ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ANDRÉ BLANC-LAPIERRE
ALBERT TORTRAT

Compensation de corrélations dans le cas de fonctions aléatoires ou de suites de variables aléatoires de second ordre

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 2 (1969), p. 101-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_2_101_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 2, 1969, p. 101-112. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Compensation de corrélations dans le cas de fonctions aléatoires ou de suites de variables aléatoires de second ordre

par

André BLANC-LAPIERRE et Albert TORTRAT

SOMMAIRE. — Peut-on associer, à la covariance $\Gamma_{X_1}(t, t')$ d'une fonction aléatoire $X_1(t)$, une autre covariance Γ_{X_2} telle que $\Gamma_X = \Gamma_{X_1} + \Gamma_{X_2}$ soit covariance d'une fonction à accroissements non corrélés ? On étudie d'abord ce problème pour des fonctions X, X_1 et X_2 ayant, chacune, des accroissements stationnaires en t au second ordre, puis dans des cas non stationnaires en dérivant. Divers exemples sont donnés. Les résultats sont étendus aux suites de variables aléatoires.

SUMMARY. — *Compensation of correlations in the case of random functions or for a series of random variables of second order.* May one associate with the covariance $\Gamma_{X_1}(t, t')$ of a random function $X_1(t)$, another covariance Γ_{X_2} such that $\Gamma_X = \Gamma_{X_1} + \Gamma_{X_2}$ is the covariance of a function having orthogonal increments? We study this problem first for functions X, X_1, X_2, each having increments stationary to second order. Then we extend these results to several non-stationary cases. Various examples are given. The results are also extended afterwards to series of random variables.

I. — INTRODUCTION

Soit $X(t)$ $[-\infty < t < +\infty]$ une fonction aléatoire de second ordre et $\Gamma_X(t, t')$ sa covariance (Cf. [*1*], [*2*], p. 464 et suivantes et [*3*], p. 99 et suivantes). Si la dérivée seconde généralisée de $\Gamma_X(t, t')$, soit :

$$\lim_{\Delta t, \Delta t' \to 0} \frac{\Gamma_X(t+\Delta t, t'+\Delta t') - \Gamma_X(t+\Delta t, t') - \Gamma_X(t, t'+\Delta t') + \Gamma_X(t, t')}{\Delta t \Delta t'}$$
$$= \lim_{\Delta t, \Delta t' \to 0} \frac{\Delta_{t,t'}\Gamma_X(t, t+\Delta t; t', t'+\Delta t')}{\Delta t \Delta t'} \qquad (1\text{-}1)$$

(ou Δt et $\Delta t' \to 0$ indépendamment) existe et est finie en tout point diagonal (t, t), alors (Cf. [*2*], p. 470) $X(t)$ possède une dérivée en moyenne quadratique (m. q.) que nous appellerons $x(t)$. On a :

$$E\{x(t)\overline{x(t')}\} = \frac{\partial^2 \Gamma_X}{\partial t \partial t'} \qquad (1\text{-}2)$$

et

$$E\{\Delta X(t)\overline{\Delta X(t')}\} = \Delta_{t,t'}\Gamma_X \simeq \frac{\partial^2 \Gamma_X}{\partial t \partial t'}\Delta t . \Delta t' \qquad (1\text{-}3)$$

en désignant par $E\{\ \}$ l'espérance mathématique et par $\overline{a}$ l'imaginaire conjugué de a.

Si $X(t)$ *est à accroissements non corrélés*, on a :

$$E\{[X(t+\Delta t) - X(t)][\overline{X(t'+\Delta t')} - \overline{X(t')}]\} = \Delta_{t,t'}\Gamma_X(t, t+\Delta t; t', t'+\Delta t')$$
$$= \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad (t, t+\Delta t) \quad \text{et} \quad (t', t+\Delta t') \quad \text{sont disjoints} \\ \mathscr{F}(t+\Delta t) - \mathscr{F}(t) \quad \text{si} \quad t'+\Delta t' = t+\Delta t > t = t' \end{cases} \qquad (1\text{-}4)$$

$\mathscr{F}(t)$ étant une fonction non décroissante de t.

