ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

G. LOUCHARD

Mouvement brownien et valeurs propres du laplacien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 4, nº 4 (1968), p. 331-342
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_4_331_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IV, n° 4, 1968, p. 331-342.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Mouvement Brownien et valeurs propres du Laplacien

par

G. LOUCHARD

SOMMAIRE. — Soit l'équation $\frac{1}{2}\Delta\psi(\vec{x}) + \lambda\psi(\vec{x}) = 0$ sur un domaine borné Ω de E^2, dont la frontière Γ est de classe C^3, avec la condition $\psi(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\Gamma}{\to} 0$. Les valeurs propres λ_1, λ_2... satisfont à un développement asymptotique du type

$$\sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \sim \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{\sqrt{t}} + c_3 + c_4\sqrt{t} + \ldots, \; t \to 0.$$

c_1, c_2 et c_3 sont connus et nous proposons une méthode qui permet de calculer tous les c_i et qui peut être étendue à E^n. Nous illustrons cette méthode par le calcul de c_4 dans E^2.

SUMMARY. — Let Ω be a bounded domain in E^2, the boundary Γ of which is of class C^3 and let us onsider the equation $\frac{1}{2}\Delta\psi(x) + \lambda\psi(x) = 0$ with the boundary condition $\psi(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\Gamma}{\to} 0$. The spectrum of eigenvalues λ_1, λ_2... satisfies the asymptotic development

$$\sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \sim \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{\sqrt{t}} + c_3 + c_4\sqrt{t} + \ldots, \; t \to 0.$$

c_1, c_2 and c_3 are well known and we propose a method which can give us all c_i and which can be extended to E^n. As an example, we compute c_4 in E^2.

1. INTRODUCTION

Soit Ω un domaine borné de E_2, dont la frontière Γ est régulière par morceaux et considérons l'équation

$$\frac{1}{2}\Delta\Psi(\vec{x}) + \lambda\Psi(\vec{x}) = 0 \qquad \text{sur } \Omega, \tag{1}$$

$$\Psi(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\Gamma}{\to} 0.$$

Le spectre des valeurs propres de (1) : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 ...$ est discret et un théorème général de Minakshisundaram [8] montre qu'il existe un développement asymptotique

$$t > 0 : \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \sim \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{\sqrt{t}} + c_3 + c_4\sqrt{t} + \ldots \; t \to 0. \tag{2}$$

En concordance avec un théorème bien connu de Weyl [9], nous savons que :

$$c_1 = \frac{|\Omega|}{2\pi} \tag{3}$$

où $|\Omega|$ est l'aire de Ω.

Lorsque la frontière est régulière (c'est-à-dire sans coins et avec une courbure existant en chaque point de Γ), on sait que (en accord avec une conjecture de Pleijel) :

$$c_2 = -\frac{L}{4\sqrt{2\pi}} \tag{4}$$

$$c_3 = \frac{1}{6} \tag{5}$$

où L est la longueur de Γ.

Kac [4] [5] a démontré (3) et (4) par des méthodes probabilistes et a conjecturé (5) en étudiant d'abord c_3 pour un polygone et en faisant ensuite tendre le périmètre de ce polygone vers la courbe Γ.

McKean et Singer [*6*] ont confirmé (5) par des techniques d'analyse pour une frontière C^∞ mais leur méthode s'applique aussi à une frontière C^2. Ils ont utilisé des résultats pour des variétés fermées pour établir (5) et ont étendu leur méthode à l'étude du spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami et d'opérateurs elliptiques appliqués à des variétés Riemaniennes. Ils obtiennent chaque fois les trois premiers termes d'un développement généralisé du type (2). Berger [*1*] a calculé le troisième terme d'un développement asymptotique pour le spectre d'une variété Riemanienne.

L'objet de cette note est de calculer c_3 et c_4 par des techniques probabilistes continuant celles introduites par Kac dans [5]. La méthode utilisée peut être généralisée à E_n et au calcul de tous les coefficients de (2). Nous envisagerons ici des domaines Ω dont la frontière Γ est de classe C^3.

