ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC LICHNEROWICZ

# Sur la loi de demande en fonction des prix

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 5, nº 3 (1969), p. 255-273
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_3_255_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. V, n° 3, 1969, p. 255-273.

Section B :
*Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Sur la loi de demande en fonction des prix

par

**Marc LICHNEROWICZ**

SOMMAIRE. — Dans cet article, nous affaiblissons dans deux directions différentes, les hypothèses de Morishima concernant l'étude de la loi de demande en fonction des prix.

Morishima avait fait sur la demande algébrique $X = X(P)$ les hypothèses:

$$PX(P) \equiv 0; \frac{\partial X_i}{\partial P^j} \geqq 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j; \qquad \text{irréductibilité de la matrice} \left[\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(P)\right]$$

Nous substituons à l'identité $PX(P) \equiv 0$, la condition $PX(P) = 0$, et à l'irréductibilité, l'hypothèse plus faible d'indécomposabilité. Supposant $PX(P)$ concave en $P$, nous recherchons les conditions d'équilibre d'après la théorie des programmes concaves. On établit sous ces nouvelles hypothèses l'existence et l'unicité d'une demi-droite de prix d'équilibre strictement positifs, ainsi que la loi de Hicks.

SUMMARY. — In this paper we weaken in two different ways the assumptions of Morishima, concerning the law of demand in function of prices.

Morishima made on the algebric demand $X = X(P)$ the following assumptions:

$$PX(P) \equiv 0; \frac{\partial X_i}{\partial P^j} \geqq 0 \quad \text{if} \quad ,i \neq j; \qquad \text{irreductibility of the matrix} \left[\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(P)\right]$$

We substitute to the identity $PX(P) \equiv 0$ the condition $PX(P) = 0$, and to the irreductibility, the weaker assumption of indecomposability. Assuming that $PX(P)$ is a concave function of $P$, we seek the conditions of equilibrium, according to the theory of concave programming. Under these new assumptions we show that the existence and unicity of a half ray of strictly positive equilibrium prices, and the Hicksian law, yields.

## 1. INTRODUCTION

Au début de son livre *Equilibrium, Stability and Growth*, Morishima considère un individu (ou un groupe d'individus) dont les lois d'offre et de demande portant sur $n + 1$ biens $0, 1, \ldots, n$, sont connues en fonction des prix de ces biens. Étant donné un bien $i$, désignant par $P^i$ son prix non normalisé supposé non négatif, et par $X_i(P)$ la demande algébrique (excès de la demande comptée positivement sur l'offre comptée négativement) pour ce bien au prix $P = [P^0, P^1, \ldots, P^n]$, il fait sur les fonctions $X_i$ les quatre hypothèses fondamentales suivantes:

(B) $X_i(P)$ *est bornée inférieurement.* Pour chaque bien, quel que soit le système de prix adopté, il existe une demande minimale qui peut correspondre au minimum vital de l'individu, et une offre maximale égale à la quantité finie du bien envisagé détenue par l'individu. Puisque nous avons convenu de compter les offres comme des demandes négatives, nous aurons ainsi pour chaque bien une demande algébrique minimale.

(C) $X_i(P)$ *est continue.*

(H) $X_i(P)$ *est positivement homogène de degré 0.* Le comportement de l'individu sur le marché dépend seulement des rapports de prix (prix normalisés) et non de la valeur de ces prix en eux-mêmes (prix non normalisés). Si tous les prix sont multipliés par un facteur positif quelconque, la demande algébrique (nous dirons aussi excès de demande) de tout bien ne s'en trouvera pas modifiée:

$$X_i(\lambda P) = X_i(P) \qquad \forall \lambda > 0$$

(W) *Les* $X_i(P)$ *vérifient identiquement la loi de Walras:*

$$\sum_{i=0}^{n} P^i X_i(P) \equiv 0$$

Les opérations de l'individu ne doivent pas le mener à la ruine, c'est-à-dire que, quel que soit le système de prix adopté, il vend plus qu'il n'achète

$$\left(\sum_{i=0}^{n} P^i X_i(P) \leqq 0\right)$$

L'extérieur réagira de la même façon, et on aboutit ainsi à une égalité des recettes et des dépenses.

De plus, en cours d'exposé, Morishima sera conduit à faire les deux hypothèses supplémentaires suivantes:

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial X_i}{\partial P^j}(P) \geqq 0 \qquad \forall i, j = 0, 1, \ldots, n; i \neq j$$

qu'il appelle improprement *hypothèses faibles de substituabilité.* En effet, cette hypothèse ne porte pas sur la nature relative des biens considérés, mais traduit le comportement suivant de l'individu: quand le prix d'un bien $j$ augmente (resp. baisse), l'individu, s'il réalise une opération sur un bien $i$ différent de $j$, achète (resp. vend) de ce bien $i$. Nous verrons qu'avec (H), ceci implique que, s'il réalise une opération sur le bien $j$ en question, il vend (resp. achète) du bien $j$ (§ 2, *b*).

(I) *Irréductibilité:* la matrice $\left[\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(P)\right]$ est irréductible: il n'existe pas de partie de l'ensemble des biens $\{0, 1, \ldots, n\}$, telle que la demande algébrique des éléments de cette partie ne dépende pas des prix des biens appartenant à son complémentaire.