Si $\mathscr{F}(t)$ possède une dérivée $f(t)$, on écrira, pour Δt et $\Delta t'$ petits et > 0 :

$$\left. \begin{aligned} E\{\Delta X(t) . \Delta\overline{X}(t')\} &= 0 \quad \text{si} \quad \Delta t \quad \text{et} \quad \Delta t' \quad \text{sont disjoints} \\ &\simeq f(t)\Delta t \quad \text{pour} \quad t = t' \quad \text{et} \quad \Delta t = \Delta t' \end{aligned} \right\} \qquad (1\text{-}5)$$

Le fait que $X(t)$ soit à accroissements non corrélés entraîne que $\dfrac{\partial^2 \Gamma_X}{\partial t \partial t'}$ n'existe pas ; $x(t)$ n'existe pas davantage. On ne peut donc écrire (1-2) ni le dernier membre de (1-3). Cependant, en utilisant la fonction δ de Dirac, il est possible de conserver, même pour $X(t)$ à accroissements indépendants, le formalisme des relations (1-2) et (1-3); on écrira, alors, en supposant, pour simplifier, que la dérivée $f(t)$ existe:

$$\gamma_x(t, t') = \mathrm{E}\{ x(t).\overline{x(t')} \} = f(t)\delta(t - t') \qquad (1\text{-}2\ bis)$$

et

$$\mathrm{E}\{ \Delta \mathrm{X}(t)\overline{\Delta \mathrm{X}(t')} \} = \Delta_{t,t'}\Gamma_{\mathrm{X}}(t, t') = f(t)\delta(t - t')\Delta t\Delta t' \qquad (1\text{-}3\ bis)$$

(La fonction $\gamma_x(t, t')$ introduite ici correspond à ce que, dans certains travaux de physique, on appelle une « covariance microscopique ») (*).

Énonçons maintenant le problème général étudié dans cet article : Γ_{X_1} *étant la covariance d'une certaine fonction aléatoire* $\mathrm{X}_1(t)$, *est-il possible de déterminer une covariance* Γ_{X_2} *telle que*

$$\Gamma_{\mathrm{X}}(t, t') = \Gamma_{\mathrm{X}_1}(t, t') + \Gamma_{\mathrm{X}_2}(t, t') \qquad (1\text{-}6)$$

soit la covariance d'une fonction aléatoire à accroissements non corrélés?

Γ_{X}, défini par (1-6), peut être considéré comme covariance

— soit de $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ à condition de prendre X_1 et X_2 non corrélés c'est-à-dire tels que $\mathrm{E}\{\mathrm{X}_1(t)\overline{\mathrm{X}_2(t')}\} \equiv 0$,

— soit de

$$\mathrm{X} = \begin{cases} (\mathrm{X}_1\sqrt{2}) \text{ avec une probabilité } 1/2 \\ \quad \text{ou} \\ (\mathrm{X}_2\sqrt{2}) \text{ avec une probabilité } 1/2 \end{cases}$$

Dans les deux cas, il s'agit de réaliser la non-corrélation des $\Delta\mathrm{X}(t)$ *correspondant à des intervalles de t disjoints par un effet de compensation entre les corrélations provenant respectivement de* $\mathrm{X}_1(t)$ *ou de* $\mathrm{X}_2(t)$.

Soit $\mathscr{E}$ la catégorie d'épreuves sur laquelle est défini $\mathrm{X}(t)$; dans le premier cas, cette compensation s'effectue par la superposition de X_1 et X_2 dans chaque épreuve, alors que, dans le second cas, elle fait intervenir globalement deux sous-ensembles complémentaires de $\mathscr{E}$ correspondant, l'un et l'autre, à une probabilité 1/2 et tels que, sur l'un, on a $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1$ et, sur l'autre, $\mathrm{X} = \mathrm{X}_2$.

Dans une première partie, nous traiterons le problème posé pour des fonctions aléatoires X, X_1 et X_2 ayant chacune, des accroissements stationnaires en t au second ordre. Nous transposerons ensuite à des cas non stationnaires les résultats obtenus. Nous les étendrons enfin au cas de

(*) Il n'est pas nécessaire, dans ce qui suit, de donner un sens, autre que formel, à l'équation (1-2 *bis*), on peut la considérer comme une convention d'écriture commode signifiant que (1-3 *bis*) est valable.

suites $\{ Y_i \}$ de variables aléatoires. Auparavant, rappelons, en leur donnant une forme adéquate pour la suite, quelques résultats fondamentaux sur l'analyse harmonique des fonctions aléatoires (*).

