ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. PAYEN

Fonctions aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de Hilbert

Annales de l'I. H. P., section B, tome 3, n° 4 (1967), p. 323-396

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1967__3_4_323_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. III, n° 4, 1967, p. 323-396.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Fonctions aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de Hilbert

par

R. PAYEN

Faculté des Sciences de Reims.

SOMMAIRE. — En utilisant l'espace des applications linéaires continues d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ dans l'espace de Hilbert des variables aléatoires de carrés sommables, nous résolvons le problème de l'approximation linéaire des moindres carrés pour des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathscr{H}$, par un procédé qui ne fait intervenir que des opérateurs linéaires bornés.

Les méthodes ainsi introduites permettent d'obtenir sous une forme élégante la représentation par une moyenne glissante de la partie purement non déterministe d'une suite stationnaire de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathscr{H}$. Nous caractérisons ensuite la mesure spectrale de la partie purement non déterministe : sa dérivée, qui est une fonction matricielle, est la partie factorisable maximum (notion définie au chap. II, § 5) de la dérivée de la partie absolument continue de la mesure spectrale du processus.

Au chapitre III nous établissons une formule de moyenne glissante pour les fonctions aléatoires stationnaires à valeurs dans $\mathscr{H}$ et définies sur la droite réelle.

Nous complétons ces résultats par une caractérisation des fonctions de covariance de fonctions aléatoires à valeurs dans $\mathscr{H}$ (chap. I) et une caractérisation des fonctions factorisables définies sur le tore, à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ (chap. II).

SUMMARY. — Making use of the space of continuous linear mappings from a Hilbert space $\mathscr{H}$ into the Hilbert space of square integrable random variables, the problem of linear least squares approximation for $\mathscr{H}$-valued random vectors is solved by a procedure which involves only bounded linear operators.

Using such methods, an elegant form of the moving average representation of the purely non-deterministic component of a stationary sequence of $\mathscr{H}$-valued random vectors is obtained. The spectral measure of the purely non-deterministic component is then characterised: its derivative, which is a matrix valued function, is the maximum factorisable component (this notion is defined in Chapter II, § 5) of the derivative of the absolutely continuous component of the spectral measure of the process.

In Chapter III a moving average formula for $\mathscr{H}$-valued stationary random functions defined on $\mathbb{R}$ is established.

These results are completed by a characterisation of covariance functions of $\mathscr{H}$-valued random functions (Chapter I) and a characterisation of $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$-valued factorisable functions defined on the torus (Chapter II).

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier, pour des vecteurs aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Hilbert, l'approximation linéaire des moindres carrés et les processus du second ordre, stationnaires au sens large.

L'approximation linéaire est étudiée au premier chapitre. Les techniques introduites pour résoudre ce problème sont utilisées au début du chapitre II pour obtenir la décomposition de Wold des suites stationnaires de vecteurs aléatoires du second ordre, le reste de ce chapitre étant consacré à l'étude des propriétés spectrales de ces suites. Enfin, au chapitre III, nous étudions les fonctions aléatoires stationnaires à valeurs dans un espace de Hilbert et définies sur la droite réelle.

Le numérotage des lemmes, propositions, définitions et remarques, est indépendant pour chacun de ces chapitres et le renvoi à une proposition sans indication de chapitre concerne toujours le chapitre en cours.

La plupart des résultats démontrés dans cette thèse ont été résumés dans les Notes suivantes :

C. R. Acad. Sci., t. **259**, 1964, p. 3678 ; t. **259**, 1964, p. 3929 ; t. **262,** série A, 1966, p. 579 ; t. **262**, série A, 1966, p. 1186.

Je tiens à exprimer ici mes plus vifs remerciements à M. le Professeur Fortet qui a dirigé cette thèse et m'a encouragé dans son élaboration. Je remercie également M. le Professeur Helson dont les conseils m'ont été très précieux pour compléter et améliorer la rédaction définitive. M. le Professeur Ehresmann a bien voulu me donner le deuxième sujet de thèse et m'a fait l'honneur de présider le jury, je l'en remercie bien vivement.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à M. le Professeur Dixmier qui a bien voulu lire et critiquer la partie d'analyse fonctionnelle, et à M. le Professeur David dont les encouragements amicaux ne m'ont jamais fait défaut tout au long de ces années d'apprentissage.

CHAPITRE PREMIER

L'APPROXIMATION LINÉAIRE DES MOINDRES CARRÉS POUR DES VECTEURS ALÉATOIRES A VALEURS DANS UN ESPACE DE HILBERT

1. — **Introduction.**

Soient $y, x_1, x_2, \ldots, x_p$ des variables aléatoires (en abrégé v. a.) de carrés sommables, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$. Pour fixer les idées, nous supposerons dans cette introduction que toutes les v. a. considérées sont à valeurs complexes. Le problème de l'approximation linéaire des moindres carrés de y en termes des x_k consiste à trouver, parmi toutes les v. a. $z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$ qui sont des combinaisons linéaires à coefficients complexes des v. a. x_k, celles qui minimisent l'espérance mathématique de la v. a. $|y - z|^2$. Ce problème de minimum possède toujours une solution unique : les v. a. données y et x_k sont des vecteurs de l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbf{C}}(\Omega)$ des classes d'équivalence de v. a. de carrés sommables définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$, et la v. a. cherchée z est la projection de y sur le sous-espace engendré par les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Généralisons ce problème et supposons que $y, x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont des vecteurs aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ (dans cette introduction nous supposerons $\mathscr{H}$ complexe et séparable, mais ces restrictions seront abandonnées dans la suite) c'est-à-dire, des applications fortement mesurables d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ à valeurs dans $\mathscr{H}$ et dont le carré de la norme est une v. a. d'espérance mathématique finie. Pour tout choix de p applications linéaires continues $A_1, A_2, \ldots, A_p$, de $\mathscr{H}$ dans lui-même, la correspondance

$$\omega \to z(\omega) = \sum_{k=1}^{p} A_k x_k(\omega)$$

(où ω désigne un point de Ω) définit un vecteur aléatoire du second ordre à valeurs dans $\mathscr{H}$. Parmi tous les vecteurs aléatoires z de ce type, en existe-t-il un qui minimise la quantité $E \| y(\omega) - z(\omega) \|^2$ (E désignant l'espérance mathématique) et qui serait la meilleure approximation linéaire des moindres carrés de y en termes des x_k?

Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie N_0, il existe une solution unique à ce problème. En effet, soit (d_n) une base orthonormale de $\mathscr{H}$ et désignons par η_n et $\chi_n^{(k)}$ les v. a. coordonnées d'indice n des vecteurs aléatoires y et x_k respectivement. Si ζ_n est la meilleure approximation linéaire des moindres carrés de la v. a. η_n en termes des v. a. $\chi_j^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant N_0)$, ζ_n est la v. a. coordonnée d'indice n d'un vecteur aléatoire z qui est solution de notre problème.

Mais si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, il s'introduit des matrices infinies qui ne correspondent pas nécessairement à des opérateurs bornés. Il est facile, en effet, de construire deux vecteurs aléatoires du second ordre x et y tels que la quantité $E \| y(\omega) - Ax(\omega) \|^2$ soit arbitrairement petite mais jamais nulle, lorsque A parcourt l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans lui-même. Nous ferons cette construction au paragraphe 3. On pourrait être tenté d'envisager l'emploi d'opérateurs non bornés mais il ne semble pas que ce soit la bonne manière d'approcher le problème car le symbole $Ax(\omega)$ ne représente un vecteur aléatoire que si $x(\omega)$ appartient presque partout au domaine de définition de l'opérateur A, et la vérification de cette propriété nécessite des hypothèses restrictives que l'on ne désire pas introduire.

Voici l'idée que nous allons exploiter dans la suite de ce chapitre et que nous introduisons ici dans le cas particulier où l'on cherche la meilleure approximation de y en fonction d'un seul vecteur aléatoire x. Soit (d_n) une base orthonormale de $\mathscr{H}$. Au vecteur aléatoire du second ordre x, est associée la famille de ses coordonnées $\chi_n(\omega) = (x(\omega), d_n)$ qui sont des

v. a. de carrés sommables. L'opérateur Γ défini par $(\Gamma d_n, d_m) = E(\bar{\chi}_n \chi_m)$ est un opérateur hermitien positif compact, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma d_n, d_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E\,|\chi_n|^2 = E\,\|x(\omega)\|^2 < \infty.$$

Il existe donc une base orthonormale (d'_n) de $\mathscr{H}$ dont chaque élément est un vecteur propre de Γ. Les v. a. coordonnées χ'_n du vecteur aléatoire x par rapport à cette base sont alors deux à deux orthogonales au sens de la structure hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$. A chaque v. a. χ'_n associons la v. a. normalisée $\varepsilon_n = \dfrac{\chi'_n}{\sigma_n}$ où $\sigma_n^2 = E\,|\chi'_n|^2$ (on posera $\varepsilon_n = 0$ si $\sigma_n = 0$). On obtient ainsi une famille orthonormale (ε_n) de l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ et si z est un vecteur aléatoire du second ordre dont les v. a. coordonnées $\zeta_n(\omega) = (z(\omega), d'_n)$ sont des combinaisons linéaires des v. a. ε_m :

$$\zeta_n = \sum_m \alpha_{nm} \varepsilon_m,$$

à la matrice infinie (α_{nm}) correspond un opérateur borné et plus précisément un opérateur de Hilbert-Schmidt puisque

$$\sum_{n,m} |\alpha_{nm}|^2 = E\,\|z(\omega)\|^2 < \infty.$$

Ce procédé permet de résoudre le problème lorsque l'on cherche la meilleure approximation de y en fonction d'un seul vecteur aléatoire x. Mais il ne peut pas être utilisé tel quel dans le cas plus général où l'on se donne plusieurs vecteurs aléatoires $x_1, x_2, \ldots, x_p$ puisque la base qui orthogonalise les v. a. coordonnées χ_n dépend du vecteur aléatoire x et notre première tâche sera de donner une interprétation intrinsèque de la famille de v. a. (ε_n).

Tout d'abord, il faut remarquer que si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, (ε_n) n'est pas la famille des composantes d'un vecteur aléatoire du second ordre puisque $\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n(\omega)|^2 = +\infty$ presque partout. Au lieu de remplacer le vecteur aléatoire x par la famille de ses composantes (χ_n), nous associons à x l'application linéaire continue X de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ qui, à chaque vecteur a de $\mathscr{H}$ fait correspondre la v. a. $\omega \to (a, x(\omega))$. Cette définition de X est intrinsèque et l'application de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ qui, à chaque vecteur de base d'_n fait correspondre la v. a. normalisée $\bar{\varepsilon}_n$ ($\bar{\varepsilon}_n(\omega)$ est le complexe conjugué de $\varepsilon_n(\omega)$), ne dépend pas de la base orthonormale de vecteurs propres (d'_n) et n'est autre que l'opérateur partiellement isométrique ξ associé à X dans la formule de décomposition polaire $X = \xi\,|X|$.

Cette première étape qui consiste à remplacer tout vecteur aléatoire x par une application linéaire continue X de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, puis à remplacer X par un opérateur partiellement isométrique ξ, n'est pas encore suffisante pour donner une solution satisfaisante de notre problème. Il nous faudra introduire un procédé d'orthonormalisation des applications de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, ce qui sera fait au paragraphe 6.

La solution générale du problème de l'approximation linéaire des moindres carrés est présentée au paragraphe 8. Auparavant nous établissons les propriétés de l'espace des applications linéaires continues d'un espace de Hilbert dans un autre, dont nous avons besoin dans ce paragraphe 8, ou aux chapitres II et III. La proposition 1 qui fournit la caractérisation, très utile pour cette étude, des sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-modules à droite fortement fermés, est contenue dans un théorème plus général de Yood ([*15*], théorème 5-2). Ce théorème étant peu utilisé en analyse et de là peu connu, nous avons cru utile d'en reprendre la démonstration dans le cas plus simple qui nous intéresse ici. La définition et les propriétés des opérateurs partiellement isométriques sont rappelées au paragraphe 6. Au paragraphe 7 nous caractérisons les applications de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ qui sont associées à des vecteurs aléatoires du second ordre et au dernier paragraphe nous caractérisons les covariances des fonctions aléatoires à valeurs dans $\mathscr{H}$.

2. — Notations.

$(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ est un espace de probabilité (Ω désigne un ensemble dont les éléments sont notés ω, $\mathscr{S}$ est une σ-algèbre de parties de Ω et μ est une mesure positive sur $\mathscr{S}$ telle que $\mu(\Omega) = 1$).

$L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ (resp. $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$) est l'espace des variables aléatoires complexes (resp. réelles) d'ordre deux définies sur $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$, obtenu après identification des variables aléatoires égales presque partout, et muni de la structure hilbertienne définie par le produit scalaire $(u, v) = E(u\bar{v})$ (resp. $(u, v) = E(uv)$) où E désigne l'espérance mathématique. La notation $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ au lieu de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ qui serait plus correcte n'entraîne aucun inconvénient puisqu'un seul espace de probabilité ne sera considéré dans cette étude.

$\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert quelconque (réel ou complexe, séparable ou non), $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans lui-même et $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ est l'ensemble des éléments hermitiens positifs de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

Un vecteur aléatoire du second ordre, à valeurs dans $\mathscr{H}$, est une application fortement mesurable $\omega \to x(\omega)$ de Ω dans $\mathscr{H}$, telle que $E \| x(\omega) \|^2 < \infty$ (Pour la définition et les propriétés des fonctions à valeurs vectorielles fortement mesurables, voir par exemple [7], pages 72 et suivantes). L'espace des classes d'équivalence de ces vecteurs aléatoires, muni du produit scalaire $(x, y) = E(x(\omega), y(\omega))_{\mathscr{H}}$ est un espace de Hilbert noté $L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$.

Toutes les démonstrations et tous les résultats de ce chapitre sont valables aussi bien dans le cas où $\mathscr{H}$ est complexe que dans le cas où $\mathscr{H}$ est réel, les variables aléatoires qui interviennent prenant leurs valeurs dans le corps de base de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et ce n'est que pour fixer les idées qu'à partir du paragraphe 4 nous supposerons $\mathscr{H}$ complexe.

Nous utilisons les abréviations habituelles :

m. q. : moyenne quadratique
p. p. : presque partout
p. s. : presque sûrement
v. a. : variable aléatoire.

3. — Étude d'un exemple.

Nous allons introduire le problème général en étudiant de près un exemple simple où les difficultés sont déjà présentes. Soient, $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel séparable, $\{ d_n, n = 1, 2, \dots \}$ une base orthonormale de $\mathscr{H}$, $\{ \chi_n, n = 1, 2, \dots \}$ une suite de v. a. réelles, laplaciennes, indépendantes, non nulles, définies sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$. Nous supposons que chaque v. a. χ_n a une moyenne nulle et que la série des variances, $\sum_{n=1}^{\infty} E | \chi_n |^2$, converge. Il en résulte que les vecteurs aléatoires définis par

$$x(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(\omega) d_n$$

$$y(\omega) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(\omega) \right) d_1$$

existent presque sûrement.

Soit $\mathscr{D}$ le sous-espace algébrique des vecteurs a de $\mathscr{H}$ dont la famille des coordonnées $\alpha_n = (a, d_n)$ est sommable, et soit B l'opérateur défini sur $\mathscr{D}$ par :

$$\mathrm{B}a = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) d_1$$

Cet opérateur B n'est pas borné mais le vecteur aléatoire $x(\omega)$ appartient presque sûrement au domaine de définition $\mathscr{D}$ de B et l'on a $y(\omega) = \mathrm{B}x(\omega)$ p. s.

Le problème de l'approximation linéaire des moindres carrés de y en fonction de x est le suivant : existe-t-il un opérateur $\mathrm{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ qui minimise la quantité $\mathrm{E}\,\| y(\omega) - \mathrm{A}x(\omega) \|^2$?

Cette quantité est arbitrairement petite car, B_n désignant l'opérateur borné défini par :

$$\mathrm{B}_n d_k = d_1 \quad \text{si} \quad k \leqslant n \,; \qquad \mathrm{B}_n d_k = 0 \quad \text{si} \quad k > n$$

on a :

$$\mathrm{E}\,\| y(\omega) - \mathrm{B}_n x(\omega) \|^2 = \sum_{k>n} \mathrm{E}\,|\chi_k|^2$$

et le second membre tend vers zéro quand n tend vers l'infini, puisque la série des variances a été supposée convergente. Par conséquent si un tel opérateur A existe, on a $y(\omega) = \mathrm{A}x(\omega)$ p. p. et nous allons montrer qu'une telle égalité ne peut pas avoir lieu.

La preuve détaillée de cette impossibilité fera apparaître que même dans le cas de vecteurs aléatoires laplaciens, où il est pourtant facile de vérifier des propriétés presque sûres, l'apparition d'opérateurs non bornés est la source de nombreuses difficultés.

Supposons donc l'existence d'un opérateur borné A tel que $y(\omega) = \mathrm{A}x(\omega)$ p. p. Soit Ω' l'ensemble des points ω de Ω tels que :

$$x(\omega) \in \mathscr{D}, \qquad y(\omega) = \mathrm{A}x(\omega), \qquad y(\omega) = \mathrm{B}x(\omega)$$

et soit $\mathscr{D}'$ le sous-espace algébrique de $\mathscr{H}$ engendré par la famille de vecteurs $\{ x(\omega) : \omega \in \Omega' \}$. On a, $\mu(\Omega') = 1$, $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$, et la restriction de A à $\mathscr{D}'$ coïncide avec la restriction de B à $\mathscr{D}'$. Nous allons montrer que cette égalité des restrictions à $\mathscr{D}'$, d'un opérateur borné A et d'un opérateur non borné B, conduit à une contradiction.

Tout d'abord on pense à utiliser le fait que $\mathscr{D}'$ est dense dans $\mathscr{H}$. En effet s'il existait un vecteur non nul a de $\mathscr{H}$ perpendiculaire à $\mathscr{D}'$, le produit scalaire $(a, x(\omega))$ définirait une v. a. nulle p. p. et ceci ne peut pas être vrai puisque cette v. a. a une variance non nulle.

$$\mathrm{E}\,|(a, x(\omega))|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \mathrm{E}\,|\chi_n|^2$$

où α_n désigne la $n^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur a.

Mais les propriétés $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ partout dense, ne suffisent pas pour obtenir la contradiction cherchée. En effet, soit $\mathscr{D}''$ l'ensemble des vecteurs a de $\mathscr{H}$ tels que :

1) toutes les coordonnées α_n de a, sauf un nombre fini, sont nulles ;

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n = 0$ (somme des coordonnées à partir de l'indice 2).

