ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. FORTET
M. KAMBOUZIA

Les répartitions ponctuelles markoviennes ; estimations et tests concernant leurs lois de probabilité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 3 (1969), p. 195-212
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_3_195_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 3, 1969, p. 195-212. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Les répartitions ponctuelles Markoviennes ; estimations et tests concernant leurs lois de probabilité

par

R. FORTET et M. KAMBOUZIA [1]
(Paris).

RÉSUMÉ. — Soit $\mathscr{L}$ la loi de probabilité d'une répartition ponctuelle aléatoire $R = \{0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \ldots \leqq T_\alpha \leqq T_{\alpha+1} \leqq \ldots\}$ sur $[0, +\infty)$, pour laquelle on pose, pour tout $t \in [0, +\infty)$,

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqq T_1 ; \\ n & \text{si} \quad T_n < t \leqq T_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

L'article détermine la structure de $\mathscr{L}$ nécessaire et suffisante :

1° Pour que R soit *Markovienne*, c'est-à-dire pour que la fonction aléatoire $N(t)$ soit Markovienne sur $[0, +\infty)$.

2° Pour que R soit *cumulative*, c'est-à-dire pour que, pour tout $T > 0$ fixé et pour tout entier $n > 0$, la loi de probabilité de $\{T_1, \ldots, T_n\}$ conditionnelle quand $N(T) = n$, soit la loi uniforme sur le domaine :

$$0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \ldots \leqq T_n < T.$$

Il est montré que, si R est cumulative, et sauf si R est un processus de Poisson, l'observation même indéfiniment prolongée d'une seule réalisation de R ne permet pas d'inférence convergente sur sa loi $\mathscr{L}$.

[1] Équipe de Recherche « Processus stochastiques et applications » associée au C. N. R. S. (Section n° 2, « Théories Physiques et Probabilités »). Le texte a fait l'objet d'une communication orale au « Colloque sur le Traitement du Signal » (Nice, mai 1969).

SUMMARY. — Let $\mathscr{L}$ be the probability law of a random points distribution $R = \{0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \dots \leqq T_\alpha \leqq T_{\alpha+1} \leqq \dots\}$ over $[0, +\infty)$; for every $t \in [0, +\infty)$, it is put:

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t \leqq T_1; \\ n & \text{if} \quad T_n < t \leqq T_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

The paper determines the necessary and sufficient structure of $\mathscr{L}$:

1° For R to be *Markovian*, that is to say for the random function $N(t)$ to be Markovian over $[0, +\infty)$.

2° For R to be *cumulative*; R is said to be cumulative, if for every fixed $T > 0$ and every positiv integer n, the probability law of $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ conditionnal when $N(T) = n$, is the uniform law over the domain:

$$0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \dots \leqq T_n < T.$$

It is shown that: if R is cumulative, and if R is not a Poisson process, the observation of a *unique* realization of R over [0, T[, even if T is *arbitrary large*, does not permit any convergent inference on $\mathscr{L}$.

1. DÉFINITION DES RÉPARTITIONS PONCTUELLES MARKOVIENNES

Soit $\{U_1, U_2, \dots, U_\alpha, \dots\}$ une suite dénombrable ordonnée de variables aléatoires U_α $(\alpha = 1, 2, 3, \dots)$ *non négatives*. Posons:

$$\left.\begin{aligned} &G_1(u) = Pr(U_1 < u), \\ &G_{\alpha+1}(u_1, u_2, \dots, u_\alpha; u) = Pr(U_{\alpha+1} < u / U_1 = u_1, U_2 = u_2, \dots, U_\alpha = u_\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (1,1)$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, \dots);$$

et faisons la restriction que:

$$G_{\alpha+1}(u_1, u_2, \dots, u_\alpha; +0) = 0 \qquad \forall \alpha \geqq 1, u_1, u_2, \dots, u_\alpha \geqq 0. \quad (1,2)$$

Posons:

$$T_1 = U_1, \qquad T_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} U_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \dots); \quad (1,3)$$

$$\left.\begin{aligned} &F_1(u) = G_1(u), \\ &F_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u) = Pr(U_{\alpha+1} < u / T_\alpha = \tau_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \dots); \end{aligned}\right\} \quad (1,4)$$

$$\mathrm{N}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{T}_1 \geqq t, \\ n & \text{si} \quad \mathrm{T}_n < t \leqq \mathrm{T}_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases} \qquad (t \geqq 0) \quad (1,5)$$

A la restriction (1,2) près, le système $\mathrm{R} = \{\mathrm{T}_\alpha;\ \alpha = 1, 2, 3, \ldots\}$ des T_α constitue la répartition ponctuelle aléatoire sur le demi-axe des temps $t \in [0, +\infty)$, la plus générale.

La signification, par rapport à cette répartition ponctuelle aléatoire, de la fonction aléatoire $\mathrm{N}(t)$ est évidente; nous dirons que la répartition ponctuelle aléatoire est Markovienne, si $\mathrm{N}(t)$ est Markovienne; c'est-à-dire si quels que soient :

— l'entier $n \geqq 1$,
— $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < t < t' < +\infty$,
— l'entier $n' \geqq n$,

$$Pr[\mathrm{N}(t') = n'/\mathrm{N}(t) = n; \mathrm{T}_1 = \tau_1, \mathrm{T}_2 = \tau_2, \ldots, \mathrm{T}_n = \tau_n] = Pr[\mathrm{N}(t') = n'/\mathrm{N}(t) = n]. \qquad (1,6)$$

Pour que $\mathrm{N}(t)$ soit Markovienne, il *faut* que :