Nous retrouvons (5) pour c_3, et c_4 est donné par

$$c_4 = -\frac{1}{2^7\sqrt{2\pi}}\int_\Gamma \frac{1}{R^2(s)}\,ds \tag{6}$$

où, en chaque point de Γ, *ds* est l'élément de longueur le long de Γ, *s* est la longueur correspondant à ce point, mesurée sur Γ à partir d'un point fixe de Γ et $R(s)$ est la courbure de Γ en point *s*.

L'idée de Kac était d'étudier le mouvement Brownien $\vec{y}(t)$ *sur* Ω car la fonction de transition $P_\Omega(\vec{\rho r} \mid \vec{t})$ correspondante obéit aux relations

$$\frac{\partial P_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\mid t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta P_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\mid t) \qquad \vec{\rho}, \vec{r} \in \Omega$$

$$P_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\mid t) \to \delta(\vec{\rho} - \vec{r}) \qquad t \to 0$$

$$P_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\mid t) \underset{\vec{r}\to\Gamma}{\to} 0$$

En désignant par $\Psi_n(\vec{x})$, λ_n les fonctions propres (normalisées) et les valeurs propres de (1) on sait que P_Ω peut être mis sous la forme :

$$P_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\mid t) = \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t}\Psi_n(\vec{\rho})\Psi_n(\vec{r})$$

et

$$\sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} = \int_\Omega P_\Omega(\vec{\rho}\vec{\rho}\mid t)d\vec{\rho} = \frac{|\Omega|}{2\pi t} + \int_\Omega\left[P_\Omega(\vec{\rho}\vec{\rho}\mid t) - \frac{1}{2\pi t}\right]d\vec{\rho} \tag{7}$$

Il est facile de voir (Kac [5]) que l'intégrale de surface de (7) peut être limitée à une bande Ω^*, le long de Γ, de largeur arbitraire δ fixée > 0, la contribution de $\Omega - \Omega^*$ n'apportant que des termes exponentiellement petits en t (du type $e^{-\alpha/t}$, $\alpha > 0$, dépendant de δ seulement) au développement de (2). Nous choisirons δ suffisamment petit pour que $\delta < | R(s) |$ en chaque point de Γ. Si nous choisissons comme nouvelles coordonnées de $\vec{\rho} \in \Omega^*$ la distance r de $\vec{\rho}$ à Γ (mesurée sur la normale abaissée de $\vec{\rho}$ sur Γ) et la longueur s mesurée le long de Γ et correspondant au pied de cette normale, (7) devient

$$\sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} + \int_\Gamma ds \int_0^\delta dr \left[P_\Omega[(r, s), (r, s) \mid t] - \frac{1}{2\pi t} \right] \left[1 - \frac{r}{R(s)} \right], \quad t \to 0 \tag{8}$$

en négligeant des termes exponentiellement petits en t.

C'est en évaluant l'intégrale de (8) que nous pourrons déduire les termes désirés de (2).

Nous remercions ici le Professeur H. P. McKean Jr. qui nous a aimablement communiqué le manuscrit de [6] avant sa publication.

2. CALCUL DE $P_\Omega(\vec{\rho}\vec{\rho} \mid t)$

Considérons le point s de Γ correspondant à un point $\vec{\rho} \in \Omega^*$ (par la normale abaissée de $\vec{\rho}$ sur Γ) et adoptons le système d'axes cartésiens centré au point s et constitué par la tangente en s à Γ (axe x) et la normale en s à Γ, pointée vers l'intérieur de Ω (axe r). Nous pouvons représenter la courbe Γ au voisinage de s par la relation :

$$r = \gamma(x) = \frac{1}{2R(s)} x^2 + \alpha(x) \tag{9}$$

et Γ est uniformément régulière dans le sens que

$$\alpha(x) + \alpha(-x) = o(x^3), \qquad x \to 0 \text{ (uniformément en } s).$$

