ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

TON-THAT-LONG

Sur le calcul fonctionnel d'une contraction complètement non unitaire II

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 3 (1969), p. 213-231

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_3_213_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 3, 1969, p. 213-231. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur le calcul fonctionnel d'une contraction complètement non unitaire II.

par

TON-THAT-LONG (*)

RÉSUMÉ. — Cette note est une continuation de la note récente [5] qui consiste à obtenir les résultats de Sz. Nagy et C. Foias sur le calcul fonctionnel d'une contraction complètement non unitaire T et cela sans utilisation de la mesure spectrale (et sa continuité absolue) de la dilatation unitaire minimum de T. D'autre part, dans cette note, tous les résultats de [5] sont aussi obtenus par une nouvelle méthode.

La méthode de Sz. Nagy et C. Foias n'est pas utilisable au cas d'un espace réel et par contre notre méthode est valable directement à des espaces complexes ou réels.

SUMMARY. — In this paper, we continue to discuss the work of Sz. Nagy et C. Foias on the functional calculus of a contraction T with a new method in which the spectral measure of the unitary dilation of T is not necessary used. Recently, this discussion was mentioned partialy in [5].

Dans une récente note [5], on a obtenu certains résultats (portant plus précisément sur le théorème d'existence et les théorèmes de convergences) de Sz. Nagy et C. Foias sur le calcul fonctionnel d'une contraction complè-

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités » associée au C. N. R. S.

tement non unitaire T dans un espace de Hilbert H et cela sans utilisation de la mesure spectrale dE_t (et sa continuité absolue) de la dilatation unitaire, minimum $\mathscr{U}$ (définie sur $\mathscr{H} \supset H$) de T.

La présente note est d'abord une continuation de la note précédente car elle donne, dans la même direction, des nouvelles démonstrations des autres résultats (portant essentiellement sur les relations entre le calcul fonctionnel de T et les fonctions extérieures, les fonctions intérieures de H^∞) de Sz. Nagy et C. Foias. D'autre part, on peut aussi considérer cette note comme une refonte de la note [5] car elle donne aussi de nouvelles démonstrations de tous les résultats de [5] et cela, bien sûr, sans utilisation de la mesure dE_t et sa continuité absolue.

La méthode utilisée ici est sensiblement différente de celle dans [5] et bien qu'elle n'utilise pas la mesure dE_t et sa continuité absolue, elle ressemble sérieusement à celle de Sz. Nagy et C. Foias. En effet, dans la plupart des démonstrations, on suit la méthode de Sz. Nagy et C. Foias et chaque fois qu'une propriété est obtenue par Sz. Nagy et C. Foias par utilisation de dE_t et sa continuité absolue, on la démontre directement sans passer par cette mesure et cela fait l'objet des propositions I.1, 2, 3, 4, 5. Le lecteur est donc invité à suivre les travaux correspondants de Sz. Nagy et C. Foias.

Dans la première partie de cette note, on suppose que H soit un espace complexe et on examinera dans la deuxième partie le cas des espaces réels et comme dans [5], nous ne considérons pas les propriétés déjà obtenues par Sz. Nagy et C. Foias sans utilisation de la mesure dE_t et sa continuité absolue. Dans les deux premières parties, on obtient en particulier l'inégalité de Von Neumann et cela grâce à une application du lemme de Féjer et Riesz (dont la démonstration est très simple) et on retrouvera quelques remarques de cette inégalité dans la troisième partie de cette note.

Rappelons d'abord les propriétés de la dilatation unitaire minimum $\mathscr{U}$ et la définition du calcul fonctionnel de T.

La dilatation $\mathscr{U}$ est définie sur un espace $\mathscr{H} \supset H$ de la forme :

$$\mathscr{H} = \Big(\bigoplus_{n\in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}\Big) \vee \Big(\bigoplus_{m\in Z} \mathscr{U}^m \mathscr{L}^*\Big)$$

où $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^*$ sont deux sous-espaces ambulants pour $\mathscr{U}$.

Si $f \in A$ c'est-à-dire

$$f(z) = \sum_{n\in N} a_n z^n \qquad \text{avec} \qquad \sum_{n\in N} |a_n| < \infty$$

(dans le cas des espaces réels, on remplace A par $A_r = \{ f \in A, a_n \in R \}$) et on pose alors

$$f(T) = \sum_{n \in N} a_n T^n$$

où la série au second membre est convergente en norme des opérateurs.

Si $f \in H^\infty$ (dans le cas des espaces réels, on remplace H^∞ par

$$H_r^\infty = \{ f \in H^\infty, \hat{f}(n) \in R \})$$

alors $f_r \in A$ (ou A_r) où f_r $0 < r < 1$ est définie par $f_r(z) = f(rz)$ et par suite $f_r(T)$ est bien définie et on dit que $f \in H_T^\infty$ si la limite $\lim_{r \uparrow 1-} f_r(T)$ existe fortement et on pose :

$$f(T) = \lim_{r \uparrow 1-} f_r(T) \qquad \text{(limite forte)}$$

Les espaces des fonctions intégrables d'ordre p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sur le cercle $C = \{ z / |z| = 1 \}$ sont notés par L^p et les normes correspondantes de f sont notées par $\| f \|_p$. Les espaces de fonctions à valeur dans $\mathscr{H}$, intégrables d'ordre p sur le cercle C sont notés par $L^p(\mathscr{H})$.

I. CAS DES ESPACES COMPLEXES

I.1. Proposition. — Pour tout a, $b \in \mathscr{H}$, il existe $\psi_{a,b} \in L^1$ défini de façon unique tel que :

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\psi_{a,b}(e^{it})dt$$

pour tout f, $g \in H_{\mathscr{U}}^\infty$.