Il résulte de la première condition que $\mathscr{D}'' \subset \mathscr{D}$. En outre $\mathscr{D}''$ est dense dans $\mathscr{H}$, puisque $d_1 \in \mathscr{D}''$ et que pour $n \geqslant 2$, le $n^{\text{ième}}$ vecteur de base d_n est limite, quand p tend vers l'infini, de la suite $(c_{np})_p$ de vecteurs appartenant à $\mathscr{D}''$:

$$c_{np} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) d_n - \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \frac{1}{p} d_i$$

Et sur $\mathscr{D}''$, l'opérateur B coïncide avec le projecteur P sur le sous-espace engendré par le vecteur d_1, puisque $Ba = \alpha_1 d_1 = \mathrm{P}a$.

En utilisant la propriété

$$\mu(\{\omega : x(\omega) \in \mathscr{D}'\}) = 1 \tag{1}$$

nous allons prouver l'existence d'une suite de vecteurs a_k appartenant à $\mathscr{D}'$, convergeant vers le vecteur nul et telle que la famille des normes $\| \mathrm{B}a_k \|$ soit minorée par une constante positive. Pour cela nous ferons une hypothèse supplémentaire et nous supposerons que les variances $\sigma_n^2 = \mathrm{E}\,|\chi_n|^2$ satisfont, pour tout entier k, aux inégalités :

$$\sum_{n>k} n\sigma_n < \frac{1}{k} \tag{2}$$

Désignons par I_{nk} l'intervalle de la droite réelle défini de la manière suivante :

$$I_{nk} = \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right] \quad \text{si} \quad n \leqslant k\,; \qquad I_{nk} = [-n\sigma_n, n\sigma_n] \quad \text{si} \quad n > k$$

et soit F_k l'ensemble des vecteurs a de $\mathscr{H}$ dont la $n^{\text{ième}}$ coordonnée α_n appartient à l'intervalle I_{nk} pour tout entier n.

Nous allons d'abord prouver que $\mu(\{\omega : x(\omega) \in F_k\}) > 0$. Il en résultera d'après (1) que $\mu(\{\omega : x(\omega) \in F_k \cap \mathscr{D}'\})$ est strictement positif, et par conséquent pour tout entier k, $F_k \cap \mathscr{D}'$ n'est pas vide.

Les v. a. χ_n étant indépendantes,

$$\mu(\{\omega : x(\omega) \in F_k\}) = \prod_{n=1}^{\infty} \mu(\{\omega : \chi_n(\omega) \in I_{nk}\})$$

Pour tout couple n, k, $\mu(\{\omega : \chi_n(\omega) \in I_{nk}\}) \neq 0$; il suffit donc de prouver que

$$\prod_{n=k+1}^{\infty} \mu(\{\omega : |\chi_n(\omega)| < n\sigma_n\} \tag{3}$$

est un produit infini convergent. Posons

$$u_n = \mu(\{\omega : |\chi_n(\omega)| \geqslant n\sigma_n\}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_{n\sigma_n}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}}$$

La série de terme général u_n converge, et par conséquent le produit infini (3), de terme général $1 - u_n$, converge.

Pour tout entier k, choisissons un vecteur $a_k \in F_k \cap \mathscr{D}'$ et soit $\alpha_n^{(k)} = (a_k, d_n)$, la $n^{\text{ième}}$ coordonnée de a_k. On a :

$$\sum_{n=1}^{k} |\alpha_n^{(k)}|^2 \leqslant \frac{1}{k}$$

$$\sum_{n>k} |\alpha_n^{(k)}|^2 \leqslant \sum_{n>k} n^2\sigma_n^2 < \sum_{n>k} n\sigma_n < \frac{1}{k}$$

Donc $\| a_k \|^2 < \frac{2}{k}$, et la suite (a_k) converge vers le vecteur nul.

D'autre part

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha_n^{(k)} \geqslant \frac{1}{2}$$

et

$$\sum_{n>k} |\alpha_n^{(k)}| \leqslant \sum_{n>k} n\sigma_n < \frac{1}{k}$$

donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)}$ converge et sa somme est supérieure à $\frac{1}{2} - \frac{1}{k}$. Par conséquent la suite $(\mathrm{B}a_k)$ ne converge pas vers le vecteur nul et B ne peut pas coïncider avec un opérateur borné A sur $\mathscr{D}'$.

Pour cet exemple, le problème de l'approximation linéaire, tel que nous l'avons posé, n'a donc pas de solution, parce que nous ne voulons considérer que des opérateurs bornés. Et si l'emploi d'un opérateur non borné B a été possible, il faut remarquer que nous avions supposé les vecteurs aléatoires x et y laplaciens, et que nous nous étions placés dans le cas particulièrement simple où y est approximé en fonction d'un seul vecteur aléatoire x.

Nous sommes donc amenés à poser le problème différemment. Il est naturel de considérer que dans l'exemple précédent, $y(\omega) = \mathrm{B}x(\omega)$ est la meilleure approximation linéaire des moindres carrés de y en fonction de x. Procédons ensuite comme nous l'avions indiqué dans l'introduction. Soit ε_n la v. a. normée associée à χ_n, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_n(\omega) = \frac{\chi_n(\omega)}{\sigma_n} \quad \text{où} \quad \sigma_n = \sqrt{\mathrm{E}\,|\,\chi_n\,|^2}.$$

Les ε_n forment une suite orthonormale de v. a. laplaciennes dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ et nous écrivons de manière purement formelle

$$y(\omega) = \mathrm{B}'\xi(\omega) \tag{4}$$

ou encore, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \eta_1(\omega) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \ldots & \sigma_n \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\omega) \\ \varepsilon_2(\omega) \\ \varepsilon_3(\omega) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où $\eta_1(\omega) = (y(\omega), d_1)$. Cette fois B′ désigne un opérateur borné mais le symbole $\xi(\omega)$ ne représente pas un vecteur aléatoire. Pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$ désignons par $\mathrm{Y}a$ la classe dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ de la v. a. $\omega \to (a, y(\omega))$ et par ξa la classe de la v. a. $\omega \to \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varepsilon_n(\omega)$ où α_n désigne la $n^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur a. Les applications Y et ξ définies par

$$\mathrm{Y} : a \to \mathrm{Y}a \quad , \quad \xi : a \to \xi a$$

sont des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$, et l'égalité (4) devient

$$\mathrm{Y} = \xi \mathrm{B}'^* \tag{5}$$

où B'^* est l'opérateur adjoint de B'.

L'opérateur ξ a une interprétation intrinsèque : si X désigne l'application de $\mathscr{H}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ qui à tout vecteur a de $\mathscr{H}$ fait correspondre la v. a. $(a, x(\omega))$, ξ est l'opérateur partiellement isométrique qui intervient dans la formule de décomposition polaire $\mathrm{X} = \xi |\mathrm{X}|$ où $|\mathrm{X}| = (\mathrm{X}^*\mathrm{X})^{\frac{1}{2}}$, X^* désignant l'adjoint de X. En effet, $\mathrm{X}^*\mathrm{X}d_n = \sigma_n^2 d_n$. Les vecteurs de base d_n sont donc des vecteurs propres de l'opérateur hermitien positif $\mathrm{X}^*\mathrm{X}$ et par conséquent $|\mathrm{X}|d_n = \sigma_n d_n$. Il en résulte que :

$$\xi |\mathrm{X}| d_n = \sigma_n \xi d_n = \sigma_n \varepsilon_n = \chi_n = \mathrm{X}d_n$$

En outre, on vérifie la propriété, qui sera générale, $\mathrm{B}'^* = \xi^*\mathrm{Y}$, puisque d'après (5), $\xi^*\mathrm{Y} = \xi^*\xi\mathrm{B}'^*$ et que, dans cet exemple, $\xi^*\xi$ est l'application identique de $\mathscr{H}$ dans lui-même.

4. — Étude des sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-modules à droite de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

Pour résoudre le problème de l'approximation linéaire des moindres carrés que nous venons de poser et pour l'étude des suites stationnaires qui sera faite au chapitre II, nous avons besoin de développer certains aspects de la théorie générale des opérateurs d'un espace de Hilbert dans un autre. Ce sera l'objet des paragraphes 4, 5 et 6.

Soient, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ deux espaces de Hilbert, tous deux réels ou tous deux complexes, $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{K}$.

Nous désignons par les lettres a, b, c des éléments de $\mathscr{H}$, par u, v, des éléments de $\mathscr{K}$, par X, Y, Z, des éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. Le produit scalaire et la norme seront notés $(. , .)$ et $\| \cdot \|$ respectivement, quel que soit l'espace considéré, ce qui simplifie les notations sans risque d'erreurs puisque les notations utilisées pour les éléments permettront chaque fois de distinguer l'espace dans lequel on se place.

Parmi les différentes topologies qui peuvent être définies sur $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ nous serons amenés à considérer :

1) La topologie uniforme définie par la norme

$$\| X \| = \sup_{\| a \| \leqslant 1} \| Xa \|$$

2) La topologie forte qui est la topologie de la convergence simple lorsque l'espace d'arrivée est muni de la topologie forte. Tout voisinage fort de X contient un ensemble du type

$$\mathscr{W}(X ; a_1, a_2, \ldots, a_n ; \varepsilon) = \{ Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) : \| Xa_i - Ya_i \| < \varepsilon ; i = 1 \ldots n \}$$

3) La topologie faible qui est la topologie de la convergence simple lorsque l'espace d'arrivée est muni de la topologie faible. Tout voisinage faible de X contient un ensemble du type :

$$\mathscr{W}(X ; a_1, \ldots, a_n ; u_1, \ldots, u_n ; \varepsilon) = \{ Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) : | (Xa_i, u_i) - (Ya_i, u_i) | < \varepsilon ; i = 1 \ldots n \}$$

L'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ est muni d'une structure de module à droite sur l'anneau $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ et le sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-module à droite engendré par la famille $(X_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ est l'ensemble des applications du type

$$\sum_{i \in J} X_i A_i$$

où J est une partie finie de I et où les A_i sont des éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Pour simplifier nous emploierons désormais (excepté dans les énoncés de propositions) l'expression « sous-module » au lieu de « sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-module à droite ».

Pour résoudre le problème de l'approximation linéaire des moindres carrés, nous aurons besoin de la caractérisation suivante des sous-modules fortement fermés :

PROPOSITION 1 : *Soient,* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille d'applications linéaires continues de* $\mathscr{H}$ *dans* $\mathscr{K}$, *et* M *le plus petit sous-espace fermé de* $\mathscr{K}$ *contenant les images* $X_i(\mathscr{H})$ *pour tout indice i. Le plus petit sous-*$\mathscr{L}(\mathscr{H})$*-module à droite fortement fermé contenant la famille* $(X_i)_{i \in I}$, *est l'ensemble de toutes les applications linéaires continues de* $\mathscr{H}$ *dans* $\mathscr{K}$ *qui envoient* $\mathscr{H}$ *dans* M.

Pour toute partie S de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ nous désignons par $S(\mathscr{H})$ l'ensemble des éléments u de $\mathscr{K}$ qui sont de la forme $u = Xa$ avec $X \in S$ et $a \in \mathscr{H}$. Nous commencerons par démontrer le

LEMME 1 : *Si* S *est un sous-*$\mathscr{L}(\mathscr{H})$*-module à droite de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, $S(\mathscr{H})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{K}$ *et l'adhérence forte de* S *est l'ensemble des* X *qui envoient* $\mathscr{H}$ *dans l'adhérence* $\overline{S(\mathscr{H})}$ *du sous-espace* $S(\mathscr{H})$.

Démonstration : Il est évident que $S(\mathscr{H})$ est un sous-espace algébrique de $\mathscr{K}$ et que si X est fortement adhérent à S, $X(\mathscr{H}) \subset \overline{S(\mathscr{H})}$. Réciproquement, soit X un élément de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ tel que $X(\mathscr{H}) \subset \overline{S(\mathscr{H})}$ et soit $\mathscr{W} = \mathscr{W}(X ; a_1, a_2, \ldots, a_n ; \varepsilon)$ un voisinage fort de X. Il suffit de considérer le cas où les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont linéairement indépendants puisque les voisinages définis par des vecteurs linéairement indépendants forment un système fondamental pour la famille des voisinages définis par les combinaisons linéaires de ces vecteurs.

Pour tout entier p compris entre 1 et n, il existe $Y_p \in S$ et $b_p \in \mathscr{H}$ tels que

$$\| Xa_p - Y_p b_p \| \leqslant \varepsilon$$

et, puisque les vecteurs a_p sont linéairement indépendants, il existe n opérateurs $A_q \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que

$$A_q a_p = \delta_{pq} b_q \quad , \quad 1 \leqslant p \leqslant n \quad , \quad 1 \leqslant q \leqslant n$$

où δ_{pq} désigne le symbole de Kronecker, égal à 1 ou 0 selon que $p = q$ ou $p \neq q$. Pour tout entier p compris entre 1 et n, on a :

$$\sum_{q=1}^{n} Y_q A_q a_p = Y_p b_p$$

et par conséquent l'opérateur $Y = \sum_{q=1}^{n} Y_q A_q$ appartient à $S \cap \mathscr{W}$. ■

Démonstration de la proposition 1 : Soit S_1 l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{K}$ qui envoient $\mathscr{H}$ dans M. Il est facile de vérifier que S_1 est un sous-module faiblement fermé et par conséquent fortement fermé. S_1 contient la famille $(X_i)_{i \in I}$ et tout sous-module fortement fermé S contenant l'ensemble des X_i contient également S_1 puisque d'après le lemme 1, S contient tous les $Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ qui envoient $\mathscr{H}$ dans M. ■

Remarque 1 : Puisque l'ensemble S des $X \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ qui envoient $\mathscr{H}$ dans un sous-espace fermé M de $\mathscr{K}$ est un sous-module faiblement fermé et que cette définition de S est la caractérisation des sous-modules fortement fermés, il en résulte que pour un sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-module à droite, l'adhérence forte coïncide avec l'adhérence faible. ■

Suivant la notation habituelle, nous désignons par X^* l'adjoint de X, qui est l'élément de $\mathscr{L}(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ défini par :

$$\forall a \in \mathscr{H}, \qquad \forall u \in \mathscr{K}, \qquad (Xa, u) = (a, X^*u).$$

DÉFINITION 1 : *Deux éléments* X *et* Y *de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *sont dits orthogonaux si* $Y^*X = 0$.

DÉFINITION 2 : *Pour toute partie* S *de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *on appelle orthogonal de* S *l'ensemble* $S^{\perp}$ *des* $Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *tels que* $Y^*X = 0$ *pour tout* X *appartenant à* S.

Le biorthogonal de S, *noté* $S^{\perp\perp}$, *est l'orthogonal de* $S^{\perp}$.

Il résulte immédiatement des définitions que X et Y sont orthogonaux si et seulement si $X(\mathscr{H})$ et $Y(\mathscr{K})$ sont des sous-espaces (algébriques) orthogonaux de $\mathscr{K}$ et $S^{\perp}$ est l'ensemble des $Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ tels que $Y(\mathscr{H})$ soit orthogonal à $S(\mathscr{H})$. Puisque, pour toute partie S de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, l'orthogonal de $S(\mathscr{H})$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{K}$, $S^{\perp}$ est un sous-module fortement fermé. Les propriétés suivantes sont évidentes :

$$\begin{aligned} &S \cap S^{\perp} = \{0\} \\ &S \subset S' \Rightarrow S'^{\perp} \subset S^{\perp} \\ &S \subset S^{\perp\perp} \end{aligned}$$

et il résulte immédiatement de la proposition 1 que :

COROLLAIRE 1 : *Le sous-*$\mathscr{L}(\mathscr{H})$*-module à droite fortement fermé engendré par une partie* S *de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *est égal à* $S^{\perp\perp}$. ■

Le corollaire qui suit n'est pas utile pour la suite de notre travail mais constitue une application intéressante de la proposition 1. Soit $L^2_{\mathscr{H}}([0,2\pi[)$ l'espace de Hilbert des classes d'équivalence de fonctions fortement mesurables définies sur le tore, à valeurs dans $\mathscr{H}$ et dont le carré de la norme est intégrable pour la mesure de Lebesgue. Si M est un sous-espace fermé de $L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[)$ il est évident que l'ensemble $\mathscr{M}$ des fonctions f de $L^2_{\mathscr{H}}([0,2\pi[)$ dont toutes les fonctions coordonnées $\varphi_a(\lambda) = (f(\lambda), a)$ appartiennent à M, est un sous-espace fermé de $L^2_{\mathscr{H}}([0,2\pi[)$ invariant par l'action de tous les opérateurs bornés de $\mathscr{H}$, autrement dit, le sous-espace fermé $\mathscr{M}$ est un sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-module à gauche. Le corollaire suivant prouve que M caractérise $\mathscr{M}$:

COROLLAIRE 2 : *Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace fermé de* $L^2_{\mathcal{H}}([0,2\pi[)$, *invariant pour toute application linéaire bornée de* $\mathcal{H}$ *(c'est-à-dire que* $f \in \mathcal{M}$ *entraîne* $Af \in \mathcal{M}$ *pour tout* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$), *et si* M *désigne l'ensemble des fonctions coordonnées* $\varphi_a(\lambda) = (f(\lambda), a)$ *où* f *parcourt* $\mathcal{M}$ *et* a *parcourt* $\mathcal{H}$, M *est un sous-espace fermé de* $L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[)$ *et* $\mathcal{M}$ *est précisément l'ensemble de toutes les fonctions de* $L^2_{\mathcal{H}}([0,2\pi[)$ *dont les fonctions coordonnées* $\varphi_a(\lambda)$ *appartiennent à* M.

Démonstration : Il est immédiat que M est un sous-espace algébrique de $L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[)$. A toute fonction $f \in L^2_{\mathcal{H}}([0,2\pi[)$ correspond une application linéaire continue F de $\mathcal{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[)$ définie par $Fa = \overline{\varphi}_a$ pour tout $a \in \mathcal{H}$, et comme nous le montrerons au paragraphe 7, l'ensemble des applications $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[))$ qui correspondent ainsi à des éléments $f \in L^2_{\mathcal{H}}([0,2\pi[)$, est l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[)$ c'est-à-dire, les opérateurs F tels que $\sum_{i \in I} \| Fd_i \|^2 < \infty$ pour toute base orthonormale $(d_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{H}$.