Il y a un nombre fini de points d'inflexion et nous choisissons sur la courbe Γ des segments petits, centrés en ces points, de longueurs $\eta_1 t^{1/4}$

($\eta_1 > 0$) tels que leur longueur totale soit $\eta t^{1/4}$ (η positif arbitrairement petit). Soit Γ^* la partie restante de la courbe après avoir ôté ces segments. Soit $s \in \Gamma^*$. Dans un voisinage suffisamment petit de s, Γ reste convexe (concave) si elle est convexe (concave) au point s.

Soit $-\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$ les deux solutions de l'équation $\gamma[\Psi(r)] = r$ dans ce voisinage. Nous avons les approximations :

$$\Psi_1(r) \simeq \Psi_2(r) \simeq \sqrt{2\,|\,\mathrm{R}(s)\,|\,r}$$

On peut évidemment représenter P_Ω par

$$\mathrm{P}_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\,|\,t) = \mathrm{P}(\vec{\rho}\vec{r}\,|\,t) - \mathrm{P}^*_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\,|\,t) \qquad \vec{\rho}, \vec{r} \in \Omega$$

où

$$\mathrm{P}(\vec{\rho}\vec{r}\,|\,t) = \frac{1}{2\pi t}\, e^{-\frac{|\vec{\rho}-\vec{r}|^2}{2t}} \quad \text{(mouvement Brownien inconditionné)}$$

et $\mathrm{P}^*_\Omega(\vec{\rho}\vec{r}\,|\,t)$ correspond au mouvement Brownien conditionné de telle sorte qu'il franchisse au moins une fois la frontière Γ entre les instants 0 et t. De plus, le mouvement Brownien plan $\vec{z}(v)$ partant de $\vec{\rho} = (r, 0)$ à l'instant 0 et conditionné à revenir en ce même point à l'instant t (la définition rigoureuse de cette condition peut se faire à partir des fonctions de transition) peut être représenté par deux mouvements Browniens indépendants $r(\tau)$ et $x(\tau)$ partant de l'origine à l'instant 0 et revenant à l'origine à l'instant 1, sous la forme

$$\vec{z}(\tau t) \equiv (r + \sqrt{t}\,r(\tau), \sqrt{t}\,x(\tau))$$

et nous devons exprimer $\mathrm{P}^*_\Omega(\vec{\rho}\vec{\rho}\,|\,t)$ à l'aide de ces deux mouvements $r(\tau)$ et $x(\tau)$. Supposons que Γ est convexe au point $s \in \Gamma^*$.

Nous utiliserons dans la suite les conventions suivantes :

$[d(r)] = [-\Psi_1(r), \Psi_2(r)]$;

$[\bar{d}(r)] = (-\infty, -\Psi_1(r)]\mathrm{U}[\Psi_2(r), +\infty)$;

$\mathrm{T}(t_1, t_2) \equiv$ l'instant où $r(\tau)$ atteint son minimum relatif entre les instants t_1 et t_2;

$\vec{\rho} \equiv (r, 0)$;

P^0 est relatif aux mouvements Browniens inconditionnés $r(\tau)$ et $x(\tau)$ tandis que $\mathrm{P}^{(i)}$ est conditionné sur *tous* les événements inclus dans P^k ($k = 0, \ldots, i-1$).