Démonstration. — Si f, $g \in A$

$$f(z) = \sum_{p \in N} c_p z^p \qquad \text{et} \qquad g(z) = \sum_{q \in N} d_q z^q$$

avec

$$\sum_{p \in N} |c_p| < \infty, \qquad \sum_{q \in N} |d_q| < \infty$$

et si a, b sont de la forme $a = \mathscr{U}^m a_m$, $b = \mathscr{U}^n b_n$ avec $a_m, b_n \in \mathscr{L}$ alors on a :

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \left\langle \left(\sum_{p\in\mathrm{N}} c_p \mathscr{U}^p\right)\mathscr{U}^m a_m, \left(\sum_{q\in\mathrm{N}} d_q \mathscr{U}^q\right)\mathscr{U}^n b_n \right\rangle$$
$$= \sum_{p,q\in\mathrm{N}} c_p \bar{d}_q \langle \mathscr{U}^{m+p} a_m, \mathscr{U}^{n+q} b_n \rangle$$

où le développement des sommes Σ est possible car

$$f(\mathscr{U}) = \sum_{p\in\mathrm{N}} c_p \mathscr{U}^p \qquad \text{et} \qquad g(\mathscr{U}) = \sum_{q\in\mathrm{N}} d_q \mathscr{U}^q$$

sont des opérateurs définis par des séries convergentes en normes des opérateurs.

$\mathscr{L}$ étant ambulant pour $\mathscr{U}$, tous les termes de la dernière somme sont nuls sauf peut être ceux qui correspondent aux indices p, q tels que $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + m = q + n$. On a donc :

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \left(\sum_{p\in\mathrm{N}, p\geqslant n-m} c_p \overline{d_{p+m-n}}\right) \langle a_m, b_n \rangle$$

Or la dernière somme étant le produit scalaire dans L^2 de f et h tel que $h(z) = g(z)z^{n-m}$. On a donc :

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \left(\int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{h(e^{it})}dt\right)\frac{\langle a_m, b_n \rangle}{2\pi}$$
$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\frac{\langle a_m e^{imt}, b_n e^{int} \rangle}{2\pi} dt$$

Si $a, b \in \bigoplus_{n\in\mathrm{Z}} \mathscr{U}^n \mathscr{L}$,

$$a = \sum_{m\in\mathrm{Z}} \mathscr{U}^m a_m, \qquad b = \sum_{n\in\mathrm{Z}} \mathscr{U}^n b_n \qquad \text{avec} \qquad a_m, b_n \in \mathscr{L}$$

et

$$\sum_{m\in\mathrm{Z}} \| a_m \|^2 = \| a \|^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathrm{Z}} \| b_n \|^2 = \| b \|^2 < \infty$$

et alors :

$$\langle f(\mathcal{U})a, g(\mathcal{U})b \rangle = \left\langle f(\mathcal{U})\sum_{m\in Z} \mathcal{U}^m a_m, g(\mathcal{U})\sum_{n\in Z} \mathcal{U}^n b_n \right\rangle$$
$$= \sum_{m,n\in Z} \langle f(\mathcal{U})\mathcal{U}^m a_m, g(\mathcal{U})\mathcal{U}^n b_n \rangle$$

où le développement des sommes Σ est possible car $f(\mathcal{U})$ et $g(\mathcal{U})$ sont des opérateurs bornés si $f, g \in A$.

D'après la première partie de la démonstration, on a alors :

$$\langle f(\mathcal{U})a, g(\mathcal{U})b \rangle = \sum_{m,n\in Z} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})} \frac{\langle a_m e^{imt}, b_n e^{int} \rangle}{2\pi} dt$$

Notons que si on pose

$$h_a(e^{it}) = \sum_{m\in Z} a_m e^{imt} \qquad \text{et} \qquad h_b(e^{it}) = \sum_{n\in Z} b_n e^{int}$$

alors $h_a, h_b \in L^2(\mathcal{H})$ car

$$\| h_a \|_2^2 = \sum_{m\in Z} \| a_m \|^2 = \| a \|^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \| h_b \|^2 = \| b \|^2 < \infty$$

et par suite $\langle h_a, h_b \rangle \in L^1$ et la suite $k_{p,q}$ définie par :

$$k_{p,q}(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})} \left\langle \sum_{|m|<p} a_m e^{imt}, \sum_{|n|<q} b_n e^{int} \right\rangle$$

converge vers $\dfrac{1}{2\pi} f\bar{g} \langle h_a, h_b \rangle$ dans L^1 lorsque p et q convergent vers infini (on note que f et g sont bornées) et cela nous permet de regrouper, dans les relations suivantes, les sommes Σ :

$$\langle f(\mathcal{U})a, g(\mathcal{U})b \rangle = \sum_{m,n\in Z} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})} \frac{\langle a_m e^{imt}, b_n e^{int} \rangle}{2\pi} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})} \frac{\left\langle \sum_{m\in Z} a_m e^{imt}, \sum_{n\in Z} b_n e^{int} \right\rangle}{2\pi} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})} \frac{\langle h_a(e^{it}), h_b(e^{it}) \rangle}{2\pi} dt$$

Ainsi, dans le cas envisagé on a $\psi_{a,b} = \dfrac{\langle h_a, h_b \rangle}{2\pi}$.

Résultats analogues si $a, b \in \bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}^*$.

Si $a \in \bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}$ et $b \in \bigoplus_{m \in Z} \mathscr{U}^m \mathscr{L}^*$ alors on peut écrire:

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})\mathrm{P}b \rangle + \langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})(\mathrm{I} - \mathrm{P})b \rangle$$

où P est la projection orthogonale sur $\bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}$.

Le dernier terme $\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})(\mathrm{I} - \mathrm{P})b \rangle$ est nul car $\bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}$ réduit l'opérateur $\mathscr{U}$. On a donc:

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})\mathrm{P}b \rangle$$

et on se ramène à un cas déjà étudié.

Résultats analogues si $a \in \bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}^*$ et $b \in \bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}$ et par combinaisons linéaires, ces résultats sont encore vrais si a et b sont de la forme $a = a_0 + a_0^*$, $b = b_0 + b_0^*$ avec

$$a_0, b_0 \in \bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L} \qquad \text{et} \qquad a_0^*, b_0^* \in \bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}^*.$$

Puisque

$$\mathscr{H} = \Big(\bigoplus_{n \in Z} \mathscr{U}^n \mathscr{L}\Big) \vee \Big(\bigoplus_{m \in Z} \mathscr{U}^m \mathscr{L}^*\Big),$$

la première partie de la proposition est démontrée pour tout $f, g \in \mathrm{A}$.

