 ; A_t(\omega_1, \omega_2) < u\} = \{\omega_2 ; A^1_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1) + A_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2) < u\}$,

cet ensemble appartient à $\mathscr{F}^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}$.

*Remarque.* — La fonctionnelle ainsi construite est $Q_x$ p. s. continue au point $\zeta^1(\omega_1)$. Il est donc inutile d'espérer obtenir toutes les f. a. de cette façon.

*Exemple.* — Le premier processus est la translation sur $]-\infty, 0]$ avec temps exponentiel en 0, et saut en $+\infty$. Le second processus est la translation sur $[1, \infty[$. Le processus recollé est la translation jusqu'en 0, arrêt exponentiel en 0, et redémarrage ou translation à droite de 1. Soit :

$$T(\omega) = \inf \{ t ; |X_t - X_{t^-}| > 0 \}.$$

T est un temps terminal, et soit $A_t(\omega) = 1$ si $t \geqq T(\omega)$, 0 sinon, $A_t$ est une fonctionnelle additive discontinue en $\zeta^1(\omega_1)$ et ne peut être obtenu par la construction précédente.

Nous sommes ainsi amenés à étudier les fonctionnelles de la forme :

Si $\omega \in \Phi^1$,

$$\begin{aligned} A_t(\omega_1, \omega_2) &= 0 & \text{si} \quad & t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= h(\omega_1, \omega_2) & \text{si} \quad & t \geqq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

Si $\omega \in \Phi^2$,

$$A_t(\omega) = 0.$$

Nous pouvons supposer que $h(\omega_1, \omega_2) = 0$ si $\zeta^1(\omega_1) = \infty$.
Définissons sur $\Omega^1 \times \Omega^2$ la tribu $\widehat{F}_0^1$ par :

$$A \in \widehat{\mathscr{F}}_0^1 \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} 1)\ A \in \mathscr{G} \\ 2)\ \forall u, \text{ p. s. } \{ \theta_u^{-1}(A) \} \cap \{ u < \zeta^1(\omega_1) \} = A \cap \{ u < \zeta^1(\omega_1) \}. \end{array}$$

THÉORÈME 3. — Pour que la fonctionnelle A soit une f. a. il faut et il suffit que :

1) $h$ soit $\widehat{\mathscr{F}}_0^1$ mesurable et positive.

2) $\omega_2 \to h(\omega_1, \omega_2)$ soit $\mathscr{F}_0^2$ mesurable.

Montrons d'abord que ces conditions sont nécessaires :

1) Soit $t$ fixé et $r$ un rationnel. Il existe $\Lambda^{t,r}$ tel que pour tout $x$, $Q_x(\Lambda^{t,r}) = 1$, et pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda^{t,r}$ :

$$A_{t+r}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_r\theta_t(\omega_1, \omega_2).$$

Soit

$$\Lambda = \bigcap_{r \in Q} \Lambda^{t,r}.$$

Soit

$$(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda.$$

Il existe $r$ rationnel tel que $t+r > \zeta^1(\omega_1)$. Supposons $t < \zeta^1(\omega_1)$. On a :

$$A_{t+r}(\omega_1, \omega_2) = A_r \theta_t(\omega_1, \omega_2),$$

soit

$$h(\omega_1, \omega_2) = h(\theta_t^1 \omega_1, \omega_2)$$

ce qui prouve 1.

2) Pour prouver 2, remarquons que :

$$\{\omega_1, \omega_2 ; A_t(\omega_1, \omega_2) < u\}$$
$$= \{\omega_1 ; t < \zeta^1(\omega_1)\} \cup \bigcup_{\omega_1 ; t \geqslant \zeta^1(\omega_1)} \{\omega_1, \omega_2 ; h(\omega_1, \omega_2) < u\}$$

Cet ensemble appartient à $\mathscr{G}_t$.