1° Pour tout $\alpha \geqq 1$,

$$\mathrm{G}_{\alpha+1}(u_1, \ldots, u_\alpha; u) = \mathrm{F}_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u); \qquad (1,7)$$

2° Pour tout $\alpha \geqq 1$, $\mathrm{F}_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u)$ est de la forme :

$$\mathrm{F}_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u) = 1 - \frac{\mathrm{H}_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{\mathrm{H}_{\alpha+1}(\tau_\alpha)}, \qquad (1,8)$$

où $\mathrm{H}_{\alpha+1}(x)$ est une fonction monotone non-croissante sur $x \in [0, +\infty)$, avec : $\mathrm{H}_{\alpha+1}(+\infty) = 0$, et $\mathrm{H}_{\alpha+1}(+0) < +\infty$. Bien entendu, $\mathrm{H}_{\alpha+1}(x)$ n'intervient dans (1,8) qu'à un coefficient de proportionnalité près.

1° et 2° sont intuitifs et faciles à établir rigoureusement; bornons-nous à indiquer sommairement comment on peut, une fois admis 1°, établir 2° ;

Soit $\mathrm{L}_\alpha(\tau) = Pr(\mathrm{T}_\alpha < \tau)$ la fonction de répartition de T_α ($\alpha = 1, 2, 3, \ldots$); pour $0 \leqq \tau \leqq t < t'$, et $d\tau > 0$, on a :

$$Pr[\tau \leqq \mathrm{T}_n < \tau + d\tau, \mathrm{N}(t) = n, \mathrm{N}(t') = n] = d\mathrm{L}_n(\tau)[1 - \mathrm{F}_{n+1}(\tau; t' - \tau)]; \quad (1,9)$$

mais on a aussi :

$$\begin{aligned} Pr[\tau \leqq \tau_n < \tau + d\tau, \mathrm{N}(t) = n, \mathrm{N}(t') = n] &= Pr[\tau \leqq \tau_n < \tau + d\tau, \mathrm{N}(t) = n] \\ &\quad Pr[\mathrm{N}(t') = n/\tau_n = \tau, \mathrm{N}(t) = n], \\ &= d\mathrm{L}_n(\tau)[1 - \mathrm{F}_{n+1}(\tau; t - \tau)] Pr[\mathrm{N}(t') = n/\tau_n = \tau, \mathrm{N}(t) = n]; \end{aligned} \qquad (1,10)$$

en égalant (1,9) à (1,10), on obtient :

$$\Pr[\mathrm{N}(t') = n/\tau_n = \tau,\ \mathrm{N}(t) = n] = \frac{1 - \mathrm{F}_{n+1}(\tau;\, t' - \tau)}{1 - \mathrm{F}_{n+1}(\tau;\, t - \tau)}. \qquad (1,11)$$

Pour que la fonction aléatoire $\mathrm{N}(t)$ soit Markovienne, il est nécessaire que le rapport (1,11) soit indépendant de τ ($0 \leqq \tau \leqq t$), pour tous t, t' fixés ($t < t'$); pour $\tau = t$, le rapport (1,11) vaut d'après (1,2) :

$$\frac{1 - \mathrm{F}_{n+1}(t;\, t' - t)}{1 - \mathrm{F}_{n+1}(t;\, +0)} = 1 - \mathrm{F}_{n+1}(t;\, t' - t); \qquad (1,12)$$

pour $\tau = +0$, le rapport (1,11) vaut :

$$\frac{1 - \mathrm{F}_{n+1}(0;\, t')}{1 - \mathrm{F}_{n+1}(0;\, t)}; \qquad (1,13)$$

posons :

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = 1 - \mathrm{F}_{n+1}(0;\, x) \qquad (x \geqq 0);$$

en égalant (1,12) à (1,13), il vient :

$$\mathrm{F}_{n+1}(t;\, t' - t) = 1 - \frac{\mathrm{H}_{n+1}(t')}{\mathrm{H}_{n+1}(t)};$$

soit (1,8), en changeant :

— la notation n, en α ;
— la notation t, en τ_α,
— la notation $(t' - t)$ en u ;

de sorte que : $t' = (t' - t) + t = \tau_\alpha + u$.

Il est d'autre part facile de vérifier que les conditions (1,7), (1,8) sont suffisantes pour que $\mathrm{N}(t)$ soit Markovienne ; nous avons donc le :

THÉORÈME (1,1). — Pour que la fonction aléatoire $\mathrm{N}(t)$ définie par (1,5) soit Markovienne, il faut et il suffit que pour tout entier $\alpha \geqq 1$ (et avec les notations ci-dessus) :

1° $$\mathrm{G}_{\alpha+1}(u_1, \ldots, u_\alpha;\, u) = \mathrm{F}_{\alpha+1}(\tau_\alpha;\, u);$$

2° $$\mathrm{F}_{\alpha+1}(\tau_\alpha;\, u) = 1 - \frac{\mathrm{H}_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{\mathrm{H}_{\alpha+1}(\tau_\alpha)}, \qquad (1,14)$$

où $\mathrm{H}_{\alpha+1}(x)$ est une fonction monotone non-croissante de $x \in [0, +\infty)$, avec : $\mathrm{H}_{\alpha+1}(+\infty) = 0$ et $\mathrm{H}_{\alpha+1}(+0) < +\infty$, qui n'est définie qu'à la proportionnalité près.

