ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN BRETAGNOLLE
DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Le déterminisme des fonctions laplaciennes sur certains espaces de suites

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 1 (1969), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 1, 1969, p. 1-12. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Le déterminisme des fonctions laplaciennes sur certains espaces de suites

par

Jean BRETAGNOLLE et Didier DACUNHA-CASTELLE

Chaire de Calcul des Probabilités
et Physique Mathématique, Paris (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions des fonctions aléatoires du second ordre à paramètre variant dans certains espaces de suites, par exemple les espaces l^p. Nous placons le théorème maintenant classique de P. Lévy concernant le déterminisme de la fonction brownienne sur l'espace d'Hilbert dans un cadre plus général. Ce déterminisme est lié au type très particulier de la covariance et à la « richesse » de l'espace; en dimension infinie l'aspect combinatoire du problème est valable pour toutes les fonctions isotropes ou localement isotropes.

SUMMARY. — In this item, we study some second order random functions with a parameter in some sequence-spaces, for example l^p spaces. We put the, now classic, Paul Lévy's theorem about the determinism of the brownian function on Hilbert space in more general limits. This determinism is connected to the very particuliar form of the covariance and to the « wealth » of the space; in infinite dimension the combinatory aspect of the problem is valuable for all isotropic functions (or locally isotropic).

(*) Équipe de recherche « Processus stochastiques et applications » associée au CNRS [équipe n° 1, Section 2 « Théories Physiques et Probabilités ».

Paul Lévy a étudié, il y a quelques années, dans une série d'articles (cf. [*1*]) la fonction brownienne sur l'espace de Hilbert, c'est-à-dire l'application $X : H \to \mathscr{H}$, ou H est un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie, et $\mathscr{H}$ un espace laplacien (cf. [*2*]), X étant définie par sa covariance :

$$EX(f)X(g) = \frac{1}{2}(\| f \| + \| g \| - \| f - g \|), \qquad f, g \in H.$$

Un des résultats le plus intéressant de cette étude est que X est déterministe. Dans [*3*], nous avions montré que cette propriété de déterminisme était générale pour les fonctions laplaciennes isotropes sur un espace $L^p(\mu)$, μ mesure diffuse.

Dans cette note, nous nous proposons de montrer au contraire qu'il n'en est pas ainsi sur les espaces l^p (sauf si $p = 2$). Nous avons simplement voulu insister sur l'aspect combinatoire du problème (la prédiction effectivement construite par Paul Lévy a cet aspect combinatoire).

I. DÉFINITIONS

Soit une fonction laplacienne X définie sur un espace T par sa covariance :

$$(\varphi(t, t') = EX(t)X(t')).$$

Soit $\mathscr{T}$ une famille de parties de T. X est dit déterministe (sous-entendu au sens de $\mathscr{T}$) si :

$$[X]^{\tau} = [X]^{T} \qquad \text{pour tout} \qquad \tau \in \mathscr{T}$$

ou $[X]^A$ est l'espace de Hilbert engendré par

$$\{ X(t), t \in A \}, < X(t), X(t') = \varphi(t, t')$$

Sur R pour les processus stationnaires on prend soit $\mathscr{T} = \{ R^- \}$, soit $\mathscr{T} =$ ouverts$\}$.

Ici, nous supposerons toujours que T est un E. V. T. et $\mathscr{T}$ la famille des voisinages ouverts de 0. Pour $T = R$, le critère de déterminisme a été trouvé par Krein pour les processus stationnaires et à accroissements stationnaires.

Le théorème de P. Lévy a été démontré pour $T = l^2$ et X la fonction brownienne.

Dans la suite nous considérons des espaces de suites notées :

$$s = (\lambda_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

On posera :

$$d^n = \{(\lambda_k) \quad ; \quad \lambda_{n+p} = 0 \qquad \text{pour} \qquad p > 0\}$$
$$d = \bigcup_{n=1}^{\infty} d^n.$$

Si :

$$s = (\lambda_n), \qquad \text{on pose} \qquad s^k = (\lambda_n^k)$$

avec :

$$\lambda_n^k = \lambda_n \qquad n \leqq k$$
$$\lambda_n^k = 0 \qquad n > k.$$

Un espace de suites est dit de *type* L si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1° C'est un E. V. T. séparé, contenant d.

2° Pour tout s, $\lim_k s^k = s$.