Donc sa section par un $\omega_1$ tel que $t \geqq \zeta^1(\omega_1)$ appartient à $\mathscr{F}^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}$. Or cette section est égale à $\{\omega_2 ; h(\omega_1, \omega_2) < u\}$.

Cette relation est en particulier vraie pour $t = \zeta^1(\omega_1)$, ce qui prouve 2.

Montrons maintenant que ces conditions sont suffisantes : on a, p. s. :

$$\theta_u^{-1}(h(\omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1) = (h(\omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1))$$

Soit, p. s. :

$$(h(\theta_u^1 \omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1)) = (h(\omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1))$$

Ce qui prouve que $h(\theta_u^1 \omega_1, \omega_2) = h(\omega_1, \omega_2)$ p. s. sur $u < \zeta^1(\omega_1)$.

Soit $\Lambda^u$ l'ensemble tel que $Q_x(\Lambda^u) = 1$ et tel que la relation précédente soit vraie si $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda^u$. Alors la relation :

$$A_{t+u}(\omega_1, \omega_2) = A_u(\omega_1, \omega_2) + A_t \circ \theta_u(\omega_1, \omega_2)$$

est évidente si $t + u < \zeta^1(\omega_1)$ et si $u \geqq \zeta^1(\omega_1)$.

Pour $u < \zeta^1(\omega_1)$ et $u + t \geqq \zeta(\omega_1)$, elle résulte du choix de $\Lambda^u$.

2) Il reste à prouver que $A_t$ est $\mathscr{G}_t$ mesurable. Or :

$$\{A_t(\omega_1, \omega_2) < u\}$$
$$= \{\omega_1 ; t < \zeta^1(\omega_1)\} \cup \bigcup_{\omega_1 ; \zeta(\omega_1) \leqq t} \{\omega_1, \omega_2 ; h(\omega_1, \omega_2) < u\}$$

Cet ensemble appartient à $\mathscr{G}$ d'après 1. Sa section par un $\omega_1$ tel que $t \geqq \zeta^1(\omega_1)$ appartient à $\mathscr{F}^2_0$ donc à $\mathscr{F}^2_{t-\zeta^1(\omega_1)}$, ce qui prouve le théorème.

Nous allons maintenant étudier les fonctionnelles du processus recollé.

LEMME 6. — Soit $A_t(\omega_1, \omega_2)$ une f. a. du processus recollé. Définissons :

$$\begin{aligned} A_t^1(\omega_1, \omega_2) &= A_t(\omega_1, \omega_2) && \text{si} \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= \lim_{s \uparrow \zeta^1(\omega_1)} A_s(\omega_1, \omega_2) && \text{si} \quad t \geqq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

$A_t^1(\omega_2) = 0$. Alors $A_t^1(\omega_1, \omega_2)$ ne dépend que de $\omega_1$ et est une f. a. du processus initial.

Soit

$$B = \{ A_t^1(\omega_1, \omega_2) < u \} = \bigcup_{\substack{q \leq t \\ q \in Q}} \{ A_q(\omega_1, \omega_2) < u \} \cap \{ q < \zeta^1(\omega_1) \}$$

Or $\{ A_q < u \} \cap \{ q < \zeta^1(\omega_1) \}$ est un cylindre de base dans $\mathscr{F}_t^1$ ce qui prouve que $A_t^1(\omega_1, \omega_2)$ ne dépend que de $\omega_1$ et est $\mathscr{F}_t^1$ mesurable. Montrons maintenant qu'il s'agit d'une f. a.:

Soient $t$ et $s$ fixés, et

$$\Lambda = \bigcap_{q \in Q} (\Lambda^{t,q}) \cap \Lambda^{t,s}.$$

Soient $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$.