Remarque (1,1). — Si les conditions indiquées au Théorème (1,1) sont satisfaites, $N(t)$ est Markovienne quelle que soit $F_1(u)$; il nous sera commode pour la suite de poser :

$$F_1(u) = 1 - H_1(u).$$

Remarque (1,2). — Les répartitions ponctuelles aléatoires Markoviennes sont souvent appelées « processus de naissances » (sans décès, ni émigrations, ni immigrations).

Remarque (1,3). — Pour les répartitions ponctuelles aléatoires que nous considérons, l'instant 0 de début de la répartition, est un instant privilégié.

2. OPÉRATEUR INFINITÉSIMAL ASSOCIÉ

Désignons par $\mathscr{E}$ l'ensemble des entiers finis et $\geqq 0$; posons :

$$P_k^j(t, \tau) = Pr[N(\tau) = k/N(t) = j]\ [t < \tau;\ t,\ \tau \in [0, +\infty);\ j,\ k \in E];$$
$$P(t, \tau) = \text{ matrice d'éléments } P_k^j(t, \tau)\ (j,\ k \in E).$$
$$\delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k, \\ 1 & \text{si} \quad j = k, \end{cases} \qquad (j,\ k \in E)$$

$I =$ matrice identique, d'éléments δ_k^j;
$\Theta =$ matrice nulle, d'éléments tous nuls;
$P_k(t) = Pr[N(t) = k]$, $k \in \mathscr{E}$, $t \in [0, +\infty)$,
$P(t) =$ matrice d'éléments $P_k(t)$, $k \in \mathscr{E}$, $t \in [0, +\infty)$;

sous certaines conditions d'ailleurs très peu restrictives (pour lesquelles nous renvoyons par exemple à M. Fréchet [*1*]), le caractère Markovien de $N(t)$ entraîne que :

$$\lim_{t \to \tau - 0} P(t, \tau) = I \qquad (0 < t < \tau), \tag{2,1}$$

$$\lim_{\tau \to t + 0} P(t, \tau) = I \qquad (0 \leqq t < \tau); \tag{2,2}$$

et que :

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{P(t, t + \Delta t) - I}{\Delta t} = Q(t) \qquad (0 \leqq t) \tag{2,3}$$

existe; nous désignerons par $q_k^j(t)$ $(j,\ k \in \mathscr{E})$ les éléments de la matrice $Q(t)$, dont on sait qu'elle représente l'*opérateur infinitésimal associé*; on a d'ailleurs :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{P}(t, \tau) + \mathrm{Q}(t)\mathrm{P}(t, \tau) = \Theta, \tag{2,4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathrm{P}(t, \tau) = \mathrm{P}(t, \tau)\mathrm{Q}(\tau). \tag{2,5}$$

On a d'ailleurs :

$$\mathrm{P}_k(+0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0, \\ 0 & \text{si} \quad k > 0. \end{cases}$$

On sait que dans ces conditions, la donnée de $\mathrm{Q}(t)$ détermine $\mathrm{P}(t, \tau)$:

— soit par l'équation différentielle (2,4) complétée par la condition initiale (2,1);

— soit par l'équation différentielle (2,5) complétée par la condition initiale (2,2).

On peut donc dire que la loi de probabilité $\mathscr{L}$ de R [ou de la fonction aléatoire $\mathrm{N}(t)$] est déterminée :

— par $\{\mathrm{Q}(t), t \in [0, +\infty)\}$;

— ou encore par le système des fonctions $\mathrm{H}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$. La relation entre ces deux modes de description de $\mathscr{L}$ se déduit de (2,3), d'après laquelle, en supposant les $\mathrm{H}_\alpha(x)$ dérivables :

$$q_k^j(t) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1}{\mathrm{H}_{j+1}(t)} \dfrac{d}{dt} \mathrm{H}_{j+1}(t) & \text{si} & k = j \\ -\dfrac{1}{\mathrm{H}_{j+1}(t)} \dfrac{d}{dt} \mathrm{H}_{j+1}(t) & \text{si} & k = j + 1 \\ 0 & \text{dans tout autre cas} & \end{array} \right\} \tag{2,6}$$

3. TESTS ET ESTIMATIONS SUR LA LOI DE PROBABILITÉ $\mathscr{L}$ DE $\mathrm{N}(t)$

Supposons que l'on observe *une* réalisation de R sur $[0, \mathrm{T}[$, où $\mathrm{T} > 0$ a une valeur fixée; cela revient à dire que l'on observe une réalisation $n(t)$ de $\mathrm{N}(t)$ sur $[0, \mathrm{T}]$; quelle information cette observation S apporte-t-elle sur la loi de probabilité $\mathscr{L}$ de $\mathrm{N}(t)$?

La question analogue pour un processus de Markov *homogène* quelconque, est résolue par diverses publications (parmi lesquelles on peut citer R. Fortet [*1*] et Bui-Trong-Lieu [*1*]); on peut en résumer les résultats en disant que : sous des conditions très larges, les processus de Markov homogènes possèdent des propriétés ergodiques, qui assurent l'existence de tests, ou d'estimateurs, convergents lorsque $T \to +\infty$.

Mais ici nous avons à faire à une fonction aléatoire $N(t)$ qui est Markovienne, mais qui, sauf dans des cas de dégénérescence sans intérêt, *n'est pas homogène*; la question posée est donc à étudier ; nous allons maintenant aborder cette étude.

