ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GEORGES BODIOU

Sur les treillis booléens métriques et le conditionnement général des probabilités

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, nº 1 (1970), p. 15-26

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_1_15_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, SECTION B :
VOL. VI, N° 1, 1970, P. 15-26. *Calcul des probabilités et Statistique.*

Sur les treillis booléens métriques et le conditionnement général des probabilités

par

Georges BODIOU
(Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille).

SOMMAIRE. — Nous démontrons que l'ensemble des treillis booléens métriques, c'est-à-dire capables d'une probabilité strictement positive, est identique à l'ensemble des sous-treillis booléens du treillis des multiplicités linéaires fermées de l'espace de Hilbert, noté (m. l. f.), qui ont même complémentation que ce treillis (m. l. f.).

Nous démontrons aussi que toute probabilité sur un treillis booléen métrique, immergé dans (m. l. f.), est la trace d'une loi déterminée, à la manière quantique, sur (m. l. f.), par l'un de ses atomes.

SUMMARY. — We demonstrate that the set of boolean metric lattices i. e. capable of strictly positive probability, is the same than the set of boolean sub-lattices of the lattice of closed linear manifolds in the Hilbert space, noted (m. l. f.), that have the same complementation than this lattice (m. l. f.).

We also demonstrate that any probability on such boolean metric lattice, immerged into (m. l. f.), is the trace of a quantic probability determined by an atom.

ÉNONCÉS DE DIVERSES PROPOSITIONS ET COMMENTAIRES

Une σ-algèbre de Boole est métrique s'il existe sur elle une probabilité telle que : $P(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un treillis booléen métrique est une telle σ-algèbre ordonnée par: $x \leqslant y \Leftrightarrow x = y \wedge x$ (groupe I des références, en particulier [I-*2*], problème 85).

Le support classique des probabilités (E, A), est une σ-algèbre, A, de parties d'un ensemble E. Mais les énoncés probabilistes intéressants étant « à un ensemble de probabilité nulle près », l'algèbre significative n'est pas A, mais l'algèbre des classes d'équivalence A/P, qui est métrique [I-*4*] [I-*5*].

D'autre part, on peut se proposer [I-*2* (XII, 8)] [II-*3*] de décrire la probabilité comme une extension de la vérité bivalente classique sur une logique algébrique, qui est, classiquement, une σ-algèbre de Boole; mais, toute σ-algèbre de Boole n'étant pas isomorphe à une σ-algèbre de parties d'un ensemble, cette dernière paraît inadéquate à supporter une telle extension.

Enfin le formalisme physique fondamental, le formalisme quantique, considère, simultanément, des treillis spectraux, qui sont booléens, mais immergés dans un même treillis de multiplicités linéaires fermées d'un espace de Hilbert, le treillis (m. l. f.), et qui dépendent stochastiquement les uns des autres de façon non classique. Plus généralement, cette physique fondamentale considère des ensembles d'attributs simultanément observables, qui sont des sous-treillis booléens de ce treillis (m. l. f.).

Ce sont ces faits qui donnent de l'intérêt au résultat suivant:

Tout treillis booléen métrique est ortho-isomorphe à un sous-treillis booléen du treillis (m. l. f.)*; et, réciproquement, tout sous-treillis booléen de* (m. l. f.) *est métrique.*

Une ortho-isomorphie [II-*2*] invarie les trois opérations fondamentales: conjonction $\wedge$, disjonction $\vee$, négation Γ. Sur un treillis orthocomplémenté, tel (m. l. f.), il suffit qu'elle invarie $\wedge$ et Γ; mais il ne suffirait pas, sur un tel treillis, qu'elle invarie $\wedge$ et $\vee$, car la négation Γ ne peut s'y définir en termes de $\wedge$ et de $\vee$.

PROPOSITION A. — *Tout treillis booléen métrique est ortho-isomorphe à un sous-treillis de* (m. l. f.).

Nous le montrons pour le treillis métrique des classes d'équivalence, A/P, d'une σ-algèbre de parties d'un ensemble E, modulo une probabilité P; mais toute σ-algèbre de Boole métrique est isomorphe à une algèbre de classes [I-*1*].

PROPOSITION B. — *Tout sous-treillis booléen de* (m. l. f.) *est métrique.*

Nous déterminons un atome de (m. l. f.) tel que la loi de probabilité quantique dont il est la base soit strictement positive sur le sous-treillis considéré. Il est bien entendu que la complémentation sur le sous-treillis est celle de (m. l. f.).