Sous ces hypothèses, Morishima étudie d'un point de vue statique les propriétés d'« équilibre » du système économique considéré: existence et unicité d'une demi-droite de prix d'équilibre, lois de Hicks relatives aux mouvements de prix engendrés par des modifications de fonction de demande. De cette étude, *nous pourrons déduire au moins les mêmes résultats (ils sont parfois plus précis) sous des hypothèses plus faibles.*

On s'occupe d'un système à $n$ biens avec des prix non normalisés. Considérons la fonction

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} P^i X_i(P)$$

qui représente la dépense algébrique de l'individu (les recettes sont comptées comme des dépenses négatives). On note d'après (H) que $f$ est une fonction homogène de degré 1 en P. Au lieu de supposer que $f(P)$ est identiquement nulle (identité de Walras), on peut la supposer *concave, bornée supérieurement* — l'individu ne peut dépenser au-delà d'une certaine somme finie d'argent, quel que soit le système de prix adopté — et s'intéresser à l'ensemble $\Omega = \{ P \geqq 0 / f(P) = 0 \}$ des prix qui équilibrent recettes et dépenses. De plus, au lieu de supposer le système de biens irréductible (irréductibilité (I)), on peut se borner à *interdire à la matrice* $\left[\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(P)\right]$

*de se réduire à l'ensemble de deux blocs carrés diagonaux non nuls (indécomposabilité)*. Sous ces deux nouvelles hypothèses nous établirons les résultats de Morishima.

## 2. SUBSTITUABILITÉ ET IRRÉDUCTIBILITÉ

*a*) Si $a, b \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ on écrit $a \leqq b$ (resp. $a < b$) pour $a_i \leqq b_i$ (resp. $a_i < b_i$) pour tout $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$. On écrit $a \leq b$ pour $a \leqq b$, et $a \neq b$.

On considère un ensemble de biens distingués par un indice $i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), et on désigne par $\mathrm{P}^1, \mathrm{P}^2, \ldots, \mathrm{P}^n$ les prix non normalisés correspondants, supposés non négatifs. On note $\mathrm{P} = [\mathrm{P}^1, \mathrm{P}^2, \ldots, \mathrm{P}^n]$ le vecteur prix dans $\mathrm{R}^n_+$. A chaque bien $i$ correspond une fonction d'excès de demande $\mathrm{X}_i$, donnée, et supposée *univoque*, *bornée inférieurement*, *de classe* $\mathrm{C}^1$, *positivement homogène de degré* 0, en P.

De l'hypothèse (H) d'homogénéité résulte l'identité d'Euler:

$$\mathrm{P}^i \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial \mathrm{P}^i}(\mathrm{P}) = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathrm{P}^j \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial \mathrm{P}^j}(\mathrm{P})$$

On posera $\mathrm{X}(\mathrm{P}) = [\mathrm{X}_1(\mathrm{P}), \mathrm{X}_2(\mathrm{P}), \ldots, \mathrm{X}_n(\mathrm{P})]$. Les hypothèses précédentes sont toujours supposées vérifiées. Nous ne les mentionnerons plus par la suite. De plus, nous ne considérerons que des vecteurs prix $\mathrm{P} \geq 0$.

*b*) On dit que l'ensemble de biens considéré vérifie l'hypothèse (S) si pour $\mathrm{P} \geqq 0$, et pour tout $i$:

$$\frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial \mathrm{P}^j} \geqq 0 \qquad \forall j \neq i$$

On voit que (S) entraîne:

$$(\mathrm{S}') \quad \mathrm{P}' \leq \mathrm{P}'', \qquad \mathrm{P}'^i = \mathrm{P}''^i \Rightarrow \mathrm{X}_i(\mathrm{P}') \leqq \mathrm{X}_i(\mathrm{P}'')$$

Il suffit en effet d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $\mathrm{X}_i$. D'autre part avec (H) on déduit que pour $\mathrm{P} \geq 0$:

$$\frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial \mathrm{P}^i}(\mathrm{P}) \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

*c*) Une matrice carrée $\mathrm{A} = (a_{ij})$ est dite *réductible*, s'il existe un ensemble E d'indices, non vide, tel que $a_{ij} = 0$ pour $i \in \mathrm{E}, j \notin \mathrm{E}$. Dans le cas contraire A est dite *irréductible*. On voit immédiatement qu'une matrice carrée A est irréductible si, et seulement s'il n'existe pas de matrice de permutation $\Pi$ telle que:

$$\Pi A \Pi^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

où $A_1$ et $A_2$ sont des matrices carrées.

Une matrice carrée A est dite *indécomposable* (non diagonalisable par blocs), s'il n'existe pas de matrice de permutation $\Pi$ telle que:

$$\Pi A \Pi^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

où $A_1$ et $A_2$ sont des matrices carrées.

Il est clair qu'une matrice carrée, indécomposable, peut être réductible.

Le système de biens envisagé est dit *réductible dans un domaine* U *de prix*, si la matrice $\left[\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(P)\right]$ est réductible pour tout $P \in U$. On définira de la même façon des systèmes de biens *irréductibles*, ou *indécomposables dans un domaine de prix.*

LEMME 1. — *Si un système de biens satisfait* (S), *il est réductible pour tout vecteur prix admettant certaines composantes nulles.*

P étant donné, soit E l'ensemble non vide des indices $j$ tels que $P^j > 0$. Si $i \notin E$ et $j \in E$, on a d'après (H) et (S):

$$\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(P) = 0$$

ce qui établit le résultat.