II. — RAPPEL DE RÉSULTATS SUR L'ANALYSE HARMONIQUE DES FONCTIONS ALÉATOIRES

A l'axe des $t[-\infty < t < +\infty]$, nous associons un axe de fréquences $\underline{t}[-\infty < \underline{t} < +\infty]$. Soit $\underline{X}(\underline{t})$ une fonction de $\underline{t}$ et $\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}')$ sa covariance.

Pour donner aux formules de transformation harmonique une plus grande symétrie, nous sommes amenés à introduire, sous la désignation de $X(t)$, le processus qui s'obtient par intégration de 0 à t de

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\underline{t}} d\underline{X}(\underline{t}).$$

1) *Sous la condition nécessaire et suffisante que l'intégrale de Stieltjes-Riemann*

$$\int \frac{e^{2\pi i t\underline{t}} - 1}{2\pi i \underline{t}} \frac{e^{-2\pi i t\underline{t}'} - 1}{-2\pi i \underline{t}'} d^2\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}')$$

existe (**), *on peut affirmer l'existence de la fonction aléatoire* $X(t)$ *définie*

(*) Les résultats établis dans cet article développent et complètent le contenu de la note (4).

(**) L'existence de cette intégrale peut être assurée par des conditions peu restrictives portant sur le comportement à l'infini des accroissements seconds $\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}')$. Voici, par exemple, un ensemble de conditions suffisantes, elles sont assez larges pour ce qui suit mais pourraient, vraisemblablement, être notablement adoucies.

α) *Condition 1.* — Pour tout A fini, l'intégrale $\int_{-A}^{+A}\int_{-A}^{+A} | d^2\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}') |$ est bornée $[< M(A)]$.

β) Pour $|\underline{t}|$ *et* $|\underline{t}'|$ assez grands, soit $|\underline{t}| \geqq \underline{t}_0$ *et* $|\underline{t}'| \geqq \underline{t}_0$, l'intégrale

$$\int_{|\underline{t}| \geqq \underline{t}_0 \text{ et } |\underline{t}'| \geqq \underline{t}_0} \frac{| d^2\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}') |}{|\underline{t}|\,|\underline{t}'|}$$

existe et, naturellement, tend vers zéro si $\underline{t}_0 \to +\infty$.

γ) Pour $|\underline{t}|$ *ou* $|\underline{t}'|$ borné, soit $|\underline{t}| \leqq \underline{t}_0$ ou $|\underline{t}'| \leqq \underline{t}_0$, l'intégrale

$$\iint \alpha^2 \left|\frac{\sin \pi\underline{t}\alpha}{\pi\underline{t}\alpha}\right| \left|\frac{\sin \pi\underline{t}'\alpha}{\pi\underline{t}'\alpha}\right| | d^2\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}') |$$

est bornée par une valeur finie $N(\alpha, \underline{t}_0)$ [α quelconque].

ci-dessous en (2-1) *et lui attribuer les propriétés explicitées en* (2-2) *et* (2-3):

$$\mathrm{X}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^t e^{2\pi i t' \underline{t}} dt' \right\} d\underline{\mathrm{X}}(\underline{t}) \tag{2-1}$$

$$\Gamma_{\mathrm{X}}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{2\pi i t \underline{t}} - 1}{2\pi i \underline{t}} \right\} \left\{ \frac{e^{-2\pi i t' \underline{t}'} - 1}{-2\pi i \underline{t}'} \right\} d^2\Gamma_{\underline{\mathrm{X}}}(\underline{t}, \underline{t}') \tag{2-2}$$

$$\Delta_{t,t'}\Gamma_{\mathrm{X}}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{2\pi i (t+\Delta t)\underline{t}} - e^{2\pi i t \underline{t}}}{2\pi i \underline{t}} \right\} \left\{ \frac{e^{-2\pi i (t'+\Delta t')\underline{t}'} - e^{-2\pi i t' \underline{t}'}}{-2\pi i \underline{t}'} \right\} d^2\Gamma_{\underline{\mathrm{X}}}(\underline{t}, \underline{t}') \tag{2-3}$$