PROPOSITION C. — *Il n'existe pas de treillis booléen tel que l'ensemble de ses sous-treillis, de même complémentation que lui, soit identique à l'ensemble des treillis booléens métriques.*

Un treillis englobant ainsi, avec invariance de la complémentation, tous les treillis booléens qui sont métriques, et eux seuls, doit donc être de structure plus faible que la structure booléenne.

Si l'on conserve, dans la structure affaiblie, les propriétés de $\wedge$ et de $\vee$, et l'anti-isomorphisme dual Γ, l'affaiblissement doit porter sur la distributivité booléenne :

$$a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge (a \vee b).$$

On pourrait penser à restreindre cette distributivité au cas particulier où : $a \leqslant b$; on impose ainsi la modularité :

$$a \leqslant b \Rightarrow a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

Mais le calcul quantique des propositions n'est pas modulaire [II-*1*] [II-*3*]. Une restriction plus forte consiste à limiter la relation modulaire au cas où $x = \Gamma a$. On impose ainsi l'axiome de semi-modularité :

$$a \leqslant b \Rightarrow a \vee (\Gamma a \wedge b) = (a \vee \Gamma a) \wedge b = b.$$

Cet axiome équivalant à celui d'orthocomplémentation relative, en posant, dans le cas où $a \leqslant b$:

$$\text{complément relatif de } a \text{ dans } b = \Gamma a \wedge b.$$

La semi-modularité est nécessaire pour que le treillis soit isomorphe à celui des m. l. f. d'un espace hermitien sur un corps non nécessairement commutatif [II-*2*] [II-*4*].

D'où le problème : la propriété englobante exprimée par les propositions A et B caractérise-t-elle le treillis des m. l. f. de l'espace de Hilbert ? Cette propriété, de forme beaucoup moins élémentaire que la semi-modularité, mais de signification beaucoup plus claire dans le cadre d'un probabilisme général de la physique, fonderait alors le calcul quantique des probabilités.

PROPOSITION D. — *Toute loi de probabilité,* P′, *sur* B = A/P, B *étant ortho-isomorphe à un sous-treillis de* (m. l. f.), *est la trace, sur* B, *d'une loi quantique d'état pur,* $P''(\ /\psi)$.

On peut remarquer que la loi P′, donnée sur B, B étant immergé dans (m. l. f.), peut être définie comme la trace sur B d'un « mélange » de lois sur (m. l. f.). La proposition D montre qu'il existe une loi d'état « pur » qui a même trace que ce « mélange » sur B, alors que l'on sait que, sur (m. l. f.) total, un « mélange » est irréductible à un état « pur ».

La possibilité de décrire toute loi sur un treillis booléen métrique comme trace d'une loi quantique d'état pur, atome de (m. l. f.), suggère une formalisation de la « catégorie d'épreuves » par cet « état pur », réalisant ainsi le conditionnement universel des lois de probabilités (I-7]. Que ce conditionnement universel soit restreint aux lois sur des treillis booléens « métriques » peut s'interpréter comme excluant tout treillis booléen de propositions expérimentales tel qu'il n'existerait pas de « catégorie d'épreuves », ou « protocole d'expériences », pour lesquels aucune de ses propositions soit « presque impossible », c'est-à-dire inadéquate à la réalité.

Proposition E. — *Tout treillis booléen métrique est capable d'une loi bivalente.*

Nous le montrons en supposant ce treillis immergé dans (m. l. f.).

Il est immédiat de montrer que, si un treillis booléen est isomorphe à une algèbre de parties d'un ensemble, il est capable d'une loi bivalente : les propositions « vraies » correspondant aux parties qui contiennent un élément déterminé et les propositions « fausses » correspondant aux parties qui ne contiennent pas cet élément. Mais tout treillis booléen n'est pas isomorphe à une algèbre de parties et, cependant, il est naturel de préserver la possibilité d'une logique bivalente classique. La proposition E montre que la restriction aux sous-treillis booléens de (m. l. f.), avec invariance de la négation, préserve cette possibilité.

Proposition A. — *Tout treillis booléen métrique est ortho-isomorphe à un sous-treillis de* (m. l. f.).