Si $f, g \in \mathrm{H}^\infty_{\mathscr{U}}$ alors $f_r, g_r \in \mathrm{A}$, $0 < r < 1$ et on a:

$$\langle f_r(\mathscr{U})a, g_r(\mathscr{U})b \rangle = \int_0^{2\pi} f_r(e^{it})\overline{g_r(e^{it})}\psi_{a,b}(e^{it})dt \qquad \forall a, b \in \mathscr{H}$$

Lorsque r converge vers $1-$, le premier membre converge vers $\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle$ car $f_r(\mathscr{U})a$ et $g_r(\mathscr{U})b$ convergent dans $\mathscr{H}$ vers $f(\mathscr{U})a$ et $g(\mathscr{U})b$, le second membre converge vers

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\psi_{a,b}(e^{it})dt$$

car $f_r . \overline{g_r} . \psi_{a,b}$ converge p. s. vers $f . \overline{g} . \psi_{a,b}$ tout en restant bornée par la fonction $\| f \|_\infty . \| g \|_\infty . |\psi_{a,b}|$ de L^1. On a donc, à la limite :

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\psi_{a,b}(e^{it})dt$$

et la première partie de la proposition est démontrée.

S'il existe un autre $\psi'_{a,b} \in L^1$ tel que :

$$\langle f(\mathscr{U})a, g(\mathscr{U})b \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\psi'_{a,b}(e^{it})dt \quad \forall f, g \in H^\infty_{\mathscr{U}}$$

alors $\psi_{a,b}$ et $\psi'_{a,b}$ ont les mêmes coefficients de Fourier (il suffit de prendre en effet d'abord $f(z) = z^n$ $n \geqslant 0$, $g(z) = 1$ et ensuite $f(z) = 1$ et $g(z) = z^m$ $m \geqslant 0$), $\psi'_{a,b}$ est donc identique, dans L^1, à $\psi_{a,b}$.

I.2. Proposition. — Les fonctions $\psi_{a,b}$, a, $b \in \mathscr{H}$ définies dans la proposition précédente vérifient les propriétés suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \psi_{a,b}(e^{it})dt = \langle a, b \rangle \quad \text{et en particulier} \quad \int_0^{2\pi} \psi_{a,a}(e^{it})dt = \| a \|^2$$

$$\psi_{b,a} = \overline{\psi_{a,b}} \quad \text{et} \quad \psi_{a,a} \geqslant 0$$

Démonstration. — La première relation résulte de la proposition précédente où on prend $f = g = 1$.

La deuxième relation résulte des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\psi_{b,a}(e^{it})dt &= \langle f(\mathscr{U})b, g(\mathscr{U})a \rangle = \overline{\langle g(\mathscr{U})a, f(\mathscr{U})b \rangle} \\ &= \overline{\int_0^{2\pi} g(e^{it})\overline{f(e^{it})}\psi_{a,b}(e^{it})dt} \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\overline{\psi_{a,b}(e^{it})}dt \end{aligned}$$

Pour montrer $\psi_{a,a} \geqslant 0$, considérons la fonctionnelle linéaire bornée F dans L^∞ définie par :

$$F(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \qquad \forall f \in L^\infty$$

F est une fonctionnelle positive sur les polynômes trigonométriques car si p est un polynôme trigonométrique positif, il existe, d'après le lemme de Fejér et Riesz un polynôme trigonométrique q tel que $p = q . \overline{q}$. En groupant dans q les termes d'indices positifs ou nuls et les termes d'indices négatifs, on peut alors écrire $q = \bar{q}_1 + q_2$ avec q_1, $q_2 \in \mathrm{A}$ et par suite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(p) &= \int_0^{2\pi} p(e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt = \int_0^{2\pi} (q.\bar{q})(e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\bar{q}_1 + q_2)(q_1 + \bar{q}_2)(e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} [\bar{q}_1 \cdot q_1 + \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 + q_2 \cdot q_1 + q_2 \cdot \bar{q}_2](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= \langle q_1(\mathscr{U})a, q_1(\mathscr{U})a \rangle + \langle a, (q_1 . q_2)(\mathscr{U})a \rangle \\
&+ \langle (q_2 . q_1)(\mathscr{U})a, a \rangle + \langle q_2(\mathscr{U})a, q_2(\mathscr{U})a \rangle \\
&= \langle q_1(\mathscr{U})^*a, q_1(\mathscr{U})^*a \rangle + \langle q_1(\mathscr{U})^*a, q_2(\mathscr{U})a \rangle \\
&+ \langle q_2(\mathscr{U})a, q_1(\mathscr{U})^*a \rangle + \langle q_2(\mathscr{U})a, q_2(\mathscr{U})a \rangle \\
&= \langle [q_1(\mathscr{U})^* + q_2(\mathscr{U})]a, [q_1(\mathscr{U})^* + q_2(\mathscr{U})]a \rangle \\
&= \| (q_1(\mathscr{U})^* + q_2(\mathscr{U}))a \|^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Comme l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense faiblement dans L^∞, F est une fonctionnelle positive dans L^∞ et par suite on a $\psi_{a,a} \geqslant 0$.

En utilisant ces deux propositions et la décomposition suivante

$$\mathscr{H} = \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{U}^{-n}\mathscr{L}^*\right) \bigoplus \mathrm{H} \bigoplus \left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathscr{U}^m \mathscr{L}\right)$$

de $\mathscr{H}$ on peut même démontrer la proposition suivante qui n'est pas nécessaire dans la suite pour le calcul fonctionnel. On ommet donc ici la démonstration.

I.2. *bis.* PROPOSITION. — Les fonctions $\psi_{a,a}$ définies dans les propositions précédentes sont telles que Log $\psi_{a,a} \in \mathrm{L}^1$ pour tout $a \neq 0$ et $a \in \mathrm{H}$.

I.3. PROPOSITION. — Si $f \neq 0$ dans $\mathrm{H}^\infty_{\mathscr{U}}$ alors $f(\mathscr{U})^{-1}$ existe (c'est-à-dire la relation $f(\mathscr{U})a = 0$ entraînera $a = 0$) et de domaine dense dans $\mathscr{H}$.