2) *Sous réserve de conditions sur* $\Gamma_{\mathrm{X}}(t, t')$ *analogues à celles que nous avons supposées remplies pour* $\Gamma_{\underline{\mathrm{X}}}(\underline{t}, \underline{t}')$ *et, notamment, dans le cadre d'hypothèses correspondant à la note du bas de la page* 104, *on peut écrire, à condition d'avoir pris* $\underline{\mathrm{X}}(0) = 0$:

$$\underline{\mathrm{X}}(\underline{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\underline{t}} e^{-2\pi i t \underline{t}'} d\underline{t}' \right\} d\mathrm{X}(t) \tag{2-4}$$

les formes inverses (2-1) *et* (2-4) *étant parfaitement symétriques à l'exception du signe de i.*

De façon analogue à ce qui précède, on a :

$$\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{\mathrm{X}}(\underline{t},\underline{t}')} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{-2\pi i (\underline{t}+\Delta \underline{t})t} - e^{-2\pi i \underline{t} t}}{-2\pi i t} \right\} \left\{ \frac{e^{2\pi i (\underline{t}'+\Delta \underline{t}')t'} - e^{2\pi i \underline{t}' t'}}{2\pi i t'} \right\} d^2\Gamma_{\mathrm{X}}(t, t') \tag{2-5}$$

et, toujours en ayant pris $\underline{\mathrm{X}}(0) = 0$:

$$\underline{\Gamma}_{\mathrm{X}}(\underline{t}, \underline{t}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{-2\pi i t \underline{t}} - 1}{-2\pi i t} \right\} \left\{ \frac{e^{2\pi i t' \underline{t}'} - 1}{2\pi i t'} \right\} d^2\Gamma_{\mathrm{X}}(t, t') \tag{2-6}$$

3) *Rappelons alors un ensemble de résultats utiles pour la suite.* Nous désignerons par $x(t)$ et $\underline{x}(\underline{t})$ les dérivées m. q. respectives de $\mathrm{X}(t)$ et de $\underline{\mathrm{X}}(\underline{t})$ *si elles existent*, et, dans cette hypothèse, par $\gamma_x(t, t')$ $\gamma_{\underline{x}}(\underline{t}, \underline{t}')$ leurs covariances respectives, enfin, par $\mathscr{F}_x(\underline{t})$ et $\mathscr{F}_{\underline{x}}(t)$, leurs fonctions spectrales.

α) Si les $\Delta\mathrm{X}(t)$ sont *stationnairement corrélés*, les $\Delta\underline{\mathrm{X}}(\underline{t})$ sont *non corrélés*. Si, alors, $x(t)$ existe, son spectre $\mathscr{F}_x(\underline{t})$ s'identifie avec la fonction de répartition des masses positives sur $\underline{t} = \underline{t}'$, relative à $\mathrm{E}\{\Delta\underline{\mathrm{X}}(\underline{t})\Delta\underline{\mathrm{X}}(\underline{t}')\}$:

$$\mathrm{E}\{|\Delta\underline{\mathrm{X}}(\underline{t})|^2\} = \Delta\mathscr{F}_x(\underline{t}).$$

β) Réciproquement, si les $\Delta X(t)$ sont *non corrélés*, les $\Delta \underline{X}(\underline{t})$ sont *stationnairement corrélés*. Si $\underline{x}(\underline{t})$ existe, la propriété α) se transpose immédiatement.

γ) Enfin, si les $\Delta X(t)$ sont des *accroissements non corrélés et stationnaires* $[E\{|\Delta X(t)|^2\} = f\Delta t$, ou f est une constante $> 0]$, il en est de même de $\Delta \underline{X}(\underline{t})$ et avec la même densité f.

III. — ÉTUDE DU PROBLÈME POSÉ, DANS LE CAS OU CHACUNE DES COVARIANCES Γ_X, Γ_{X_1} ET Γ_{X_2} CORRESPOND A UNE FONCTION ALÉATOIRE A ACCROISSEMENTS STATIONNAIREMENT CORRÉLÉS

Le fait de se limiter à des fonctions aléatoires à accroissements stationnairement corrélés apporte une telle simplification au problème posé qu'elle en rend la solution presque évidente.