Soient, M' l'ensemble des fonctions conjuguées $\overline{\varphi}$ où φ appartient à M, S l'ensemble des opérateurs F qui sont associés à des éléments f de $\mathcal{M}$. S est un sous-$\mathcal{L}(\mathcal{H})$-module à droite et son adhérence forte $\overline{S}$ est l'ensemble des applications $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[)$ qui envoient $\mathcal{H}$ dans $\overline{M}'$. Soit f un élément de $L^2_{\mathcal{H}}$ dont toutes les fonctions coordonnées appartiennent à $\overline{M}$. Il lui correspond un opérateur de Hilbert-Schmidt F appartenant à $\overline{S}$. Choisissons une base orthonormale $(d_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{H}$. A tout $\varepsilon > 0$, correspond une partie finie J de I telle que

$$\sum_{i \in I-J} \| Fd_i \|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

et il existe $G \in S$ tel que :

$$\forall i \in J \qquad \| Fd_i - Gd_i \| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

où n désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini J. Soit P_J le projecteur de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace engendré par les vecteurs $(d_i)_{i \in J}$, $GP_J \in S$ et correspond à une fonction $g_J \in \mathcal{M}$. Puisque

$$\| f - g_J \|^2_{L^2_{\mathcal{H}}} = \sum_{i \in I} \| Fd_i - GP_J d_i \|^2 \leqslant 2\varepsilon^2,$$

et que $\mathcal{M}$ est fermé, $f \in \mathcal{M}$ et par conséquent $\overline{M} = M$. Le corollaire est ainsi complètement démontré. ■

5. — Convergence dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

Nous aurons besoin d'utiliser plusieurs fois dans la suite la propriété suivante :

PROPOSITION 2 : *L'application :*

$$X, Y \to Y^*X$$

de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) \times \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, *est continue quand on munit* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *de la topologie forte et* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *de la topologie faible.*

Démonstration : Il suffit de vérifier la continuité au point (0,0) et cette vérification est immédiate. ■

PROPOSITION 3 : *Soient,* T *un ensemble muni d'un filtre* $\mathscr{F}$, $t \to X_t$ *une application de* T *dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

1) *Pour que l'application* $t \to X_t$ *converge fortement dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *suivant le filtre* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que l'application* $(t, t') \to X_{t'}^*X_t$ *converge faiblement dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *suivant le filtre* $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$.

2) *Si* $\lim_{\mathscr{F}} X_t = X$, *alors*

$$\lim_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}} X_{t'}^*X_t = \lim_{\mathscr{F}} X_t^*X_t = X^*X$$

Démonstration : La condition nécessaire et la 2^e partie résultent de la proposition 2, en tenant compte du fait que l'existence d'une limite pour $X_{t'}^*X_t$ suivant le filtre $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$, implique la même limite pour $X_t^*X_t$ suivant le filtre $\mathscr{F}$.

Réciproquement, supposons que $X_{t'}^*X_t$ converge faiblement vers l'opérateur $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Soit a un élément de $\mathscr{H}$. La quantité

$$\| X_t a - X_{t'} a \|^2 = \| X_t a \|^2 - (X_t a, X_{t'} a) - (X_{t'} a, X_t a) + \| X_{t'} a \|^2$$

est arbitrairement petite puisque chacun des quatre produits scalaires qui figurent au second membre converge vers (Aa, a). Il en résulte que l'image du filtre $\mathscr{F}$ par l'application $t \to X_t a$ est un filtre de Cauchy sur $\mathscr{K}$ muni de la topologie de la norme. $\mathscr{K}$ étant complet, $\lim_{\mathscr{F}}(X_t a)$ existe. Notons Ya cette limite. Il reste à prouver que l'application $a \to Ya$ définit un élément Y appartenant à $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. La linéarité est immédiate et la continuité résulte de :

$$\| Ya \|^2 = \lim_{\mathscr{F}} \| X_t a \|^2 = \lim_{\mathscr{F}}(X_t^*X_t a, a) = (Aa, a) \leqslant \| A \| \cdot \| a \|^2 \quad ■$$

6. — Familles orthonormales dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

Rappelons qu'un opérateur $\xi \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ est dit partiellement isométrique, s'il existe un sous-espace fermé $\mathscr{H}_0$ de $\mathscr{H}$ tel que :

$$\begin{aligned} \|\xi a\| &= \|a\| \quad \text{si} \quad a \in \mathscr{H}_0 \\ \xi a &= 0 \quad \text{si} \quad a \perp \mathscr{H}_0 \end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout couple a, b de vecteurs de $\mathscr{H}_0$, on a :

$$(\xi a, \xi b) = (a, b)$$

$\mathscr{H}_0$ est appelé domaine initial de ξ et son image par ξ qui est un sous-espace fermé de $\mathscr{K}$, est appelée domaine final de ξ. L'adjoint ξ^* de ξ est une application partiellement isométrique de $\mathscr{K}$ dans $\mathscr{H}$ dont le domaine initial est $\xi(\mathscr{H}_0) = \xi(\mathscr{H})$ et le domaine final est $\mathscr{H}_0$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes et chacune d'elles est une condition nécessaire et suffisante pour que ξ soit partiellement isométrique :

(*i*) $\xi^*\xi$ est un projecteur de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ (C'est le projecteur sur $\mathscr{H}_0$).

(*ii*) $\xi\xi^*$ est un projecteur de $\mathscr{L}(\mathscr{K})$ (C'est le projecteur de $\mathscr{K}$ sur le domaine final de ξ).

(*iii*) $\xi\xi^*\xi = \xi$

(*iv*) $\xi^*\xi\xi^* = \xi^*$

(Voir, par exemple, Naimark [*11*], p. 112).

A tout élément $X \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ est associé un opérateur partiellement isométrique $\xi \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ tel que

$$X = \xi |X| \qquad \text{où} \qquad |X| = (X^*X)^{\frac{1}{2}}$$

C'est la formule de décomposition polaire de X ([*11*], p. 284).

Le domaine initial de ξ est l'orthogonal du noyau de X et son domaine final est l'adhérence de $X(\mathscr{H})$.

Réciproquement si $X = UA$ où $A \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ et où U désigne un opérateur partiellement isométrique dont le domaine initial est l'adhérence du sous-espace $A(\mathscr{H})$, alors $U = \xi$ et $A = |X|$ (Unicité de la décomposition polaire).

DÉFINITION 3 : *Nous appellerons « normalisé de* X *» l'opérateur partiellement isométrique ξ qui est associé à* X *dans la formule de décomposition polaire.*

(Cette définition sera justifiée au paragraphe 8, où à chaque vecteur aléatoire du second ordre $x(\omega)$, on associe un opérateur X puis le normalisé ξ de X. Le passage du vecteur aléatoire x à l'opérateur ξ correspond à l'opération de normalisation qui remplace une v. a. $\alpha(\omega)$ par

$$\beta(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{\mathrm{E}\,|\,\alpha(\omega)\,|^2}}\Bigg).$$

Définition 4 : *Une famille* $\{\xi_i, i \in \mathrm{I}\}$ *d'éléments de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *est dite orthonormale si chaque* ξ_i *est un opérateur partiellement isométrique et si* $\xi_i^* \xi_j = 0$ *pour* $i \neq j$.

(Ces familles d'applications vont jouer le rôle des familles de v. a. du second ordre qui sont orthonormales dans l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$).

Proposition 4 : *Soient,* S *un sous-*$\mathscr{L}(\mathscr{H})$*-module à droite fortement fermé de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$*,* X *un élément quelconque de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$*,* ξ *le normalisé de* X. *Alors*

$$\mathrm{X} \in \mathrm{S} \Leftrightarrow \xi \in \mathrm{S}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 1 puisque $\xi(\mathscr{H}) = \overline{\mathrm{X}(\mathscr{H})}$. ■

Remarque 2. — C'est ce résultat qui nécessite l'emploi de l'adhérence forte des sous-modules pour l'application que nous en faisons au problème de l'approximation linéaire des moindres carrés. Remarquons que cette propriété n'est plus valable si on remplace la topologie forte par la topologie uniforme. Soient, $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, $\{d_n, n = 1, 2, \ldots\}$ une base orthonormale de $\mathscr{H}$, X l'opérateur linéaire compact de $\mathscr{H}$ dans lui-même défini par $\mathrm{X}d_n = \frac{1}{2^n} d_n$. L'ensemble des opérateurs compacts de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ étant un idéal uniformément fermé, le sous-module uniformément fermé engendré par X n'est constitué que d'opérateurs compacts et ne peut donc pas contenir ξ qui est ici l'application identique de $\mathscr{H}$ dans lui-même. Cet exemple montre également que l'adhérence uniforme d'un sous-module, peut être distincte de son adhérence forte. ■

Proposition 5 : *A toute famille dénombrable* $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots$ *d'éléments de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *on peut associer une famille orthonormale* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *ayant même ensemble d'indices que la famille* (X_i) *et telle que :*

$$(i) \qquad \mathrm{X}_p = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \mathrm{A}_{pk} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

où les A_{pk} *sont des éléments de* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

(*ii*) *Les sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-modules à droite fortement fermés, engendrés respectivement par les familles* (X_i) *et* (ξ_i) *coïncident.*

Démonstration : Cette proposition correspond au procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour des vecteurs d'un espace de Hilbert et se démontre de manière analogue.

ξ_1 est le normalisé de X_1 et $A_{11} = |X_1|$. Raisonnons ensuite par récurrence. Supposons que l'on ait déterminé les éléments $\xi_k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ et $A_{pk}(1 \leqslant p \leqslant n-1,\ 1 \leqslant k \leqslant p)$. On peut déterminer des opérateurs $A_{nk}(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ de manière que :

$$Y_n = X_n - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k A_{nk}$$

soit orthogonal à chaque ξ_i pour $i = 1, \ldots, n-1$. En effet ceci équivaut aux conditions

$$\begin{aligned} 0 = \xi_i^* Y_n &= \xi_i^*\left(X_n - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k A_{nk}\right) \\ &= \xi_i^* X_n - \xi_i^* \xi_i A_{ni} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1) \end{aligned} \tag{6}$$

Il suffit donc de prendre $A_{ni} = \xi_i^* X_n$ puisque $\xi_i^* \xi_i \xi_i^* = \xi_i^*$. Considérons ensuite la décomposition polaire de Y_n

$$Y_n = \xi_n |Y_n|$$

On définit ainsi ξ_n et, en posant $A_{nn} = |Y_n|$ on a :

$$X_n = Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k A_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k A_{nk}$$

Il reste encore à montrer que ξ_n est orthogonal à ξ_i pour $i = 1, \ldots, n-1$. Cela est immédiat puisque

$$\xi_n(\mathscr{H}) = \overline{Y_n(\mathscr{H})}$$

est orthogonal à $\xi_i(\mathscr{H})$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ d'après (6).

Pour démontrer la dernière partie de la proposition 5 désignons par $\mathscr{S}(X)$ et $\mathscr{S}(\xi)$ les sous-modules fortement fermés engendrés respectivement par les familles (X_i) et (ξ_i). Il résulte de la condition (*i*) que $X_p \in \mathscr{S}(\xi)$ pour chaque indice p, donc $\mathscr{S}(X) \subset \mathscr{S}(\xi)$. En appliquant la proposition 4,

$\xi_1 \in \mathscr{S}(X)$ puis, par récurrence, si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ appartiennent à $\mathscr{S}(X)$, $Y_n \in \mathscr{S}(X)$ et en appliquant à nouveau la proposition 4, $\xi_n \in \mathscr{S}(X)$. Donc $\mathscr{S}(\xi) \subset \mathscr{S}(X)$. ■

Remarque 3. — Puisque $A_{nn} = |Y_n|$, l'image de $\mathscr{H}$ par A_{nn} est contenue dans le domaine initial de ξ_n et par conséquent $\xi_n^* \xi_n A_{nn} = A_{nn}$. Cette remarque nous sera utile au paragraphe 8.

PROPOSITION 6 : *Soient,* $\{A_i, i \in I\}$ *et* $\{B_i, i \in I\}$ *des familles d'éléments de* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, $\{\xi_i, i \in I\}$ *une famille orthonormale de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. *Si les familles* $\{\xi_i A_i, i \in I\}$ *et* $\{\xi_i B_i, i \in I\}$ *sont fortement sommables dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, *alors la famille* $\{B_i^* \xi_i^* \xi_i A_i, i \in I\}$ *est faiblement sommable dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *et l'on a :*

$$\sum_{i \in I} (B_i^* \xi_i^* \xi_i A_i) = \left(\sum_{i \in I} \xi_i B_i\right)^* \left(\sum_{i \in I} \xi_i A_i\right)$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2, en considérant les applications

$$J \to X_J = \sum_{i \in J} \xi_i A_i \ ; \qquad J \to Y_J = \sum_{i \in J} \xi_i B_i$$

(où J désigne une partie finie de I) et les limites de ces applications suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I. ■

PROPOSITION 7. — *Soient* $\{A_i, i \in I\}$ *une famille d'éléments de* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *et* $\{\xi_i, i \in I\}$ *une famille orthonormale de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.
Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(*i*) *La famille* $\{\xi_i A_i, i \in I\}$ *est fortement sommable dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.
(*ii*) *La famille* $\{A_i^* \xi_i^* \xi_i A_i, i \in I\}$ *est faiblement sommable dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

Démonstration : (*i*) entraîne (*ii*) d'après la proposition 6. Prouvons la réciproque. Les notations J et J_0 désignant des parties finies de I, posons

$$Y_J = \sum_{i \in J} \xi_i A_i$$

L'hypothèse (*ii*) implique que pour toute famille finie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'éléments de $\mathscr{H}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe J_0 tel que pour tout J ne rencontrant pas J_0 on ait :

$$0 \leqslant \sum_{i \in J} (A_i^* \xi_i^* \xi_i A_i a_k, a_k) < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

c'est-à-dire, puisque pour tout indice $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ la famille $\{ \xi_i A_i a_k, i \in I \}$ est une famille orthogonale de $\mathscr{K}$,

$$\sum_{i \in J} \| \xi_i A_i a_k \|^2 = \left\| \sum_{i \in J} \xi_i A_i a_k \right\|^2 < \varepsilon \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

et cette dernière inégalité entraîne que l'image du filtre des complémentaires des parties finies de I par l'application $J \to Y_J$ est un filtre de Cauchy dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ muni de la topologie forte. L'ensemble des Y_J est une partie bornée de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. En effet, posons :

$$B = \sum_{i \in I} A_i^* \xi_i^* \xi_i A_i$$

alors, pour toute partie finie J de I

$$Y_J^* Y_J = \sum_{i \in J} A_i^* \xi_i^* \xi_i A_i \leqslant B$$

et par conséquent

$$\| Y_J \|^2 = \| Y_J^* Y_J \| \leqslant \| B \|$$

Puisque $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ est quasi-complet pour la topologie forte ([*1*], p. 31, corollaire 2) le filtre de Cauchy considéré ci-dessus converge, ce qui démontre (*i*).

PROPOSITION 8 : *Soient, $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ et* S *le sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-module à droite fortement fermé engendré par les ξ_i.*

Le projecteur de $\mathscr{K}$ sur le sous-espace fermé S($\mathscr{H}$) *est*

$$P = \sum_{i \in I} \xi_i \xi_i^*$$

(*sommabilité forte ou faible dans* $\mathscr{L}(\mathscr{K})$) *et, à tout élément* X *de* S *correspond une famille* $\{ A_i, i \in I \}$ *d'éléments de* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *telle que*

$$X = \sum_{i \in I} \xi_i A_i \tag{7}$$

(*sommabilité forte dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$).

Démonstration : $\xi_i\xi_i^*$ est le projecteur de $\mathscr{K}$ sur le sous-espace fermé $\xi_i(\mathscr{H})$, domaine final de ξ_i. Ces projecteurs $\xi_i\xi_i^*$ étant orthogonaux, la famille $\{ \xi_i\xi_i^*, i \in I \}$ est fortement sommable (ou, ce qui est équivalent pour des projecteurs, est faiblement sommable) et sa somme est le projecteur sur le sous-espace engendré par les images $\xi_i(\mathscr{H})$, c'est-à-dire $S(\mathscr{H})$.

Pour tout $X \in S$ on a :

$$X = PX = \sum_{i \in I} \xi_i\xi_i^* X$$

d'où l'égalité (7) avec $A_i = \xi_i^* X$. ■

Remarque 4. — Si l'on a :

$$X = \sum_{i \in I} \xi_i A_i = \sum_{i \in I} \xi_i B_i$$

en multipliant à gauche par $\xi_j\xi_j^*$ et en tenant compte de $\xi_j\xi_j^*\xi_i = \delta_{ij}\xi_i$ on a, $\xi_i A_i = \xi_i B_i$ pour tout indice i, ce qui n'entraîne pas nécessairement que $A_i = B_i$. Toutefois dans le cas particulier (qui se présentera au chapitre suivant) où, pour tout indice i, les images de $\mathscr{H}$ par A_i et B_i sont contenues dans le domaine initial de ξ_i, on a $A_i = B_i$ puisque :

$$\forall a \in \mathscr{H}, \quad \| A_i a - B_i a \| = \| \xi_i A_i a - \xi_i B_i a \| = 0$$

COROLLAIRE : *Soit* $\{ \xi_i, i = 1, 2, \ldots, n \}$ *une famille orthonormale finie de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. *Le sous-*$\mathscr{L}(\mathscr{H})$*-module à droite* (*algébrique*) *engendré par les* ξ_i, *est fortement fermé.*

Démonstration : D'après la proposition précédente, tout élément X du sous-module fortement fermé engendré par les ξ_i s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i$$

et appartient au sous-module algébrique. ■

Remarque 5. — Ce corollaire sera utilisé au paragraphe 8 pour le problème de l'approximation linéaire des moindres carrés et pour cette application au calcul des probabilités, il est utile de remarquer que cette propriété du sous-module algébrique, d'être fortement fermé, n'est plus vraie si l'on ne suppose pas que la famille finie (ξ_i) est orthonormale. Si on choisit X de manière que l'image $X(\mathscr{H})$ soit un sous-espace algébrique non fermé de $\mathscr{H}$, le sous-module algébrique engendré par X est strictement plus petit que son adhérence forte (C'est le cas de l'exemple étudié au § 3). Un autre contre-exemple est obtenu en choisissant deux applications partiellement isométriques ξ_1 et ξ_2 telles que le sous-espace fermé engendré par les images $\xi_1(\mathscr{H})$ et $\xi_2(\mathscr{H})$ soit distinct de $\xi_1(\mathscr{H}) + \xi_2(\mathscr{H})$ (pour un exemple de tels sous-espaces, voir [5], § 15).

7. — Applications de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L^2_C(\Omega))$ associées à des vecteurs aléatoires du second ordre.