Dire que B est un sous-treillis booléen de (m. l. f.) c'est dire que B est un sous-ensemble d'éléments de (m. l. f.), fermé pour les opérations fondamentales de (m. l. f.) : $\wedge$, $\vee$, Γ, et distributif, ou, ce qui revient au même, tel que la disjonction de deux éléments : $a \wedge b = 0$, implique leur orthogonalité dans (m. l. f.) : $a \leqslant \Gamma b$.

On donne un ensemble E, une tribu, ou σ-algèbre A de parties de E, et une probabilité P sur A.

Ce triplet (E, A, P) étant donné, on considère l'espace de Hilbert, H(E, A, P), des fonctions sur E, à valeurs complexes, et de module carré sommable pour P :

$$\mathrm{H}(\mathrm{E}, \mathrm{A}, \mathrm{P}) = \left\{ f(e) \Big/ \int_{\mathrm{E}} |f(e)|^2 . \mathrm{P}(de) < \infty \right\}.$$

Soit a un élément de A ; soit $\mathrm{I}(a)$ la fonction caractéristique de a ; considérons l'application de H dans H qui applique toute $f(e)$ de H sur : $\mathrm{I}(a).f(e)$; cette application est une projection, car elle est : définie partout sur H, linéaire, hermitienne, identique à son carré.

Soit $m(a)$ la m. l. f. sur laquelle se fait cette projection. $m(a)$ définit une application des éléments de A dans l'ensemble des éléments de (m. l. f.).

Montrons d'abord que $m(a)$ est une injection des classes d'équivalence de A, relativement à P, dans l'ensemble des éléments de (m. l. f.) ; ou encore que $m(a)$ est une injection de l'algèbre métrique : $\mathrm{A}/\mathrm{P} = \mathrm{B}$, dans l'ensemble des éléments de (m. l. f.) ; c'est-à-dire que :

$$m(a) = m(a') \Leftrightarrow \mathrm{P}(a \triangle a') = 0.$$

En effet :

$$\begin{aligned} m(a) = m(a') &\Leftrightarrow \text{projecteur sur } m(a) = \text{projecteur sur } m(a') \\ &\Leftrightarrow \forall f \in \mathrm{H} : \| \mathrm{I}(a).f - \mathrm{I}(a').f \| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in \mathrm{H} : \int_{a \cap \mathrm{C}a'} |f|^2 . \mathrm{P}(de) + \int_{a' \cap \mathrm{C}a} |f|^2 . \mathrm{P}(de) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in \mathrm{H} : \| \mathrm{I}(a \triangle a').f \| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(a \triangle a') = 0 \end{aligned}$$

Notons $k(a)$ la classe de a dans $\mathrm{A}/\mathrm{P} = \mathrm{B}$. Montrons que l'injection $m(a)$ définit une ortho-isomorphie de A/P sur un sous-treillis de (m. l. f.) ; on notera :

$$f \equiv g \Leftrightarrow \| f - g \| = 0.$$

D'abord :

$$m(a) \leqslant \Gamma m(a') \Leftrightarrow k(a') \leqslant k(\mathrm{C}a)$$

car :

$$\begin{aligned} m(a) \leqslant \Gamma m(a') &\Leftrightarrow \forall f : \| I(a).\mathrm{I}(a').f \| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f : \| \mathrm{I}(a \cap a').f \| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(a \cap a') = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{P}((a' \cap \mathrm{C}a) \triangle a') = 0 \Leftrightarrow k(a' \cap \mathrm{C}a) = k(a') \Leftrightarrow k(a') \leqslant k(\mathrm{C}a). \end{aligned}$$

Ensuite :

$$m(a \cap a') = m(a) \wedge m(a')$$

car :

$$f \in m(a \cap a') \Leftrightarrow \| \mathrm{I}(a \cap a').f - f \| = 0$$
$$\Leftrightarrow \| \mathrm{I}(a).\mathrm{I}(a').f - f \| = 0 ;$$

mais :

$$\mathrm{I}(a).\mathrm{I}(a').f \in m(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{I}(a).\mathrm{I}(a').f \in m(a'),$$

impliquent :

$$\mathrm{I}(a).\mathrm{I}(a').f \in m(a) \wedge m(a') ;$$

donc :

$$f \in m(a) \wedge m(a').$$

Réciproquement :

$$f \in m(a) \wedge m(a') \Rightarrow \mathrm{I}(a).f \equiv f$$
$$\Rightarrow \mathrm{I}(a').\mathrm{I}(a).f \equiv \mathrm{I}(a).f \equiv f \Rightarrow f \in m(a \cap a')$$