Exemples. — Les espaces l^p, $0 < p < \infty$, les espaces l_f d'Orlicz, etc. On appelle fonction de type positif homogène φ sur l une application φ : $l \to \mathrm{R}$, continue, telle que $\varphi(0) = 1$ et de type positif sur l. Soit σ_n le groupe des permutations finies des n premiers entiers et $\sigma = \mathrm{U}_n \sigma_n$.

φ est dite symétrique si :

$$\varphi(\pi s) = \varphi(s) \qquad \text{pour tout} \qquad \pi \in \sigma$$

On désigne par S(l) la famille des fonctions de type positif, homogènes et symétriques sur l. Les fonctions laplaciennes dont la covariance est dans S(l) sont dites symétriques.

On définit de même la classe NS(l) des fonctions de type négatif symétriques et homogènes et les fonctions dont la covariance Γ à la forme

$$\Gamma(s, s') = \frac{1}{2}[\psi(s) + \psi(s') - \psi(s - s')]$$

ou $\psi \in \mathrm{NS}(l)$, sont dites à accroissements homogènes et symétriques.

II. CONSTRUCTION ET ÉTUDE DES FONCTIONS DE S(l)

Rappelons d'abord qu'une suite de variables aléatoires X_i, $i \in \mathrm{N}^*$ est dite en dépendance symétrique si la loi du p-uplet $(X_{n_1}, \ldots, X_{n_p})$ est indépendante de $n_1, \ldots, n_p$, $n_i \neq n_j$ pour $i \neq j$. On sait ([2], p. 136) que les variables X_i (définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$) sont conditionnellement indépendantes par rapport à la σ-algèbre $\mathscr{B}^\infty$ des événements symétriques par rapport aux X_i. Posant alors :

$$\Phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{E} \exp i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j$$

on définit une famille $(\Phi_n)_{n\in N*} = \Phi$ de fonctions de type positif, continues sur R^n, dite de type positif symétrique.

Inversement une telle famille (Φ_n), définit grâce au théorème de Kolmogorov une suite de variables en dépendance symétrique.

Posant :

$$\mathrm{E} \exp i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j = \int_\Omega \Pi_{j=1}^{n} \varphi(\lambda_j, \omega) d\mathrm{P}(\omega)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_j) &= \mathrm{E}^{\mathscr{B}^\infty} \exp i\lambda_j X_j \\ &= \mathrm{E}^{\mathscr{B}^\infty} \exp i\lambda_j X_1. \end{aligned}$$

Nous dirons que les variables X_j forment une suite totalement symétrique si P p. s. les fonctions $\varphi(\,.\,, \omega)$ sont réelles (paires).

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que :

$$\Phi_2(\varepsilon_1\lambda\,;\ \varepsilon_2\lambda) = \Phi_2(|\lambda|, |\lambda|) \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon_i^2 = 1,\ i = 1, 2,$$

c'est-à-dire que la loi d'un couple quelconque (X_i, X_j) soit symétrique.

En effet on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\,|\varphi(\lambda, \omega) - \varphi(-\lambda, \omega)|^2 \\ &\qquad = \Phi_2(\lambda, \lambda) - \Phi_2(\lambda, -\lambda) - \Phi_2(-\lambda, \lambda) + \Phi_2(-\lambda, -\lambda). \end{aligned}$$

La condition est donc nécessaire. Si elle est réalisée on a :

$$\varphi(\lambda, \omega) = \varphi(-\lambda, \omega) \qquad \text{p. s.},$$

cette égalité a lieu pour tout $\lambda \in Q$ p. s. et comme φ est P p. s. continue, pour tout $\lambda \in R$. (Remarquons que la symétrie des variables X_i n'est pas suffisante).

Soit $\varphi \in S(l)$ et φ_n la restriction de φ à d^n. Comme l est un E. V. T. séparé φ_n est continue ; la famille (φ_n) définit donc une suite de variables en dépendance symétrique. On note l_φ le plus grand espace L sur lequel φ est définie, (voir [6]).