Soit $x(\omega)$ un vecteur aléatoire du second ordre à valeurs dans $\mathscr{H}$, c'est-à-dire une application fortement mesurable de $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ dans $\mathscr{H}$, telle que $E \| x(\omega) \|^2 < \infty$. Pour chaque vecteur a de $\mathscr{H}$, désignons par Xa la classe d'équivalence de la v. a. $(a, x(\omega))$. C'est un élément de $L^2_C(\Omega)$ puisque

$$E \,|(a, x(\omega))|^2 \leqslant \| a \|^2 E \| x(\omega) \|^2$$

et l'application $a \to Xa$ est une application linéaire continue de $\mathscr{H}$ dans $L^2_C(\Omega)$. Réciproquement, nous dirons qu'une application X appartenant à $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L^2_C(\Omega))$ provient d'un vecteur aléatoire du second ordre $x(\omega)$ si, pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$, la v. a. $(a, x(\omega))$ appartient à la classe d'équivalence Xa. La proposition suivante montre que X provient d'un vecteur aléatoire si et seulement si X est de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire si

$$\mathrm{Tr}\,(X^*X) = \sum_{i \in I} \| Xd_i \|^2 < \infty \quad .$$

où le symbole Tr désigne la trace, et $(d_i)_{i \in I}$ désigne une base orthonormale quelconque de $\mathscr{H}$ (Pour les définitions et les propriétés de la trace, et des opérateurs de Hilbert-Schmidt, voir par exemple [3], chap. I, § 6).

PROPOSITION 9 : $L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$ *est isomorphe au dual de l'espace de Hilbert* $\mathscr{N}$ *des opérateurs de Hilbert-Schmidt de* $\mathscr{H}$ *dans* $L^2_C(\Omega)$.

Démonstration : Considérons l'application de $L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$ dans le produit tensoriel hilbertien $\mathscr{H} \otimes L^2_C(\Omega)$ (pour la définition du produit tensoriel hilbertien, voir par exemple [3], p. 23) qui, à tout vecteur aléatoire x de la forme $x = b\varphi$ où $b \in \mathscr{H}$ et $\varphi \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, fait correspondre $b \otimes \varphi$. Cette application s'étend à l'espace $L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$ tout entier et définit un isomorphisme de $L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$ sur $\mathscr{H} \otimes L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ pour les structures hilbertiennes de ces deux espaces.

D'autre part, soit $\mathscr{N}$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Muni du produit scalaire $(X, Y)_{\mathscr{N}} = \operatorname{Tr}(Y^*X)$, $\mathscr{N}$ est un espace de Hilbert ([3], p. 94). Considérons l'application de $\mathscr{N}$ dans le produit tensoriel hilbertien $\mathscr{H}' \otimes (L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))'$ (où $\mathscr{H}'$ et $(L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))'$ sont les duals respectifs de $\mathscr{H}$ et de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$) qui, à tout opérateur X de la forme $a \to Xa = (a, b)\varphi$, fait correspondre $b \otimes \bar{\varphi}$. Cette application s'étend à l'espace $\mathscr{N}$ tout entier, et définit un isomorphisme de $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{H}' \otimes (L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))'$ ([3], p. 95).

Puisque le dual de $\mathscr{H} \otimes L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ est isomorphe à $\mathscr{H}' \otimes (L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))'$ on obtient l'isomorphisme annoncé. ■

La correspondance entre $L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$ et $\mathscr{N}$ établie au cours de cette proposition et qui, à tout vecteur aléatoire $x = b\varphi$, associe l'opérateur X défini par $Xa = (a, b)\overline{\varphi(\omega)} = (a, x(\omega))$, est la correspondance qui a été définie directement au début de ce paragraphe. Si X et Y sont les opérateurs correspondant respectivement aux vecteurs aléatoires x et y, on a donc :

$$\operatorname{Tr}(X^*Y) = E(x(\omega), y(\omega)) \tag{8}$$

8. — Approximation linéaire des moindres carrés.

On se donne un vecteur aléatoire du second ordre y et une famille de vecteurs aléatoires du second ordre $(x_i)_{i \in I}$ définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ et à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On peut approcher y par des vecteurs aléatoires du type $\sum_{i \in J} A_i x_i$ où J désigne une partie finie de I et les A_i sont des opérateurs linéaires bornés de $\mathscr{H}$. En effet, remplaçons le vecteur aléatoire y et les vecteurs aléatoires x_i par des applications linéaires continues, Y et X_i, de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Soit P le projecteur de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ sur le sous-espace fermé M engendré par les images $X_i(\mathscr{H})$, c'est-à-dire, engendré par toutes les v. a. $(a, x_i(\omega))$ où $i \in I$ et a parcourt $\mathscr{H}$. L'opérateur $Z = PY$ est limite forte de sommes finies du type $\sum_{i \in J} X_i A_i^*$ qui correspondent aux vecteurs aléatoires $\sum_{i \in J} A_i x_i$, puisque PY appartient au sous-$\mathscr{L}(\mathscr{H})$-module à droite fortement fermé engendré par la famille $(X_i)_{i \in I}$ d'après la proposition 1. L'opérateur Z est de Hilbert-Schmidt puisque Y l'est, et le vecteur aléatoire correspondant z satisfait, en outre, à la propriété de minimum que nous voulons imposer à la meilleure approximation des moindres carrés de y en termes des x_i : pour toute partie finie J de I et toute famille $(A_i)_{i \in J}$ d'opérateurs bornés de $\mathscr{H}$ on a :

$$E \| y(\omega) - z(\omega) \|^2 \leqslant E \left\| y(\omega) - \sum_{i \in J} A_i x_i(\omega) \right\|^2$$

puisque pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$, on a :

$$\| Ya - Za \| \leqslant \left\| Ya - \sum_{i \in J} X_i A_i^* a \right\|$$

d'où la définition :

DÉFINITION 5 : *La meilleure approximation linéaire des moindres carrés du vecteur aléatoire du second ordre y en termes des vecteurs aléatoires du second ordre $x_i (i \in I)$, est le vecteur aléatoire du second ordre z associé à l'opérateur $Z = PY \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))$ ou P désigne le projecteur de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ sur le sous-espace fermé engendré par la famille de v. a. $\{ (a, x_i(\omega)) ; i \in I, a \in \mathscr{H} \}$.*

Puisque le vecteur Za est la projection du vecteur Ya sur le sous-espace M, l'approximation de la v. a. $(a, y(\omega))$ en termes de toutes les v. a. $(b, x_i(\omega))$ où $i \in I$ et $b \in \mathscr{H}$, est la v. a. $(a, z(\omega))$. Nous exprimons cette propriété en disant que l'approximation de y ainsi obtenue est la meilleure pour chaque coordonnée.

Nous désirons maintenant obtenir z en fonction des x_i, et dans une formule qui ne fasse intervenir que des opérateurs bornés. Comme nous l'avons déjà indiqué, il n'est pas possible, en général, d'obtenir z directement en fonction des x_i, mais en utilisant la théorie que nous avons développée précédemment, l'opérateur Z associé à z s'exprime à l'aide d'opérateurs ξ_i, obtenus à partir des x_i, et dans une formule qui nous convient. C'est ce que nous allons exposer maintenant.

Supposons d'abord que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est réduite à un seul élément x. Désignons par X l'opérateur de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ associé à x, et par ξ l'opérateur partiellement isométrique associé à X dans la formule de décomposition polaire de X, et que nous avons appelé le normalisé de X. Le projecteur P sur l'adhérence de $X(\mathscr{H})$ est $\xi\xi^*$ donc $Z = PY = \xi\xi^* Y$. Ainsi Z est de la forme ξA, où $A = \xi^* Y$ appartient à $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

Dès que l'on se donne deux vecteurs aléatoires x_1 et x_2, auxquels on associe les opérateurs X_1 et X_2 puis les normalisés ξ_1 et ξ_2, il n'est pas toujours vrai que Z est de la forme $\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$ où A_1 et A_2 appartiennent à $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, puisque le sous-module algébrique engendré par ξ_1 et ξ_2 n'est pas nécessairement fortement fermé (remarque 5) et que Z appartient à l'adhérence forte de ce sous-module. C'est pourquoi nous sommes amenés à utiliser le procédé d'orthonormalisation que nous avons introduit au paragraphe 6.

Si l'ensemble d'indices I de la famille (x_i) est dénombrable, à la suite d'opérateurs (X_i) est associée une famille orthonormale d'opérateurs $(\xi_i)_{i\in I}$ qui engendre le même sous-module fortement fermé S que la famille $(X_i)_{i\in I}$. Le projecteur P est égal à $\sum_{i\in I} \xi_i \xi_i^*$ et par conséquent

$$Z = \sum_{i\in I} \xi_i A_i \qquad \text{où} \qquad A_i = \xi_i^* Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$$

Dans le cas particulier où I est fini, le procédé d'orthonormalisation fournit également l'innovation et l'erreur d'approximation. Identifions I avec un ensemble du type $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ et orthonormalisons la famille $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y$ (Y étant placé en dernier) suivant le procédé indiqué au paragraphe 6. On obtient une famille $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, d'opérateurs partiellement isométriques, deux à deux orthogonaux, et des éléments A_{ki} de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que :

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i A_{ki}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_{ni}$$

Puisque $P = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \xi_i^*$, l'approximation de y en termes des x_i correspond à l'opérateur

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i A_{ni}$$

et la partie restante que nous appelons innovation, correspond à

$$Y - Z = \xi_n A_{nn}$$

Pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$ on a :

$$E\,|(a, y(\omega) - z(\omega))|^2 = \| Ya - Za \|^2 = \| \xi_n A_{nn} a \|^2 = \| A_{nn} a \|^2$$

puisque, d'après la remarque 3, $\xi_n^* \xi_n A_{nn} = A_{nn}$. Ainsi l'opérateur $D = A_{nn}^* A_{nn}$ fournit les erreurs d'approximation

$$E\,|(a, y(\omega) - z(\omega))|^2 = (Da, a)$$

et

$$E\,\| y(\omega) - z(\omega) \|^2 = \mathrm{Tr}\, D.$$

9. — Covariance d'une fonction aléatoire à valeurs vectorielles.

Soit $t \to x_t(\omega)$ une application définie sur un ensemble T et dont les valeurs sont des vecteurs aléatoires du second ordre. A chaque vecteur aléatoire x_t correspond une application $X_t \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))$ et nous appelons fonction de covariance de la fonction aléatoire x, l'application $\Gamma(s, t) = X_t^* X_s$ définie sur $T \times T$ et à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, puisque pour tout couple a, b de vecteurs de $\mathscr{H}$

$$(\Gamma(s, t)a, b) = (X_s a, X_t b) = E\,\{ (a, x_s(\omega))\overline{(b, x_t(\omega))} \}$$

Plus généralement, à toute fonction $t \to X_t$ de T dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ nous associons la fonction $\Gamma(s, t) = X_t^* X_s$ que nous appelons également fonction de covariance.

PROPOSITION 10 : *Soient,* T *un ensemble,* $\mathscr{H}$ *un espace de Hilbert complexe,* $\Gamma(s, t)$ *une application de* $T \times T$ *dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$*. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un espace de Hilbert* $\mathscr{K}$ *et une application* $t \to X_t$ *de* T *dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *telle que* $X_t^* X_s = \Gamma(s, t)$.

(ii) *Pour toute partie finie* J *de* T *et toute famille* $\{ a_s, s \in J \}$ *d'éléments de* $\mathscr{H}$,

$$\sum_{(s,t) \in J \times J} (\Gamma(s, t)a_s, a_t) \geqslant 0$$

(iii) *Pour toute partie finie* J *de* T *et toute famille* $\{ A_s, s \in J \}$ *d'éléments de* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$

$$\sum_{(s,t) \in J \times J} A_t^* \Gamma(s, t) A_s \geqslant 0$$

Démonstration : Cette proposition généralise le résultat suivant dû à E. H. Moore [*10*] et que nous allons utiliser dans la suite :

Soit $\gamma(s, t)$ une application de $T \times T$ dans le plan complexe. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)'$ Il existe un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et une application $t \to u(t)$ de T dans $\mathscr{H}$ telle que :

$$(u(s), u(t)) = \gamma(s, t)$$

$(ii)'$ Pour toute partie finie J de T et toute famille $\{ \lambda_s, s \in J \}$ de nombres complexes,

$$\sum_{(s,t) \in J \times J} \lambda_s \bar{\lambda}_t \gamma(s, t) \geqslant 0$$

(Une fonction vérifiant cette dernière condition est dite de type positif).

Il est immédiat que $(i)'$ entraîne $(ii)'$ et pour la réciproque, il suffit de considérer l'espace vectoriel $\mathscr{H}$ des fonctions à valeurs complexes définies sur T, de la forme :

$$\tau \to \sum_{s \in J} \lambda_s \gamma(s, \tau)$$

(J désignant une partie finie de T) que l'on munit de la forme hermitienne positive non dégénérée :

$$\left(\sum_{s \in J} \lambda_s \gamma(s, .), \sum_{t \in J'} \mu_t \gamma(t, .)\right) = \sum_{s \in J} \sum_{t \in J'} \lambda_s \bar{\mu}_t \gamma(s, t)$$

Revenons à la proposition 10. La seule démonstration qui nécessite une explication est que (ii) entraîne (i). Soit $(d_i)_{i \in I}$ une base orthonormale de $\mathscr{H}$. Considérons l'ensemble $\hat{T} = I \times T$ et la fonction γ définie sur $\hat{T} \times \hat{T}$ par :

$$\gamma((i, s) \ , \ (j, t)) = (\Gamma(s, t) d_i \ , \ d_j) \tag{9}$$

C'est une fonction à valeurs complexes de type positif d'après (ii). Il existe donc un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et une application $(i, s) \to u(i, s)$ de $\hat{T}$ dans $\mathscr{H}$ telle que :

$$(u(i, s) \ , \ u(j, t)) = \gamma((i, s) \ , \ (j, t)) \tag{10}$$

Soient, a un vecteur de $\mathscr{H}$, α_i la coordonnée d'indice i de a. Nous allons montrer que pour chaque t fixé, la famille de vecteurs $\{ \alpha_i u(i, t), i \in I \}$ est sommable dans $\mathscr{H}$. A tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une famille finie $J \subset I$, telle que pour toute autre famille finie $K \subset I$, ne rencontrant pas J, on ait :

$$\sum_{i \in K} |\alpha_i|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

ou encore, $\| a_K \| \leqslant \varepsilon$, en désignant par a_K la projection de a sur le sous-espace engendré par la sous-famille $(d_i)_{i \in K}$ de vecteurs de base. Alors :

$$\left\| \sum_{i \in K} \alpha_i u(i, t) \right\|^2 = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} \alpha_i \bar{\alpha}_j (\Gamma(t, t) d_i, d_j) \tag{11}$$
$$= (\Gamma(t, t) a_K, a_K) \leqslant \| \Gamma(t, t) \| \cdot \| a_K \|^2 \leqslant \| \Gamma(t, t) \| . \varepsilon^2$$

Nous pouvons donc poser

$$X_t a = \sum_{i \in I} \alpha_i u(i, t)$$

L'application X_t définie par $a \to X_t a$ est un élément de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$: la linéarité est immédiate et d'après (11) on a pour toute partie finie K de I :

$$\| X_t a_K \|^2 \leqslant \| \Gamma(t, t) \| \cdot \| a_K \|^2$$

et par conséquent

$$\| X_t a \|^2 \leqslant \| \Gamma(t, t) \| \cdot \| a \|^2$$

ce qui prouve la continuité. Finalement, il résulte de (9) et (10) que $X_t^* X_s = \Gamma(s, t)$. ■

Remarque 6. Il existe une forme probabiliste bien connue du théorème de Moore utilisé dans la démonstration précédente : étant donnée une fonction à valeurs complexes de type positif $\gamma((i, s), (j, t))$ définie sur $\hat{T} \times \hat{T}$, il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ et une fonction aléatoire du second ordre, $(j, t) \to \chi(j, t) \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, définie sur $\hat{T}$ et telle que :

$$\gamma((i, s)\ ,\ (j, t)) = E(\chi(i, s)\overline{\chi(j, t)})$$

En utilisant ce résultat dans la démonstration précédente, la première propriété de la proposition 10 peut être remplacée par :

$(i)''$ Il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ et une application $t \to X_t$ de T dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))$ telle que $X_t^* X_s = \Gamma(s, t)$.

On en déduit le

COROLLAIRE. *Soit* $\Gamma(s, t)$ *une fonction de* $T \times T$ *dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. *Il existe un espace de probabilité* $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ *et une application* $t \to x_t$ *de* T *dans* $L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$, *ayant pour covariance* $\Gamma(s, t)$, *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\Gamma(s, t)$ *est de type positif (c'est-à-dire, satisfait aux deux conditions équivalentes (ii) et (iii) de la proposition 10).*

(ii) *Pour tout* $t \in \mathrm{T}$, $\Gamma(t, t)$ *est un opérateur à trace finie.*

Remarque 7. Dans le cas où $\mathscr{H}$ est complexe, il résulte de la propriété (*ii*) de la proposition 10, que $(\Gamma(s, t))^* = \Gamma(t, s)$, qui est une propriété évidente des covariances puisque $(X_t^* X_s)^* = X_s^* X_t$. Dans le cas où $\mathscr{H}$ est réel, il faudra prendre cette propriété de Γ comme hypothèse supplémentaire de manière que l'on ait :

$$\gamma((j, t)\ ,\ (i, s)) = \gamma((i, s)\ ,\ (j, t))$$

CHAPITRE II

SUITES STATIONNAIRES DE VECTEURS ALÉATOIRES

1. — Introduction.

L'étude des suites stationnaires de vecteurs aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de dimension finie a été faite par Wiener et Masani [*14*]. Rappelons rapidement les résultats. Soit (x_n) une suite de vecteurs aléatoires du second ordre à valeurs dans l'espace $\mathscr{H}$ de dimension q, c'est-à-dire que pour tout entier n, x_n est un ensemble de q variables aléatoires $\left(x_n^{(j)}\right)_{1 \leq j \leq q}$ appartenant à $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Cette suite est dite stationnaire si la matrice de covariance $\left(\mathrm{E}\left(x_n^{(i)} \overline{x_m^{(j)}}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq q}$ ne dépend que de la différence $n - m$. Le passé du processus à l'instant n est représenté par le sous-espace fermé $\mathscr{M}_{n-1}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, engendré par la famille de v. a. $\{ x_k^{(j)} ;\ 1 \leq j \leq q,\ k \leq n-1 \}$. Parmi les vecteurs aléatoires y dont toutes les coordonnées $y^{(j)}$ sont dans $\mathscr{M}_{n-1}$, il en est un, désigné par $(x_n | \mathscr{M}_{n-1})$, qui minimise la quantité

$$\mathrm{E} \| x_n - y \|^2 = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{E} | x_n^{(j)} - y^{(j)} |^2 .$$

L'innovation est le vecteur aléatoire $z_n = x_n - (x_n | \mathscr{M}_{n-1})$. Le processus est dit déterministe si $z_n = 0$ pour tout n (il suffit que $z_n = 0$ pour un entier n) et purement non déterministe si

$$\mathcal{M}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{M}_n = \{0\}.$$

On obtient la décomposition de Wold : $x_n = u_n + v_n$ où $v_n = (x_n \mid \mathcal{M}_{-\infty})$ est une suite stationnaire déterministe, $u_n = x_n - v_n$ est purement non déterministe et s'écrit sous forme d'une moyenne glissante,

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z_{n-k},$$

où les A_k sont des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$ dans lui-même.