Considérons une répartition ponctuelle aléatoire R, non-nécessairement Markovienne; posons :

$$\tau_1 = u_1,\ \tau_2 = u_1 + u_2, \ldots, \tau_\alpha = u_1 + u_2 + \ldots + u_\alpha, \ldots;$$
$$\overline{H}_1(u) = H_1(u),\ \overline{H}_{\alpha+1}(\tau_1, \ldots, \tau_\alpha; u) = 1 - G_{\alpha+1}(u_1, \ldots, u_\alpha; u);$$

pour alléger l'exposé, nous supposerons que les fonctions $\overline{H}_\alpha(\tau_1, \ldots, \tau_\alpha; x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ sont dérivables en x sur $[0, +\infty)$, mais le lecteur vérifiera sans peine que nos conclusions restent valables sans cette hypothèse.

Remarquons que l'observation S est constituée par : la valeur prise par $N(T)$; et par les valeurs prises par $T_1, T_2, \ldots, T_{N(T)}$. Pour des valeurs données de n et de $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, considérons la probabilité $\mathscr{P}$ que :

$$\begin{cases} N(T) = n, \\ \tau_\alpha \leqq T_\alpha < \tau_\alpha + d\tau_\alpha \quad (d\tau_\alpha > 0;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n); \end{cases}$$

pour $d\tau_\alpha \to +0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathscr{P}$ est équivalente à :

$$p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) d\tau_1, d\tau_2, \ldots, d\tau_n,$$

où :

$$p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \overline{H}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n; T - \tau_n) \prod_{\alpha=1}^{n} \left[-\frac{d}{d\tau_\alpha} \overline{H}_\alpha(\tau_1, \ldots, \tau_{\alpha-1}; \tau_\alpha - \tau_{\alpha-1}) \right]. \quad (3,1)$$

Remarque (3,1). — Si R est Markovienne, et d'après le Théorème (1,1), (3,1) se réduit à :

$$p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = H_{n+1}(T) \prod_{\alpha=1}^{n} \left[-\frac{\dfrac{d}{d\tau_\alpha} H_\alpha(\tau_\alpha)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \right]; \quad (3,2)$$

(3,2) peut aussi s'obtenir en suivant la méthode de R. Fortet [*1*], ou de Bui-Trong-Lieu [*1*] : cette méthode donne l'expression de $p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ à partir de $Q(t)$, expression dont on peut déduire (3,2) à l'aide de (2,6).

Répartitions ponctuelles cumulatives

De (3,1), on peut tirer quelques applications évidentes; par exemple, supposons que la loi $\mathscr{L}$ dépende d'un paramètre θ; pour fixer les idées, supposons plus précisément que θ est un paramètre numérique unidimensionnel; (3,1) permet immédiatement de former l' « équation de vraisemblance » relative à θ.

Mais la question la plus intéressante à se poser semble être la suivante, naturellement suggérée par la forme du second membre de (3,1) et surtout de (3,2).

Disons que la répartition ponctuelle R est *cumulative* si :

— quel que soit $T > 0$,

— quel que soit l'entier $n > 0$,

la loi de probabilité de $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, conditionnelle quand $N(T) = n$, est la loi uniforme sur le domaine: $0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \ldots \leqq T_n < T$; ce qui revient à dire que $p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ne dépend pas de $\tau_1, \ldots, \tau_n$, mais seulement de n et de T.

Nous appellerons (C) la classe des lois $\mathscr{L}$ pour lesquelles R est cumulative.

Cherchons des conditions nécessaires pour que la répartition ponctuelle R, *a priori* non-nécessairement Markovienne, soit cumulative. Considérons $p_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, d'abord dans le cas $n = 1$:

$$p_1(\tau_1) = \overline{H}_2(\tau_1 \,;\, T - \tau_1) \times -\frac{d}{d\tau_1} H_1(\tau_1)\,; \tag{3,3}$$

si $p_1(\tau_1)$ ne dépend pas de τ_1, $\overline{H}_2(\tau_1 \,;\, T - \tau_1)$ est le quotient d'une fonction $A(T)$ de T seul, par une fonction $B(\tau_1)$ de τ_1 seul :

$$\overline{H}_2(\tau_1 \,;\, T - \tau_1) = \frac{A(T)}{B(\tau_1)},$$

soit en posant: $T - \tau_1 = u$,

$$\overline{H}_2(\tau_1 \,;\, u) = \frac{A(\tau_1 + u)}{B(\tau_1)}\,;$$

mais $\overline{H}_2(\tau_1 \,;\, + 0) = 1$, donc: $B(\tau_1) \equiv A(\tau_1)$; de sorte que en posant :

$$A(x) = H_2(x),$$

$\overline{H}_2(\tau_1 \,;\, u)$ est de la forme:

$$\overline{H}_2(\tau_1 \,;\, u) = \frac{H_2(\tau_1 + u)}{H_2(\tau_1)}\,;$$

$p_1(\tau_1)$ a donc pour expression :

$$p_1(\tau_1) = \mathrm{H}_2(\mathrm{T}) \times \left[- \frac{\dfrac{d}{d\tau_1}\mathrm{H}_1(\tau_1)}{\mathrm{H}_2(\tau_1)} \right];$$

il est donc nécessaire que :

$$\mathrm{H}_2(\tau_1) = - \frac{d}{d\tau_1}\mathrm{H}_1(\tau_1) \times \rho_2,$$

où ρ_2 est une constante ; mais puisque $\mathrm{H}_2(x)$ n'intervient qu'à la proportionnalité près, on peut prendre $\rho_2 = 1$.