Soit $s \in l_\varphi$; comme $s^n \to s$ et comme φ est continue, $\varphi(s^n t) \to \varphi(st)$ pour tout $t \in \mathrm{R}$. Donc la suite de variables aléatoires

$$\mathrm{Y}_n = \sum_1^n \lambda_k \mathrm{X}_k$$

(ou $s = (\lambda_k)$ et X_k est la suite en dépendance symétrique associée à φ) converge en loi et aussi en probabilité. On pose alors

$$\mathrm{X}(s) = \lim_n \mathrm{Y}_n = \lim \mathrm{X}(s^n).$$

Inversement si $\mathrm{Z} \in [\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ ou $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ est la complétion en probabilité de l'ensemble $\{ \mathrm{X}(s);\ s \in d \}$. Alors il existe s tel que $\mathrm{Z} = \mathrm{X}(s)$. On a donc :

$$l_\varphi = [\mathrm{X}, \mathrm{P}].$$

Nous avons dans ([*4*], [*5*], [*6*]) étudié, à un autre propos, ces espaces [X, P]. Rappelons simplement les résultats suivants.

D'après ce qui précède on a :

$$\Phi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int \Pi_{j=1}^n \varphi(\lambda_j, \omega) d\mathrm{P}(\omega).$$

On suppose dorénavant Φ totalement symétrique.

Désignons par l_{φ_ω} l'espace $(\mathrm{X}^\omega, \mathrm{P})$ associé aux variables X_k^ω (définies comme une suite de variables indépendantes équidistribuées de fonction caractéristique $\varphi(., \omega)$), et posons :

$$\bigcap_{\mathrm{P}} l_{\varphi_\omega} = \{ s,\ s \in l_{\varphi_\omega},\ \mathrm{P.\ ps} \}.$$

a) l_{φ_ω} est un espace de fonctions q-sommables ou q est une fonction croissante $\mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$ (calculable à partir de φ), $\dfrac{q(\mathrm{X})}{\mathrm{X}^2} \downarrow$.

b) On a :

$$l_\varphi = \bigcap_{\mathrm{P}} l_{\varphi_\omega}$$

et l_φ est aussi un espace de fonctions q^- sommables.

c) Si $\varphi \not\equiv 1$, $l_\varphi \subset l^2$.

d) Si l_φ est normé, l_φ est un espace d'Orlicz de type 1 (cf. [*5*]).

La structure des espaces l de type L tel que $\mathrm{S}(l)$ ne soit pas réduit à la fonction 1 est ainsi précisée, et de plus on peut maintenant écrire la formule de représentation de la corrélation d'une fonction laplacienne totalement symétrique sur l,

$$\Phi((\lambda_n)) = \int_\Omega [\Pi_{j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_j, \omega)] dP(\omega)$$

(en imposant à Φ d'être totalement symétrique, c'est-à-dire au champ laplacien sur R^2 de corrélation Φ_2, d'être symétrique par rapport aux axes, on évite la considération de variables laplaciennes complexes).

III. INTERPRÉTATION DU DÉTERMINISME

X est dite déterministe si pour tout ouvert non vide A de l, on a :

$$[X]^A = [X]^l.$$

Interprétation. — Soit μ_n la famille projective des transformées de Fourier de Φ_n. La famille des mesures μ_n sur R^n a pour limite μ sur R^N.

Soit à prédire l'exponentielle $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in R$ par les exponentielles de n-variables

$$\exp i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

soumises à la restriction :

$$(\lambda_j)_{j=\overline{1,\dots n}} \in \text{ trace de A sur } R^n.$$

$$\left(\text{Par exemple } l = l^2, \left| \sum_{1}^{n} \lambda_j^2 \right| < \varepsilon \right).$$

Dire que X est déterministe, c'est dire que :

$$e^{i\lambda x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} c_j \exp i \sum_{j'=1}^{n} \lambda_j^{j'} x_{j'}$$

la limite s'étendant au sens de $L^2(R^n, \mu_n)$ avec au membre de droite la restriction indiquée plus haut.

Si

$$\mu = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mu_j^1 ; \ \mu_j^1 = \mu_1,$$

on a le cas de variables indépendantes qui donne le problème ordinaire de la prédiction sur R (totalité de $e^{i\lambda x}$, $|\lambda^2| < \varepsilon$ pour la mesure μ_1).

Mais la dépendance des variables modifie les résultats, comme P. Lévy l'a montré (avec une autre interprétation).

Les fonctions laplaciennes de corrélation :

$$\Phi^\omega(s) = \Pi_{j=1}^\infty \varphi(\lambda_j, \omega)\,; \; s = (\lambda_j)$$

sont dites fonctions extrémales associées à X, et notées X^ω.