Ces résultats peuvent être étendus de manière évidente au cas d'un espace $\mathcal{H}$ de dimension infinie. Mais en utilisant les techniques qui nous ont permis de résoudre le problème de l'approximation linéaire des moindres carrés, nous pouvons les obtenir sous une forme intrinsèque et en ne faisant intervenir que des opérateurs bornés. C'est l'objet du paragraphe 3.

Depuis Kolmogorov [8] on sait qu'à toute suite stationnaire de v. a. du second ordre est associé un opérateur unitaire T agissant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ et que la représentation spectrale de la suite stationnaire de v. a. se déduit de la représentation spectrale de l'opérateur T. C'est ce que nous faisons pour des vecteurs aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert. L'opérateur unitaire T est introduit au paragraphe 2 et la représentation spectrale est présentée au paragraphe 4. Le début de ce chapitre correspond par conséquent à des résultats connus ou facilement prévisibles mais présentés d'une manière que nous croyons plus élégante.

Dans le cas d'une suite non déterministe de v. a., la décomposition de Wold correspond à la décomposition de la mesure spectrale en partie absolument continue et partie singulière. Ce résultat est faux dès que l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension deux car, la partie déterministe (qui comprend en tout cas la partie singulière de la mesure spectrale) peut comprendre une partie absolument continue de la mesure spectrale. Nous démontrons que la répartition de la partie absolument continue de la mesure spectrale en une partie purement non déterministe et une partie déterministe, correspond à la décomposition, en une partie factorisable maximum et une partie purement non factorisable, de la dérivée de la mesure spectrale qui est une fonction matricielle, ne correspondant pas nécessairement à un opérateur borné dans le cas de dimension infinie. Cette décomposition des fonctions matricielles et son application aux suites stationnaires est présentée aux paragraphes 5 et 6.

Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie, Rozanov [13] a démontré, par une voie assez longue, que la décomposition de la mesure spectrale en partie absolument continue et partie singulière, correspond à une décomposition de la suite stationnaire de vecteurs aléatoires en la somme de deux suites stationnaires orthogonales (en un sens qui sera précisé). Nous généralisons ce résultat aux espaces de Hilbert en le déduisant du fait que, (E_λ) désignant la famille de projecteurs spectraux de l'opérateur unitaire $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, l'ensemble des vecteurs u appartenant à $\mathscr{H}$ et tels que la mesure $d(E_\lambda u, u)$ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$ dont le projecteur appartient au bicommutant de la famille $(T^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Finalement nous pouvons décomposer la mesure spectrale du processus en trois parties : la partie factorisable maximum de la densité spectrale, une partie absolument continue dont la dérivée est purement non factorisable, la partie singulière. A cette décomposition unique de la mesure spectrale correspond une décomposition de la suite stationnaire en trois parties, dont la première est l'innovation du processus par rapport au passé indéfiniment reculé.

Ceci nous conduit au problème de factorisabilité d'une fonction $W(\lambda)$ définie sur le tore à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ et plus généralement à la factorisabilité des fonctions matricielles définies positives. La fonction $W(\lambda)$ à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ et de norme intégrable est dite factorisable si $W(\lambda) = A^*(\lambda)A(\lambda)$ où les coefficients de Fourier d'indices négatifs de $A(\lambda)$ sont nuls. Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie et si $W(\lambda)(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$, Wiener et Masani [14] ont montré qu'il en est ainsi, si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} \log \det W(\lambda) d\lambda > -\infty.$$

Helson et Lowdenslager (voir [6]) ont généralisé ce résultat au cas où $J(\lambda) = W(\lambda)(\mathscr{H})$ n'est pas l'espace entier : une condition nécessaire et suffisante de factorisabilité est que $J(\lambda)$ soit une fonction image conjuguée analytique et que $\int_0^{2\pi} \log \det W_J(\lambda) d\lambda > -\infty$, $W_J(\lambda)$ désignant la restriction de $W(\lambda)$ à $J(\lambda)$. Si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, Devinatz [2] a démontré une condition suffisante de factorisabilité : $W(\lambda)$ est inversible p. p. et

$$\int_0^{2\pi} \log \| W^{-1}(\lambda) \| d\lambda < +\infty.$$

Tout en simplifiant la preuve de Devinatz, Helson et Lowdenslager (voir [6]) ont généralisé ce résultat en montrant que l'ensemble des trois conditions suivantes est suffisant pour la factorisabilité : la fonction image

$$J(\lambda) = \overline{W(\lambda)(\mathscr{H})}$$

est conjuguée analytique (ou, ce qui est équivalent, le projecteur $P(\lambda)$ sur $J(\lambda)$ définit une fonction factorisable), $\rho(\lambda) = \inf\limits_{a \in J(\lambda)} (W(\lambda)a, a) > 0$ p. p.,

$$\int_0^{2\pi} \log \rho(\lambda) d\lambda > -\infty$$

(cette dernière condition étant équivalente à la condition de Devinatz). Au paragraphe 8, nous indiquons une caractérisation des fonctions factorisables à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ qui fournit une représentation permettant de construire de nombreux exemples de fonctions factorisables à partir de la connaissance des fonctions images conjuguées analytiques.

L'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est quelconque (réel ou complexe, séparable ou non) aux paragraphes 2 et 3. Il est supposé complexe aux paragraphes 4 et 7, complexe et séparable aux paragraphes 5, 6 et 8.

2. — Applications stationnaires d'un groupe G dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

Soient $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ deux espaces de Hilbert, tous deux réels ou tous deux complexes, $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{K}$.

DÉFINITION 1 : *Une application $s \to X_s$ d'un groupe G dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ est dite stationnaire si $X_t^* X_s$ ne dépend que de $t^{-1}s$.*

PROPOSITION 1 : *Soient $s \to X_s$ une application stationnaire d'un groupe G dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ et $\mathscr{M}$ le sous-espace fermé de $\mathscr{K}$ engendré par la famille*

(1) $$\{ X_s a : s \in G, a \in \mathscr{H} \}$$

Il existe alors une représentation unitaire unique $t \to T_t$ de G dans $\mathscr{M}$ telle que :

(2) $$X_{ts} = T_t X_s$$

Démonstration : Remarquons d'abord que pour toute partie finie J de G et toute famille $\{ a_s, s \in J \}$ d'éléments de $\mathscr{H}$, on a :

$$\forall t \in G, \quad \left\| \sum_{s \in J} X_{ts} a_s \right\| = \left\| \sum_{s \in J} X_s a_s \right\| \tag{3}$$

Il suffit en effet d'élever le premier membre au carré, de le développer et d'utiliser la propriété $X^*_{ts'} X_{ts} = X^*_{s'} X_s$.

Soit $\mathscr{M}'$ le sous-espace algébrique de $\mathscr{H}$ engendré par la famille (1). Tout élément $u \in \mathscr{M}'$ s'écrit :

$$u = \sum_{s \in J} X_s a_s$$

Une somme de ce type définissant u peut ne pas être unique, mais si :

$$u = \sum_{s \in J} X_s a_s = \sum_{s \in J} X_s b_s$$

(on peut toujours prendre le même ensemble d'indices J, certains des vecteurs a_s et b_s étant alors nuls) on a :

$$\sum_{s \in J} X_{ts} a_s = \sum_{s \in J} X_{ts} b_s$$

puisque d'après l'égalité (3)

$$\left\| \sum_{s \in J} X_{ts}(a_s - b_s) \right\| = \left\| \sum_{s \in J} X_s(a_s - b_s) \right\| = 0$$

ce qui permet de définir sans ambiguïté T_t sur $\mathscr{M}'$ par :

$$T_t\left(\sum_{s \in J} X_s a_s \right) = \sum_{s \in J} X_{ts} a_s$$

Chaque opérateur T_t est linéaire et isométrique d'après (3). Sa définition peut donc être étendue par continuité à $\mathscr{M}$. L'égalité (2) est satisfaite et l'on vérifie sans difficulté que la famille d'opérateurs $\{ T_t, t \in G \}$ est un groupe. Chaque opérateur T_t étant isométrique et possédant un inverse $T_{t^{-1}}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{M})$, est un opérateur unitaire. ■

Proposition 2 : *Si* G *est un groupe topologique et si* $s \to X_s$ *est une application stationnaire faiblement continue de* G *dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, *alors l'application* $t \to T_t$, *définie par la proposition précédente, est une application faiblement continue de* G *dans* $\mathscr{L}(\mathscr{M})$.

Démonstration : Soient u et v deux éléments de $\mathscr{M}$. A tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $u' \in \mathscr{M}'$ tel que $\| u - u' \| < \varepsilon$. A ce vecteur u' est associée une somme finie

$$u' = \sum_{s \in J} X_s a_s$$

On a :

$$|(T_t u, v) - (T_{t_0} u, v)| \leq |(T_t u - T_t u', v)| + |(T_t u' - T_{t_0} u', v)| + |(T_{t_0} u' - T_{t_0} u, v)|$$

Au second membre de cette inégalité, le 1$^{\text{er}}$ et le 3$^{\text{e}}$ terme sont tous deux inférieurs à $\varepsilon \| v \|$ et le 2$^{\text{e}}$ terme est majoré par

$$\sum_{s \in J} |(X_{ts} a_s - X_{t_0 s} a_s, v)|$$

quantité arbitrairement petite en prenant t suffisamment voisin de t_0. ∎

Remarque 1. Il est toujours possible de définir T_t sur l'espace entier $\mathscr{K}$, de manière que l'application $t \to T_t$ soit une représentation unitaire de G dans $\mathscr{K}$, faiblement continue dans le cas de la proposition 2. Par exemple, on posera $T_t u = u$ pour tout vecteur u orthogonal à $\mathscr{M}$.

3. — Décomposition de Wold des suites stationnaires de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

Considérons le cas particulier où $G = \mathbb{Z}$ (groupe additif des entiers relatifs). A toute suite stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on associe :

$\mathscr{M}'_n(X)$, sous-espace algébrique de $\mathscr{K}$ engendré par la famille

$$\{ X_k a : k \leq n, a \in \mathscr{H} \}$$

$\mathscr{M}_n(X)$, adhérence de $\mathscr{M}'_n(X)$

$$\mathscr{M}_{-\infty}(X) = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} \mathscr{M}_n(X)$$

$\mathscr{M}_{+\infty}(X)$, sous-espace fermé de $\mathscr{K}$ engendré par les sous-espaces $\mathscr{M}_n(X)$, lorsque n parcourt $\mathbb{Z}$.

D'après la proposition 1, il existe un opérateur unitaire unique, $T \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{+\infty}(X))$ tel que $X_n = T^n X_0$. Il est possible, et de plusieurs manières, de définir un opérateur unitaire $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, dont la restriction à $\mathscr{M}_{+\infty}(X)$ soit l'opérateur précédent. Dans ce qui suit, on suppose qu'un tel T a été choisi une fois pour toutes.

DÉFINITION 2 : *La suite* (X_n) *est dite déterministe si* $\mathscr{M}_n(X)$ *est indépendant de n. Elle est dite purement non déterministe si* $\mathscr{M}_{-\infty}(X) = \{ 0 \}$.

DÉFINITION 3 : *Deux suites stationnaires* (U_n) *et* (V_n) *sont dites orthogonales si* $\mathscr{M}_{+\infty}(U) \perp \mathscr{M}_{+\infty}(V)$.

La proposition 3 généralise, pour des suites stationnaires de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, les résultats de la décomposition de Wold des suites stationnaires de v. a., déjà obtenus dans [*14*] pour des suites stationnaires de vecteurs aléatoires à valeurs dans un espace de dimension finie.

PROPOSITION 3 : *Toute suite stationnaire* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, *est la somme de deux suites stationnaires orthogonales* (U_n) *et* (V_n), *associées au même opérateur unitaire* T *que la suite* (X_n), *où* (U_n) *est purement non déterministe et* (V_n) *est déterministe.*

La suite (U_n) *s'écrit sous forme d'une moyenne glissante, c'est-à-dire que chaque terme* U_n *est la somme d'une série fortement convergente :*

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{n-k} A_k \tag{4}$$

où $A_k \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ *et* $\{ \zeta_n = T^n \zeta_0, n \in \mathbb{Z} \}$ *est une suite stationnaire d'opérateurs partiellement isométriques, deux à deux orthogonaux. Et l'on a, si* $n \geq m$:

$$U_m^* U_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* A_{n-m+k} \tag{5}$$

(*la série convergeant faiblement dans* $\mathscr{L}(\mathscr{H})$).

Démonstration : Il résulte de la définition de $\mathscr{M}'_n(X)$ que l'on a

$$\mathscr{M}'_{n+k}(X) = T^k(\mathscr{M}'_n(X)).$$

Puisque $\mathscr{M}_n(X)$ est l'adhérence de $\mathscr{M}'_n(X)$ et que T est unitaire,

$$\mathscr{M}_{n+k}(X) = T^k(\mathscr{M}_n(X))$$

et par conséquent, pour le projecteur P_n de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{M}_n(X)$, on a l'égalité $P_{n+k}T^k = T^kP_n$. Fixons k et faisons tendre n vers $-\infty$, on obtient l'égalité $P_{-\infty}T^k = T^kP_{-\infty}$, où $P_{-\infty}$ désigne le projecteur sur $\mathscr{M}_{-\infty}(X)$.

Définissons V_n en posant $V_n = P_{-\infty}X_n$ et soit $U_n = X_n - V_n$. Pour tout couple n, m d'entiers, on a $V_m^*U_n = 0$, et puisque T permute avec $P_{-\infty}$, les suites U_n et V_n sont de la forme $U_n = T^nU_0$, $V_n = T^nV_0$.

La suite (U_n) est purement non déterministe puisque $Q_n = P_n - P_{-\infty}$ est le projecteur sur $\mathscr{M}_n(U)$ et que $\lim\limits_{n\to-\infty} Q_n = 0$ (limite forte ou faible, dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, d'une suite décroissante de projecteurs).

Prouvons l'égalité $\mathscr{M}_n(V) = \mathscr{M}_{-\infty}(X)$. Il résulte de la définition de V_n que $\mathscr{M}_n(V) \subset \mathscr{M}_{-\infty}(X)$ et s'il existait un vecteur non nul u appartenant à $\mathscr{M}_{-\infty}(X)$ et perpendiculaire à $\mathscr{M}_n(V)$ on aurait, pour tout $k \leq n$ et tout vecteur a de $\mathscr{H}$, $u \perp V_k a$ et $u \perp U_k a$ (puisque $U_k a \perp \mathscr{M}_{-\infty}(X)$) donc $u \perp X_k a$; finalement $u \perp \mathscr{M}_n(X) \supset \mathscr{M}_{-\infty}(X)$ contrairement aux hypothèses $u \in \mathscr{M}_{-\infty}(X)$ et $u \neq 0$. La suite (V_n) est donc déterministe.

Démontrons maintenant la décomposition de U_n en moyenne glissante. Soit $Z_n = X_n - P_{n-1}X_n$. Puisque $P_{n-1} = T^nP_{-1}T^{-n}$ on a :

$$Z_n = T^nX_0 - (T^nP_{-1}T^{-n})T^nX_0 = T^nZ_0$$

La suite (Z_n) est donc stationnaire et si ζ_n désigne l'opérateur partiellement isométrique associé à Z_n dans la formule de décomposition polaire $Z_n = \zeta_n |Z_n|$, on a :

$$Z_n = T^nZ_0 = T^n\zeta_0 |Z_0|$$

$T^n\zeta_0$ est un opérateur partiellement isométrique puisque ζ_0 l'est, et le domaine initial de $T^n\zeta_0$ étant celui de ζ_0 (c'est-à-dire l'adhérence de $|Z_0|(\mathscr{H})$) il résulte de l'unicité de la décomposition polaire de Z_n que $\zeta_n = T^n\zeta_0$. D'autre part, puisque la suite (P_n) est une suite croissante de projecteurs et que $Z_n = (P_n - P_{n-1})X_n$, les sous-espaces $Z_n(\mathscr{H})$ sont deux à deux orthogonaux et la suite (ζ_n) est orthonormale au sens de la définition 4 du chapitre premier.

Le projecteur sur $\overline{Z_n(\mathscr{H})}$ étant $\zeta_n\zeta_n^*$, on a :

$$Q_n = P_n - P_{-\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{n-k}\zeta_{n-k}^*$$

et par conséquent,

$$U_n = Q_nX_n = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{n-k}A_k$$

où A_k ne dépend que de k puisque :

$$A_k = \zeta^*_{n-k} X_n = (T^{n-k}\zeta_0)^*(T^n X_0) = \zeta_0^* T^k X_0$$

L'égalité (5) est une conséquence de la proposition 6 du chapitre premier en tenant compte de :

$$\zeta_p^* \zeta_p A_k = \zeta_p^* \zeta_p \zeta_p^* X_{p+k} = \zeta_p^* X_{p+k} = A_k \quad \blacksquare$$

Remarque 2. On a $A_0 = |Z_0|$ puisque :

$$\begin{aligned} A_0 &= \zeta_0^* X_0 = \zeta_0^* \zeta_0 \zeta_0^* X_0 = \zeta_0^*(P_0 - P_{-1})X_0 \\ &= \zeta_0^* Z_0 = \zeta_0^* \zeta_0 |Z_0| = |Z_0| \end{aligned}$$

Il en résulte en particulier que $A_0(\mathscr{H})$ est dense dans $\mathscr{H}_0$, domaine initial commun à tous les opérateurs partiellement isométriques ζ_n. $\blacksquare$

Si chaque X_n provient d'un vecteur aléatoire du second ordre $x_n \in L^2_{\mathscr{H}}(\Omega)$, ce qui a lieu si et seulement si $\mathrm{Tr}\,(X_n^* X_n) = \mathrm{Tr}\,(X_0^* X_0) < \infty$, les opérateurs U_n, V_n, $\zeta_{n-k}A_k$, qui interviennent dans la décomposition de Wold sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, puisque chacun d'eux est obtenu en multipliant à gauche X_n par un projecteur de $\mathscr{H}$, et par conséquent correspondent à des vecteurs aléatoires du second ordre. En outre, puisque

$$X_n^* X_n = U_n^* U_n + V_n^* V_n$$

et que

$$U_n^* U_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* A_k$$

on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(A_k^* A_k) = \mathrm{Tr}\,(U_n^* U_n) \leq \mathrm{Tr}\,(X_n^* X_n) < \infty \tag{6}$$

L'utilisation de la décomposition de Wold pour le problème de prévision linéaire se fait comme dans le cas de variables aléatoires et les résultats sont analogues. La prévision linéaire de x_{n+p} en termes de x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, . . ., est le vecteur aléatoire y associé à l'opérateur de Hilbert-Schmidt :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{n-k} A_{p+k} + V_{n+p}$$

l'innovation, pour un délai p après le temps n, est le vecteur aléatoire associé à l'opérateur

$$\sum_{k=0}^{p-1} \zeta_{n+p-k} A_k$$

et l'opérateur

$$D = \sum_{k=0}^{p-1} A_k^* A_k$$

fournit les erreurs de prévision $E\,|(a, x_{n+p}) - (a, y)|^2 = (Da, a)$ et

$$E\,\| x_{n+p} - y \|^2 = \operatorname{Tr} D.$$

Remarque 3. Il résulte immédiatement de la décomposition de Wold que, p désignant un entier positif fixé, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour un entier n, $X_n a \in \mathscr{M}_{n-p}(X)$
(ii) Pour tout entier n, $X_n a \in \mathscr{M}_{n-p}(X)$
(iii) $A_j a = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$.