Raisonnons maintenant par récurrence ; supposons prouvé qu'il existe $(n - 1)$ fonctions $\mathrm{H}_2(x), \ldots, \mathrm{H}_n(x)$ telles que :

$$\overline{\mathrm{H}}_{\alpha+1}(\tau_1, \ldots, \tau_\alpha ; u) = \frac{\mathrm{H}_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{\mathrm{H}_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n - 1),$$

et que :

$$\mathrm{H}_{\alpha+1}(x) = (-1)\frac{d}{dx}\mathrm{H}_\alpha(x) ;$$

alors :

$$p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \overline{\mathrm{H}}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n ; \mathrm{T} - \tau_n) \times - \frac{d}{d\tau_n}\mathrm{H}_n(\tau_n) ;$$

pour que $p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ soit, pour tout T, indépendant de $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, il faudra visiblement que $\overline{\mathrm{H}}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n ; u)$ soit de la forme :

$$\overline{\mathrm{H}}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n ; u) = \frac{\mathrm{H}_{n+1}(\tau_n + u)}{\mathrm{H}_{n+1}(\tau_n)}, \qquad (3,4)$$

avec la fonction $\mathrm{H}_{n+1}(x)$ définie par :

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = (-1)\frac{d}{dx}\mathrm{H}_n(x).$$

Maintenant, observons que $\mathrm{H}_1(x)$ est $\geqq 0$ et monotone non-croissante ; raisonnons encore par récurrence, supposons prouvé que

$$\mathrm{H}_1(x), \mathrm{H}_2(x), \ldots, \mathrm{H}_n(x)$$

sont $\geqq 0$ et monotones non-croissantes ; alors :

$$- \frac{d}{dx}\mathrm{H}_n(x)$$

est $\geqq 0$, donc selon (3,4) $H_{n+1}(x)$ est $\geqq 0$; mais alors selon (3,4), $H_{n+1}(x)$ est monotone non-croissante, puisque, en u, $\overline{H}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n; u)$ est monotone non-croissante.

On tire alors de (3,5) que pour tout $\alpha > 0$:

$$(-1)^\alpha \frac{d}{dx^\alpha} H_1(x) = H_{\alpha+1}(x) \geqq 0 ;$$

d'ailleurs $H_1(x)$ est $\geqq 0$; donc $H_1(x)$ doit être une fonction *complètement monotone* (cf. par exemple R. Fortet [2]) sur $]0, +\infty)$; compte tenu des propriétés des fonctions complètement monotones, compte tenu de ce que $H_1(+0) = 1$, $H_1(+\infty) = 0$, on obtient le :

THÉORÈME (3,1). — Pour qu'une répartition ponctuelle aléatoire soit cumulative, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit Markovienne, et qu'il existe une fonction de répartition $K(y)$ sur $y \in [0, +\infty)$ telle que :

$$K(+0) = 0, \qquad K(+\infty) = 1,$$

et que pour tout $\alpha = 0, 1, 2, \ldots,$

$$H_{\alpha+1}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} y^\alpha dK(y), \tag{3,6}$$

où les $H_{\alpha+1}(x)$ sont les fonctions introduites au Théorème (1,1).

4. LOI DE PROBABILITÉ DE N(T) DANS LE CAS D'UNE RÉPARTITION PONCTUELLE CUMULATIVE

Pour une répartition ponctuelle cumulative, $p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ se réduit à :

$$p_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = H_{n+1}(T) ; \tag{4,1}$$

on en déduit pour la probabilité $P_n(0, T) = Pr[N(T) = n]$, que :

$$P_n(0, T) = \frac{T^n}{n} H_{n+1}(T),$$

soit d'après (3,5) :

$$P_n(0, T) = \int_0^{+\infty} e^{-Ty} \frac{(Ty)^n}{n} dK(y) ; \tag{4,2}$$

la fonction caractéristique $\varphi(0, \mathrm{T} \mid \omega) = \mathrm{E}[e^{i\omega \mathrm{N(T)}}]$ de N(T) est donc égale à :

$$\varphi(0\,;\mathrm{T} \mid \omega) = \int_0^{+\infty} e^{(e^{i\omega}-1)\mathrm{T}y} d\mathrm{K}(y). \tag{4,3}$$

Posons :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y d\mathrm{K}(y), \qquad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 d\mathrm{K}(y), \tag{4,4}$$

en supposant que les intégrales (4,4) sont convergentes. On déduit de (4,3) :

$$\mathrm{E}[\mathrm{N(T)}] = \mu\mathrm{T}, \tag{4,5}$$

et, pour la variance $\mathscr{V}[\mathrm{N(T)}]$ de N(T) :

$$\mathscr{V}[\mathrm{N(T)}] = \mu\mathrm{T} + \sigma^2\mathrm{T}^2. \tag{4,6}$$

Cas où $\sigma = 0$. — $\sigma = 0$ si et seulement si la répartition de masse décrite par la fonction de répartition K(y), se réduit à une masse 1 placée à l'abscisse $y = \mu$; alors (3,5) et (1,14) montrent que la répartition ponctuelle aléatoire est un *processus de Poisson homogène*, de densité moyenne μ. Alors, N(T) obéit à la loi de Poisson de paramètre μT ; si l'on pose :

$$\mathrm{N(T)} = \mu\mathrm{T} + \sqrt{\mu\mathrm{T}}\mathrm{L}, \tag{4,7}$$

asymptotiquement lorsque $\mathrm{T} \to +\infty$. L obéit à la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et d'écart type égal à 1.