On déduit de ces deux résultats :

$$m(a \cup a') = m(a) \vee m(a') ;$$

car :

$$m(a \cup a') = m(\mathrm{C}(\mathrm{C}a \cap \mathrm{C}a')) = \Gamma m(\mathrm{C}a \cap \mathrm{C}a') = \Gamma(m(\mathrm{C}a) \wedge m(\mathrm{C}a'))$$
$$= \Gamma(\Gamma m(a) \wedge \Gamma m(a')) = m(a) \vee m(a').$$

Naturellement, on déduit aussi du premier résultat :

$$m(a) \wedge m(a') = 0 \Leftrightarrow k(a) \wedge k(a') = 0 \Leftrightarrow k(a) \leqslant k(\mathrm{C}a') \Leftrightarrow m(a) \leqslant \Gamma m(a').$$

PROPOSITION B. — *Tout sous-treillis booléen de* (m. l. f.) *est ortho-isomorphe à un treillis booléen métrique.*

Soit $s(b)$ la sphère-unité de la m. l. f. b :

$$s(b) = \{ \psi / \psi \in b, \quad \text{et} \quad \| \psi \| = 1 \}.$$

$s(b)$, intersection de b et de $s(\mathrm{H})$, sphère unité de l'espace de Hilbert H, est fermée pour la topologie faible de H.

L'intersection d'un ensemble fini de telles sphères est la sphère-unité de la m. l. f. intersection des leurs :

$$\bigcap_{i=1}^{n} s(b_i) = s\left(\bigwedge_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Soit B un sous-treillis booléen de (m. l. f.), de même complémentation que (m. l. f.), et soit S l'ensemble des sphères-unités des éléments de B.

Soit F la famille des parties de S dont l'intersection de leurs éléments n'est pas vide :

$$(\mathrm{S}_1 \in \mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathrm{S}_1 \subset \mathrm{S}) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{s \in \mathrm{S}_1} s(b) \neq 0\right);$$

il est clair que :

$$(S_2 \subset S_1) \quad \text{et} \quad (S_1 \in F) \Rightarrow (S_2 \in F).$$

Soit F′ la sous-famille des éléments S′ de F qui ne sont inclus dans aucun autre élément de F :

$$(S_1' \in F') \quad \text{et} \quad (S_2' \in F') \quad \text{et} \quad (S_1' \neq S_2') \Rightarrow \Big(\bigcap_{s \in S_1'} s(b)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{s \in S_2'} s(b)\Big) = 0$$

sinon $(S_1' \cup S_2')$ appartiendrait à F et S_1' et S_2', inclus dans $(S_1' \cup S_2')$, n'appartiendraient pas à F′.

On en déduit que :

$$(S_1' \in F') \quad \text{et} \quad (S_2' \in F') \quad \text{et} \quad (S_2' \neq S_2')$$

implique que chaque vecteur de $\Big(\bigcap_{s \in S_1'} s(b)\Big)$ est orthogonal à tout vecteur de $\Big(\bigcap_{s \in S_2'} s(b)\Big)$; en effet : soit $s'' \in S_2'$; il existe au moins un sous-ensemble fini, s', d'éléments de S_1' dont l'intersection avec s'' est vide ; sionon, les $(s' \cap s'')$, pour s' parcourant S_1', auraient leurs intersections finies non vides ; or, ce sont des fermés de $s(\mathrm{H})$ pour la topologie faible et l'on sait que $s(\mathrm{H})$ est compacte pour cette topologie ; on aurait donc :

$$s'' \bigcap_{s' \in S_1'} s'(b) \neq 0 \Rightarrow s'' \cup S_1' \in F \qquad \text{et} \qquad S_1' \subset (s'' \cup S_1'),$$

ce qui est exclu par : $S_1' \in F'$; il existe donc au moins un $s''(b'')$ dans S_2' et un ensemble fini d'éléments s' dans S_1' tels que :

$$s''(b'') \cap s'\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} b_i\Big) = 0\,;$$

on en conclut que les multiplicités b'' et $\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} b_i\Big)$, qui sont des éléments de B, et qui sont disjointes, sont orthogonales, puisque, sur le treillis booléen B, disjonction équivaut à complémentarité, et que cette complémentarité est celle de (m. l. f.), c'est-à-dire l'orthogonalité ; mais, alors, tout vecteur de $\bigcap_{s \in S_1'} s(b)$, inclus dans $\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} b_i\Big)$ est bien orthogonal à tout vecteur de $\bigcap_{s \in S_2'} s(b)$, inclus dans b''.