Les $X_i(P)$ correspondants aux biens de prix nuls ($i \notin E$) sont ainsi indépendants des prix des biens à prix strictement positifs. De plus, il résulte du Lemme 1 qu'un système de biens vérifiant (S) ne peut être irréductible, que dans un domaine U tel que $P \in U$ implique $P > 0$.

## 3. CONCAVITÉ

Nous considérons maintenant la fonction

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} P^i X_i(P),$$

et nous allons étudier quelques propriétés de l'ensemble $\Omega = \{ P \geq 0 / f(P) = 0 \}$ dans le cas où $f$ est une fonction concave de P.

Un système de prix $\overline{P}$ sera dit un *système de prix d'équilibre pour* X si :

$$\overline{P} \in \Omega, \qquad \text{et} \qquad X(\overline{P}) \leqq 0$$

Pour un tel système de prix, on a les deux implications :

$$\begin{aligned} \overline{P}^i > 0 &\Rightarrow X_i(\overline{P}) = 0 \\ X_i(\overline{P}) < 0 &\Rightarrow \overline{P}^i = 0 \end{aligned}$$

sinon $\overline{P}$ n'appartiendrait pas à $\Omega$.

Nous dirons que le système de biens envisagé vérifie l'*hypothèse* (C) *de concavité*, si $f$ est une fonction concave de P, et si $f$ est bornée supérieurement.

THÉORÈME 1. — *Si un système de biens vérifie l'hypothèse* (C), *alors :*
1° $\widehat{P} \in \Omega$ *si et seulement si* $\widehat{P}$ *est une solution optimale du programme :*

$$\Pi : \max f(P) \quad , \quad P \geq 0$$

2° $\Omega$ *est alors un cône.*

En effet, les prix $\widehat{P}$ optimaux du programme considéré vérifient les conditions de Kuhn et Tucker :

$$\exists\, u_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

tels que :

$$\frac{\partial f}{\partial P^j}(\widehat{P}) + u_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3-1}$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \widehat{P}^j = 0 \tag{3-2}$$

les $X_i$ étant homogènes de degré 0, $f$ est homogène de degré 1.

De (3-1) et (3-2) on déduit alors :

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{P}^j \frac{\partial f}{\partial P^j}(\widehat{P}) = f(\widehat{P}) = 0$$

et $f(P) \leqq 0$ pour $P \geq 0$, ce qui établit le 1°.

Notons que si l'on explicite (3-1) il vient :

$$(3\text{-}3)\qquad X_j(\widehat{P}) + \sum_{i=1}^{n} \widehat{P}^i \frac{\partial X_i}{\partial P^j}(\widehat{P}) + u_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ou compte tenu de l'homogénéité de $X_j$ :

$$(3\text{-}4)\qquad X_j(\widehat{P}) + \sum_{i=1}^{n} \widehat{P}^i \left(\frac{\partial X_i}{\partial P^j} - \frac{\partial X_j}{\partial P^i}\right)(\widehat{P}) + u_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Pour $\Omega$, on peut écrire d'après (H) :

$$\widehat{P} \in \Omega \Rightarrow \lambda\widehat{P} \in \Omega \qquad \forall \lambda > 0$$

et d'après (C) :

$$\widehat{P}, \widehat{Q} \in \Omega \Rightarrow \mu\widehat{P} + (1 - \mu)\widehat{Q} \in \Omega \qquad \forall \mu \in [0, 1]$$

on en déduit que :

$$\widehat{P}, \widehat{Q} \in \Omega \Rightarrow \alpha\widehat{P} + \beta\widehat{Q} \in \Omega \qquad \forall \alpha, \beta > 0$$

ce qui établit le 2°.

REMARQUE. — *Soit un système de biens vérifiant* (C). *Quels que soient les éléments* $\widehat{P}$ *et* $\widehat{Q}$ *de* $\Omega$, *on a :*

$$\widehat{Q}^i \frac{\partial f}{\partial P^i}(\widehat{P}) = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

En effet, si $f$ est concave, on peut écrire :

$$f(Q) - f(P) \leqq \sum_{i=1}^{n} (Q^i - P^i) \frac{\partial f}{\partial P^i}(P) \qquad \forall P, Q \geq 0$$

Si $\widehat{P}$, $\widehat{Q} \in \Omega$ on a, par définition :

$$f(\widehat{P}) = f(\widehat{Q}) = 0$$

et d'après (3-1) :

$$\frac{\partial f}{\partial P^i}(\widehat{P}) \leqq 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

De plus (H) entraîne, pour $\hat{P} \in \Omega$:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{P}^i \frac{\partial f}{\partial P^i}(\hat{P}) = f(\hat{P}) = 0$$

De ces trois dernières relations combinées avec la première, on déduit que:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Q}^i \frac{\partial f}{\partial P^i}(\hat{P}) = 0 \qquad \forall \hat{P}, \hat{Q} \in \Omega$$

Soit, chacun des termes de cette somme ayant le même signe:

$$\hat{Q}^i \frac{\partial f}{\partial P^i}(\hat{P}) = 0 \qquad \forall \hat{P}, \hat{Q} \in \Omega \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

ce qui montre le résultat.