Nous obtenons alors le développement suivant :

$$P^*_\Omega(\vec{\rho}\vec{\rho} \mid t) =$$

a) le minimum absolu de $\sqrt{t}r(v)$ est $< -r$:

$$\frac{1}{2\pi t} P^0 \, [\min_{0 \leq \tau \leq 1} \sqrt{t}r(\tau) \leq -r] \tag{11}$$

b) le minimum absolu w de $\sqrt{t}r(v)$ est $> -r$ mais, à l'instant τ où ce minimum est atteint, $\vec{z}$ est en dehors de Ω :

$$+ \frac{1}{2\pi t} \int_{\tau=0}^{1} \int_{w=-r}^{0} P^0[T(0, 1) \in d\tau, \sqrt{t}r(\tau) \in dw] P^0[\sqrt{t}x(\tau) \in [\bar{d}(r+w)]] \tag{12}$$

En fait, le deuxième événement décrit dans cette intégrale n'implique pas nécessairement que $\vec{z}(\tau) \notin \Omega$ mais si $\vec{z}(\tau) \in \Omega$ cet événement implique nécessairement $[\sqrt{t}x(\tau)] \geq \frac{\eta_1}{4} t^{1/4}$, ce qui conduit de nouveau à des termes exponentiellement petits en t. Cette remarque s'applique également aux cas suivants.

c) Le minimum absolu w de $\sqrt{t}r(v)$ est $> -r$ mais, à l'instant τ où ce minimum est atteint, $\vec{z}$ est à l'intérieur de Ω. Si nous voulons que $\vec{z}$ franchisse Γ, $\sqrt{t}x(v)$ doit être dans $[\bar{d}(r + w)]$ à un certain instant ($> \tau$ ou $< \tau$).

Soit par exemple t_1 le premier temps de passage après τ de $\sqrt{t}\, x(v)$ dans $[\bar{d}(r + w)]$ et soit $t_2 \in [t_1, 1]$ l'instant où $\sqrt{t}\, r(v)$ atteint son minimum relatif w_2 après t_1. L'événement que nous allons décrire par (13) suppose que $\vec{z}$ est en dehors de Ω à l'instant t_2. Le facteur 2 provient du même événement pour le mouvement rétrospectif $\vec{z}(v)$ (le franchissement de Γ peut arriver *avant* ou *après* τ) :

$$\begin{aligned} &+2 \frac{1}{2\pi t} \int_{\tau=0}^{1} \int_{w=-r}^{0} P^0[T(0, 1) \in d\tau, \sqrt{t}r(\tau) \in dw] P^0[\sqrt{t}x(\tau) \in [d(r+w)]] \\ &\times \int_{t_1=\tau}^{1} P^1[\min (u : \tau \leqslant u \leqslant 1, \sqrt{t}x(u) \in [\bar{d}(r+w)]) \in dt_1] \\ &\times \int_{t_2=t_1}^{1} \int_{w_2=w}^{0} P^2[T(t_1, 1) \in dt_2, \sqrt{t}r(t_2) \in dw_2] P^2[\sqrt{t}x(t_2) \in [\bar{d}(r+w_2)]] \end{aligned} \tag{13}$$

d) Nous devons ensuite soustraire la probabilité correspondant à la réalisation *jointe* des deux événements décrits en *c*)

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi t}\int_{\tau=0}^{1}\int_{w=-r}^{0} P^0[T(0,1)\in d\tau,\ \sqrt{t}\,r(\tau)\in dw]P^0[\sqrt{t}\,x(\tau)\in[d(r+w)]]\\
&\times\int_{t_1=\tau}^{1} P^1\,[\min\,(u:\tau\leqslant u\leqslant 1,\ \sqrt{t}\,x(u)\in[\bar{d}(r+w)])\in dt_1]\\
&\times\int_{t_3=0}^{\tau} P^1\,[\max\,(u:0\leqslant u\leqslant \tau,\ \sqrt{t}\,x(u)\in[\bar{d}(r+w)])\in dt_3]\\
&\times\int_{t_2=t_1}^{1}\int_{w_2=w}^{0} P^2[T(t_1,1)\in dt_2,\ \sqrt{t}\,r(t_2)\in dw_2]P^2[\sqrt{t}\,x(t_2)\in[\bar{d}(r+w_2)]]\\
&\times\int_{t_4=0}^{t_3}\int_{w_4=w}^{0} P^2[T(0,t_3)\in dt_4,\ \sqrt{t}\,r(t_4)\in dw_4]P^2[\sqrt{t}\,x(t_4)\in[\bar{d}(r+w_4)]]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

e) Supposons maintenant que, à l'instant t_2 décrit en *c*), $\vec{z}$ est à l'intérieur de Ω. Si nous désirons que $\vec{z}$ franchisse Γ, par exemple entre les instants t_2 et 1, $\sqrt{t}\,x(v)$ doit être dans $[\bar{d}(r+w_2)]$ à un instant $\in[t_2, 1)$.