Dans chaque élément S′ de F′ prenons un vecteur unitaire $\psi(S')$; l'ensemble de ces vecteurs, quand S′ parcourt F′ est donc orthonormal ; qu'il soit total ou non dans H, il existe un vecteur unitaire ψ qui n'est orthogonal à aucun des $\psi(S')$; d'autre part, chacun des éléments b de B contient un des $\psi(S')$; soit, alors, $P(\ /\psi)$ la loi de probabilité quantique déterminée sur (m. l. f.) par ψ ; ψ n'étant orthogonal à aucun des éléments de B, $P(b/\psi)$ n'est nul, sur B, que pour $b = 0$; donc B est bien un treillis booléen métrique.

L'ensemble des propositions A et B peut être énoncé :

Proposition AB. — *L'ensemble des treillis booléens métriques est identique à l'ensemble des sous-treillis booléens de* (m. l. f.) *qui ont même orthocomplémentation que lui.*

Proposition C. — *Il n'existe pas de treillis booléen tel que l'ensemble de ses sous-treillis, de même complémentation que lui, soit identique à l'ensemble des treillis booléens métriques.*

Pour que l'ensemble de ses sous-treillis soit un ensemble de treillis booléens métriques, il faut et il suffit que lui-même soit métrique.

Il reste à examiner si un treillis booléen métrique quelconque donné peut être ortho-isomorphe à l'un de ces sous-treillis. Les deux propositions suivantes montrent que cela est impossible.

a) Tout treillis booléen métrique A, ortho-isomorphe à un sous-treillis d'un treillis booléen métrique « atomique », B, est atomique :

Cette ortho-isomorphie, f, de A dans B, satisfait à :

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b); \qquad f(Ca) = Cf(a);$$

et donc :

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b);$$

confondons a et $f(a)$. Pour tout $a \in A$ et un atome x de B, on a : $x \leqslant a$, ou : $a \leqslant Cx$. On peut donc partitionner A en deux sous-ensembles : celui des éléments qui majorent x et celui des éléments qui minorent Cx. Le premier, T, de ces ensembles est fermé pour $\wedge$-dénombrable. Montrons que, B étant métrique, T a un plus petit élément : m. Soit p la borne inférieure, sur T, d'une probabilité P, strictement positive sur B.

$$p \geqslant P(x) \Rightarrow p \neq 0.$$

Ou bien il existe $m \neq 0$, dans T, tel que $P(m) = p$, ou bien il existe une suite : $m_1, \ldots, m_n, \ldots$, dans T, telle que $P(m_n)$ converge vers p ; posons :

$$m = \bigwedge_1^\infty m_n;$$

m est dans T, et $P(m) = p$. Il est clair qu'il ne peut exister, dans T, de minorant strict de m, puisque la valeur de P sur lui serait strictement inférieure à p. Tout minorant de m, dans A, ou bien est égal à m, ou bien minore Cx. Soit y un minorant de m et de Cx, on a :

$$x \leqslant m \qquad \text{et} \qquad x \leqslant Cy \Rightarrow x \leqslant (m - y) \leqslant m\,;$$

or $(m - y) \in A$; cette double inégalité implique qu'il appartient à T, et qu'il minore m, donc : $(m - y) = m$; par suite : $y = 0$. Les seuls minorants de m, dans A, étant 0 et m, il s'ensuit que m est un atome de A.

Si donc il existe un treillis booléen métrique « englobant universel » de tous les treillis de cette catégorie, parmi lesquels il s'en trouve sans atome, ce treillis universel doit être sans atome. Il est donc isomorphe au treillis L des classes d'équivalence des parties mesurables du segment (0, 1) pour la mesure de Lebesgue [I-*1*] [I-*2*].

b) Nous allons montrer qu'il existe des treillis de classe d'équivalence qu'il est impossible d'immerger, avec invariance de la complémentation, dans le treillis L des classes des parties mesurables de (0, 1) pour la mesure de Lebesgue :

Soit, sur (0, 1), la probabilité dont la f. r. possède un seul saut, d'abscisse x, et qui est uniforme sur $(0, x)$ et $)x, 1)$; soit L′ son treillis de classes. Soit a une partie de (0, 1) ; $k(a)$ sa classe dans L et $k'(a)$ sa classe dans L′.