COROLLAIRE 1. — *Soit un système de biens vérifiant* (C) *et* (S). *Les éléments* $\hat{P}$ *de* $\Omega$ *ayant des composantes* $\hat{P}^k$ *nulles sont tels que, pour les biens correspondants:*

$$X_k(\hat{P}) \leqq 0$$

*Un élément* $\hat{P}$ *de* $\Omega$ *sera un système de prix d'équilibre pour* X *si, et seulement si, pour les biens* $j$ *correspondant à des prix* $\hat{P}^j$ *strictement positifs:*

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{P}^i \left( \frac{\partial X_i}{\partial P^j} - \frac{\partial X_j}{\partial P^i} \right)(\hat{P}) = 0 \tag{3-5}$$

*ou, ce qui est équivalent:*

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{P}^i \frac{\partial X_i}{\partial P^j}(\hat{P}) = 0 \tag{3-6}$$

En effet, si $\hat{P}^k = 0$ on a d'après (3-3):

$$X_k(\hat{P}) + \sum_{i \neq k} \hat{P}^i \frac{\partial X_i}{\partial P^k}(\hat{P}) + u_k = 0$$

et d'après (S), $X_k(\hat{P}) \leqq 0$.

La condition (3-5) est nécessaire: si $\hat{P}$ est prix d'équilibre, et si $\hat{P}^j > 0$ on a $X_j(\hat{P}) = 0$ et d'après (3-2) $u_j = 0$. Par suite (3-4) donne (3-5).

Inversement, supposons que $\widehat{P} \in \Omega$ vérifie (3-5) pour tout indice $j$ tel que $\widehat{P}^j > 0$; $u_j$ étant nul, il résulte de (3-4) et (3-5) que $X_j(\widehat{P}) = 0$. Compte tenu de la première partie du corollaire, $\widehat{P}$ est prix d'équilibre.

L'équivalence de (3-5) et (3-6) résulte immédiatement de l'homogénéité de degré 0 de $X_j$.

## 4. APPLICATION

Considérons un système de biens vérifiant (C). Soient $\widehat{P}$ et $\widehat{Q}$ deux éléments de $\Omega$. D'après le théorème 1, le vecteur prix

$$P(\lambda) = \lambda\widehat{P} + (1 - \lambda)\widehat{Q}$$

où $\lambda \in [0, 1]$, est encore un élément de $\Omega$. Posons:

$$Y_i(\lambda) = X_i[P(\lambda)] = X_i[\lambda\widehat{P} + (1 - \lambda)\widehat{Q}]$$

Par dérivation il vient:

$$\frac{dY_i}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{P}^j \frac{\partial X_i}{\partial P^j}[P(\lambda)] - \sum_{j=1}^{n} \widehat{Q}^j \frac{\partial X_i}{\partial P^j}[P(\lambda)]$$

ce qu'on peut écrire, en exprimant $\widehat{Q}$ en fonction de $\widehat{P}$ et de $P(\lambda)$, et après réduction:

$$\frac{dY_i}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{1 - \lambda} \sum_{j=1}^{n} \widehat{P}^j \frac{\partial X_i}{\partial P^j}[P(\lambda)] - \frac{1}{1 - \lambda} \sum_{j=1}^{n} P^j(\lambda) \frac{\partial X_i}{\partial P^j}[P(\lambda)]$$

Or le dernier terme du second membre est nul d'après l'identité d'Euler. Ainsi:

$$\frac{dY_i}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{1 - \lambda} \sum_{j=1}^{n} \widehat{P}^j \frac{\partial X_i}{\partial P^j}[P(\lambda)] \tag{4-1}$$

Nous pouvons maintenant établir:

THÉORÈME 2. — *Soit un système de biens vérifiant* (C) *et* (S). *Si* $\widehat{P}$ *est un élément de* $\Omega$ *tel que* $\widehat{P}^k = 0$, *alors pour tout autre élément* $\widehat{Q}$ *de* $\Omega$ *on a:*

$$X_k(\widehat{Q}) \leqq X_k(\widehat{P}) \leqq 0 \tag{4-2}$$

*Il en résulte que si* $\widehat{Q}^k = \widehat{P}^k = 0$, *on a* $X_k(\widehat{Q}) = X_k(\widehat{P})$.

En effet, sous les hypothèses faites, il résulte de (4-1):

$$\frac{dY_k}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda}\sum_{j \neq k} \hat{P}^j \frac{\partial X_k}{\partial P^j}[P(\lambda)]$$

où d'après (S) le second membre est positif ou nul, quel que soit $\lambda > 0$. $Y_k$ est ainsi une fonction croissante de $\lambda$. Or on a:

$$Y_k(0) = X_k(\hat{Q}) \qquad Y_k(1) = X_k(\hat{P})$$

Il en résulte, compte tenu du corollaire 1, l'inégalité (4-2). Si $\hat{Q}^k = 0$, il suffit d'échanger les rôles de $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ pour obtenir l'égalité:

$$X_k(\hat{Q}) = X_k(\hat{P})$$

Ainsi l'excès de demande d'un bien de prix nul est indépendant des prix de tous les autres biens, ce qui précise un résultat du paragraphe 2.

## 5. PRIX D'ÉQUILIBRE STRICTEMENT POSITIFS

Arrow et Hurwicz ont montré (cf. références) que si $X_i(P)$ est univoque et bornée inférieurement, continue, homogène de degré 0, et si les $X_i$ vérifient identiquement la loi de Walras, alors il existe un système de prix d'équilibre pour X. On en déduit immédiatement (cf. Introduction) que l'*existence tient sous nos hypothèses.*

Morishima se place dans le cas d'un système de biens irréductible. Il en déduit, d'après le lemme 1, que nous avons explicité, l'unicité d'une demi-droite de prix d'équilibre dans $R^n$ strictement positive. Nous allons montrer que dans le cas où $f$ est concave, l'hypothèse d'indécomposabilité, qui est beaucoup plus faible, suffit à assurer ce résultat.