Cas général $\sigma \neq 0$. — Dans le cas général où $\sigma^2 > 0$ (avec : $\sigma^2 < +\infty$), posons :

$$\mathrm{N(T)} = \mu\mathrm{T} + \sqrt{\mu\mathrm{T} + \sigma^2\mathrm{T}^2}\,.\,\mathrm{V}\,; \tag{4,8}$$

d'après (4,3), la fonction caractéristique de V tend lorsque $\mathrm{T} \to +\infty$, vers :

$$e^{-i\frac{\mu}{\sigma}\omega} \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{\sigma}y} d\mathrm{K}(y), \tag{4,9}$$

et cette convergence est uniforme en ω sur tout intervalle fini ; or (4,9) est la fonction caractéristique de la fonction de répartition (en v) $\mathrm{K}(\mu + \sigma v)$; on a donc asymptotiquement lorsque $\mathrm{T} \to +\infty$:

$$Pr(\mathrm{V} < v) \sim \mathrm{K}(\mu + \sigma v). \quad \blacksquare \tag{4,10}$$

Que les intégrales (4,4) convergent ou non, on déduit de (4,3) que :

THÉORÈME (4,1). — La loi de probabilité de $\frac{N(T)}{T}$ tend, lorsque $T \to +\infty$, vers la loi de probabilité sur $[0, +\infty)$ définie par la fonction de répartition $K(y)$.

Loi de probabilité de $N(t_0 + T) - N(t_0)$

Considérons une répartition ponctuelle Markovienne R.

Soient $t_0 \geqq 0$ un instant fixé, et $T > 0$ une durée fixée ; supposons que l'on observe R sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T[$; l'observation $S_{t_0}(T)$ correspondante est constituée par :

— la valeur n prise par $N(t_0 + T) - N(t_0)$;

— les emplacements $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n$ des n points de la répartition ponctuelle appartenant à $[t_0, t_0 + T[$; nous supposons $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n$ numérotés par valeurs croissantes.

Si m est la valeur prise par $N(t_0)$, $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n$ ne sont autres que les valeurs prises par $T_{m+1}, T_{m+2}, \ldots, T_{m+n}$ respectivement ; mais notons bien que la valeur m prise par $N(t_0)$ *n'est pas observée.*

De (4,1), on déduit aisément que :

THÉORÈME (4,2). — Dans le cas d'une répartition ponctuelle cumulative, $N(t_0 + T) - N(T)$ est un résumé exhaustif de l'observation $S_{t_0}(T)$; et $N(t_0 + T) - N(T)$ obéit à la même loi de probabilité, définie par (4,2) et (4,3), que $N(T)$.

Tests et estimations pour une répartition ponctuelle cumulative

Limitons-nous dorénavant aux répartitions ponctuelles cumulatives.

Une conséquence particulière du Théorème (4,2) est que : si t_0 est inconnu, l'observation $S_{t_0}(T)$ n'apporte aucune information sur la valeur de t_0, dont l'estimation est donc impossible.

Dans le même ordre d'idées, supposons connu que $t_0 = 0$, de sorte que l'observation $S_{t_0}(T)$ n'est autre que l'observation désignée plus haut par S.

L'intérêt de distinguer la catégorie particulière des répartitions ponctuelles cumulatives, réside en ce que pour tout $T > 0$, $N(T)$ — ou, c'est équivalent, $N(T)/T$ — est un résumé de S, *exhaustif pour la classe* (C) *de lois* $\mathscr{L}$.

Cette exhaustivité est à première vue une agréable simplification ; mais la valeur Y de N(T)/T est une information très limitée; nous allons faire la constatation suivante:

Sachant que $\mathscr{L} \in (C)$ et que R n'est pas un processus de Poisson homogène, mais $\mathscr{L}$ étant par ailleurs partiellement ou totalement inconnue, toute inférence sur $\mathscr{L}$ fondée sur l'observation sur [0, T[*d'une seule* réalisation de R, comporte une probabilité d'erreur qui ne tend pas vers 0 lorsque $T \to +\infty$.

Par exemple, supposons que $K(y) = K(\theta \mid y)$ dépende d'un paramètre θ; posons-nous d'abord le

PROBLÈME P_1. — Soient θ_1 et θ_2 deux valeurs données distinctes de θ; posons pour $\alpha = 1, 2$:

$$\mu_\alpha = \int_0^{+\infty} y d_y K(\theta_\alpha \mid y),$$

$$\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} y^2 d_y K(\theta_\alpha \mid y),$$

et supposons que $\sigma_\alpha \neq 0$ pour $\alpha = 1$ et 2.

Soit $\mathscr{H}_1$ l'hypothèse que $\theta = \theta_1$ et $\mathscr{H}_2$ l'hypothèse que $\theta = \theta_2$; et soit à discriminer entre les hypothèses $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$, supposées équiprobables *a priori.*

Il résulte du Théorème (4,1) que ce Problème 1 est, asymptotiquement pour $T \to +\infty$, équivalent au problème P_1^∞ suivant: une variable aléatoire Y de $[Y \in [0, +\infty)]$ a pour fonction de répartition, soit $K(\theta_1 \mid y)$ [hypothèse $\mathscr{H}_1^\infty$], soit $K(\theta_2 \mid y)$ [hypothèse $\mathscr{H}_2^\infty$]; connaissant une — et une seule — réalisation y de Y, discriminer entre les hypothèses $\mathscr{H}_1^\infty$ et $\mathscr{H}_2^\infty$.

Naturellement, la meilleure solution de P_1^∞ est exprimée par la règle suivante:

$$\text{si } \frac{d_y K(\theta_1 \mid y)}{d_y K(\theta_2 \mid y)} > 1, \qquad \text{adopter l'hypothèse } \mathscr{H}_1^\infty\,;$$

$$\text{si } \frac{d_y K(\theta_1 \mid y)}{d_y K(\theta_2 \mid y)} < 1, \qquad \text{adopter l'hypothèse } \mathscr{H}_2^\infty.$$

Il est donc clair que la meilleure solution de P_1 comporte une probabilité d'erreur qui ne tend pas vers 0 lorsque $T \to +\infty$, et dont on peut d'ailleurs facilement évaluer la limite lorsque $T \to +\infty$. Posons-nous maintenant le

PROBLÈME P_2. — Soit à estimer la valeur de θ supposée inconnue.