1) Supposons $t + s < \zeta^1(\omega_1)$. On a:

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_s \theta_t(\omega_1, \omega_2)$$

d'où

$$A_{t+s}^1(\omega_1) = A_t^1(\omega_1) + A_s^1(\theta_t^1 \omega_1).$$

2) Supposons $t < \zeta^1(\omega_1)$, $t + s \geqq \zeta^1(\omega_1)$. Alors:

$$A_{t+q}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_q \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2) \qquad (\forall q \in Q)$$

D'où

$$\lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1) - t} A_{t+q_n}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + \lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1) - t} A_{q_n} \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2)$$

Soit:

$$A_{t+s}^1(\omega_1, \omega_2) = A_t^1(\omega_1) + A_s^1(\theta_t^1 \omega_1).$$

3) Supposons que $t \geqq \zeta^1(\omega_1)$. Alors:

$$A_{t+s}^1(\omega_1) = \lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1)} A_{q_n}(\omega_1, \omega_2)$$

$$A_t^1(\omega_1) = \lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1)} A_{q_n}(\omega_1, \omega_2)$$

$$A_s^1(\theta_t(\omega_1, \omega_2)) = A_s^1(\theta_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)) = 0,$$

d'où la relation cherchée. On voit que la relation

$$A_{t+s}^1(\omega_1) = A_t^1(\omega_1) + A_s^1(\theta_t^1 \omega_1)$$

est vraie dès que $\omega_1$ appartient à la projection de $\Lambda$, ce qui prouve le lemme.

*Remarques.*

1) Soit $A_t$ une f. a. du processus recollé. Soit:

$$A_t^2(\omega_1, \omega_2) = A_{\zeta^1(\omega_1)+t}(\omega_1, \omega_2) - A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2).$$

Pour tout $t$, $A_t^2(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_2)$ p. s., et est donc une f. a. du processus n° 2.

En effet, $t$ étant fixé, et $\zeta^1(\omega_1)$ étant un temps d'arrêt de la famille $\mathcal{G}_t$, on a :

$$A_{\zeta^1(\omega_1)+t}(\omega_1, \omega_2) = A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2) + A_t \circ \theta_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2) \text{ p. s.}$$

soit

$$A_t^2(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_2) \text{ p. s.}$$

2) Si $A_t$ est une f. a. du processus recollé, définissons :

$$\begin{aligned} B_t(\omega_1, \omega_2) &= 0 \quad \text{si} \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2) - A_{\zeta^1(\omega_1)^-}(\omega_1, \omega_2) \quad \text{si} \quad t \geqq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

Alors $B_t(\omega_1, \omega_2)$ est une f. a. du processus recollé.

Il nous suffit de voir que la fonction

$$h(\omega_1, \omega_2) = A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1 \ \omega_2) - A_{\zeta^1(\omega_1)^-}(\omega_1, \omega_2)$$

satisfait aux hypothèses du théorème 3.

L'hypothèse 1 est facile à vérifier, et pour l'hypothèse 2 remarquons que la fonction :

$$(\omega_1, \omega_2) \rightarrow A_{\zeta^1(\omega_1)-u}(\omega_1, \omega_2)$$

est $\mathcal{G}_{\zeta^1}$ mesurable pour tout $u \geqq 0$ et donc que la section par $\omega_1$ de :

$$\{ A_{\zeta^1(\omega_1)-u}(\omega_1, \omega_2) < a \}$$

appartient à $\mathcal{F}_0^2$ d'après le lemme 4.

Nous pouvons maintenant décrire toutes les f. a. du processus recollé.

THÉORÈME 4. — Soit $A_t$ une f. a. du processus recollé. Alors $A_t$ est la somme de 2 f. a. :

1) l'une $B_t$ est de la forme de celles décrites au théorème 3 ;

2) l'autre $C_t$ est obtenue par recollement de 2 f. a. à des processus initiaux et est continue au temps $\zeta^1(\omega_1)$.

Soit $C_t = A_t - B_t$ ; $C_t$ est continue en $\zeta^1(\omega_1)$ et elle est la recollée de la f. a. $A_t^1$ du lemme 6 et de la f. a. $A_t^2$ de la remarque 1 précédente.

*(Manuscrit reçu le 8 juillet 1969).*