Si $\hat{P}$ est un élément de $\Omega$ ayant certaines composantes nulles, on désigne par E l'ensemble des indices correspondant à ses composantes strictement positives, par $\bar{E}$ son complémentaire.

On va établir

THÉORÈME 3. — *Soit un système de biens, indécomposable, vérifiant* (C) *et* (S). *Si ce système admet un prix d'équilibre* $\bar{Q}$ *strictement positif, il ne peut exister des éléments de* $\Omega$ *dont certaines composantes soient nulles.*

En effet, si $\bar{Q} > 0$ est prix d'équilibre, $X_i(\bar{Q}) = 0$ pour tout $i$. Soit $\hat{P}$

un élément de $\Omega$ tel que l'ensemble E correspondant soit non vide. Si $k \in \overline{E}$, il résulte du théorème 2 que $X_k(\hat{P}) = 0$. On peut alors déduire des relations (3-3) que:

$$\frac{\partial X_j}{\partial P^k}(\hat{P}) = 0 \qquad \forall j \in E, \quad \forall k \in \overline{E}$$

Or d'après le lemme 1 on a:

$$\frac{\partial X_k}{\partial P^j}(\hat{P}) = 0 \qquad \forall j \in E, \quad \forall k \in \overline{E}$$

Alors la matrice carrée $\left[\frac{\partial X_j}{\partial P^k}(\hat{P})\right]$ peut, au moyen d'une permutation des indices, se mettre sous la forme $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1$ et $A_2$ sont des matrices carrées correspondant aux ensembles d'indices E et $\overline{E}$, ce qui contredit l'hypothèse que le système de biens est indécomposable.

Un *bien i* sera dit *libre* si pour tout élément $\hat{P}$ de $\Omega$ on a $X_i(\hat{P}) < 0$ (*). Nous allons montrer:

THÉORÈME 4. — *Soit un système de biens, indécomposable, vérifiant* (C) *et* (S). *Si le système ne contient pas de biens libres, alors tout élément de $\Omega$ est strictement positif.*

En effet, soit $\hat{P}$ un élément de $\Omega$. Supposons que $\hat{P}$ ait des composantes nulles, c'est-à-dire que l'ensemble $\overline{E}$ correspondant soit non vide. On peut écrire, pour tout $k \in \overline{E}$:

$$X_k(\hat{P}) + \sum_{j \in E} \hat{P}^j \frac{\partial X_j}{\partial P^k}(\hat{P}) + u_k = 0$$

Le système de biens étant indécomposable, il existe $j \in E$ et $k \in \overline{E}$ tels que $\frac{\partial X_j}{\partial P^k}(\hat{P}) > 0$. Avec la relation précédente ceci implique que pour cet indice $k$, on a:

(5-1) $$X_k(\hat{P}) < 0$$

On en déduit, d'après le théorème 2, que, pour cet indice $k$, (5-1) est vérifiée

(*) On remarque que si $i$ est un bien libre, $\overline{P}^i = 0$ pour tout système de prix d'équilibre $\overline{P}$. Cette définition est donc plus restrictive que celle de Morishima.

quel que soit $\hat{P}$ élément de $\Omega$. Autrement dit $k$ est un bien libre, contrairement à l'hypothèse, ce qui établit le résultat

THÉORÈME 5. — *Soit un système de biens, indécomposable, vérifiant* (C) *et* (S), *et ne contenant pas de biens libres. Alors tout système* $\overline{P}$ *de prix d'équilibre est strictement positif, et la matrice* $\left[\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(\overline{P})\right]$ *associée à de tels systèmes de prix d'équilibre, est irréductible.*

Les prix d'équilibre appartenant par définition à $\Omega$, sont strictement positifs en vertu du théorème précédent.

Il reste donc à montrer l'irréductibilité de la matrice $A(\overline{P}) = \left[\frac{\partial X_i}{\partial P^j}(\overline{P})\right]$ où $\overline{P}$ est un prix d'équilibre strictement positif. On peut écrire:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{P}^j \frac{\partial X_i}{\partial P^j}(\overline{P}) = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

d'après l'homogénéité de degré 0 des fonctions $X_i$. De plus, d'après (3-6) on a:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}^i \frac{\partial X_i}{\partial P^j}(\overline{P}) = 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Soit, en notation matricielle:

$$A(\overline{P}).\overline{P} = 0 \tag{5-2}$$

$$^t\overline{P}.A(\overline{P}) = 0 \tag{5-3}$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que la matrice $A(\overline{P})$ soit réductible. Il existe alors un ensemble E d'indices, tel qu'en permutant convenablement lignes et colonnes de la matrice A(P) on puisse écrire:

$$A(\overline{P}) = \begin{array}{cc|c} E & \overline{E} & \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{c} E \\ \overline{E} \end{array} \end{array}$$

Décomposant $\overline{P}$ et ${}^t\overline{P}$ de la même façon, on a:

$$\overline{P} = \begin{array}{cc} 1 & \\ \begin{bmatrix} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} E \\ \overline{E} \end{array} \end{array} \quad ; \quad {}^t\overline{P} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} E & \overline{E} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} {}^t\overline{P}_1 & {}^t\overline{P}_2 \end{bmatrix} & 1 \end{array}$$