On en déduit l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) Pour un entier n, $X_n a \in \mathscr{M}_{-\infty}(X)$
(ii) Pour tout entier n, $X_n a \in \mathscr{M}_{-\infty}(X)$
(iii) $A_j a = 0$ pour tout $j \geq 0$.

4. — Représentation spectrale d'une application stationnaire faiblement continue d'un groupe abélien localement compact dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

La représentation spectrale d'une suite stationnaire de v. a. se déduit de la formule de décomposition spectrale de l'opérateur unitaire associé à cette suite. Ce procédé s'applique aux suites stationnaires de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ ce que nous précisons dans la proposition suivante :

PROPOSITION 4 : *Soient $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ deux espaces de Hilbert complexes, $s \to X_s$ une application stationnaire faiblement continue d'un groupe abélien localement compact* G *dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, $s \to T_s$ une représentation unitaire du groupe* G *dans $\mathscr{K}$, associée (selon la proposition 1) à l'application stationnaire $s \to X_s$, $\widehat{G}$ le groupe dual de* G, E_λ *la mesure spectrale (définie sur les boréliens de $\widehat{G}$) associée à la représentation unitaire $s \to T_s$.*

Si l'on pose $Y_\sigma = E_\sigma X_e$, *où* e *désigne l'élément neutre de* G *et* σ *un borélien de* $\hat{G}$ *on a :*

$$\text{(7)} \qquad X_s = \int_{\hat{G}} \overline{< s, \lambda >}\, dY_\lambda$$

et

$$\text{(8)} \qquad X_t^* X_s = \int_{\hat{G}} \overline{< t^{-1}s, \lambda >}\, d(Y_\lambda^* Y_\lambda)$$

Démonstration : L'égalité (7) est une conséquence immédiate de la relation $X_s = T_s X_e$ et de la formule de Stone

$$T_s = \int_{\hat{G}} \overline{< s, \lambda >}\, dE_\lambda$$

Rappelons la signification de cette formule. A chaque ensemble borélien σ de $\hat{G}$ correspond un projecteur $E_\sigma \in \mathscr{L}(\mathscr{K})$ tel que $E_\varphi = 0$, $E_{\hat{G}} = I$, $E_{\sigma \cap \sigma'} = E_\sigma E_{\sigma'}$ et si $\sigma = \bigcup_n \sigma_n$ où les $\sigma_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont des boréliens disjoints, $E_\sigma = \sum_n E_{\sigma_n}$. Pour chaque couple u, v d'éléments de $\mathscr{K}$, l'application $\sigma \to (E_\sigma u, v)$ est une mesure bornée sur $\hat{G}$ et l'intégrale de la fonction $\lambda \to \overline{< s, \lambda >}$ par rapport à cette mesure est $(T_s u, v)$.

Si l'on pose $Y_\sigma = E_\sigma X_e$ on a donc les propriétés suivantes :

$$Y_\varphi = 0, \qquad Y_{\hat{G}} = X_e, \qquad Y_\sigma^* Y_{\sigma'} = X_e^* E_\sigma E_{\sigma'} X_e = X_e^* E_{\sigma \cap \sigma'} X_e,$$

et si

$$\sigma = \bigcup_n \sigma_n$$

où les σ_n sont disjoints, $Y_\sigma = \sum_n Y_{\sigma_n}$ (sommabilité forte d'applications orthogonales de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$). En outre, pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$ et tout vecteur v de $\mathscr{K}$, l'application $\sigma \to (Y_\sigma a, v)$ est une mesure bornée sur $\hat{G}$ et l'intégrale de la fonction $\lambda \to \overline{< s, \lambda >}$ par rapport à cette mesure est $(X_s a, v)$ d'où l'égalité (7). Pour tout couple a, b d'éléments de $\mathscr{H}$ on a :

$$(X_s a, X_t b) = (X_{t^{-1}s} a, X_e b) = \int_{\hat{G}} \overline{< t^{-1}s, \lambda >}\, d(Y_\lambda a, X_e b)$$

d'où l'égalité (8) puisque

$$X_e^* Y_\sigma = X_e^* E_\sigma X_e = Y_\sigma^* Y_\sigma. \quad \blacksquare$$

Remarque 4. La représentation unitaire T_s n'est définie de manière unique que sur le sous-espace $\mathcal{M}_{+\infty}(X)$, mais puisque $\mathcal{M}_{+\infty}(X)$ réduit chaque opérateur T_s, la restriction à $\mathcal{M}_{+\infty}(X)$ de chaque projecteur E_σ ne dépend pas du choix de T_s sur l'orthogonal de $\mathcal{M}_{+\infty}(X)$, et puisque $X_e(\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}_{+\infty}(X)$, les applications Y_σ sont déterminées de manière unique.

Remarque 5. Dans le cas particulier où $\mathcal{K} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ et où chaque application X_s provient d'un vecteur aléatoire du second ordre (et il suffit qu'il en soit ainsi pour une seule valeur de s puisque $X_s^* X_s$ ne dépend pas de s), à l'application Y_σ est associé un vecteur aléatoire du second ordre puisque

$$\operatorname{Tr}(Y_\sigma^* Y_\sigma) = \operatorname{Tr}(X_e^* E_\sigma X_e) \leq \operatorname{Tr}(X_e^* X_e) < \infty$$

Les formules (7) et (8) sont donc les généralisations des représentations spectrales des fonctions aléatoires stationnaires du second ordre, et de leurs covariances.

Cas particuliers : 1) Si $G = \mathbb{Z}$, groupe additif des entiers relatifs, $\widehat{G}$ est le tore à une dimension. Identifions le tore à l'intervalle $[0,2\pi[$ et, pour tout $\lambda \in [0,2\pi[$, désignons par Y_λ l'opérateur Y_σ où $\sigma = [0,\lambda[$. On a les propriétés suivantes : $Y_0 = 0$, $Y_{2\pi} = X_0$, les Y_λ sont à accroissements orthogonaux, c'est-à-dire que :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow Y_{\lambda_1}^*(Y_{\lambda_2} - Y_{\lambda_1}) = 0$$

et les égalités (7) et (8) s'écrivent

$$X_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\lambda} dY_\lambda \tag{7'}$$

$$X_m^* X_n = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\lambda} d(Y_\lambda^* Y_\lambda) \tag{8'}$$

2) Si $G = \mathbb{R}$, groupe additif des réels, $\widehat{G} = \mathbb{R}$ et l'on a des propriétés analogues aux précédentes où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où les intégrales sur $[0,2\pi[$ sont remplacées par des intégrales sur $\mathbb{R}$.

5. — Décomposition des fonctions matricielles définies positives.

Pour un espace $\mathcal{H}$ de dimension plus grande que 1, la décomposition de Wold d'un processus non déterministe ne correspond plus à la décomposition de la mesure spectrale en partie absolument continue et partie singulière puisqu'à la partie déterministe du processus peut correspondre une partie absolument continue de la mesure spectrale. Nous indiquons un tel exemple dans la remarque 8. Et c'est pour caractériser la mesure spectrale correspondant à la partie purement non déterministe d'une suite stationnaire, que nous introduisons maintenant la notion de partie factorisable maximum d'une fonction matricielle définie positive.

Soient, $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, $(d_n)_{n\in \mathrm{N}}$ une base orthonormale de $\mathscr{H}$. N est fini ou infini, mais pour fixer les idées nous supposerons dans les démonstrations que N est l'ensemble des entiers naturels. Nous désignons par w une fonction matricielle définie sur le tore (que nous identifions à l'intervalle $[0,2\pi[$) et dont les termes $w_{pq}(\lambda)$ sont indexés dans $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$. Pour toute famille finie d'indices $\mathrm{J} \subset \mathrm{N}$, $\mathscr{H}_\mathrm{J}$ est le sous-espace de $\mathscr{H}$ engendré par les vecteurs de base d_p où $p \in \mathrm{J}$. A la matrice $(w_{pq}(\lambda))_{(p,q)\in \mathrm{J}\times\mathrm{J}}$ est donc associé un opérateur $\mathrm{W}_\mathrm{J}(\lambda) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\mathrm{J})$ défini par $(\mathrm{W}_\mathrm{J}(\lambda)d_p, d_q) = w_{pq}(\lambda)$.

La fonction matricielle w est dite définie positive si pour toute partie finie J d'indices, $\mathrm{W}_\mathrm{J}(\lambda)$ est p. p. un opérateur hermitien positif. Si $\tilde{w}$ et w sont deux fonctions matricielles définies positives nous écrirons $\tilde{w} \leq w$ si pour tout J fini, $\tilde{\mathrm{W}}_\mathrm{J}(\lambda) \leq \mathrm{W}_\mathrm{J}(\lambda)$ p. p. Il est immédiat que cette relation est une relation d'ordre lorsqu'on identifie deux fonctions matricielles dont tous les termes sont égaux p. p.

Nous dirons que la fonction matricielle w est mesurable, si toutes les fonctions $\lambda \to w_{pq}(\lambda)$ sont mesurables, et nous dirons qu'elle est intégrable si elle est mesurable et si toutes les fonctions $\lambda \to w_{pp}(\lambda)$ sont intégrables (Si w est définie positive, il résulte de l'inégalité $2\,|\,w_{pq}(\lambda)\,| \leq w_{pp}(\lambda) + w_{qq}(\lambda)$, que toutes les fonctions w_{pq} sont intégrables).

Suivant les notations habituelles, $\mathrm{L}^2_\mathscr{H}$ est l'espace de Hilbert des classes d'équivalence d'applications mesurables f, définies sur le tore, à valeurs dans $\mathscr{H}$ et telles que $\|\,f(\lambda)\,\|^2$ soit une fonction intégrable. On désigne par $\mathrm{H}^2_\mathscr{H}$ (resp. $\mathrm{K}^2_\mathscr{H}$) le sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2_\mathscr{H}$ constitué par les fonctions dont les coefficients de Fourier d'indices négatifs (resp. d'indices positifs) sont nuls.

Si la fonction matricielle w est intégrable et définie positive, il existe ([6], lecture 11) une suite $(f_p) \subset \mathrm{L}^2_\mathscr{H}$ telle que

$$w_{pq}(\lambda) = (f_p(\lambda), f_q(\lambda)) \qquad \text{p. p.}$$

et w est dite factorisable si les fonctions f_p peuvent être choisies dans $\mathrm{H}^2_\mathscr{H}$. Dans le cas particulier où $w_{pq}(\lambda) = (\mathrm{W}(\lambda)d_p, d_q)$, $\mathrm{W}(\lambda)$ désignant une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ p. p. telle que $\|\,\mathrm{W}(\lambda)\,\|$ soit intégrable, la fonction matricielle w est factorisable si et seulement si $\mathrm{W}(\lambda) = \mathrm{A}^*(\lambda)\mathrm{A}(\lambda)$

où $A(\lambda) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ p. p. et pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$, la fonction $A(\lambda)a$ appartient à $H^2_{\mathscr{H}}$.

Nous désignons par $\mathscr{M}'_n(\{f_p\})$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions $\chi^k f_p$ où $k \geq n$ et $p \in N$ (χ désigne la fonction exponentielle $\chi(\lambda) = e^{i\lambda}$).

$\mathscr{M}'_{-\infty}(\{f_p\})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions $\chi^k f_p$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in N$.

$\mathscr{M}_n(\{f_p\})$ est l'adhérence dans $L^2_{\mathscr{H}}$ de $\mathscr{M}'_n(\{f_p\})$

$\mathscr{M}_{-\infty}(\{f_p\})$ est l'adhérence dans $L^2_{\mathscr{H}}$ de $\mathscr{M}'_{-\infty}(\{f_p\})$

$\mathscr{M}_{+\infty}(\{f_p\})$ est l'intersection des sous-espaces $\mathscr{M}_n(\{f_p\})$ lorsque n parcourt l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Soient $\tilde{w}$ et w deux fonctions matricielles intégrables et définies positives, $(\tilde{f}_p)$ et (f_p) deux suites de $L^2_{\mathscr{H}}$ telles que

$$\tilde{w}_{pq}(\lambda) = (\tilde{f}_p(\lambda), \tilde{f}_q(\lambda)) \quad \text{p. p.} ; \qquad w_{pq}(\lambda) = (f_p(\lambda), f_q(\lambda)) \quad \text{p. p.}$$

Le lemme qui suit est un résultat de [6] que nous rappelons sous la forme qui nous sera utile.

LEMME 1 : *Si* $\tilde{w} \leq w$, *on définit une application linéaire* V, *de* $\mathscr{M}'_{-\infty}(\{f_p\})$ *sur* $\mathscr{M}'_{-\infty}(\{\tilde{f}_p\})$ *en posant*

$$V\left(\sum_{(j,k)\in J\times K} \alpha_{jk}\chi^k f_j\right) = \sum_{(j,k)\in J\times K} \alpha_{jk}\chi^k \tilde{f}_j \tag{9}$$

où J *est une partie finie de* N, K *une partie finie de* $\mathbb{Z}$, *et les* α_{jk} *sont des nombres complexes* .

On a $\| V \| \leq 1$ *et par conséquent la définition de* V *peut être étendue au sous-espace* $\mathscr{M}_{-\infty}(\{f_p\})$. *Pour tout entier n, l'opérateur* V *permute avec le produit par* χ^n *et l'image de* $\mathscr{M}'_n(\{f_p\})$ *est* $\mathscr{M}'_n(\{\tilde{f}_p\})$.

Démonstration : Posons

$$u(\lambda) = \sum_{(j,k)\in J\times K} \alpha_{jk} e^{ik\lambda} d_j$$

$u(\lambda)$ est à valeurs dans $\mathscr{H}_J$ et l'on a :

$$(\tilde{W}_J(\lambda)u(\lambda),\ u(\lambda)) \leq (W_J(\lambda)u(\lambda),\ u(\lambda)) \qquad \text{p. p.}$$

On en déduit

$$(10)\quad \Big\| \sum_{(j,k)\in J\times K} \alpha_{jk}\chi^k \tilde{f}_j \Big\|^2_{L^2_{\mathscr{H}}} = \sum_{(j,k,j',k')\in J\times K\times J\times K} \alpha_{jk}\bar{\alpha}_{j'k'} \int_0^{2\pi} e^{i(k-k')\lambda}(\tilde{f}_j(\lambda), \tilde{f}_{j'}(\lambda))\frac{d\lambda}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} (\tilde{W}_J(\lambda)u(\lambda), u(\lambda))\frac{d\lambda}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} (W_J(\lambda)u(\lambda), u(\lambda))\frac{d\lambda}{2\pi}$$

$$= \Big\| \sum_{(j,k)\in J\times K} \alpha_{jk}\chi^k f_j \Big\|^2_{L^2_{\mathscr{H}}}$$

Il en résulte en particulier que si :

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} \alpha_{jk}\chi^k f_j = \sum_{(j,k)\in J\times K} \beta_{jk}\chi^k f_j$$

on a la même égalité en remplaçant f_j par $\tilde{f}_j$. Par conséquent l'égalité (9) définit sans ambiguïté une application linéaire de $\mathscr{M}'_{-\infty}(\{f_p\})$ sur $\mathscr{M}'_{-\infty}(\{\tilde{f}_p\})$. L'opérateur V est de norme inférieure ou égale à 1 d'après (10), et V permute avec le produit par χ^n d'après (9). ■

COROLLAIRE : *Si $\tilde{w} = w$, V est une isométrie.*

DÉFINITION 4 : *Une fonction matricielle intégrable et définie positive w, est dite purement non factorisable s'il n'existe aucune fonction matricielle factorisable non nulle $\tilde{w}$ telle que $\tilde{w} \leq w$.*

PROPOSITION 5 : *Soit w une fonction matricielle intégrable et définie positive. L'ensemble des fonctions matricielles factorisables, majorées par w possède un plus grand élément w', et la fonction matricielle intégrable et définie positive $w'' = w - w'$ est purement non factorisable.*

DÉFINITION 5 : *La fonction matricielle w' déterminée dans la proposition précédente est appelée la partie factorisable maximum de w.*

Rappelons qu'un sous-espace fermé $\mathscr{M}$ de $L^2_{\mathscr{H}}$ est dit invariant si $\chi^n f \in \mathscr{M}$ pour tout $f \in \mathscr{M}$ et tout $n \geq 0$. Il est dit doublement invariant si $\chi^n f \in \mathscr{M}$ pour tout $f \in \mathscr{M}$ et tout entier relatif n. Il est dit simplement invariant s'il est invariant sans être doublement invariant.

Soient, w une fonction matricielle définie positive intégrable, $(f_p)_{p\in N}$ une suite de $L^2_{\mathscr{H}}$ telle que $w_{pq}(\lambda) = (f_p(\lambda), f_q(\lambda))$ p. p.. $\mathscr{M}_0(\{f_p\})$ est un sous-espace invariant et possède ([6], lecture VI) une décomposition de la forme :

$$\mathcal{M}_0(\{ f_p \}) = \mathrm{U}(\mathrm{H}^2_{\mathscr{H}_1}) \oplus \mathcal{M}_{\hat{\mathrm{K}}} \tag{11}$$

où $\mathscr{H}_1$ est un espace de Hilbert qui peut être identifié avec un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$; U est l'isométrie de $\mathrm{H}^2_{\mathscr{H}_1}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathscr{H}}$ qui, à toute fonction $g \in \mathrm{H}^2_{\mathscr{H}_1}$, associe la fonction $\mathrm{U}(\lambda) g(\lambda)$ où $\mathrm{U}(\lambda)$ est p. p. une isométrie de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}$; $\hat{\mathrm{K}}$ désigne une fonction image mesurable c'est-à-dire une application $\lambda \to \hat{\mathrm{K}}(\lambda)$ définie sur le tore, dont les valeurs sont p. p. des sous-espaces fermés $\hat{\mathrm{K}}(\lambda)$ de $\mathscr{H}$, et telle que l'application qui à λ associe le projecteur de $\mathscr{H}$ sur $\hat{\mathrm{K}}(\lambda)$ soit faiblement mesurable ; $\mathcal{M}_{\hat{\mathrm{K}}}$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{L}^2_{\mathscr{H}}$ telles que $f(\lambda) \in \hat{\mathrm{K}}(\lambda)$ p. p.. $\mathcal{M}_{\hat{\mathrm{K}}}$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2_{\mathscr{H}}$ et l'on a $\hat{\mathrm{K}}(\lambda) \perp \mathrm{U}(\lambda)(\mathscr{H}_1)$ p. p.