Comme ici, on n'utilisera que des propriétés des corrélations des fonctions X^ω on ne cherchera pas à les définir sur le même espace de probabilité que X.

Un processus sur R de covariance $\varphi(.\,, \omega)$ sera dit associé à X^ω.

PROPOSITION. — Une condition nécessaire et suffisante pour que X fonction laplacienne homogène, totalement symétrique sur un espace l de type L soit déterministe est que les fonctions extrémales X^ω associées à X admettent une prédiction commune au sens de $L^2(\Omega, P)$, si la covariance Φ de X se représente par

$$\Phi(s) = \int_\Omega \Phi^\omega(s) dP(\omega)$$

Φ^ω covariance de X^ω.

COROLLAIRE. — *Si* X *est déterministe, les* X^ω *admettent* P p. s. *une prédiction commune.*

Démonstration. — Soit A un ouvert de l, soit s_j^n, $j = 1, \ldots k(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, des éléments de A.

L'existence d'une prédiction commune au sens de $L^2(P)$ est l'existence d'une suite $s_j^n \in l$, $c_j^n \in R$ telle que si :

$$\Pi_n(\omega)^2 = E\,|\,X^\omega(s) - \sum_1^{k(n)} c_j^n X^\omega(s_j^n)\,|^2$$

on ait :

$$\Pi_n(\omega) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(P).$$

On déduit de la formule :

$$\Phi(s) = \int_\Omega \Phi^\omega(s) dP(\omega)$$

que :

$$\Pi_n^2 = \mathrm{E}\,|\,\mathrm{X}(s) - \sum_1^{k(n)} c_j^n \mathrm{X}(s_j^n)\,|^2 = \int \Pi_n^2(\omega) d\mathrm{P}(\omega)$$

donc si $\Pi_n \to 0$, $\Pi_n^2(\omega) \to 0$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{P})$ et réciproquement. Donc si X est déterministe, il existe une prédiction commune P p. s., puisque au moins pour une sous-suite $\Pi_n(\omega) \to 0$ P p. s.

PROPOSITION. — Soit Y une fonction extrémale de corrélation

$$\Phi(s) = \Pi_1^\infty \varphi(\lambda_j), \qquad s = (\lambda_j).$$

Y est déterministe si et seulement si le processus sur R de corrélation φ est déterministe.

Démonstration. — Supposons d'abord qu'une fonction extrémale Y soit déterministe. Soit y le processus associé. Par hypothèse :

$$\mathrm{Y}(s) = \lim_n \sum_{j=1}^{k(n)} c_j^n \mathrm{Y}(s_j^n) \qquad \text{en m. q.}$$

Soit :

$$s = (\lambda, 0, \dots 0, \dots) \qquad s' = (\lambda', 0, \dots 0, \dots)$$

$$\varphi(\lambda - \lambda') = \Phi(s - s')$$

$$= \lim_n \sum_{j=1}^{k(n)} c_j^n \varphi(\lambda_{1,j}^n - \lambda') \Pi_{h=2}^n \varphi(\lambda_{h,j}^n)$$

$$\Phi(\lambda - \lambda') = \lim_n \sum_{j=1}^{n} d_j^n \varphi(\lambda_{1,j}^n - \lambda')$$

avec :

$$d_j^n = c_j^n \Pi_{h=2}^\infty \varphi(\lambda_{h,j}^n) ;$$

posant $\langle y(\lambda), y(\lambda') \rangle = \varphi(\lambda - \lambda')$, on a :

$$\langle y(\lambda), y(\lambda') \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} d_j^n \langle y(\lambda_{1,j}^n), y(\lambda') \rangle$$

La topologie induite sur R par L étant la topologie ordinaire, il suffit de choisir $\mathrm{G} \subset \mathrm{L}$ tel que $\{ s / |\lambda_1| < \varepsilon \} \subset \mathrm{G}$.

La projection de $y(\lambda')$ sur $y(\lambda)$ est la même que celle de $y(\lambda')$ sur $[y]^{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ pour tout λ. Donc $[y]^{\mathrm{R}} = [y]^{[-\varepsilon,\varepsilon]}$.

Supposons maintenant y déterministe. Posons $Y_m(s) = Y(s^{(m)})$.

Il suffit de prédire $Y(s^m)$ à partir de la trace G_m de G sur $d^{(m)}$ pour prédire Y à partir de G. Supposons en effet $[Y_m]^{G_m} = [Y_m]^{d^{(m)}}$.