La relation (5-2) implique alors, en particulier:

(5-4) $$A_1\overline{P}_1 + A_2\overline{P}_2 = 0$$

De même, la relation (5-3) entraîne:

(5-5) $${}^t\overline{P}_1 A_1 = 0$$

Multipliant (5-4) à gauche par ${}^t\overline{P}_1$, il vient:

$${}^t\overline{P}_1 A_1 \overline{P}_1 + {}^t\overline{P}_1 A_2 \overline{P}_2 = 0$$

qui, compte tenu de (5-5) implique:

$${}^t\overline{P}_1 A_2 \overline{P}_2 = 0$$

Or, ${}^t\overline{P}_1$ et $\overline{P}_2$ étant strictement positifs, et la matrice $A_2$ non négative, cette dernière relation assure que:

$$A_2 = 0$$

Ainsi la matrice $A(\overline{P})$ est décomposable, ce qui contredit une hypothèse. Le théorème se trouve donc établi.

Ce résultat précise les liens entre deux hypothèses de nature différente: la concavité de la fonction $f$, et l'irréductibilité de la matrice $\left[\dfrac{\partial X_i}{\partial P^j}(\overline{P})\right]$ De plus, il va servir à montrer l'unicité, à un facteur positif près, du système de prix d'équilibre, et la loi de Hicks.

THÉORÈME 6. — *Soit un système de biens, indécomposable, vérifiant* (C) *et* (S), *et ne contenant pas de biens libres. Alors la demi-droite des prix d'équilibre est unique.*

Soient $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ deux systèmes de prix d'équilibre non colinéaires. On sait, en vertu du théorème 4, qu'ils sont strictement positifs. On peut donc poser :

$$\lambda = \min_i \frac{\overline{Q}^i}{\overline{P}^i}$$

ce qui nous permet de définir un ensemble R d'indices de la manière suivante :

$$j \in R \Leftrightarrow \overline{Q}^j = \lambda \overline{P}^j$$
$$k \in \overline{R} \Leftrightarrow \overline{Q}^k > \lambda \overline{P}^k$$

Considérons des systèmes de prix de la forme $P(t) = t.\lambda\overline{P} + (1-t)\overline{Q}$, où $t \in [0, 1]$, et posons $Y_j(t) = X_j[P(t)]$. Il vient pour tout $j \in R$ :

$$\text{(5-6)} \qquad \frac{dY_j}{dt}(t) = \sum_{k \in \overline{R}} (\lambda\overline{P}^k - \overline{Q}^k) \frac{\partial X_j}{\partial P^k}[P(t)] \leqq 0 \qquad \forall t \in [0, 1]$$

On en déduit, pour tout $j \in R$ :

$$Y_j(1) \leqq Y_j(t) \leqq Y_j(0) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Soit, en vertu de la définition de $Y_j$ :

$$X_j(\lambda\overline{P}) \leqq X_j[P(t)] \leqq X_j(\overline{Q}) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Or, $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ étant des prix d'équilibre strictement positifs, on a :

$$X_j(\lambda\overline{P}) = X_j(\overline{Q}) = 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Il en résulte que, pour tout $j \in R$, et pour tout $t \in [0, 1]$ :

$$X_j[P(t)] = 0$$

(5-6) se réduit alors à une égalité pour $t \in ]0, 1[$. Tous les termes composant son premier membre sont négatifs ou nuls. Or les $(\lambda\overline{P}^k - \overline{Q}^k)$ sont strictement négatifs. Il vient donc :

$$\frac{\partial X_j}{\partial P^k}[P(t)] = 0 \qquad \forall j \in R, \qquad \forall k \in \overline{R}, \qquad \forall t \in ]0, 1[$$

D'où, par continuité quand $t$ tend vers 0 :

$$\frac{\partial X_j}{\partial P^k}(\overline{Q}) = 0 \qquad \forall j \in R, \qquad \forall k \in \overline{R}$$

Ainsi la matrice $\left[\dfrac{\partial X_i}{\partial P^j}(\overline{Q})\right]$ est réductible pour un système de prix d'équilibre strictement positif, ce qui est impossible, en vertu du théorème 5. L'unicité de la demi-droite des prix d'équilibre se trouve donc établie.

## 6. LOI DE HICKS

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser un résultat de Morishima, connu sous le nom de loi de Hicks. Ce résultat précise les effets, sur les prix, d'un changement de fonction d'excès de demande.

On considère un système de biens, *indécomposable, vérifiant* (C) *et* (S), *et ne contenant pas de bien libre.* On sait, d'après le théorème 6, qu'à un vecteur excès de demande X, on peut associer une demi-droite unique de prix d'équilibre strictement positifs, c'est-à-dire un vecteur prix normalisé $(1, \overline{p}) > 0$ unique $\left(\overline{p}^i = \dfrac{\overline{P}^i}{\overline{P}^1}, i = 2, \ldots, n\right)$. On remarque que $X_i(1, \overline{p}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Supposons qu'il y ait un accroissement de la demande (ou une baisse de l'offre) pour un bien $j \neq 1$ déterminé, l'excès de demande pour les autres biens $i \neq 1, j$ restant inchangée. On définit donc un nouveau vecteur excès de demande X′ pour lequel le système est encore indécomposable, vérifie (C) et (S), et ne contient pas de biens libres, qui au prix $(1, \overline{p})$ satisfait à:

$$\begin{aligned} &X'_j(1, \overline{p}) > X_j(1, \overline{p}) = 0 \\ &X'_i(1, \overline{p}) = X_i(1, \overline{p}) = 0 \qquad \forall\, i \neq 1, j \end{aligned}$$