Démonstration. — Si $f(\mathscr{U})a = 0$, d'après I.1, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} | f(e^{it}) |^2 \psi_{a,a}(e^{it}) &= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{it})}\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= \langle f(\mathscr{U})a, f(\mathscr{U})a \rangle = \| f(\mathscr{U})a \|^2 = 0
\end{aligned}$$

La fonction à intégrer dans la première intégrale est positive ou nulle (car $\psi_{a,a} \geqslant 0$), la relation précédente nous donne : $|f|^2\psi_{a,a} = 0$ et comme $f(e^{it}) \neq 0$ p. s. on a $\psi_{a,a} = 0$ et par suite :

$$\| a \|^2 = \int_0^{2\pi} \psi_{a,a}(e^{it})dt = 0 \qquad \text{ou} \qquad a = 0$$

Appliquons le même résultat à la fonction $\tilde{f} \in H^\infty_{\mathscr{U}^*}$ définie par $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ et à $\mathscr{U}^*$ on voit que $\tilde{f}(\mathscr{U}^*)^{-1} = [f(\mathscr{U})^*]^{-1}$ existe et tout cela montre que l'ensemble des valeurs de $f(\mathscr{U})$ c'est-à-dire le domaine de $f(\mathscr{U})^{-1}$ est dense dans $\mathscr{H}$.

I.4. Proposition. — Pour tout $a, b \in \mathscr{H}$ et $f \in H^\infty_{\mathscr{U}}$ on a :

$$\langle f(\mathscr{U})a, b \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\psi_{a,b}(e^{it})dt$$

$$\| f(\mathscr{U})a \|^2 = \int_0^{2\pi} | f(e^{it}) |^2\psi_{a,a}(e^{it})dt$$

$$\| f(\mathscr{U}) \| \leqslant \| f \|_\infty$$

De même, si $a, b \in H$ et $f \in H^\infty_T$ alors on a :

$$\langle f(T)a, b \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\psi_{a,b}(e^{it})dt$$

$$\| f(T)a \|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} | f(e^{it}) |^2\psi_{a,a}(e^{it})dt$$

$$\| f(T) \| \leqslant \| f \|_\infty$$

Démonstration. — Les deux premières relations sont des conséquences de I.1 où on prend d'abord $g = 1$ et ensuite $g = f$.

$\psi_{a,a}$ étant positive ou nulle, la deuxième relation nous donne :

$$\| f(\mathscr{U})a \|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} \| f \|^2_\infty . \psi_{a,a}(e^{it})dt = \| f \|^2_\infty \int_0^{2\pi} \psi_{a,a}(e^{it})dt = \| f \|^2_\infty . \| a \|^2$$

et cela nous donne l'inégalité de Von Neumann :

$$\| f(\mathscr{U}) \| \leqslant \| f \|_\infty$$

Si $a, b \in H$ et $f \in A$ on a :

$$\langle f(T)a, b \rangle = \langle P_H f(\mathscr{U})a, b \rangle = \langle f(\mathscr{U})a, b \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\psi_{a,b}(e^{it})dt$$

$$\| f(T)a \|^2 = \| P_H f(\mathscr{U})a \|^2 \leqslant \| f(\mathscr{U})a \|^2 = \int_0^{2\pi} | f(e^{it}) |^2\psi_{a,a}(e^{it})dt$$

où P_H est la projection orthogonale sur H.

Si $f \in H_T^\infty$ alors on considère les fonctions f_r, $0 < r < 1$ et on obtient les résultats par un passage à la limite.

Pour l'inégalité de Von Neumann on note que la relation :

$$\| f(T)a \|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} | f(e^{it}) |^2 \psi_{a,a}(e^{it}) dt$$

nous donne

$$\| f(T)a \|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} \| f \|_\infty^2 . \psi_{a,a}(e^{it}) dt = \| f \|_\infty^2 . \| a \|^2 .$$

et cela nous donne bien $\| f(T) \| \leqslant \| f \|_\infty$.

I.5. Proposition. — On a les relations $H^\infty = H_{\mathscr{U}}^\infty = H_T^\infty$.

Démonstration. — En effet si $f \in H^\infty$ et $0 < s, r < 1$ alors, d'après I.4, on a :

$$\| (f_r - f_s)(\mathscr{U})a \|^2 = \int_0^{2\pi} | (f_r - f_s)(e^{it}) |^2 . \psi_{a,a}(e^{it}) dt \qquad \forall a \in \mathscr{H}$$

$$\| (f_r - f_s)(T)a \|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} | (f_r - f_s)(e^{it}) |^2 . \psi_{a,a}(e^{it}) dt \qquad \forall a \in H$$

Lorsque r et s convergent vers $1-$ les derniers membres de ces relations convergent vers 0 car $| (f_r - f_s) |^2 . \psi_{a,a}$ converge p. s. vers 0 tout en restant bornée par la fonction positive $2 \| f \|_\infty^2 . \psi_{a,a}$ de L^1. Les familles $f_r(\mathscr{U})a$ et $f_r(T)a$ ($a \in \mathscr{H}$ dans le premier cas, $a \in H$ dans le second cas) vérifient donc les conditions de convergence de Cauchy elles convergent donc et cela montre que $f_r(\mathscr{U})$ et $f_r(T)$ convergent fortement lorsque r converge vers $1-$ et par suite $f \in H^\infty$ et $f \in H_T^\infty$ et cela donne bien $H_{\mathscr{U}}^\infty = H^\infty = H_T^\infty$.

Citons maintenant les résultats qui sont directement les conséquences des propositions précédentes. Voir aussi Sz. Nagy et C. Foias pour la marche des démonstrations.

I.6. Proposition. — Si la suite $(f_n)_{n \in N}$ converge en norme de H^∞ vers f alors $(f_n(\mathscr{U}))_{n \in N}$ et $(f_n(T))_{n \in N}$ convergent en norme des opérateurs vers $f(\mathscr{U})$ et $f(T)$ respectivement.

I.7. Proposition. — Si la suite $(f_n)_{n \in N}$ est bornée dans la norme de H^∞ et converge p. s. sur le cercle $c = \{ z / | z | = 1 \}$ vers f alors $(f_n(\mathscr{U}))_{n \in N}$ et $(f_n(T))_{n \in N}$ converge fortement vers $f(\mathscr{U})$ et $f(T)$.

I.8. Proposition. — Si la suite $(f_n)_{n \in N}$ est bornée en norme de H^∞ et converge dans le disque $D = \{ z / | z | < 1 \}$ vers f alors $(f_n(\mathscr{U}))_{n \in N}$ et $(f_n(T))_{n \in N}$

convergent faiblement vers $f(\mathcal{U})$ et $f(\mathrm{T})$. En particulier, les deux suites $(\mathcal{U}^n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(\mathrm{T}^n)_{n\in\mathrm{N}}$ convergent vers 0 faiblement.