Comme dans l, $s^{(m)} \to s$, et que Φ est continue, $\lim\limits_{\text{m. q.}} Y_m = Y$. Donc

$$Y(s) \in \lim \uparrow \{Y_m\}^{G_m} \subset \{Y\}^G.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ fixé; G_n un ouvert de $d^{(m)}$ (de R^m) qui contient un cube $\{-\eta, \eta\}^m$. y étant déterministe, on a :

$$y_i(\lambda_i) = \lim_{n_i \to \infty} \sum_{j_i=1}^{k(n_i)} c_{j_i}^{n_i} y(\lambda_{j_i}^{n_i})$$

avec

$$|\lambda_j^i| < \eta' = \max(\varepsilon, \eta).$$

$$Y_m(\lambda_1, \ldots \lambda_m) = \Pi_{i=1}^m y_i(\lambda_i)$$

avec des processus y_i indépendants deux à deux (immédiat d'après la forme de la corrélation).

Donc :

$$\begin{aligned} Y_m(\lambda_1, \ldots \lambda_m) &= \lim_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\ldots m}} \Pi_{i=1}^m \sum_{j_i=1}^{k(n_i)} c_{j_i}^{n_i} y(\lambda_{j_i}^{n_i}) \\ &= \lim_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\ldots m}} \Pi_{i=1}^m c_{j_i}^{n_i} y_m(\lambda_{j_1}^{n_1}, \ldots, y_{j_n}^{n_m}) \end{aligned}$$

avec

$$(\lambda_{j_1}^{n_1}, \ldots, \lambda_{j_n}^{n_m}) \in \{-\eta', \eta'\}^m,$$

la propriété étant vraie pour tout m, la proposition est démontrée.

Applications. — Nous avons montré dans [*2*] que les fonctions laplaciennes homogènes et isotropes sur les espaces l^p avaient une covariance de la forme :

$$\varphi(s) = \int e^{-a\|s\|^p} d\sigma(a) \qquad 0 \leqq p \leqq 2$$

avec

$$\| s \|^p = \sum_1^\infty |\lambda_j|^p \quad ; \quad s = (\lambda_j)$$

Si $p < 2$, comme sur R, les processus de covariance $e^{-|t|^p}$ ne sont pas déterministes, les fonctions isotropes ne sont pas déterministes (alors que sur $L_p(\mu)$, μ mesure diffuse, elles sont déterministes [*2*]).

Si $p = 2$ la construction de Paul Lévy (voir plus loin) montre qu'il y a déterminisme.

Montrons que cette propriété n'est pas générale sur l^2. Il est facile de construire sur l^2 des fonctions symétriques non déterministes.

Soit (J) la classe des fonctions f qui sont des densités de probabilité symétriques telles que :

i) $$\int x^2 f(x)dx < \infty$$

ii) $$\int \frac{\log f(x)}{1 + x^2} dx > -\infty$$

Soit Φ une covariance telle que :

$$\Phi(s) = \int \Pi_{j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_j, \omega) d\mathrm{P}(\omega)$$

avec

$$s = (\lambda_j), \qquad \text{ou} \qquad \varphi(., \omega) \in (\mathrm{J})\mathrm{P}.\ \mathrm{ps}$$

On sait que la deuxième condition pour que $\varphi \in (\mathrm{J})$ est équivalente à ce que pour le processus y sur R de covariance φ on a

$$[y]^{\mathrm{R}^-} \subset [y]^{\mathrm{R}}$$

l'inclusion étant stricte, donc Φ n'est pas déterministe; la première condition sur φ montre que $l_{\varphi_\omega} = l^2$, P. ps donc $l_\varphi = l^2$.

La méthode de Lévy.

Supposons pour simplifier avoir à étudier une fonction symétrique X sur l^2 de covariance Φ. Soit à prédire $\mathrm{X}(s_1)$ avec $s_1 = (1, 0, \ldots 0, \ldots)$, à *partir de* $[X]^{\mathrm{A}}$ *ou A est la boule* $(0, \varepsilon)$.

Soit $f(\lambda)$ une fonction analytique sur]0,1[avec

$$\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) = 0 \qquad \lim_{\lambda \to 1} f(\lambda) = 1.$$

Soit $s_j(\lambda)$ la suite définie par

$$\lambda_i(\lambda) = 0,\ i \neq j,\ s.$$
$$\lambda_1(\lambda) = \lambda$$
$$\lambda_j(\lambda) = f(\lambda).$$

La suite $\mathrm{X}(s_j(\lambda))$ est une suite de variables laplaciennes en dépendance symétrique.