Démonstration de la proposition 5 : Considérons la décomposition (11) de $\mathcal{M}_0(\{ f_p \})$ et pour tout indice p, soient f'_p et f''_p les projections orthogonales de f_p sur $\mathrm{U}(\mathrm{H}^2_{\mathscr{H}_1})$ et $\mathcal{M}_{\hat{\mathrm{K}}}$ respectivement. On a $f_p = f'_p + f''_p$, et puisque $\hat{\mathrm{K}}(\lambda) \perp \mathrm{U}(\lambda)(\mathscr{H}_1)$ p. p., $f'_p(\lambda) \perp f''_q(\lambda)$ p. p., quels que soient p et q. On en déduit que :

$$w_{pq}(\lambda) = w'_{pq}(\lambda) + w''_{pq}(\lambda)$$

où

$$w'_{pq}(\lambda) = (f'_p(\lambda), f'_q(\lambda)) \quad \text{p. p.} ; \qquad w''_{pq}(\lambda) = (f''_p(\lambda), f''_q(\lambda)) \quad \text{p. p.}$$

En outre, il résulte des inclusions

$$\mathcal{M}_0(\{ f'_p \}) \subset \mathrm{U}(\mathrm{H}^2_{\mathscr{H}_1}) \quad , \quad \mathcal{M}_0(\{ f''_p \}) \subset \mathcal{M}_{\hat{\mathrm{K}}}$$

et de l'égalité

$$\mathcal{M}_0(\{ f_p \}) = \mathcal{M}_0(\{ f'_p \}) \oplus \mathcal{M}_0(\{ f''_p \})$$

que l'on a :

$$\mathcal{M}_0(\{ f'_p \}) = \mathrm{U}(\mathrm{H}^2_{\mathscr{H}_1}) \quad , \quad \mathcal{M}_0(\{ f''_p \}) = \mathcal{M}_{\hat{\mathrm{K}}} \tag{12}$$

Par conséquent, $\mathcal{M}_0(\{ f'_p \})$ ne contient aucun sous-espace doublement invariant autre que $\{ 0 \}$, et d'après un lemme de Wiener et Masani ([*14*]) w' est factorisable.

Montrons que w' est le plus grand élément de la famille des fonctions matricielles factorisables majorées par w. Soit $\tilde{w}_{pq}(\lambda) = (g_p(\lambda), g_q(\lambda))$ p. p. où $(g_p) \subset \mathrm{H}^2_{\mathscr{H}}$ et supposons que $\tilde{w} \leq w$. Soit V l'application définie dans le lemme 1 en posant :

$$\mathrm{V}\Big(\sum_{(j,k) \in \mathrm{J} \times \mathrm{K}} \alpha_{jk} \chi^k f_j \Big) = \sum_{(j,k) \in \mathrm{J} \times \mathrm{K}} \alpha_{jk} \chi^k g_j$$

L'image de $\mathscr{M}_0(\{f_p\})$ par V est contenue dans $\mathscr{M}_0(\{g_p\})$ lui même contenu dans $H^2_{\mathscr{H}}$. L'image du sous-espace doublement invariant $\mathscr{M}_{\hat{K}}$ étant doublement invariante, est nécessairement réduite à $\{0\}$. Par conséquent

$$V(f_p) = V(f'_p) = g_p$$

Pour toute famille finie $(\beta_p)_{p\in J}$ de nombres complexes, posons :

$$\varphi(\lambda) = \left\| \sum_{j\in J} \beta_j g_j(\lambda) \right\|^2_{\mathscr{H}} = \sum_{(j,j')\in J\times J} \beta_j \bar{\beta}_{j'} \tilde{w}_{jj'}(\lambda)$$

$$\psi(\lambda) = \left\| \sum_{j\in J} \beta_j f'_j(\lambda) \right\|^2_{\mathscr{H}} = \sum_{(j,j')\in J\times J} \beta_j \bar{\beta}_{j'} w'_{jj'}(\lambda)$$

et, soit

$$\theta(\lambda) = \sum_{k\in K} \gamma_k e^{ik\lambda}$$

En développant l'égalité

$$\left\| \sum_{(j,k)\in J\times K} \beta_j \gamma_k \chi^k g_j \right\|^2_{L^2_{\mathscr{H}}} = \left\| V\Big(\sum_{(j,k)\in J\times K} \beta_j \gamma_k \chi^k f'_j \Big) \right\|^2_{L^2_{\mathscr{H}}}$$
$$\leq \left\| \sum_{(j,k)\in J\times K} \beta_j \gamma_k \chi^k f'_j \right\|^2_{L^2_{\mathscr{H}}}$$

comme il a été fait dans (10) (où $\alpha_{jk} = \beta_j \gamma_k$ et où $\tilde{f}_j$ et f_j sont remplacés par g_j et f'_j respectivement) on a :

$$\int_0^{2\pi} |\theta(\lambda)|^2 \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} |\theta(\lambda)|^2 \psi(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi}$$

On en déduit $\varphi(\lambda) \leq \psi(\lambda)$ p. p. et par conséquent $\tilde{w} \leq w'$.

Il ne reste plus à prouver que le caractère purement non factorisable de w'', ce que nous faisons maintenant. Soit $\tilde{w}_{pq}(\lambda) = (g_p(\lambda), g_q(\lambda))$ p. p. où $(g_p) \subset H^2_{\mathscr{H}}$ et supposons que l'on ait $\tilde{w} \leq w''$. En utilisant le lemme 1 (avec f''_p au lieu de f_p, et g_p au lieu de $\tilde{f}_p$), on définit un opérateur V qui envoie $\mathscr{M}_0(\{f''_p\}) = \mathscr{M}_{\hat{K}}$ dans $\mathscr{M}_0(\{g_p\}) \subset H^2_{\mathscr{H}}$. Puisque $\mathscr{M}_{\hat{K}}$ est doublement invariant, son image est doublement invariante et ne peut être que $\{0\}$, et puisque l'image de $\mathscr{M}'_0(\{f''_p\})$ est $\mathscr{M}'_0(\{g_p\})$ on a nécessairement $g_p = 0$ pour tout $p \in N$ et par conséquent $\tilde{w} = 0$. ■

Il résulte immédiatement de la proposition 5 que :

COROLLAIRE : *w est purement non factorisable si et seulement si* $\mathscr{M}_0(\{f_p\})$ *est doublement invariant.*

Remarque 6. La proposition 5 fournit une décomposition de w en partie factorisable et partie purement non factorisable mais il faut remarquer que sans le caractère maximal de w', une telle décomposition n'est pas unique. Considérons par exemple le cas où $\mathscr{H}$ est de dimension 1. La fonction matricielle w se réduit alors à une fonction intégrable. Soient, $w(\lambda) = 1$ et $w''(\lambda)$ une fonction mesurable telle que $0 < w''(\lambda) \leq \frac{1}{2}$ et

$$\exp \int_0^{2\pi} \log w''(\lambda) d\lambda = 0.$$

La fonction w'' est purement non factorisable et puisque

$$w'(\lambda) = 1 - w''(\lambda) > \frac{1}{2} \qquad \text{p. p.,}$$

w' est factorisable.

6. — Décomposition en trois parties des suites stationnaires de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

PROPOSITION 6. *Toute suite stationnaire* $X_n = T^n X_0 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, *où* $\mathscr{H}$ *et* $\mathscr{K}$ *sont deux espaces de Hilbert complexes, se décompose en la somme de trois suites stationnaires, deux à deux orthogonales, associées au même opérateur unitaire* T, *la première étant purement non déterministe, la seconde déterministe et de mesure spectrale absolument continue, la troisième ayant une mesure spectrale singulière.*

Démonstration : Au paragraphe 3, nous avons vu la décomposition de X_n en partie purement non déterministe et partie déterministe : $X_n = U_n + V_n$ où $V_n = P_{-\infty} X_n$, $P_{-\infty}$ désignant le projecteur sur $\mathscr{M}_{-\infty}(X)$. Montrons que la mesure spectrale de (U_n) est absolument continue. Soit

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{n-k} A_k,$$

la décomposition de U_n en moyenne glissante. Pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$, la série

$$g_a = \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k A_k a$$

converge dans $L^2_{\mathscr{K}}$ puisque la série des carrés des normes des coefficients de Fourier est convergente :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A_k a \|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k^* A_k a, a) = (U_0^* U_0 a, a)$$

et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (Si $n < 0$, la série figurant dans la suite d'égalités ci-dessous doit être remplacée par $\sum_{k=0}^{\infty} (A_{-n+k} a, A_k b)$)

$$(U_0 a, U_n b) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k a, A_{n+k} b) = \left(\chi^n g_a, g_b\right)_{L^2_{\mathscr{K}}}$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} (g_a(\lambda), g_b(\lambda)) \frac{d\lambda}{2\pi}$$

d'où une densité spectrale $(g_a(\lambda), g_b(\lambda))$.

Soit $\hat{\mathscr{M}}$ l'ensemble des vecteurs u de $\mathscr{K}$ tels que $d(E_\lambda u, u) \ll d\lambda$. On sait que $\hat{\mathscr{M}}$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{K}$, dont le projecteur $\hat{P}$ appartient au bicommutant de la famille $(T^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ([5], § 66, théorème 1). Puisque la mesure spectrale de la suite (U_n) est absolument continue, $U_n(\mathscr{H}) \subset \hat{\mathscr{M}}$, donc $P_{+\infty} - P_{-\infty} \leq \hat{P}$. Posons :

$$X_n^{(1)} = U_n$$
$$X_n^{(2)} = \hat{P} V_n = \hat{P} P_{-\infty} X_n$$
$$X_n^{(3)} = V_n - X_n^{(2)} = (I - \hat{P}) X_n$$

Puisque $\hat{P}$ et $P_{-\infty}$ appartiennent au commutant de la famille $(T^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on a $X_n^{(2)} = T^n X_0^{(2)}$ et $X_n^{(3)} = T^n X_0^{(3)}$.

D'autre part, $\hat{P}$ appartenant au bicommutant de la famille (T^n), permute avec $P_{-\infty}$ et $P_{+\infty}$. On en déduit l'orthogonalité des suites $(X_n^{(1)})$, $(X_n^{(2)})$, $(X_n^{(3)})$.

La suite $X_n^{(3)}$ est singulière car pour tout vecteur $u \perp \hat{\mathscr{M}}$ on a : $d(E_\lambda u, u) \perp d\lambda$ ([5], § 66, théorème 4) et par conséquent la suite $X_n^{(3)}$ est déterministe.

Il reste à prouver que $(X_n^{(2)})$ est déterministe. Supposons le contraire. Il existe donc un vecteur non nul u appartenant à $\mathscr{M}_0(X^{(2)}) \ominus \mathscr{M}_{-1}(X^{(2)})$ et par conséquent pour tout $k \leq -1$ et tout vecteur a de $\mathscr{H}$, $u \perp X_k^{(2)} a$. Il résulte, en outre, de l'orthogonalité des suites $(X_n^{(1)})$, $(X_n^{(2)})$, $(X_n^{(3)})$ que $u \perp X_k^{(1)} a$ et $u \perp X_k^{(3)} a$, et finalement $u \perp X_k a$. Donc $u \perp \mathscr{M}_{-1}(X)$. Puisque $\mathscr{M}_0(X^{(2)}) \subset \mathscr{M}_{-\infty}(X) \subset \mathscr{M}_{-1}(X)$, on aboutit à une contradiction. ■

Supposons maintenant que $\mathscr{H}$ soit séparable. Si $\hat{F}(\lambda)$ (resp. $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$) est une mesure spectrale absolument continue, à toute base orthonormale $(d_p)_{p\in N}$ de $\mathscr{H}$, nous associons la fonction matricielle $\hat{w}$ (resp. $w^{(1)}$, $w^{(2)}$) définie par :

$$\hat{w}_{pq}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\hat{F}(\lambda)d_p, d_q) \qquad \text{p. p.}$$

En général, la matrice $(\hat{w}_{pq}(\lambda))$ ne correspond pas à un opérateur partout défini sur $\mathscr{H}$ (remarque 7) ce qui nous oblige à utiliser une base orthonormale de $\mathscr{H}$ pour les démonstrations qui suivent.

PROPOSITION 7: *La mesure spectrale de la suite stationnaire* (X_n) *se décompose de manière unique en la somme de trois mesures spectrales*

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda) \tag{13}$$

où $\hat{F}(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ *est la partie absolument continue de* $F(\lambda)$, $F_3(\lambda)$ *est la partie singulière de* $F(\lambda)$, *et pour toute base orthonormale* (d_p) *de* $\mathscr{H}$, *la fonction matricielle*

$$w^{(1)}_{pq}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(F_1(\lambda)d_p, d_q)$$

est la partie factorisable maximum de la fonction matricielle

$$\hat{w}_{pq}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\hat{F}(\lambda)d_p, d_q).$$

Il en résulte que pour toute base orthonormale (d_p), *la fonction matricielle*

$$w^{(2)}_{pq}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(F_2(\lambda)d_p, d_q)$$

est purement non factorisable.

Cette décomposition de $F(\lambda)$ *correspond à la décomposition précédente de* X_n : *pour* $i = 1, 2, 3$, $F_i(\lambda)$ *est la mesure spectrale de la suite stationnaire* $(X^{(i)}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Démonstration : Puisque pour $i = 1, 2, 3$, $X^{(i)}_n$ est de la forme $Q^{(i)}X_n$ où $Q^{(i)}$ est un projecteur de $\mathscr{H}$ appartenant au commutant de la suite (T^n) et par conséquent, permutant avec la famille de projecteurs spectraux $(E_\lambda)_{\lambda\in[0,2\pi[}$, on a :

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$$

où

$$F_i(\lambda) = X_0^* E_\lambda Q^{(i)} X_0 = (X^{(i)}_0)^* E_\lambda X^{(i)}_0$$

est la mesure spectrale de la suite stationnaire $(X_n^{(i)})$, et d'après la proposition 6, F_1 et F_2 sont absolument continues et F_3 est singulière.

Considérons la suite stationnaire $\hat{X}_n = X_n^{(1)} + X_n^{(2)}$. Sa mesure spectrale $\hat{F}(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ est absolument continue et, une base orthonormale $(d_p)_{p\in N}$ étant choisie dans $\mathscr{H}$, il existe une suite $(f_p)_{p\in N}$ dans $L^2_{\mathscr{H}}$ telle que :

$$\hat{w}_{pq}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\hat{F}(\lambda)d_p, d_q) = (f_p(\lambda), f_q(\lambda)) \qquad \text{p. p.}$$

Puisque :

$$\begin{aligned}(\hat{X}_j d_p, \hat{X}_k d_q) &= \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\lambda}(f_p(\lambda), f_q(\lambda))d\lambda \\ &= \left(\chi^{-j}f_p, \chi^{-k}f_q\right)_{L^2_{\mathscr{H}}}\end{aligned}$$

le sous-espace $\mathscr{M}_n(\hat{X})$ de $\mathscr{K}$, est isomorphe au sous-espace $\mathscr{M}_{-n}(\{f_p\})$ de $L^2_{\mathscr{H}}$. Or, la décomposition de la fonction matricielle $\hat{w}_{pq}(\lambda)$ en partie factorisable maximum et partie purement non factorisable, provient de la décomposition de $\mathscr{M}_0(\{f_p\})$:

$$\mathscr{M}_0(\{f_p\}) = U(H^2_{\mathscr{H}_1}) \oplus \mathscr{M}_{\hat{K}}$$

où $\mathscr{M}_{\hat{K}} = \bigcap_n \mathscr{M}_n(\{f_p\})$, tandis que la décomposition de $\hat{X}_0$ en partie purement non déterministe et partie déterministe provient de la décomposition de $\mathscr{M}_0(\hat{X})$:

$$\mathscr{M}_0(\hat{X}) = (\mathscr{M}_0(\hat{X}) \ominus \mathscr{M}_{-\infty}(\hat{X})) \oplus \mathscr{M}_{-\infty}(\hat{X})$$

où $\mathscr{M}_{-\infty}(\hat{X}) = \bigcap_n \mathscr{M}_n(\hat{X})$. Il résulte alors de l'isomorphisme entre $\mathscr{M}_n(\hat{X})$ et $\mathscr{M}_{-n}(\{f_p\})$ que $w_{pq}^{(1)}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}(F_1(\lambda)d_p, d_q)$ est la partie factorisable maximum de $\hat{w}_{pq}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}(\hat{F}(\lambda)d_p, d_q)$.

Quant à l'unicité de la décomposition (13), elle résulte de l'unicité de la décomposition de F en partie absolument continue $\hat{F}$ et partie singulière F_3, puis de l'unicité de la décomposition de $\hat{w}$ en partie factorisable maximum $w^{(1)}$ et partie purement non factorisable $w^{(2)}$. ■

Remarque 7 : Indiquons un exemple de suite stationnaire dont la densité spectrale ne correspond pas à un opérateur partout défini dans $\mathscr{H}$.

Une base orthonormale $(d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ étant choisie dans l'espace de Hilbert complexe séparable, de dimension infinie, $\mathscr{H}$, pour tout vecteur

$$a = \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p d_p,$$

posons

$$g_a = \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p \chi^p$$

(convergence dans $L^2_{\mathbb{C}}$) et soit X_n l'application de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}$ définie par $X_n a = \chi^{-n} g_a$. On obtient ainsi une suite stationnaire de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L^2_{\mathbb{C}})$ et puisque

$$(X_n d_p, X_m d_q) = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\lambda} e^{i(p-q)\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi}$$

on a $\hat{w}_{pq}(\lambda) = \dfrac{e^{i(p-q)\lambda}}{2\pi}$, et cette matrice ne correspond pas à un opérateur partout défini sur $\mathscr{H}$.

7. — Propriétés spectrales des suites stationnaires provenant de vecteurs aléatoires du second ordre.

Si (X_n) est une suite stationnaire de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))$ provenant de vecteurs aléatoires du second ordre x_n, les X_n sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt et l'utilisation de la structure hilbertienne de l'espace $\mathscr{N}$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, apporte une simplification dans certains problèmes de convergence. En particulier, elle permet de prouver facilement que la partie absolument continue de la mesure spectrale possède une dérivée qui est un opérateur borné. Dans ce qui suit, l'espace $\mathscr{H}$ est complexe, mais pas nécessairement séparable.