Or on doit avoir:

$$f'(1, \overline{p}) = X'_1(1, \overline{p}) + \sum_{i=2}^{n} \overline{p}^i X'_i(1, \overline{p}) \leqq 0$$

C'est-à-dire:

$$X'_1(1, \overline{p}) + \overline{p}^j X'_j(1, \overline{p}) \leqq 0$$

ce qui implique que l'augmentation de la demande pour le bien $j$ doit être compensée par un accroissement de l'offre pour le bien 1. Ainsi, au prix $(1, \overline{p})$, le nouveau vecteur excès de demande satisfera:

$$\text{(6-1)} \qquad \begin{cases} X'_1(1, \overline{p}) < X_1(1, \overline{p}) = 0 \\ X'_j(1, \overline{p}) > X_j(1, \overline{p}) = 0 \\ X'_i(1, \overline{p}) = X_i(1, \overline{p}) = 0 \qquad \forall\, i \neq 1, j \end{cases}$$

A ce nouveau vecteur excès de demande X′, on associe d'après le théorème 6 un système de prix d'équilibre normalisé $(1, \bar{p}')$, unique, et strictement positif. Au prix $(1, \bar{p}') > 0$, on a:

$$X'_i(1, \bar{p}') = 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

THÉORÈME 7. — *Soit un système de biens, indécomposable, vérifiant* (C) *et* (S), *et ne contenant pas de biens libres. Si l'excès de demande pour un bien déterminé* $j \neq 1$ *augmente, le prix normalisé de tout bien* $i \neq 1$ *croît, et croît proportionnellement moins que celui de* $j$.

La démonstration de ce théorème comporte trois parties, où l'on use du même raisonnement. Nous l'exposerons en détail au cours de la première partie, et y ferons seulement allusion pour la suite.

*a*) Posons $\mu = \max\limits_{i \neq 1} \left(1, \dfrac{\bar{p}^i}{\bar{p}'^i}\right)$. On voit clairement que $\mu$ est bien défini. et que $\mu \geqq 1$. Nous allons d'abord montrer que $\mu = 1$. Raisonnons par l'absurde, et supposons $\mu > 1$. Il existe alors un ensemble R d'indices tel que:

$$\begin{array}{lll} \bar{p}^i = \mu \bar{p}'^i & \text{pour} & i \in \mathrm{R} \\ \left.\begin{array}{l} \bar{p}^k < \mu \bar{p}'^k \\ 1 < \mu \end{array}\right\} & \text{pour} & k \in \overline{\mathrm{R}}, \quad k \neq 1 \end{array}$$

Considérons des systèmes de prix, de la forme

$$\mathrm{P}(t) = t(\mu, \mu\bar{p}') + (1 - t)(1, \bar{p}),$$

où $t \in [0, 1]$. On peut écrire, si on pose $\mathrm{Y}'_i(t) = \mathrm{X}'_i[\mathrm{P}(t)]$:

$$\text{(6-2)} \quad \frac{d\mathrm{Y}'_i}{dt}(t) = \sum_{\substack{k \in \overline{\mathrm{R}} \\ k \neq 1}} (\mu\bar{p}'^k - \bar{p}^k) \frac{\partial \mathrm{X}'_i}{\partial \mathrm{P}^k}[\mathrm{P}(t)] + (\mu - 1)\frac{\partial \mathrm{X}'_i}{\partial \mathrm{P}^1}[\mathrm{P}(t)] \qquad \forall\, t \in [0, 1]$$

En vertu de (S), et d'après la définition de R, on voit que:

$$\frac{d\mathrm{Y}'_i}{dt}(t) \geqq 0 \qquad \forall\, i \in \mathrm{R} \qquad \forall\, t \in [0, 1]$$

d'où:

$$\mathrm{Y}'_i(0) \leqq \mathrm{Y}'_i(t) \leqq \mathrm{Y}'_i(1) \qquad \forall\, i \in \mathrm{R} \qquad \forall\, t \in [0, 1]$$

c'est-à-dire, compte tenu de (H), et d'après la définition de $\mathrm{Y}'_i$:

$$\text{(6-3)} \quad \mathrm{X}'_i(1, \bar{p}) \leqq \mathrm{X}'_i[\mathrm{P}(t)] \leqq \mathrm{X}'_i(\mu, \mu\bar{p}') = \mathrm{X}'_i(1, \bar{p}') = 0 \qquad \forall\, i \in \mathrm{R} \qquad \forall\, t \in [0, 1]$$

Comparant cette dernière relation à (6-1), on voit que $j$ ne peut appartenir à R. D'autre part, par définition $1 \in \bar{R}$, On peut donc écrire, d'après (6-1), puisque $i \in R \Rightarrow i \neq 1, j$:

$$X_i'(1, \bar{p}) = 0 \qquad \forall i \in R$$

Et par suite, d'après (6-3):

$$Y_i'(t) = 0 \qquad \forall i \in R \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Ceci implique:

$$\frac{dY_i'}{dt}(t) = 0 \qquad \forall i \in R \qquad \forall t \in ]0, 1[$$

Donc, d'après (6-2), et d'après la définition de R:

$$\frac{\partial X_i'}{\partial P^k}[P(t)] = 0 \qquad \forall k \in \bar{R}, \qquad \forall i \in R \qquad \forall t \in ]0, 1[$$

Soit, par continuité, quand $t$ tend vers 1:

$$\frac{\partial X_i'}{\partial P^k}(\mu, \mu\bar{p}') = 0 \qquad \forall i \in R \qquad \forall k \in \bar{R}$$

On en déduit, d'après (H):

$$\frac{\partial X_i'}{\partial P^k}(1, \bar{p}') = 0 \qquad \forall i \in R \qquad \forall k \in \bar{R}$$

et la matrice $\left[\frac{\partial X_i'}{\partial P^k}(1, \bar{p}')\right]$ est irréductible, ce qui contredit le théorème 5.