En général, les fonctions $\Gamma_X(t, t')$ — ou, en utilisant la transformation [(2-1), (2-4)], les fonctions $\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}')$ — ne sont essentiellement astreintes qu'à être du type défini non négatif:

$$\sum_{i.j} \theta_i \bar{\theta}_j \Gamma_X(t_i, t_j) \geqq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3-1 a}$$

et

$$\sum_{i.j} \underline{\theta}_i \underline{\bar{\theta}}_j \Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}_i, \underline{t}_j) \geqq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3-1 b}$$

(pour des θ_i, $\underline{\theta}_i$, t_i, $\underline{t}_i$ et n quelconques). C'est là un caractère difficile à exploiter. Par contre, si $\Gamma_X(t, t')$ est la covariance d'une fonction à accroissements stationnairement corrélés, alors $\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}')$ est (Cf. II-3 α) la covariance d'une fonction aléatoire à accroissements non corrélés, ce qui se traduit par le critère simple

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\underline{t}.\underline{t}'} \Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}') &= 0 \quad \text{si} \quad \underline{t} \neq \underline{t}' \\ &\geqq 0 \quad \text{si} \quad \underline{t} = \underline{t}' \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

Ceci est une condition nécessaire et suffisante pour que $X(t)$ *soit à accroisse-*

ments stationnairement corrélés. La condition (3-2) s'applique donc à $\Gamma_{\underline{X}}$, $\Gamma_{\underline{X}_1}$ et $\Gamma_{\underline{X}_2}$. Naturellement, on a

$$\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}') = \Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}_1}(\underline{t}, \underline{t}') + \Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}_2}(\underline{t}, \underline{t}') \tag{3-3}$$

De plus, X(t) devant être à accroissements non corrélés et stationnaires, on aura, pour $\underline{t} = \underline{t}'$, (Cf. II-3 γ):

$$\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}') = f\Delta\underline{t} \qquad [f > 0] \tag{3-4}$$

Si, ainsi que cela sera vérifié dans tous les exemples traités, on admet l'existence de $x_1(t)$, alors, on aura, toujours pour $\underline{t} = \underline{t}'$:

$$\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}_1}(\underline{t}, \underline{t}') = \Delta\mathscr{F}_{x_1}(\underline{t}) \tag{3-5}$$

L'égalité (3-3) donne alors:

$$f\Delta\underline{t} \equiv \Delta\mathscr{F}_{x_1}(\underline{t}) + \Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}_2}(\underline{t}, \underline{t}')_{(\underline{t}=\underline{t}')} \tag{3-6}$$

où l'on sait que f et $\Delta\mathscr{F}_{x_1}$ sont $\geqq 0$ et que $\Delta_{t,t'}\Gamma_{X_2}(t, t')_{(t=t')}$ doit être $\geqq 0$. On en déduit immédiatement ce qui suit:

THÉORÈME I. — *Dans le cas où chacune des covariances* Γ_{X}, Γ_{X_1} *et* Γ_{X_2} *correspond à une fonction aléatoire à accroissements stationnairement corrélés et en admettant l'existence de* $x_1(t)$, *on a les résultats suivants:*

a) *Le problème posé n'est résoluble que si le spectre* $\mathscr{F}_{x_1}(\underline{t})$ *possède une dérivée* $f_{x_1}(\underline{t})$ *admettant une borne supérieure* f_1 (*).

b) *S'il en est ainsi, la solution est définie comme suit :*

$$\Delta_{t,t'}\Gamma_{X_2}(t, t') = [f\delta(t - t') - \gamma_{x_1}(t - t')]dtdt' \tag{3-7}$$

soit, de façon équivalente :

$$\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}_2}(\underline{t}, \underline{t}') = [f - f_{x_1}(\underline{t})]\delta(\underline{t} - \underline{t}')d\underline{t}d\underline{t}' \tag{3-8}$$

où f *est un nombre positif quelconque* $\geqslant f_1$ *et* δ *la fonction de Dirac.*

X(t) est bien alors une fonction à accroissements non corrélés et stationnaires dont les propriétés du second ordre sont définies par:

$$\Delta_{t,t'}\Gamma_{X}(t, t') = f\delta(t - t')dtdt' \tag{3-9}$$

d'où

$$E\{|\Delta X|^2\} = f\Delta t \tag{3-10}$$

(*) En particulier, si $|\gamma_{x_1}|$ admet une intégrale finie sur $(-\infty < t < +\infty)$, on peut prendre sa valeur pour f_1. La borne supérieure f_1 doit être entendue au sens de « presque sûrement pour la mesure de Lebesgue », soit au sens de « borne supérieure essentielle », si cette dérivée n'étant pas continue n'est définie que p. s.