Soit $\mathscr{B}^{\infty}(\lambda)$ la σ-algèbre associée à cette suite échangeable et soit

$$M(\lambda) = E^{\mathscr{B}^{\infty}(\lambda)}(X(s_2(\lambda)))$$

On a

$$\begin{aligned} EM(\lambda)M(\lambda') &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} E \sum_{j,j'=1}^{n} X(s_j(\lambda))X(s_{j'}(\lambda'))) \\ &= \varphi_3(\lambda - \lambda', f(\lambda), f(\lambda')). \end{aligned}$$

avec les notations précédentes.

Supposons alors que

$$\varphi(s) = \int_{\Omega} \Pi^{\infty} \varphi(\lambda_j, \omega) dP(\omega);$$

$s = (\lambda_j)$, et que $\varphi(., \omega)$ soit analytique P. ps (par exemple φ est isotrope).

On a alors

$$\varphi_3(\lambda - \lambda', f(\lambda), f(\lambda')) = \int_{\Omega} \varphi(\lambda - \lambda', \omega)\varphi(f(\lambda), \omega) \varphi(f(\lambda'), \omega) dP(\omega)$$

Alors $M(\lambda)$ est un processus analytique donc déterministe, et comme

$$f(\lambda) \to 1, \qquad (\lambda \to 1)$$

on a

$$M(\lambda) \to X(s_1) \qquad \text{pour} \qquad \lambda \to 1,$$

et donc le processus X est déterministe.

Remarque sur les fonctions à accroissements homogènes et symétriques.

On a des résultats du même type.

Parmi les fonctions isotropes il a les fonctions isotropes de covariance

$$\Gamma(s, s') = \frac{1}{2} \| s \|^p + \| s' \|^p - \| s - s' \|^p$$

définies sur l^p, $p \leqq 2$.

Si on pose $s = (\lambda_j)$, on a

$$X(s) = \sum_{j=1}^{\infty} X(\hat{\lambda}_j) = x(\lambda_j)$$

ou $\hat{\lambda}_j$ est la suite nulle sauf au rang j, $\hat{\lambda}_j = \lambda_j$; de plus pour $j \neq k$, $X(\hat{\lambda}_j)$ et $X(\hat{\lambda}_k)$ sont indépendantes.

On en déduit aisément que X est déterministe si et seulement x est déterministe, il n'en est ainsi que pour $p = 2$ (fonction certaine). En particulier pour $p = 1$ la fonction brownienne est non déterministe. Ce résultat s'étend aux fonctions isotropes sur l^p, $p < 2$.

Remarquons, pour terminer, que la covariance de la fonction brownienne sur un espace d'Hilbert, on a la représentation suivante:

$$\Gamma(s, s') = \frac{1}{2}(\| s \| + \| s' \| - \| s - s' \|)$$

et

$$\| s \| = \int_{\mathbf{R}^+} (1 - e^{-a\|s\|^2}) \frac{da}{a^{3/2}}.$$

Les résultats précédents montrent que les fonctions de covariance $\Gamma_a(s, s')$,

$$\Gamma_a(s, s') = \frac{1}{2}[1 + e^{-a\|s-s'\|^2} - e^{-a\|s\|^2} - e^{-a\|s'\|^2}]$$

sont

a) déterministe sur tout espace $\mathbf{R}^n$, $1 \leqq n \leqq \infty$

b) n'admettent de prédiction commune au sens de $L^2\left(\mathbf{R}, \frac{da}{a^{3/2}}\right)$ que pour $n = \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] P. Lévy, *Annales E. N. S. Paris*, t. **80**, 1963, p. 193-212.

[*2*] Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, p. 79.

[*3*] Bretagnolle, Dacunha-Castelle et Krivine, *Annales Inst. Henri Poincaré, Paris*, Vol. II, n° 3, 1966, p. 231-259.

[*4*] [*5*] [*6*] Bretagnolle et Dacunha-Castelle, Notes *Comptes Rendus Académie Sciences de Paris*, t. **262**, 1966, p. 1182-1185 ; t. **264**, 1967, p. 877-900 ; t. **265**, 1967, p. 475-477.

(Manuscrit reçu le 26 juillet 1968).