Posons :

$$k'_1(a) = \{a'/a' \in k(a),\ x < a'\} \quad \text{et} \quad k'_2(a) = \{a'/a' \in k(a),\ x \wedge a' = 0\}$$

d'où :

$$k(a) = k'_1(a) \vee k'_2(a) \quad \text{et} \quad k'_1(a) \wedge k'_2(a) = 0\,;$$

chaque classe de L se décompose ainsi en deux classes de L′.

Supposons qu'il existe une injection, f, de L′ dans L, invariant la complémentation. Soient : $f(k'_1(a)) = k(b)$, et : $f(k'_2(Ca)) = k(c)$; mais :

$$k'_2(Ca) = C'k'_1(a),$$

où C′ est la complémentation dans L′ ; donc : $k(c) = C''k(b)$, où C″ est la complémentation dans L ; donc : $k(c) = k(Cb)$, c'est-à-dire :

$$f(k'_1(a)) = k(b) \Rightarrow f(k'_2(Ca)) = k(Cb).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} k'_2(Ca) \wedge k'_2(a) = 0 &\Rightarrow k'_2(Ca) \leqslant C'k'_2(a) \\ &\Rightarrow f(k'_2(Ca)) \leqslant C''f(k'_2(a)) \Rightarrow f(k'_2(Ca)) \leqslant C''k(Cb) = k(b) \\ &\Rightarrow f(k'_2(a)) \leqslant f(k'_1(a)), \end{aligned}$$

qui est incompatible avec $k_1'(a) \wedge k_2'(a) = 0$, sauf si $f(k'(a)) = 0$, ce qui n'est vérifié que pour $k'(a) = 0$.

L'ensemble des résultats *a*) et *b*) impliquent la proposition C.

PROPOSITION D. — *Toute loi de probabilité*, P′, *sur :* $B = A/P$, B *étant ortho-isomorphe à un sous-treillis de* (m. l. f.), *est la trace, sur* B, *d'une loi quantique d'état pur*, $P''(\ /\psi)$.

Montrons d'abord que toute loi P′ sur A, absolument continue par rapport à P, a pour trace, sur B, la trace d'une loi quantique d'état pur ; cela est vrai, en particulier, de P elle-même :

$$\forall a \in A : P'(a) = \int_a g(e) . P(de),$$

où $g(e)$ est la densité de P′ par rapport à P. Soit $f(e)$ telle que :

$$\forall e : |f(e)|^2 = g(e) ;$$

on aura :

$$P'(a) = \int_a |f(e)|^2 . P(de) = \langle f(e), I(a).f(e) \rangle = P''(m(a)/f(e))$$

où $m(a)$ est la m. l. f.-image de la classe $k(a)$ d'équivalence de a dans l'immersion de A/P dans (m. l. f.) ; donc :

$$\forall k(a) \in B : P'(k(a)) = P''(m(a)/f(e)),$$

qui est la probabilité quantique de $m(a)$ quand la loi sur le (m. l. f.) porté par l'espace L_2 des $f(e)$ est déterminée par l'un de ces vecteurs $f(e)$, normé.

Soit, maintenant, une loi P′ donnée sur B ; définissons P_1', sur A, par :

$$\forall a \in A : P_1'(a) = P'(k(a)),$$

la probabilité de a pour P_1' étant celle de sa classe $k(a)$, dans A/P, pour P′. Il est immédiat que P_1' est bien une probabilité sur A :

$$P_1'(a) \geqslant 0, \quad P_1'(u) = 1, \quad a \cap b = 0 \Rightarrow k(a) \wedge k(b) = 0 \Rightarrow P'(k(a) \vee k(b))$$
$$= P'(k(a)) + P'(k(b)) \Rightarrow P_1'(a \cup b) = P_1'(a) + P_1'(b).$$

Or, cette P_1' est absolument continue par rapport à P :

$$P(a) = 0 \Rightarrow k(a) = 0 \Rightarrow P'(k(a)) = 0 \Rightarrow P_1'(a) = 0 ;$$

on peut donc appliquer le résultat démontré d'abord, d'où la proposition D.