IV. — EXTENSIONS POSSIBLES A DES CAS NON STATIONNAIRES

A partir d'un ensemble quelconque de covariances (Γ_X^S, $\Gamma_{X_1}^S$, $\Gamma_{X_2}^S$) (dont chacune correspond à une fonction aléatoire à accroissements stationnairement corrélés) donnant lieu à la compensation des corrélations recherchée, on peut construire d'autres ensembles (Γ_X, Γ_{X_1}, Γ_{X_2}) pour lesquels la stationnarité dont il vient d'être question n'existe plus, tandis que la compensation des corrélations subsiste. Ce résultat peut être atteint en faisant intervenir des transformations respectant le caractère de fonction à accroissements non corrélés. Voici deux transformations possédant cette propriété :

1° *Transformation faisant intervenir une fonction multiplicative.* Soit $g(t)$ une fonction certaine (*). Remplaçons $X_1^S(t)$ par

$$X_1(t) = \int_0^t g(t')dX_1^S(t') \tag{4-1}$$

soit

$$\Delta_{t,t'}\Gamma_{X_1}(t, t') = g(t)\overline{g(t')}\Delta_{t,t'}\Gamma_{X_1}^S(t, t') \tag{4-2}$$

Alors, on peut énoncer le résultat suivant :

Si ($\Gamma_{X_2}^S$, Γ_X^S) *constitue une solution relative à* $\Gamma_{X_1}^S$, *on obtient une solution relative* à Γ_{X_1} *en utilisant :*

$$\Delta_{t,t'}\Gamma_{X_2}(t, t') = g(t)\overline{g(t')}\Delta_{t,t'}\Gamma_{X_2}^S(t, t') \tag{4-3}$$

Remarque. — Supposons que $x_1(t)$ soit une fonction certaine. On peut être tenté de lui faire jouer le rôle de $g(t)x_1^S(t)$ avec $x_1^S(t) \equiv 1$; on aurait donc $\gamma_{x_1^S}(t) \equiv 1$ et $f_{x_1^S}(\underline{t}) = \delta(\underline{t})$. La borne supérieure f_1 n'existerait pas : la méthode considérée ne fournit donc pas de compensation possible pour la corrélation correspondant à une fonction certaine.

(*) α) $g(t)$ pourrait etre aléatoire à condition d'être indépendant de $X_1(t)$, $X_2(t)$ et $X(t)$. On remplacerait alors dans (4-2) le produit $g(t)\,\overline{g(t')}$ par la covariance $\gamma_g(t, t')$.

β) Si, comme cela est imposé dans certains problèmes, on exige que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E\{|dX(t)|^2\} < +\infty,$$

alors, il faudra imposer à $g(t)$ une décroissance suffisante pour $|t| \to \infty$ de façon à assurer l'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} E\{|g(t)|^2\}dt$.

2° *Transformation non linéaire portant sur t.* Supposons que t soit une fonction croissante d'une certaine variable θ. Posons

$$X_1(\theta) = \int_0^{t(\theta)} dX_1^S(t) \tag{4-4}$$

Il est bien évident qu'en général le caractère stationnaire des accroissements de $X_1^S(t)$ est détruit dans $X_1(\theta)$; par contre, la même transformation appliquée à $X^S(t)$ donnera une nouvelle fonction $X(\theta)$ qui, comme $X^S(t)$, sera à accroissements non corrélés. D'où le résultat :

Si $(\Gamma^S_{X_2}, \Gamma^S_X)$ *constitue une solution relative à* $\Gamma^S_{X_1}$, *on obtient une solution relative à* $\Gamma_{X_1(\theta)}$ *en utilisant* $\Gamma_{X_2(\theta)}$.

V. — ÉTUDE DE CAS PARTICULIERS

Dans ce qui suit, nous désignerons par $\tilde{Z}(t)$ une fonction aléatoire de même loi que $Z(t)$ *mais non corrélée avec cette dernière.*

1° EXEMPLE N° 1 *(cas stationnaire).*

$$X_1(t) = \int_0^t x_1(t')dt' \qquad \text{avec} \qquad \gamma_{x_1}(t) = \exp\{-|t/t_0|\} \tag{5-1}$$