Soit par exemple t_5 le premier temps de passage de $\sqrt{t}\,x(v)$ dans $[\bar{d}(r+w_2)]$ après t_2 et soit $t_6\in[t_5, 1]$ l'instant où $\sqrt{t}\,r(v)$ atteint son minimum relatif w_6 après t_5.

Notant par

$$P^{4*}[t_5, 1 \mid t_6, w_6]$$

la probabilité que $\vec{z}$ franchisse Γ entre les instants t_5 et 1, conditionnée sur tous les événements décrits dans $P^0 \dots P^3$ et sachant que le minimum relatif w_6 de $\sqrt{t}\,r(v)$ est atteint à l'instant t_6, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2\pi t}\int_{\tau=0}^{1}\int_{w=-r}^{0} P^0[T(0,1)\in d\tau,\ \sqrt{t}\,r(\tau)\in dw]P^0[\sqrt{t}\,x(\tau)\in[d(r+w)]]\\
&\times\int_{t_1=\tau}^{1} P^1[\min\,(u:\tau\leqslant u\leqslant 1,\ \sqrt{t}\,x(u)\in[\bar{d}(r+w)]\in dt_1]\\
&\times\int_{t_2=t_1}^{1}\int_{w_2=w}^{0} P^2[T(t_1,1)\in dt_2,\ \sqrt{t}\,r(t_2)\in dw_2]P^2[\sqrt{t}\,x(t_2)\in[\bar{d}(r+w_2)]]\\
&\times\int_{t_5=t_2}^{1} P^3[\min\,(u:t_2\leqslant u\leqslant 1,\ \sqrt{t}\,x(u)\in[\bar{d}(r+w_2)])\in dt_5]\\
&\times\int_{t_6=t_5}^{1}\int_{w_6=w_2}^{0} P^4[T(t_5,1)\in dt_6,\ \sqrt{t}\,r(t_6)\in dw_6]P^{4*}[t_5, 1 \mid t_6, w_6]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

et on voit aisément que P^{4*} satisfait :

$$P^4[\sqrt{t}x(t_6) \in [\bar{d}(r + w_6)]] \leqslant P^{4*}[t_5, 1 \mid t_6, w_6] \leqslant P^4[\sqrt{t}x(u) \in [d(r + w_6)]$$

pour au moins un $u \in [t_5, 1]$.

f) Nous devons maintenant ajouter trois événements analogues à *e)*, correspondant au franchissement entre les instants t_1 et t_2 et aux intervalles correspondants pour le mouvement rétrospectif, chaque franchissement étant conditionné sur la *non-réalisation* des franchissements précédents. Nous n'écrirons pas ici les formules qui sont du même type que dans *e)*.

Nous pouvons évidemment écrire un développement analogue pour P_Ω^* lorsque Γ est concave au point s ou même lorsque s est un point d'inflexion de Γ.

2. CALCUL DES c_i

Il nous reste à calculer les différents termes de (2) provenant de l'intégrale

$$\int_\Gamma ds \int_0^\delta dr \left[1 - \frac{r}{R(s)}\right] P_\Omega^*[(r, s), (r, s) \mid t] \tag{16}$$

et pour cela nous utiliserons les lemmes suivants, valables pour un mouvement Brownien classique $y(t)$, $t \in [0, \infty]$ et où P_ξ est relatif au mouvement Brownien tel que $y(0) = \xi$.