Ces propositions constituent les résultats de [5].

I.9. Proposition. — Pour toute fonction extérieure $f \in \mathrm{H}^\infty$, $f(\mathrm{T})^{-1}$ existe et de domaine dense dans H et pour que f soit une fonction extérieure de H^∞, il faut et il suffit que $f(\mathrm{T})^{-1}$ existe pour toute contraction complètement non unitaire T.

I.10. Proposition. — Si $f \neq 0$ dans H^∞ alors la relation $f(\mathrm{T})a = 0$ entraînera la convergence dans H de $(\mathrm{T}^n a)_{n\in\mathrm{N}}$ vers 0. De plus, si $f(\mathrm{T}) = 0$ alors les deux suites $(\mathrm{T}^n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(\mathrm{T}^{*n})_{n\in\mathrm{N}}$ convergent fortement vers 0.

I.11. Définition. — Une contraction complètement non unitaire T est dite de classe C_0 s'il existe $f \in \mathrm{H}^\infty$, $f \neq 0$ telle que $f(\mathrm{T}) = 0$. Si $\mathrm{T} \in \mathrm{C}_0$ et s'il existe parmi les fonctions $f \in \mathrm{H}^\infty$, $f \neq 0$ telles que $f(\mathrm{T}) = 0$ une, notée f_T, dont les autres sont des multiples alors f_T est dite fonction minimum de T.

I.12. Proposition. — Soit $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de fonctions intérieures de H^∞ et soit f leur plus grand diviseur intérieur commun alors, si $f_\alpha(\mathrm{T})a = 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ et pour un certain $a \in \mathrm{H}$, on a aussi $f(\mathrm{T})a = 0$.

Comme dans Sz. Nagy et C. Foias la proposition suivante est une conséquence de la proposition précédente :

I.13. Proposition. — Toute contraction T de classe C_0 admet une fonction minimum f_T intérieure et définie à un facteur constant près. Réciproquement, pour toute fonction intérieure f de H^∞, il existe un espace $\mathrm{H} \neq \{0\}$, une contraction T de classe C_0 définie sur H et admettant f comme fonction minimum.

II. CAS DES ESPACES RÉELS

II.1. Remarques générales. — Comme nous allons voir dans II.2 ou II.3 toutes les propositions dans le cas des espaces complexes sont encore valables dans le cas des espaces réels avec des modifications convenables (A et H^∞ sont remplacés par A_r et H_r^∞ dans les énoncés et les démonstrations).

Examinons d'abord, proposition par proposition, pour voir si nous avons besoin des nouvelles démonstrations pour le cas des espaces réels.

La proposition I.1 est valable sans changement même pour la démonstration.

La proposition I.2 est encore valable mais la démonstration de la propriété $\psi_{a,a} \geqslant 0$ n'est pas valable car, par exemple, si

$$q_1(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$$

alors a_n peut être complexe et alors $q_1(\mathscr{U})$ n'a pas encore de sens. Il nous faut donc une nouvelle démonstration pour cette propriété.

La démonstration de la proposition I.3 utilise essentiellement le fait $\psi_{a,a} \geqslant 0$.

La proposition I.4 est valable mais la démonstration de l'inégalité de Von Neumann, pour le moment n'est pas valable car elle utilise le fait $\psi_{a,a} \geqslant 0$.

La démonstration de la proposition I.5 utilise aussi la propriété $\psi_{a,a} \geqslant 0$ mais cette démonstration est encore vraie si on remplace $\psi_{a,a}$ par $|\psi_{a,a}|$. par conséquent la proposition I.5 est valable aussi dans le cas des espaces réels et la démonstration est obtenue même si on ne sait pas si $\psi_{a,a} \geqslant 0$. Même remarque pour la convergence forte dans la proposition I.7.

La convergence en norme dans la proposition I.6 utilise l'inégalité de Von Neumann et par suite la propriété $\psi_{a,a} \geqslant 0$.

La démonstration de la proposition I.8 est obtenue sans changement.

La démonstration de la proposition I.9 est obtenue sans changement car en fait elle utilise le fait que $\psi_{a,a}$ est à valeurs réelles (et non pas $\psi_{a,a} \geqslant 0$) et le dernier fait est une conséquence de la relation $\psi_{a,a} = \overline{\psi}_{a,a}$ d'après la proposition I.2.

La démonstration de la proposition I.10 utilise le fait que $f(\mathscr{U})^{-1}$ si $f \neq 0$ dans H^∞. Elle utilise donc le fait $\psi_{a,a} \geqslant 0$.

Les démontrations des propositions I.12 et I.13 sont obtenues sans changement.

Ainsi, même si on ne sait pas si $\psi_{a,a} \geqslant 0$, on peut obtenir la plupart des propositions dans I et pour montrer que toutes les propositions de I sont valables aussi dans le cas des espaces réels, il nous suffit de montrer que $\psi_{a,a} \geqslant 0$.

II.2. Méthode de complexification des espaces réels. — Cette méthode est la plus simple et elle nous permet d'obtenir non seulement la propriété $\psi_{a,a} \geqslant 0$ mais toutes les propriétés voulues à partir des propriétés correspondantes dans le cas des espaces complexes. Essayons par exemple de montrer que $\psi_{a,a} \geqslant 0$.

Supposons que H est un espace réel. On vérifie alors que

$$\mathrm{H}_0 = \{(a, b)/a, b \in \mathrm{H}\}$$

est un espace de Hilbert complexe avec les opérations :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \qquad \forall a, b, a', b' \in \mathrm{H}$$
$$(\alpha + i\beta)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \beta a + \alpha b) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$$

avec le produit scalaire et la norme :

$$\langle (a, b), (a', b') \rangle = \langle a, a' \rangle + \langle b, b' \rangle + i(\langle b, a' \rangle - \langle a, b' \rangle)$$
$$\| (a, b) \|^2 = \langle (a, b), (a, b) \rangle = \| a \|^2 + \| b \|^2$$

et de cette façon on peut identifier H avec le sous-ensemble

$$\mathrm{H}' = \{(a, 0) \mid a \in \mathrm{H}\}$$

(et on dit alors que H′ ou H est la partie réelle de H_0).