α) L'application pure et simple du théorème I conduit, en prenant $f = f_1$, à la solution correspondant à :

$$\Delta_{t,t'}\Gamma_{X_2}(t, t') = \left[2t_0\delta(t-t') - \exp\left\{-\left|\frac{t-t'}{t_0}\right|\right\}\right]dtdt' \tag{5-2}$$

$$\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}_2}(\underline{t}, \underline{t}') = 2t_0\left[1 - \frac{1}{1+4\pi^2 t_0^2 \underline{t}^2}\right]\delta(\underline{t}-\underline{t}')d\underline{t}d\underline{t}' \tag{5-3}$$

$$\Delta_{t,t'}\Gamma_X(t, t') = 2t_0\delta(t-t')dtdt' \tag{5-4}$$

$$\Delta_{\underline{t},\underline{t}'}\Gamma_{\underline{X}}(\underline{t}, \underline{t}') = 2t_0\delta(\underline{t}-\underline{t}')d\underline{t}d\underline{t}' \tag{5-5}$$

β) Cette solution appelle la remarque suivante qui illustre bien le mécanisme de compensation. Pas plus que $x_1(t)$, $\tilde{x}_1(t)$ n'a — à strictement parler — de dérivée m. q. $\tilde{x}'_1$. En effet, la dérivée seconde de γ_{x_1} n'existe pas pour $t = 0$. Cependant, si l'on accepte des fonctions de corrélation singulières dont l'expression fait intervenir la fonction δ, on peut écrire :

$$\gamma_{\tilde{x}_1}(t) = -\frac{d^2}{dt^2}[\exp\{-|t/t_0|\}] = -\frac{1}{t_0^2}\exp\{-|t/t_0|\} + \frac{2}{t_0}\delta(t) \tag{5-6}$$

D'où :

$$t_0^2 \gamma_{\bar{x}_1'}(t) + \gamma_{x_1}(t) = 2t_0\delta(t) \tag{5-7}$$

Il en résulte que l'on peut prendre respectivement pour Γ_{X_1} et Γ_{X_2} les covariances des fonctions aléatoires suivantes :

$$X_1 = \int_0^t x_1(t')dt' \qquad \text{et} \qquad X_2(t) = \int_0^t t_0 \bar{x}_1'(t')dt' = t_0 \bar{x}_0(t) \tag{5-8}$$

(5-7) et (5-8) correspondent parfaitement aux résultats donnés plus haut si on tient compte de l'expression (5-6).

γ) THÉORÈME II. — *Si* $\gamma_{x_1}(t)$ *est donné par* (5-1), *alors la fonction aléatoire* X(t) *définie par*

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) \quad \text{avec} \quad X_1(t) = \int_0^t x_1(t')dt' \quad \text{et} \quad X_2(t) = t_0 \bar{x}_1(t) \tag{5-9}$$

est à accroissements non corrélés et stationnaires $[E\{|\Delta X(t)|^2\} = 2t_0\Delta t]$.

Naturellement, il y a une infinité de fonctions aléatoires stationnaires dont la fonction de corrélation s'exprime conformément à (5-1). Un cas particulier intéressant est celui où $x_1(t)$ est la fonction aléatoire correspondant à un *basculeur poissonnien de densité uniforme* ρ : cette fonction aléatoire vaut $+1$ ou -1, les passages de l'une à l'autre de ces valeurs s'effectuant aux instants t_j d'une distribution de Poisson de densité ρ ; il suffit de prendre $\rho_0 = (1/2t_0)$ pour se trouver exactement dans la situation étudiée ci-dessus.

2° EXEMPLE n° 2 *(cas non-stationnaire)*. Prenons maintenant :

$$\gamma_{x_1}(t, t') = \exp\left\{-2\left|\int_t^{t'} \rho(\theta)d\theta\right|\right\} \tag{5-10}$$

où ρ est une fonction non négative ($x_1(t)$ peut alors, *à titre de cas particulier*, être considérée comme fonction aléatoire associée à un *basculeur poissonnien de densité* ρ *non uniforme*).

En raisonnant comme au paragraphe β) de l'exemple n° 1, on trouve, les mêmes précautions devant être prises au sujet de l'utilisation du symbole $x_1'(t)$:

$$\gamma_{\bar{x}_1'}(t, t') = -4\rho(t)\rho(t')\gamma_{\bar{x}_1}(t, t') + 4\rho(t)\delta(t - t') \tag{5-11}$$

soit :

$$\gamma_{\bar{x}_1'}(t, t') + 4\rho(t)\rho(t')\gamma_{\bar{x}_1}(t, t') = 4\rho(t)\delta(t - t') \tag{5-12}$$

Il en découle immédiatement :

THÉORÈME III. — *Si* $\gamma_{x_1}(t, t')$ *satisfait à* (5-10), *alors la fonction aléatoire*

$$X(t) = \int_0^t 2\rho(t)x_1(t)dt + \tilde{x}_1(t) \tag{5-13}$$

est à accroissements non corrélés ($E\{|\Delta X(t)|^2\} = 4\rho(t)\Delta t$).