LEMME 1

$$P_0 [\max_{0 \leqslant u \leqslant t} y(u) \leqslant a ; y(t) \in dx] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^{-\frac{1}{2t}x^2} - e^{-\frac{1}{2t}|2a-x|^2}\right] dx \quad a > 0, x < a$$

Ce lemme bien connu se démontre par exemple en utilisant le principe de réflexion (voir Lévy, 7, p. 211).

LEMME 2

$$P_\xi [\min (u : 0 \leqslant u \leqslant \infty, \mid y(u) \mid > a) \in dt] \qquad -a < \xi < a$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \left[[(2n+1)a - \xi] \exp\left[-\frac{[(2n+1)a - \xi]^2}{2t}\right] + [(2n+1)a + \xi] \exp\left[-\frac{[(2n+1)a + \xi]^2}{2t}\right]\right] dt$$

Ito et McKean ([3], p. 29) nous donnent la transformée de Laplace $\mathfrak{L}_\beta$ de cette probabilité sous la forme

$$\mathfrak{L}_\beta[\mathrm{P}_\xi(t)] = \frac{\cosh\sqrt{2\beta}\,\xi}{\cosh\sqrt{2\beta}\,a}$$

qu'il suffit d'inverser, sachant que

$$\mathfrak{L}_\beta\left(t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{4}\frac{\alpha}{t}}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\sqrt{\alpha\beta}}$$

(voir p. ex. Erdelyi et *al.* [2], p. 146).

Lemme 3

$\mathrm{P}_0[a_1 \leqslant y(u) \leqslant a_2,\ 0 \leqslant u \leqslant t\,;\, y(t) \in dx] \qquad a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ d = a_2 - a_1$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left[-\frac{(x-2nd)^2}{2t}\right] - \exp\left[\frac{(x-2a_1+2nd)^2}{2t}\right]\right] dx$$

(voir par exemple Lévy [7], p. 213).

Lemme 4

Soit $\mathrm{T}(t_1, t_2)$ l'instant où $y(t)$ atteint son maximum relatif entre les instants t_1 et t_2

$\mathrm{P}_0[\mathrm{T}(0, t) \in d\tau\,;\, y(\tau) \in da\,;\, y(t) \in dx]$

$$= \frac{a(a-x)}{\pi[\tau(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{a^2}{2\tau} - \frac{(a-x)^2}{2(t-\tau)}\right] d\tau da dx$$

Nous avons en effet la relation

$\mathrm{P}_0\,[\max\limits_{0 \leqslant u \leqslant \tau} y(u) \in da\,;\, \max\limits_{\tau \leqslant u \leqslant t} y(u) \leqslant a\,;\, y(t) \in dx]$

$$= \int_{y=-\infty}^{a} \frac{\partial}{\partial a} \mathrm{P}_0\,[\max_{0 \leqslant u \leqslant \tau} y(u) \leqslant a\,;\, y(\tau) \in dy] \mathrm{P}_y\,[\max_{\tau \leqslant u \leqslant t} y(u) \leqslant a\,;\, y(t) \in dx] da$$

et une intégration par parties nous donne immédiatement le lemme. Par intégration sur τ, nous en tirons la relation bien connue :

$$\mathrm{P}_0\,[\max_{0 \leqslant u \leqslant t} y(u) \in da\,;\, y(t) \in dx] = \frac{2[2a-x]}{\sqrt{2\pi}\,t^{3/2}} \exp\left[-\frac{[2a-x]^2}{2t}\right] dadx$$

qu'on peut bien sûr déduire immédiatement du lemme 1.

Chacun de ces lemmes nous donne un résultat correspondant pour les mouvements Browniens conditionnés $r(t)$ et $x(t)$ utilisés dans le paragraphe 2.