Si T est un opérateur linéaire dans H, alors on peut associer l'opérateur T_0 dans H_0 défini par :

$$\mathrm{T}_0((a, b)) = (\mathrm{T}a, \mathrm{T}b)$$

et on montre que T_0 est linéaire et de même norme que T car :

$$\| \mathrm{T}_0(a, b) \|^2 = \| (\mathrm{T}a, \mathrm{T}b) \|^2 = \| \mathrm{T}a \|^2 + \| \mathrm{T}b \|^2 \leqslant \| \mathrm{T} \|^2 . \| a \|^2 + \| \mathrm{T} \|^2 . \| b \|^2$$
$$\leqslant \| \mathrm{T} \|^2 . (\| a \|^2 + \| b \|^2) = \| \mathrm{T} \| . \| (a, b) \|^2$$

(on dit alors que T est la partie réelle de T_0).

On montre aussi que si T* est l'adjoint de T alors l'opérateur T_0^* associé à T* est l'adjoint de T_0, si $f \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{\infty}$ alors $f \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}_0}^{\infty}$ et que $f(\mathrm{T}_0)$ est l'opérateur associé à $f(\mathrm{T})$ c'est-à-dire $f(\mathrm{T})_0 = f(\mathrm{T}_0)$.

Enfin si T est une contraction complètement non unitaire alors T_0 l'est aussi et la dilatation unitaire minimum $\mathscr{U}_0$ de T_0 est obtenue à partir de $\mathscr{U}$ par la complexification.

Si donc T est une contraction complètement non unitaire alors T_0 l'est aussi et par suite on peut appliquer la proposition I.2 et on a en particulier :

$$\langle f(\mathscr{U}_0)(a, 0), g(\mathscr{U}_0)(b, 0) \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\psi_{(a,0),(b,0)}(e^{it})dt$$

pour tout $f, g \in H^{\infty}_{\mathcal{U}}$ et $a, b \in \mathcal{H}$. On a donc :

$$\langle f(\mathcal{U})a, g(\mathcal{U})b \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\psi_{(a,0),(b,0)}(e^{it})dt$$

et d'après l'unicité des $\psi_{a,b}$, on a :

$$\psi_{a,b} = \psi_{(a,0),(b,0)} \quad \text{et en particulier} \quad \psi_{a,a} = \psi_{(a,0),(a,a)} \geqslant 0$$

II.3. Méthode directe. — Comme nous avons indiqué dans II.1, il nous suffit de montrer que $\psi_{a,a} \geqslant 0$. Pour cela, nous utilisons aussi la même méthode pour la proposition I.2 mais avec un calcul plus compliqué.

Comme dans I.2 il suffit de montrer que $F(p) \geqslant 0$ pour tout polynôme trigonométrique $p \geqslant 0$. Comme dans I.2 on peut poser $q = \overline{q}_1 + q_2$ avec $q_1, q_2 \in A$ mais ici on peut même décomposer q_1 et q_2 sous la forme

$$q_1 = q_1^1 - iq_1^2, \qquad q_2 = q_2^1 + iq_2^2$$

avec

$$q_i^j \in A_r \qquad i = 1, 2; \qquad j = 1, 2$$

et on obtient alors :

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^{2\pi} p(e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt = \int_0^{2\pi} (q.\overline{q})(e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\overline{q}_1 + q_2)(q_1 + \overline{q}_2)(e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} [\overline{q}_1 . q_1 + \overline{q}_1 . \overline{q}_2 + q_2 . q_1 + q_2 . \overline{q}_2](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(\overline{q}_1^1 + i\overline{q}_1^2)(q_1^1 - iq_1^2) + (\overline{q}_1^1 + i\overline{q}_1^2)(\overline{q}_2^1 - i\overline{q}_2^2) + (q_2^1 + iq_2^2)(q_1^1 - iq_1^2) \\
&\qquad + (q_2^1 + iq_2^2)(\overline{q}_2^1 - i\overline{q}_2^2)](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\
&= A_0 + A_1 + (B_1 - B_2 + D - E)i
\end{aligned}$$

où A_0, A_1, B_1, B_2, D, E sont donnés par :

$$A_j = \int_0^{2\pi} [\,|q_1^j|^2 + |q_2^j|^2 + \overline{q}_1^j . \overline{q}_2^j + q_1^j . q_2^j](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \qquad j = 1, 2$$

$$B_j = \int_0^{2\pi} [\overline{q}_j^2 . q_j^1 - q_j^2 . \overline{q}_j^1](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \qquad j = 1, 2$$

$$D = \int_0^{2\pi} [\overline{q}_1^2 . \overline{q}_2^1 - q_1^2 . q_2^1](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt$$

$$E = \int_0^{2\pi} [\overline{q}_1^1 \overline{q}_2^2 - q_1^1 . q_2^2](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt$$

Or les termes B_1, B_2, D, E sont nuls, par exemple, car :

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^{2\pi} [\bar{q}_1^2 \cdot q_1^1 - q_1^2 \cdot \bar{q}_1^1](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\ &= \langle q_1^1(\mathcal{U})a, q_1^2(\mathcal{U})a \rangle - \langle q_1^2(\mathcal{U})a, q_1^1(\mathcal{U})a \rangle \\ &= \langle q_1^1(\mathcal{U})a, q_1^2(\mathcal{U})a \rangle - \langle q_1^1(\mathcal{U})a, q_1^2(\mathcal{U})a \rangle = 0 \end{aligned}$$

(ici, on utilise la relation $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle} = \langle b, a \rangle$ car H et par suite $\mathcal{H}$ sont des espaces réels).