Remarque. — Le résultat ci-dessus peut aussi être obtenu par applications d'une transformation sur t (Cf. IV, § 2°), en posant :

$$\theta = \int_0^t \rho(\Omega)d\Omega \tag{5-14}$$

On est alors ramené à compenser la corrélation

$$E\{x_1(\theta)\bar{x}_1(\theta')\} = \frac{1}{\rho_1(\theta)}\frac{1}{\rho_1(\theta')}e^{-2|\theta-\theta'|} \ (*) \tag{5-15}$$

où $\rho_1(\theta)$ est défini par $\rho_1(\theta) = \rho(t)$, θ et t étant liés par (5-14). On opère alors comme indiqué en IV, § 1° ; puis on repasse à la variable t.

VI. — SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Les résultats précédents peuvent, pour l'essentiel, être transposés aux suites de variables aléatoires. Soit $\Gamma^1_{i,j} = E\{Y_{1,i}.\bar{Y}_{1,j}\}$ la covariance d'une suite de $Y_{1,i}$ (i *entier* $\gtreqless 0$). Il s'agit de trouver une autre covariance

$$\Gamma^2_{i,j} = E\{Y_{2,i}.\bar{Y}_{2,j}\}$$

telle que

$$\Gamma_{i,j} = \Gamma^1_{i,j} + \Gamma^2_{i,j} \tag{6-1}$$

soit la covariance d'une suite de variables aléatoires Y_i non corrélées. Bornons-nous à esquisser la solution dans le cas stationnaire [où $\Gamma^1_{i,j}$ ne dépend que de $(i-j)$], les extensions à des cas non stationnaires pouvant, en général, se faire conformément aux mêmes idées que précédemment. Pour nous ramener à un problème portant non pas sur des variables aléatoires mais bien sur des fonctions aléatoires, nous introduisons :

$$X_1(t) = \int_0^t x_1(\theta)d\theta \tag{6-2}$$

(*) Si ρ était nul sur certains intervalles, il suffirait de les exclure puisque, presque sûrement, ils n'interviennent pas effectivement.

avec

$$x_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_{1,i}\delta(t - i) \tag{6-3}$$

D'où :

$$Y_{1,j} = \Delta_j X_1(t)\,; \qquad \Gamma^1_{i,j} = \Delta_{t,t'}\Gamma_{X_1}(t = i,\, t' = j) \tag{6-4}$$

La fonction $x_1(t)$ n'est pas stationnaire. On peut lui donner ce caractère en remplaçant sa définition selon (6-3) par (6-3 *bis*) :

$$x_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_{1,i}\delta(t - i - \varphi) \tag{6-3 bis}$$

où φ est une variable aléatoire équipartie entre 0 et 1 et indépendante des Y. La fonction de corrélation de $x_1(t)$ ainsi définie doit être prise égale à :

$$\sum_k \Delta_{t,t'}\Gamma_{X_1}(t = k,\, t' = 0)\delta(t - k) \tag{6-5}$$

expression à laquelle il faut associer, comme densité spectrale,

$$f_{x_1}(\underline{t}) = \sum_k \Delta_{t,t'}\Gamma_{X_1}(t = k,\, t' = 0)e^{2\pi ik\underline{t}} \geqslant 0 \tag{6-6}$$

Si $f_{x_1}(\underline{t})$ a une borne supérieure f_1 (ce qui a lieu, en particulier, lorsque la série $\sum_k |\Gamma^1_{k,0}|$ converge), on opère comme au chapitre III. On repasse ensuite aisément au problème concernant les variables $Y_{1,i}$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. Loeve, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. **220**, 1945, p. 295 et 380 ; *Revue Scientifique*, t. **83**, 1945, p. 297 ; t. **84**, 1946, p. 195.

[*2*] M. Loeve, *Probability Theory*, Third Edition D. Van Nostrand Company, New York, 1962.

[*3*] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.

[*4*] A. Blanc-Lapierre et A. Tortrat, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. **266**, 1968, p. 1063.

Reçu le 28 octobre 1968.