Les différents termes intervenant dans (16) dans le cas de Γ^* convexe en s, se calculent comme suit, en posant $a = \dfrac{1}{2R(x)}$ et en ne considérant pour le moment que l'intégration en r.

a) (11) nous donne

$$\frac{1}{2\pi t}\int_0^{\delta}(1-2ar)\exp\left(-\frac{2r^2}{t}\right)dr \sim \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} - \frac{a}{4\pi},\ t\to 0$$

en négligeant des termes exponentiellement petits en t (et uniformes en s).

b) (12) nous donne, en posant $r = u\sqrt{t}$, $w = -v\sqrt{t}$, $(u-v) = x\sqrt{t}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{u=0}^{\delta/\sqrt{t}}(1-2au\sqrt{t})du\int_{x=0}^{\frac{u}{\sqrt{t}}}dx\int_{\tau=0}^{1}d\tau\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(u-x\sqrt{t})^2}{[\tau(1-\tau)]^{3/2}}\times$$

$$\exp\left[-\frac{(u-x\sqrt{t})^2}{2\tau(1-\tau)}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau(1-\tau)}}\left[\int_{z=-\infty}^{-\frac{\Psi_1(xt)}{\sqrt{t}}} + \int_{z=\frac{\Psi_2(xt)}{\sqrt{t}}}^{\infty}\right]\exp\left[\frac{-z^2}{2\tau(1-\tau)}\right]dz$$

Le terme principal de cette intégrale (obtenu en posant $t = 0$ et en remplaçant $\Psi_1(x)$ et $\Psi_2(x)$ par $\sqrt{\dfrac{x}{a}}$) s'obtient aisément et vaut

$$\frac{a}{12\pi} = \frac{1}{24\pi R(s)}$$

Le terme en $\sqrt{t}$ se compose de diverses contributions

1° du jacobien $(1-2au\sqrt{t})$ qui donne $-\dfrac{3a^2\sqrt{t}}{32\sqrt{2\pi}}$;

2° du terme $[u-x\sqrt{t}]^2$ qui donne $-\dfrac{9a^2\sqrt{t}}{128\sqrt{2\pi}}$;

3° de l'exponentielle qui donne $\dfrac{9a^2\sqrt{t}}{128\sqrt{2\pi}}$;

4° en utilisant la condition (9) on voit aisément que la contribution provenant des corrections

$$\int_{z=-\frac{\Psi_1(xt)}{\sqrt{t}}}^{-\sqrt{\frac{x}{a}}}dz + \int_{z=\sqrt{\frac{x}{a}}}^{\frac{\Psi_2(xt)}{\sqrt{t}}}dz$$

est de la forme $o(\sqrt{t})$ (uniformément en s).

Les termes suivants du développement conduisent à des $o(\sqrt{t})$ (uniformément en s).

c) (13) nous donne, en posant $r = u\sqrt{t}$, $w = -v\sqrt{t}$, $w_1 = -x_1\sqrt{t}$ $w_2 = -x_2\sqrt{t}$, $(u-v) = y\sqrt{t}$, $(u-x_2) = y_2\sqrt{t}$, une intégrale 9-uple dont le terme principal est le produit de $\sqrt{t}$ par l'intégrale suivante :

$$2\int_0^\infty du \int_0^\infty dy \int_0^1 d\tau \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\frac{u^2}{2\tau u}}}{\tau^{3/2}} \int_\tau^1 dt_1 \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t_1-\tau)^{3/2}}$$

$$\times \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_{2n\sqrt{\frac{y}{a}}}^{(2n+2)\sqrt{\frac{y}{a}}} e^{-\frac{1}{2\tau}\left[(2n+1)\sqrt{\frac{y}{a}}-z\right]^2} z e^{-\frac{z^2}{2(t_1-\tau)}} dz\right]$$

$$\times \int_{-\infty}^{u} dx_1 \frac{u-x_1}{(t_1-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(u-x_1)^2}{2(t_1-\tau)}\right] \int_y^\infty dy_2 \int_{t_1}^1 dt_2 \frac{(u-x_1)}{\pi(t_2-t_1)^{3/2}} \exp\left[\frac{-(u-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right]$$