Calculons les termes A_1 et A_2 :

$$\begin{aligned} A_j &= \int_0^{2\pi} [\,|q_1^j|^2 + |q_2^j|^2 + \bar{q}_1^j \cdot \bar{q}_2^j + q_1^j \cdot q_2^j](e^{it})\psi_{a,a}(e^{it})dt \\ &= \langle q_1^j(\mathcal{U})a, q_1^j(\mathcal{U})a \rangle + \langle q_2^j(\mathcal{U})a, q_2^j(\mathcal{U})a \rangle \\ &+ \langle a, (q_1^j \cdot q_2^j)(\mathcal{U})a \rangle + \langle (q_1^j \cdot q_2^j)(\mathcal{U})a, a \rangle \\ &= \langle q_1^j(\mathcal{U})^*a, q_1^j(\mathcal{U})^*a \rangle + \langle q_2^j(\mathcal{U})a, q_2^j(\mathcal{U})a \rangle \\ &+ \langle q_1^j(\mathcal{U})^*a, q_2^j(\mathcal{U})a \rangle + \langle q_2^j(\mathcal{U})a, q_1^j(\mathcal{U})^*a \rangle \\ &= \langle [q_1^j(\mathcal{U})^* + q_2^j(\mathcal{U})]a, [q_1^j(\mathcal{U})^* + q_2^j(\mathcal{U})]a \rangle \\ &= \| (q_1^j(\mathcal{U})^* + q_2^j(\mathcal{U}))a \|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$F(p) = A_1 + A_2 = \| (q_1^1(\mathcal{U})^* + q_2^1(\mathcal{U}))a \|^2 + \| (q_1^2(\mathcal{U})^* + q_2^2(\mathcal{U}))a \|^2 \geqslant 0$$

et on achève la démonstration comme dans I.2.

Remarquons enfin que la proposition I.2 *bis* est encore valable dans le cas des espaces réels.

III. SUR L'INÉGALITÉ DE VON NEUMANN

III.1. Il s'agit ici de l'inégalité :

$$\| f(T) \| \leqslant \| f \|_\infty \qquad \forall f \in H_T^\infty$$

qui est une inégalité fondamentale dans le calcul fonctionnel (voir par exemple [5] pour les applications de cette inégalité aux théorèmes d'existence et des théorèmes de convergence du calcul fonctionnel des contractions complètement non unitaires).

Si $f \in A$ l'inégalité est d'abord démontrée par Von Neumann en utilisant le théorème de Schur (voir Riesz et Nagy, 1[re] édition) et ensuite par Heinz (Riesz et Nagy, 3[e] édition). Si $f \in H_T^\infty$ cette inégalité est démontrée par Sz. Nagy et C. Foias en utilisant la mesure spectrale dE_t associée à la dilatation unitaire $\mathscr{U}$ de T. Toutes ces démonstrations ne sont valables (directement) que pour le cas des espaces complexes. Notons que dans les deux premières parties de cette note, on obtient aussi cette inégalité et la méthode est valable à la fois au cas d'un espace complexe ou d'un espace réel si T est complètement non unitaire.

Comme on a vu dans la deuxième partie, pour le cas des espaces réels la méthode la plus simple est la complexification de cet espace mais cela ne nous donne pas directement le résultat. Le but du reste de cette note est une démonstration directe de cette inégalité pour les contractions quelconques et cela sans utilisation la théorie de la dilatation unitaire. Pour cela, on note que la méthode de Von Neumann et Heinz (pour le cas complexe) utilise les fonctions g qui ne sont pas nécessairement dans H_r^∞ ou A_r (et plus particulièrement les fonctions de résolvant $(1 + az)^{-1}$ avec a arbitraire sur un cercle de rayon R) et par suite cette démonstration n'est pas valable pour le cas réel car alors $g(T)$ n'a pas de sens. Notre méthode ressemble à celle de Heinz mais avec des choix convenables de g. Donnons d'abord des propositions préliminaires.

III.2. Proposition. — Pour tout $R > 1$ la fonction g définie par

$$g(z) = \left(1 - 2\cos x \,.\, \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-1}$$

appartient à A_r et pour toute contraction dans H (réel) et $a \in H$ on a :

$$B = \left\langle \left(\frac{I}{2} + \sum_1^\infty \frac{T^n}{R^n} \cos nx\right)a, a \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \left(I - \frac{T^2}{R^2}\right) g(T)a, a \right\rangle \geqslant 0$$

Démonstration. — Il est facile de voir que $g \in A_r$ et que :

$$\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{z^n}{R^n} \cos nx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) g(z)$$

et cela nous donne :

$$B = \left\langle \left(\frac{I}{2} + \sum_1^\infty \frac{T^n}{R^n} \cos nx\right)a, a \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \left(I - \frac{T^2}{R^2}\right) g(T)a, a \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle \left(I - \frac{T^2}{R^2}\right)b, \left(I - 2\cos x \,.\, \frac{T}{R} + \frac{T^2}{R^2}\right)b \right\rangle \qquad \text{avec} \qquad b = g(T)a$$

$$2B = \left[\langle b, b \rangle - \frac{2\cos x}{R} \langle Tb, b \rangle \right] - \frac{1}{R^2}$$

$$\left[- \frac{2\cos x}{R} \langle T^2 b, Tb \rangle + \frac{1}{R^2} \langle T^2 b, T^2 b \rangle \right]$$

$$2B = \left[\langle b, b \rangle - \frac{2\cos x}{R} \langle Tb, b \rangle + \frac{1}{R^2} \langle Tb, Tb \rangle \right]$$

$$- \frac{1}{R^2} \left[\langle Tb, Tb \rangle - \frac{2\cos x}{R} \langle T^2 b, Tb \rangle + \frac{1}{R^2} \langle T^2 b, T^2 b \rangle \right]$$

En posant $Tb = c$ et en remarquant que $\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \beta, T\alpha \rangle$ pour tout $\alpha, \beta \in H$, on a alors :

$$2B = \left[\langle b, b \rangle - \frac{\cos x}{R} \langle Tb, b \rangle - \frac{\cos x}{R} \langle b, Tb \rangle + \frac{\cos^2 x}{R^2} \langle Tb, Tb \rangle \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 x}{R^2} \langle Tb, Tb \rangle \right]$$

$$- \frac{1}{R^2} \left[\langle c, c \rangle - \frac{\cos x}{R} \langle Tc, c \rangle - \frac{\cos x}{R} \langle c, Tc \rangle + \frac{\cos^2 x}{R^2} \langle Tc, Tc \rangle \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 x}{R^2} \langle Tc, Tc \rangle \right]$$

$$= \left\langle b - \frac{\cos x}{R} . Tb, b - \frac{\cos x}{R} Tb \right\rangle + \frac{1}{R^2} \sin^2 x \langle c, c \rangle$$

$$- \frac{1}{R^2} \left[\left\langle c - \frac{\cos x}{R} Tc, c - \frac{\cos x}{R} Tc \right\rangle + \frac{1}{R^2} \sin^2 x \langle Tc, Tc \rangle \right]$$

$$= \left\| \left(I - \frac{\cos x}{R} T \right) b \right\|^2 + \frac{\sin^2 x}{R^2} \| c \|^2 - \frac{1}{R^2} \left[\left\| \left(I - \frac{\cos x}{R} T \right) c \right\|^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 x}{R^2} \| Tc \|^2 \right]$$

et en posant $d = \left(I - \frac{\cos x}{R} T \right) b$, on obtient alors

$$2B = \left[\| d \|^2 - \frac{1}{R^2} \| Td \|^2 \right] + \frac{\sin^2 x}{R^2} \left[\| c \|^2 - \frac{1}{R^2} \| Tc \|^2 \right]$$

T étant une contraction et $R > 1$ cela nous donne bien $B \geqslant 0$.