Il résulte du Théorème (4,1) que P_2 est, asymptotiquement lorsque $T \to +\infty$, équivalent au problème P_2^∞ suivant: une variable aléatoire

$Y[Y \in [0, +\infty)]$ a pour fonction de répartition $K(\theta \mid y)$, où θ a une valeur fixée mais inconnue θ_0 ; on suppose, en posant :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y d_y K(\theta_0 \mid y), \qquad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 d_y K(\theta_0 \mid y),$$

que : $\sigma^2 > 0$. Connaissant une — et une seule — réalisation y de Y, estimer la valeur de θ_0.

Il est clair d'après P_2^∞, qu'il ne peut exister pour P_2, un estimateur convergent stochastiquement vers θ_0 lorsque $T \to +\infty$. Le seul type de test admettant une solution convergente semble être le suivant :

PROBLÈME P_3. — Soient μ un nombre positif donné ; $K(y)$ une fonction de répartition donnée sur $[0, +\infty)$, telle que :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y d_y K(y),$$

et que si l'on pose :

$$\mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 d_y K(y),$$

on ait : $\sigma^2 > 0$.

Soit $\mathscr{H}_0$ l'hypothèse que $N(t)$ est un processus de Poisson homogène de densité moyenne μ ; et $\mathscr{H}$ l'hypothèse que $N(t)$ est une répartition ponctuelle cumulative, de loi déterminée par (3,4).

Soit à discriminer entre les hypothèses $\mathscr{H}_0$ et $\mathscr{H}$.

Asymptotiquement lorsque $T \to +\infty$, P_3 est équivalent au problème P_3^∞ suivant : soit Y une variable aléatoire qui dans l'hypothèse $\mathscr{H}_0^\infty$ est presque sûrement égale à μ, et dans l'hypothèse $\mathscr{H}^\infty$ a pour fonction de répartition $K(y)$; connaissant une — et une seule — réalisation y de Y, discriminer entre les hypothèses $\mathscr{H}_0^\infty$ et $\mathscr{H}^\infty$.

En supposant que μ est un point de continuité pour $K(y)$, il est clair que la discrimination objet de P_3^∞, peut être effectuée avec une probabilité d'erreur nulle ; par conséquent, la discrimination objet de P_3 peut être effectuée (et il est facile de préciser comment) de telle sorte que la probabilité d'erreur soit infiniment petite si $T \to +\infty$.

5. EXEMPLE DES PROCESSUS DE POLYA

Les processus de Polya sont un des rares exemples de répartition ponctuelle aléatoire non stationnaire explicitement considérés dans la littérature; ils ont en outre reçu quelques applications; on les a par exemple proposés pour modèles dans des problèmes de surveillance.

Les processus de Polya sont habituellement définis de la façon suivante (cf. A. T. Bharucha-Reid [*1*]):

Soient μ et σ deux constantes positives quelconques; nous poserons:

$$a = \frac{\sigma^2}{\mu^2};$$

on appelle processus de Polya $P(\mu, a)$, la répartition ponctuelle aléatoire *Markovienne* dont l'opérateur infinitésimal est défini par:

$$q_k^j(t) = \begin{cases} -\mu \dfrac{\mu^2 + \sigma^2 j}{\mu^2 + \sigma^2 \mu t} = -\mu \dfrac{1 + aj}{1 + a\mu t} & \text{si} \quad k = j, \\ +\mu \dfrac{\mu^2 + \sigma^2 j}{\mu^2 + \sigma^2 \mu t} = +\mu \dfrac{1 + aj}{1 + a\mu t} & \text{si} \quad k = j + 1, \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{cases} \tag{5,1}$$

L'intégration par exemple de (2,5) avec (2,2), avec les $q_k^j(t)$ définis par (5,1), donne sans difficulté:

$$P_k^j(t, \tau) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{a} + k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{a} + j\right)} \frac{[a\mu(\tau - t)]^{k-j}}{(k-j)!} \frac{(1 + a\mu t)^{\frac{1}{a} + j}}{(1 + a\mu\tau)^{\frac{1}{a} + k}} (0 \leqq t < \tau\,;\, k \geqq j). \tag{5,2}$$

D'après (2,6), les fonctions $H_{\alpha+1}(x)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) sont données, à un coefficient de proportionnalité près, par:

$$H_{\alpha+1}(x) = (1 + a\mu x)^{-\frac{1}{a} - \alpha} \tag{5,3}$$

Avec (1,14), on en déduit facilement la densité de probabilité $l_\alpha(t)$ ($t \geqq 0$; $\alpha = 1, 2, \ldots$) de T_α:

$$l_\alpha(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{a} + \alpha\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{a}\right)} \frac{a^\alpha \mu^\alpha}{(\alpha - 1)!} \frac{t^{\alpha - 1}}{(1 + a\mu t)^{\frac{1}{a} + \alpha}}. \tag{5,4}$$

On remarque que si $a \geqq 1$:

$$E(T_1) = +\infty,$$

et par suite :

$$E(T_\alpha) = +\infty \qquad \text{pour tout} \qquad \alpha \geqq 1.$$

Par contre, si $a < 1$, $E(T_\alpha)$ est finie et a pour valeur :

$$E(T_\alpha) = \frac{\alpha}{\mu(1-a)}\,; \tag{5,5}$$

d'une façon analogue, T_α n'admet une variance $\mathscr{V}(T_\alpha)$ finie que si $a < \frac{1}{2}$, et alors :

$$\mathscr{V}(T_\alpha) = \frac{\alpha[1 + a(\alpha - 1)]}{\mu^2(1-a)^2(1-2a)}. \tag{5,6}$$

Remarque (5,1). — En faisant $\sigma = 0$, c'est-à-dire $a = 0$, dans (5,1), on retrouve les formules qui définissent l'opérateur infinitésimal d'un processus de Poisson homogène de densité moyenne μ ; celui-ci peut donc être considéré comme un processus de Polya dégénéré, soit le processus $P(\mu, +0)$.