PROPOSITION E. — *Tout treillis booléen métrique est capable d'une loi bivalente.*

Soit B un tel treillis, immergé par ortho-isomorphie dans (m. l. f.). Pour tout $a \in \mathrm{B}$, soit $\mathrm{S}(a)$ la boule unité de a:

$$\mathrm{S}(a) = \{ \psi / \psi \in a, \qquad \| \psi \| = 1 \}.$$

$\mathrm{S}(a)$ est fermé, dans l'espace H de Hilbert qui porte (m. l. f.), pour la topologie faible. Soit $\mathrm{S}(u)$ la boule unité de H ; $\mathrm{S}(u)$ est compacte pour la topologie faible et $\mathrm{S}(a) \subset \mathrm{S}(u)$.

On a :

$$\mathrm{S}(a \wedge b) = \mathrm{S}(a) \cap \mathrm{S}(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{S}(a_i).$$

Montrons que, si, pour tout i, on a :

$$a_i \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_i \neq u,$$

cela implique :

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{S}(a_i) \cup \mathrm{S}(\mathrm{C}a_i)) \neq 0.$$

En effet :

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{S}(a_i) \cup \mathrm{S}(\mathrm{C}a_i)) = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{S}(x_i) \right),$$

où le $\cup$ est étendu aux 2^n valeurs de $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{S}(x_i) \right)$, quand chaque x_i prend, indépendamment des autres, soit la valeur a_i, soit la valeur $\mathrm{C}a_i$. Si l'un de ces $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{S}(x_i) \right)$ était nul, on en déduirait :

$$\mathrm{S}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \right) = 0 \qquad \text{donc} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

d'où, par orthoisomorphie :

$$\bigwedge_{i \neq 1} x_i \leqslant \mathrm{C}x_1,$$

où C est la complémentation dans (m. l. f.) ; on aurait :

$$\bigwedge_{i \neq 1} x_i \bigwedge \mathrm{C}x_1 = \mathrm{C}x_1 \Rightarrow \bigcap_{i \neq 1} \mathrm{S}(x_i) \bigcap \mathrm{S}(\mathrm{C}x_1) = \mathrm{S}(\mathrm{C}x_1) \neq 0 ;$$

or, $\bigcap_{i\neq 1} S(x_i) \bigcap S(Cx_1)$ est un des autres $\left(\bigcap_{i=1}^{n} S(x_i)\right)$; ils ne peuvent donc être tous nuls, et l'on a bien :

$$\bigcap_{i=1}^{n} S(a_i) \bigcup S(Ca_i)) \neq 0.$$

Pour tout $a \in B$, posons :

$$F(a) = S(a) \cup S(Ca).$$

F(a) est un fermé dans la boule compacte S(u) ; l'ensemble de ces F(a) fermés, pour a parcourant B, et $a \neq 0$, possède la propriété d'intersection finie non vide, donc :

$$\bigcap_{a \in B} F(a) \neq 0 ;$$

il existe donc, dans S(u), des vecteurs communs à tous les F(a), c'est-à-dire appartenant, pour tout a de B, soit à a, soit à Ca. La loi quantique déterminée, sur B, par l'un de ces vecteurs est donc bivalente, ce qui démontre la proposition E.

RÉFÉRENCES

[I-*1*] HALMÖS, *Measure theory*, § 40 et 41.
[I-*2*] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, chap. X et XI.
[I-*3*] BOURBAKI, Livre V, chap. 5 et Livre II, chap. 9, § 6.
[I-*4*] NEVEU, *Bases math. du calcul des probab.*, ex. I.3.1-I.4.3-I.5.1.
[I-*5*] LOÈVE, *Theory of Probability*, p. 100, ex. 5.6.
[I-*6*] KOLMOGOROFF et FOMIN, *Measure* (chap. IV, § 20).
[I-*7*] CARATHEODORY, *Measure and integration*, p. 165 et note 1.
[I-*8*] A. RÉNYI, Sur les espaces simples de probabilités conditionnelles. *Ann. Inst. H. Poincaré*, I. 1, 1964.
[II-*1*] J. VON NEUMANN and G. BIRKHOFF, The logic of quantum mechanics. *Ann. math.*, **37**, 1936.
[II-*2*] M. D. MACLAREN, *Notes on axioms for quantum mechanics*. Argonne nat. labo., 1965.
[II-*3*] G. BODIOU, *Théorie dialectique des probabilités*. Gauthier-Villars, 1964.
[II-*4*] J. C. T. POOL, *Semi-modularity and the logic of quantum mechanics*. Argonne nat. labo., 1968.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1969)