$$\times \frac{u}{(1-t_2)^{3/2}} \exp\frac{-u^2}{2(1-t_2)} \left[\int_{z_2=\sqrt{\frac{y_2}{a}}}^{\infty} + \int_{z_2=-\infty}^{-\sqrt{\frac{y_2}{a}}}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}$$

$$\exp\left[\frac{-\left(z_2-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)^2}{2(t_2-t_1)}\right] \times \exp\left[\frac{-z_2^2}{2(1-t_2)}\right] \frac{dz_2}{\sqrt{2\pi(1-t_2)}}$$

dont la valeur est $\dfrac{1}{32\sqrt{2\pi}R^2(s)}$ (nous ne donnerons pas le détail du calcul ici) [1].

d) En utilisant des techniques identiques, on voit que les termes suivants de (13) ainsi que les intégrales provenant de (14) et (15) nous donnent des termes du type $o(\sqrt{t})$ (uniformément en s).

On voit facilement que le cas de Γ^* concave au point s conduit exactement aux mêmes résultats $\left(\text{où } a = \dfrac{1}{2R(s)} \text{ est négatif}\right)$. De même les points d'inflexion de Γ conduisent à $\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}$ + termes du type $o(\sqrt{t})$.

---

[1] Signalons toutefois que, en intégrant sur t_1, tous les termes de la somme infinie se compensent sauf deux.

L'intégration sur ds de la contribution *a)* n'offre aucune difficulté (ce terme est indépendant de la courbure).

Sur $\Gamma - \Gamma^*$, $|a| \leq \alpha\eta_1 t^{1/4}$ où α est borné puisque Γ est de classe C^3.

On voit aisément que la contribution de *b), c), d)* sur $\Gamma - \Gamma^*$ est bornée en valeur absolue par

$$\frac{1}{6\pi}\alpha n_1 t^{1/4}.\eta t^{1/4} + 0(t^{3/4}) = \eta 0(t^{1/2}).$$

Puisque η est arbitraire, nous obtenons enfin

$$\sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \int_\Gamma ds \int_0^\delta dr \left[1 - \frac{r}{R(s)}\right] P_\Omega^*[(r, s), (r, s) \mid t]$$
$$\sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2^7\sqrt{2\pi}}\int_\Gamma \frac{ds}{R^2(s)}\sqrt{t} + o(\sqrt{t}), \qquad t \to 0$$

où L est la longueur de Γ.
et où le terme constant résulte de la relation

$$\int_\Gamma \frac{ds}{R(s)} = 2\pi$$

(cas particulier de la formule de Gauss-Bonnet).

Nous obtenons donc (6) ainsi que la confirmation de (3), (4) et (5). On voit immédiatement comment généraliser la technique utilisée au cas de E_n et c_i $(i > 4)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Berger, Sur le spectre d'une variété riemanienne. *C. R. Paris*, t. **263**, 1966, p. 13-16.
[2] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger et Tricomi, *Tables of integral transforms*, vol. I, New York, 1954.
[3] K. Ito and H. P. McKean, Jr., *Diffusion processes and their sample paths*, Berlin, 1965.
[4] M. Kac, On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proc. Sec. Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.*, 1957, p. 189-215.
[5] M. Kac, Can you hear the shape of a drum, *Amer. Math. Monthly*, t. **73**, 1966, p. 1-23.
[6] H. P. McKean, Jr. and I. M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, to appear.
[7] P. Levy, *Processus stochastiques et mouvements brownien*, Paris, 1948.
[8] S. Minakshisundaram, Eigenfunctions on Riemannian manifolds. *J. Indian Math. Soc.*, t. **17**, 1953, p. 158-165.
[9] H. Weyl, *The classical groups*. Princeton, 1946.

Manuscrit reçu le 8 juillet 1968.