*b*) Ainsi $\mu = 1$. Nous allons maintenant montrer que $\bar{p}'^i > \bar{p}^i$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Puisque $\mu = 1$, l'ensemble R d'indices défini plus haut vérifie:

$$\begin{array}{lll} \bar{p}^k < \bar{p}'^k & \text{pour} & k \in \bar{R} \\ \left.\begin{array}{l} \bar{p}^i = \bar{p}'^i \\ 1 = \mu \end{array}\right\} & \text{pour} & i \in R, \quad i \neq 1 \end{array}$$

Si on considère des systèmes de prix de la forme $P(t) = t(\mu, \bar{p}') + (1-t)(1, \bar{p})$ où $t \in [0, 1]$, le même raisonnement que celui du (*a*) de la démonstration assure:

$$\text{(6-4)} \quad X_i'(1, \bar{p}) \leqq X_i'[P(t)] \leqq X_i'(\mu, \bar{p}') = X_i'(1, \bar{p}') = 0 \qquad \forall i \in R \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Comparant cette dernière relation à (6-1), on voit que $j \in \bar{R}$. De (6-4) et (6-1) on déduit que, pour $i \in R$, $i \neq 1$:

$$X_i'[P(t)] = 0 \qquad \forall i \in R, \qquad i \neq 1 \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Ceci implique de la même façon qu'au (*a*):

$$\frac{\partial X'_i}{\partial P^k}(1, \bar{p}') = 0 \qquad \forall i \in R, \qquad i \neq 1 \qquad \forall k \in \bar{R}$$

ce qui contredit le théorème 5.

Donc l'ensemble d'indices R se réduit au seul élément 1, et on a

$$p^i < p'^i, \qquad \forall i = 2, 3, \ldots, n.$$

*c*) Il nous reste à montrer que le prix normalisé de tout bien $i \neq 1$, croît proportionnellement moins que celui de $j$.

Posons $\lambda = \min\limits_{i \neq 1}\left(1, \dfrac{\bar{p}^i}{\bar{p}'^i}\right)$. D'après (*b*) on a $\lambda < 1$. Il existe alors un ensemble d'indices S tel que:

$$\begin{array}{lll} \bar{p}^i = \lambda \bar{p}'^i & \text{pour} & i \in S \\ \left.\begin{array}{l} \bar{p}^k > \lambda \bar{p}'^k \\ 1 > \lambda \end{array}\right\} & \text{pour} & k \in \bar{S}, \qquad k \neq 1 \end{array}$$

Supposons que $j \in \bar{S}$. Si on considère des systèmes de prix de la forme $P(t) = t(1, \bar{p}) + (1 - t)(\lambda, \lambda\bar{p}')$ où $t \in [0, 1]$, le même raisonnement que celui de (*a*) implique:

$$(6\text{-}5) \quad 0 = X'_i(1, \bar{p}') = X'_i(\lambda, \lambda\bar{p}') \leqq X'_i[P(t)] \leqq X'_i(1, \bar{p}) \qquad \forall i \in S \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Puisque $1, j \in \bar{S}$, on a d'après (6-1) et (6-5):

$$X'_i[P(t)] = 0 \qquad \forall i \in S \qquad \forall t \in [0, 1]$$

on en déduit de la même manière qu'au (*a*) de cette démonstration:

$$\frac{\partial X'_i}{\partial P^k}(1, \bar{p}') = 0 \qquad \forall i \in S \qquad \forall k \in \bar{S}$$

ce qui contredit le théorème 5. Ainsi $j \in S$.

De plus, toujours en vertu du même raisonnement, on voit qu'en réalité $S = \{j\}$. On peut donc écrire, puisque $\lambda > 0$ ($\bar{p}^i > 0$, $\forall i \neq 1$):

$$\bar{p}'^j = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{p}^j$$

$$\bar{p}'^i < \frac{1}{\lambda}\, \bar{p}^i \qquad \forall i \neq 1, j$$

Le prix normalisé de chaque bien $i \neq 1, j$ croît proportionnellement moins que celui de $j$, ce qui achève la démonstration.

## RÉFÉRENCES

MORISHIMA, *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford University Press, 1964, p. 1-14.

KARLIN, *Mathematical Methods in Games, Programming and Economics*, Addison Wesley, 1959, en particulier p. 326-327, tome I.

ARROW et HURWICZ, *a*) Some Remark on the Equilibria of Economic System. *Econometrica*, XXVIII, juillet 1960, p. 640-646 ; *b*) Competitive stability under weak gross substituatibility: nonlinear price adjustment and adaptive expectations. *International Economic Review*, III, mai 1962.

*Manuscrit reçu le 11 décembre 1968.*