III.3. Proposition. — Soit f une fonction de A_r, holomorphe dans un ouvert contenant le disque $\{ z / |z| \leqslant 1 \}$ et telle que $\mathscr{R}(f(z)) \geqslant 0$ dans cet ouvert. Alors pour toute contraction T dans l'espace de Hilbert réel H et $a \in H$ on a :

$$\langle f(T) a, a \rangle \geqslant 0$$

Démonstration. — Supposons que f est holomorphe dans le disque fermé de rayon $R > 1$ et soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

le développement de f. On a alors :

$$\langle f(T)a, a \rangle = \left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \right) a, a \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle T^n a, a \rangle$$

Or, f étant analytique, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{R^n} f(Re^{it})dt &= a_n \qquad \text{si} \qquad n \geqslant 0 \\ &= 0 \qquad \text{si} \qquad n < 0 \end{aligned}$$

et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle f(T)a, a \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle a, a \rangle \int_0^{2\pi} f(Re^{it})dt \\ &\qquad + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \langle T^n a, a \rangle \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-int} + e^{int}}{2R^n} \right) f(Re^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle a, a \rangle \int_0^{2\pi} f(Re^{it})dt \\ &\qquad + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \langle T^n a, a \rangle \int_{R^n}^{2\pi} \frac{\cos nt}{R^n} f(Re^{it})dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left\langle \left(\frac{I}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{T^n}{R^n} \cos nt \right) a, a \right\rangle \right] f(Re^{it})dt \end{aligned}$$

et puisque le premier membre et

$$\left\langle \left(\frac{I}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{T^n}{R^n} \cos nx \right) a, a \right\rangle$$

sont réels on peut alors écrire :

$$\langle f(T)a, a \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{I}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{T^n}{R^n} \cos nt \right) a, a \right\rangle \mathcal{R} f(Re^{it})dt$$

Or $\mathscr{R}f(\mathrm{R}e^{it}) \geqslant 0$ d'après l'hypothèse et

$$\left\langle \left(\frac{\mathrm{I}}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{T}^n}{\mathrm{R}^n} \cos nt \right) a, a \right\rangle \geqslant 0$$

d'après la proposition précédente, on a donc $\langle f(\mathrm{T})a, a \rangle \geqslant 0$.

III.4. Proposition. — Pour tout $f \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{\infty}$ on a $\| f(\mathrm{T}) \| \leqslant \| f \|_{\infty}$.

Démonstration. — Si $f \in \mathrm{A}_r$ il existe $\mathrm{R} > 1$ tel que $\mathrm{D}_{\mathrm{R}} = \{ z / | z | \leqslant \mathrm{R} \}$ est compris dans le domaine d'holomorphie de f et posons alors

$$\mathrm{M}_{\mathrm{R}} = \underset{z \in \mathrm{D}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{Max}} \, | f(z) |.$$

S'il existe z_0 tel que $| z_0 | < \mathrm{R}$ et $f(z_0) = \mathrm{M}_{\mathrm{R}}$ alors f est une constante et l'inégalité de Von Neumann est évidente.

Dans le cas contraire, on a $| f(z) | < \mathrm{M}_{\mathrm{R}}$ dans $\mathrm{D}'_{\mathrm{R}} = \{ z / | z | < \mathrm{R} \}$ et la fonction f_0 définie par

$$f_0(z) = \frac{\mathrm{M}_{\mathrm{R}} + f(z)}{\mathrm{M}_{\mathrm{R}} - f(z)}$$

vérifie les conditions de la proposition précédente et on obtient :

$$\langle f_0(\mathrm{T})a, a \rangle \geqslant 0 \qquad \forall a \in \mathrm{H}$$

ou

$$\langle f_0(\mathrm{T})(\mathrm{M}_{\mathrm{R}}\mathrm{I} - f(\mathrm{T}))a, (\mathrm{M}_{\mathrm{R}}\mathrm{I} - f(\mathrm{T}))a \rangle \geqslant 0 \qquad \forall a \in \mathrm{H}$$

Comme $f_0(\mathrm{T})(\mathrm{M}_{\mathrm{R}}\mathrm{I} - f(\mathrm{T})) = \mathrm{M}_{\mathrm{R}}\mathrm{I} + f(\mathrm{T})$, cela entraîne :

$$\langle \mathrm{M}_{\mathrm{R}}a + f(\mathrm{T})a, \mathrm{M}_{\mathrm{R}}a - f(\mathrm{T})a \rangle = \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^2 \| a \|^2 - \| f(\mathrm{T})a \|^2 \geqslant 0$$

et par suite $\| f(\mathrm{T}) \| \leqslant \mathrm{M}_{\mathrm{R}}$ et on obtient $\| f(\mathrm{T}) \| \leqslant \| f \|_{\infty}$ en faisant tendre R vers $1+$.

Si $f \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{\infty}$ alors $f_t \in \mathrm{A}_r$ si $0 < t < 1$ et la partie précédente est applicable et nous donne $\| f_t(\mathrm{T}) \| \leqslant \| f_t \|_{\infty} \leqslant \| f \|_{\infty}$ et on obtient alors $\| f(\mathrm{T}) \| \leqslant \| f \|_{\infty}$ par un passage à la limite $(t \uparrow 1-)$.

RÉFÉRENCES

[1] F. Riesz et Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Paris, Budapest.

[2] Sz. Nagy et C. Foias, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Budapest, 1967.

[3] Dunford et Schwartz, *Linear operators*, Part I, New York, 1958.

[4] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Printic Hall, 1962.

[5] Ton-That-Long, Sur le calcul fonctionnel d'une contraction complètement non unitaire, *A paraître* dans *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Paris.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1969.