Estimation des paramètres μ et a pour un processus $P(\mu, a)$

Soit à estimer, à partir de l'observation S, les paramètres μ et a, supposés tous deux inconnus (mais dans l'hypothèse $a > 0$) de $P(\mu, a)$. Il est facile de constater directement les faits suivants :

1° N(T) est un résumé exhaustif de S.

2° Compte tenu de cette exhaustivité, et en désignant par n la valeur observée de N(T), la méthode du « maximum de vraisemblance » fournit les équations de vraisemblance suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} P_n^0(0, T) = 0, \tag{5,7}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} P_n^0(0, T) = 0. \tag{5,8}$$

Après réduction, (5,7) s'écrit :

$$n = \mu T\,; \tag{5,9}$$

par conséquent l'estimateur $\hat{\mu}$ de μ fourni par le maximum de vraisemblance est :

$$\hat{\mu} = \frac{N(T)}{T}\,; \tag{5,10}$$

l'espérance mathématique $E(\hat{\mu})$ et la variance $\mathscr{V}(\hat{\mu})$ de $\hat{\mu}$ ont pour valeurs :

$$E(\hat{\mu}) = \mu, \qquad \mathscr{V}(\hat{\mu}) = \mu\left(a\mu + \frac{1}{T}\right); \tag{5,11}$$

par conséquent, $\hat{\mu}$ est un estimateur *sans biais*, mais qui ne converge pas stochastiquement vers μ lorsque $T \to +\infty$.

Pourtant, $\hat{\mu}$ est un estimateur de μ, optimal en ce qu'il est à *variance minimum* (parmi tous les estimateurs sans biais) : cela est lié classiquement (cf. C. Fourgeaud et A. Fuchs [*1*]) au fait que $\hat{\mu}$ est l'estimateur du « maximum de vraisemblance », et se vérifie directement sans difficulté par le procédé habituel (fondé sur l'inégalité de Schwarz).

L'équation (5,8) équivaut à :

$$\log(1 + a\mu T) - \frac{1 + na}{1 + \mu Ta} aT + a\sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\alpha a}{1 + \alpha a} = 0; \tag{5,12}$$

si dans (5,12) on remplace μ par la valeur $\frac{n}{T}$ fournie par (5,9), il vient :

$$\log(1 + an) - \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{a}{1 + \alpha a} = 0; \tag{5,13}$$

à l'aide de la formule de Taylor, le premier membre de (5,13) s'écrit :

$$-\frac{a}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{1}{[1 + (\alpha + \eta_\alpha)a]^2}, \tag{5,14}$$

ou les η_α ($\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1$) sont des nombres compris entre 0 et 1 ; (5,14) est toujours négatif pour $a > 0$, et prend la valeur 0 seulement pour la valeur limite $a = 0$ [cas d'un processus de Poisson $P(\mu, +0)$] ; aussi, quelle que soit la vraie valeur supposée > 0 de a, quels que soient n et T, la méthode du maximum de vraisemblance conduirait à estimer que $a = 0$, ce qui n'est évidemment pas admissible.

Ces résultats s'expliquent aisément : d'après (5,3),

$$H_1(x) = (1 + a\mu x)^{-\frac{1}{a}},$$

et, à un coefficient de proportionnalité près, on a pour tout α :

$$H_{\alpha+1}(x) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} H_1(x);$$

donc un processus $P(\mu, a)$ est une *répartition ponctuelle cumulative*, pour laquelle $K(y)$ a la valeur :

$$K(y) = \int_0^y \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \left(\frac{z}{a\mu}\right)^{\frac{1}{a}-1} e^{-\frac{z}{a\mu}} d\left(\frac{z}{a\mu}\right). \tag{5,15}$$

On vérifie que, pour $K(y)$ donnée par (5,15), on a :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y dK(y), \qquad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 dK(y).$$

Les résultats précédents sont donc des cas particuliers de ceux obtenus au paragraphe 4.

BIBLIOGRAPHIE

M. FRÉCHET [*1*], *Méthode des fonctions arbitraires ; théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Gauthier-Villars édit., Paris, 1938.

R. FORTET [*1*], Tests pour des problèmes d'attente et d'occupation ; Colloque sur la Rech. Op. Bruxelles, 1959, p. 11-43, O. B. A. P. édit.

R. FORTET [*2*], *Éléments de la théorie des probabilités*, C. N. R. S. édit., Paris, 1966.

BUI TRONG LIEU [*1*], Estimations pour des processus de Markov, Thèse de doctorat, Paris, 1962.

A. T. BHARUCHA-REID [*1*], *Éléments of the theory of Markov processes and their applications*, MacGraw-Hill édit., New York, 1960.

C. FOURGEAUD et A. FUCHS [*1*], *Statistique*, Dunod édit., Paris, 1967.

Manuscrit reçu le 6 mars 1969.