La structure hilbertienne de $\mathscr{N}$ est définie par le produit scalaire :

$$(A, B)_{\mathscr{N}} = \mathrm{Tr}\,(B^*A)$$

et suivant les notations habituelles nous désignons par $L^2_{\mathscr{N}}$ l'espace de Hilbert des classes d'équivalence de fonctions fortement mesurables Φ, définies sur le tore, à valeurs dans $\mathscr{N}$ et dont le carré de la norme est intégrable. La structure hilbertienne de $L^2_{\mathscr{N}}$ est définie par le produit scalaire :

$$(\Phi, \Psi)_{L^2_{\mathscr{N}}} = \int_0^{2\pi} (\Phi(\lambda), \Psi(\lambda))_{\mathscr{N}} \frac{d\lambda}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}\,(\Psi^*(\lambda)\Phi(\lambda)) \frac{d\lambda}{2\pi}$$

$H^2_{\mathcal{N}}$ est le sous-espace de $L^2_{\mathcal{N}}$ constitué par les fonctions dont les coefficients de Fourier d'indices négatifs sont nuls.

PROPOSITION 8 : *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert complexes, $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite stationnaire d'opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$, (U_n) la partie purement non déterministe de (X_n),*

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{n-k} A_k,$$

la décomposition en moyenne glissante de la suite (U_n).

La série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ik\lambda} \tag{14}$$

converge dans $L^2_{\mathcal{N}}$ et définit une fonction $\Phi \in H^2_{\mathcal{N}}$ telle que :

$$U_m^* U_n = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\lambda} \Phi^*(\lambda)\Phi(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi}$$

Démonstration : La convergence de la série (14) résulte de la propriété (6) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A_k \|^2_{\mathcal{N}} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Tr}(A_k^* A_k) = \operatorname{Tr}(U_0^* U_0) < \infty$$

Pour tout couple a, b de vecteurs de $\mathcal{H}$ (le vecteur a n'étant pas nul) associons l'opérateur $D_{(ab)}$ défini par

$$D_{(ab)} a = b, \qquad D_{(ab)} c = 0 \quad \text{si} \quad c \perp a$$

$D_{(ab)} \in \mathcal{N}$ et pout tout opérateur linéaire borné A, on a :

$$\operatorname{Tr}(AD_{(ab)}) = \frac{1}{\| a \|^2}(Ab, a)$$

Soit Φ, la somme de la série (14). La fonction $e^{i(m-n)\lambda}\Phi(\lambda)D_{(ab)}$ appartient à $L^2_{\mathcal{N}}$ et son coefficient de Fourier d'indice k est

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n-k)\lambda}\Phi(\lambda)D_{(ab)} \frac{d\lambda}{2\pi} = \begin{cases} A_{n-m+k} D_{(ab)} & \text{si} \quad k \geq m-n \\ 0 & \text{si} \quad k < m-n \end{cases}$$

On a donc la suite d'égalités (pour la 2^e^ égalité, on suppose que $n \geq m$ de manière que l'indice $n - m + k$ soit positif pour tout $k \geq 0$, mais le résultat final est valable dans le cas général)

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\lambda}(\Phi^*(\lambda)\Phi(\lambda)b, a)\frac{d\lambda}{2\pi} = \| a \|^2 \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\lambda} \operatorname{Tr}(\Phi^*(\lambda)\Phi(\lambda)D_{(ab)})\frac{d\lambda}{2\pi}$$

$$= \| a \|^2\left(e^{i(m-n)\lambda}\Phi(\lambda)D_{(ab)}, \Phi(\lambda)\right)_{L^2_{\mathscr{H}}} = \| a \|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Tr}\left(A_k^* A_{n-m+k} D_{(ab)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (A_k^* A_{n-m+k} b, a) = (U_m^* U_n b, a). \quad \blacksquare$$

Remarque 8. Il est facile de construire des exemples de suites stationnaires de vecteurs aléatoires dont la partie déterministe et la partie purement non déterministe ont toutes deux, une mesure spectrale absolument continue. Soit $W(\lambda)$ une fonction à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ dont la norme est intégrable, et dont la partie factorisable maximum est non nulle et distincte de W. Définissons $\Gamma(n, m)$ par

$$\Gamma(n, m) = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\lambda} W(\lambda) d\lambda$$

$\Gamma(n, m)$ est une fonction de covariance d'après le chapitre premier, proposition 10 et si $\Gamma(n, m)$ est un opérateur à trace finie (ce qui a nécessairement lieu, si $\mathscr{H}$ est de dimension finie) il existe une suite stationnaire de vecteurs aléatoires ayant pour covariance $\Gamma(n, m)$ et dont la décomposition de Wold correspond à la décomposition $W = W' + W''$ de la mesure spectrale.

Dans l'exemple qui suit, nous construisons effectivement la suite de vecteurs aléatoires. Cet exemple fait apparaître en outre une éventualité qui est source de complications : les fonctions $W'(\lambda)$ et $W''(\lambda)$ sont des opérateurs bornés qui envoient $\mathscr{H}$ dans des sous-espaces qui ne sont pas orthogonaux.

Ω est le tore à une dimension que nous identifions avec l'intervalle $[0,2\pi[$, $\mathscr{S}$ est la tribu des boréliens du tore, μ est la mesure normalisée de Lebesgue $\frac{d\omega}{2\pi}$. On considère les v. a. u_n et v_n définies de la façon suivante :

$$\text{si} \quad \omega \in [0, \pi[, \qquad u_n(\omega) = \sqrt{2}e^{2in\omega} \quad \text{et} \quad v_n(\omega) = 0$$
$$\text{si} \quad \omega \in [\pi, 2\pi[, \qquad u_n(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad v_n(\omega) = \sqrt{2}e^{2in\omega}$$

Ces v. a. constituent une base orthonormale de $L^2_{\mathbb{C}}$. Soient, $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, de dimension infinie, $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormale de $\mathscr{H}$. Définissons X_n par :

$$X_n d_k = \frac{u_{k+n} + v_{k+n}}{1 + |k|} \quad \text{si} \quad k \leq 0, \qquad X_n d_k = \frac{v_{k+n}}{1 + k} \quad \text{si} \quad k > 0$$

La suite (X_n) est stationnaire et provient d'une suite de vecteurs aléatoires du second ordre. Le sous-espace $\mathscr{M}_n(X)$ est engendré par les v. a. $(v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(u_k)_{k\leq n}$. Par conséquent $\mathscr{M}_{-\infty}(X)$ est le sous-espace fermé engendré par toutes les v. a. v_k. Si α_k est la $k^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur a de $\mathscr{H}$, la partie purement non déterministe et la partie déterministe de (X_n) sont définies par :

$$U_n a = \sum_{k\leq 0} \alpha_k \frac{u_{n+k}}{1 + |k|}, \qquad V_n a = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \frac{v_{n+k}}{1 + |k|}$$

Le domaine initial de ζ_n est le sous-espace engendré par d_0 et $\zeta_n d_0 = u_n$. On en déduit que :

$$A_k a = \frac{\alpha_{-k}}{1 + k} d_0$$

L'opérateur unitaire T correspond au produit par la fonction $e^{2i\omega}$ et le projecteur spectral E_λ correspond au produit par la fonction caractéristique de l'ensemble

$$[\pi - \frac{\lambda}{2}, \pi[\cup [2\pi - \frac{\lambda}{2}, 2\pi[$$

On vérifie aisément que :

$$X_m^* X_n = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\lambda} (W'(\lambda) + W''(\lambda)) \frac{d\lambda}{2\pi}$$

$W'(\lambda)$ et $W''(\lambda)$ désignant les opérateurs bornés définis par

$$W'(\lambda)a = (a, g'(\lambda))g'(\lambda), \qquad W''(\lambda)a = (a, g''(\lambda))g''(\lambda)$$

où

$$g'(\lambda) = \sum_{k\leq 0} \frac{e^{ik\lambda} d_k}{1 + |k|}, \qquad g''(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\lambda} d_k}{1 + |k|}$$

ces séries convergeant dans $L^2_{\mathscr{H}}$.

8. — La factorisabilité des fonctions à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$.

La condition de factorisabilité du type de Devinatz : la fonction

$$\rho(\lambda) = \inf_{a \in \mathrm{J}(\lambda)} (\mathrm{W}(\lambda)a, a),$$

où $\mathrm{J}(\lambda) = \overline{\mathrm{W}(\lambda)(\mathscr{H})}$, est strictement positive p. p. et satisfait à

$$\int_0^{2\pi} \log \rho(\lambda) d\lambda > -\infty,$$

est assez restrictive et ne peut s'appliquer en particulier si $\mathrm{J}(\lambda)$ est de dimension infinie et $\mathrm{W}(\lambda)$ est p. p. un opérateur compact puisqu'alors $\rho(\lambda)=0$ p. p. Dans la proposition 9, nous élargissons cette condition en la remplaçant par une condition du même type s'appliquant à chaque élément d'une famille $(\rho_n)_{n\in \mathrm{I}}$ de fonctions.

Rappelons que si $\mathrm{W}(\lambda)$ est p. p. un projecteur, la fonction W est factorisable si et seulement si la fonction image $\mathrm{J}(\lambda) = \mathrm{W}(\lambda)(\mathscr{H})$ est conjuguée analytique ([*6*], p. 128) c'est-à-dire s'il existe une famille dénombrable (f_j) d'éléments de $\mathrm{K}^2_{\mathscr{H}}$ telle que $\mathrm{J}(\lambda)$ soit p. p. le sous-espace fermé de $\mathscr{H}$ engendré par les vecteurs $f_j(\lambda)$.

LEMME 2 : *Soient, $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, $(d_p)_{p\in \mathrm{N}}$ une base orthonormale de $\mathscr{H}$, $(g_n)_{n\in \mathrm{I}}$ une famille dénombrable de $\mathrm{K}^2_{\mathscr{H}}$ telle que pour tout entier p, la série*

$$\sum_{n\in \mathrm{I}} |(g_n(\lambda), d_p)|^2$$

converge p. p. vers une fonction intégrable.

La fonction matricielle définie positive w déterminée par :

$$w_{pq}(\lambda) = \sum_{n\in \mathrm{I}} (d_p, g_n(\lambda))(g_n(\lambda), d_q) \tag{15}$$

est factorisable.

Démonstration : Soient $l^2(\mathrm{I})$ l'espace de Hilbert des suites de carrés sommables, indexées dans I et $(\varepsilon_n)_{n\in \mathrm{I}}$ la base canonique de $l^2(\mathrm{I})$. Posons :

$$f_p(\lambda) = \sum_n (d_p, g_n(\lambda))\varepsilon_n$$

Il résulte immédiatement des hypothèses que $f_p \in \mathrm{H}^2_{l^2(\mathrm{I})}$ et que

$$w_{pq}(\lambda) = (f_p(\lambda), f_q(\lambda)) \qquad \text{p. p.} \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 9 : *Soient, $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable et* W *une fonction fortement mesurable définie sur le tore, à valeurs dans* $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ *et telle que la fonction* $\lambda \to \| W(\lambda) \|$ *soit intégrable. La fonction* W *est factorisable si et seulement si elle est de la forme*

$$W(\lambda) = \sum_{n \in I} \rho_n(\lambda) Q_n(\lambda) \tag{16}$$

(la série figurant au second membre convergeant fortement p. p.) où I *est une famille dénombrable (finie ou infinie) d'indices, où* $Q_n(\lambda)$ *est p. p. le projecteur sur le sous-espace de dimension* 1 *engendré par une fonction appartenant à* $K^2_{\mathscr{H}}$, *et où* $\rho_n(\lambda)$ *est une fonction scalaire strictement positive p. p. telle que*

$$\int_0^{2\pi} \log \rho_n(\lambda) d\lambda > -\infty.$$

Démonstration : Les égalités (15) et (16) sont du même type, $Q_n(\lambda)$ désignant le projecteur sur le sous-espace engendré par $g_n(\lambda)$ et $\rho_n(\lambda) = \| g_n(\lambda) \|^2$. La condition (16) est donc suffisante d'après le lemme 2 qui utilise des hypothèses moins restrictives (pour chaque vecteur de base d_p,

$$\sum_{n \in I} \rho_n(\lambda)(Q_n(\lambda)d_p, d_p)$$

converge p. p. vers une fonction intégrable) mais fournit seulement une fonction matricielle.

Réciproquement, si W est factorisable, $W(\lambda) = A^*(\lambda)A(\lambda)$ où $A(\lambda)a \in H^2_{\mathscr{H}}$ pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$. Posons $g_n(\lambda) = A^*(\lambda)d_n$. On a $g_n \in K^2_{\mathscr{H}}$ et :

$$\begin{aligned}(W(\lambda)d_p, d_q) = (A(\lambda)d_p, A(\lambda)d_q) &= \sum_{n \in N} (A(\lambda)d_p, d_n)(d_n, A(\lambda)d_q) \\ &= \sum_{n \in N} (d_p, g_n(\lambda))(g_n(\lambda), d_q)\end{aligned}$$

d'où les égalités (15) et (16).

Dans cette démonstration la puissance de la famille d'indices I est la dimension de $\mathscr{H}$, mais en modifiant le choix des fonctions $g_n(\lambda)$ on peut obtenir un ensemble d'indices I équipotent à une base orthonormale de $\overline{W(\lambda)(\mathscr{H})}$. Posons $f_p(\lambda) = W^{\frac{1}{2}}(\lambda)d_p$ et, comme au paragraphe 5, désignons par $\mathscr{M}_r(\{f_p\})$ le sous-espace fermé de $L^2_{\mathscr{H}}$ engendré par les fonctions $\chi^k f_p$ ou $p \in \mathrm{N}$ et $k \geq r$. Soit $(u_n)_{n\in \mathrm{I}}$ une base orthonormale de

$$\mathscr{M}_0(\{f_p\}) \ominus \mathscr{M}_1(\{f_p\}).$$

Puisque W est factorisable, le sous-espace invariant $\mathscr{M}_0(\{f_p\})$ ne contient aucun sous-espace doublement invariant autre que le sous-espace réduit au vecteur nul, et par conséquent est du type $\mathrm{U}(\mathrm{H}^2_{\mathscr{H}_1})$. Pour presque tout λ, les vecteurs $u_n(\lambda)$ forment alors une base orthonormale de

$$\mathrm{J}(\lambda) = \mathrm{U}(\lambda)(\mathscr{H}_1) = \overline{\mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)(\mathscr{H})}.$$

Posons $g_n(\lambda) = \mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)u_n(\lambda)$. Cette fonction g_n appartient à $L^2_{\mathscr{H}}$ puisque la fonction $\| \mathrm{W}(\lambda) \|$ est intégrable, et pour $k \geq 1$, on a, puisque $u_n \perp \chi^k f_p$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-ik\lambda}(g_n(\lambda), d_p)\frac{d\lambda}{2\pi} &= \left(g_n, \chi^k d_p\right)_{L^2_{\mathscr{H}}} = \left(u_n, \chi^k \mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)d_p\right)_{L^2_{\mathscr{H}}} \\ &= \left(u_n, \chi^k f_p\right)_{L^2_{\mathscr{H}}} = 0\end{aligned}$$

et par conséquent $g_n \in \mathrm{K}^2_{\mathscr{H}}$.

W est du type (16) puisque pour tout couple (a, b) de vecteurs de $\mathscr{H}$

$$\begin{aligned}(17) \quad \sum_{n\in \mathrm{I}} \rho_n(\lambda)(\mathrm{Q}_n(\lambda)a, b) &= \sum_{n\in \mathrm{I}} (a, g_n(\lambda))(g_n(\lambda), b) \\ &= \sum_{n\in \mathrm{I}} (\mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)a, u_n(\lambda))(u_n(\lambda), \mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)b) = (\mathrm{W}(\lambda)a, b)\end{aligned}$$

la dernière égalité parce que les vecteurs $u_n(\lambda)$ forment p. p. une base orthonormale de $\mathrm{J}(\lambda) = \overline{\mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)(\mathscr{H})}$. ■

W désignant comme précédemment une fonction définie sur le tore, à valeurs dans $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ et telle que $\| \mathrm{W}(\lambda) \|$ soit intégrable on a :

COROLLAIRE 1 : *S'il existe une fonction mesurable u définie sur le tore, à valeurs dans $\mathscr{H}$ et telle que $\| u(\lambda) \| = 1$ p. p., $u(\lambda) \in \mathrm{J}(\lambda) = \overline{\mathrm{W}(\lambda)(\mathscr{H})}$ p. p. et $\mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)u(\lambda) \in \mathrm{K}^2_{\mathscr{H}}$, alors la partie factorisable de* W *est non nulle.*

Démonstration : Posons $g(\lambda) = \mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)u(\lambda)$ et définissons $\tilde{\mathrm{W}}$ par

$$\tilde{\mathrm{W}}(\lambda)a = (a, g(\lambda))g(\lambda).$$

La fonction $\tilde{\mathrm{W}}$ est factorisable d'après le lemme 2, et $\tilde{\mathrm{W}} \leq \mathrm{W}$ puisque pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$,

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathrm{W}}(\lambda)a, a) &= |(a, g(\lambda))|^2 = |(\mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)a, u(\lambda))|^2 \\ &\leq \| \mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(\lambda)a \|^2 = (\mathrm{W}(\lambda)a, a) \quad ■\end{aligned}$$

COROLLAIRE 2 : W *est factorisable si et seulement s'il existe une famille* $(u_n)_{n\in I}$ *de fonctions mesurables à valeurs dans* $\mathscr{H}$ *telles que :*

1) *les vecteurs* $(u_n(\lambda))_{n\in I}$ *forment p. p. une base orthonormale de* $J(\lambda) = \overline{W(\lambda)(\mathscr{H})}$.

2) *pour tout* $n \in I$, $g_n(\lambda) = W^{\frac{1}{2}}(\lambda)u_n(\lambda) \in K^2_{\mathscr{H}}$.

Démonstration : La nécessité de ces conditions apparaît au cours de la démonstration de la proposition 9. Ces conditions sont suffisantes car, en posant $\rho_n(\lambda) = \| g_n(\lambda) \|^2$, et en désignant par $Q_n(\lambda)$ le projecteur sur le sous-espace engendré par $g_n(\lambda)$, on vérifie à l'aide de la suite d'égalités (17) (considérée dans l'ordre inverse) que $W(\lambda) = \sum_{n\in I} \rho_n(\lambda) . Q_n(\lambda)$. ■

CHAPITRE III

PROCESSUS PERMANENTS STATIONNAIRES

1. — Introduction.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier les fonctions aléatoires stationnaires du second ordre, faiblement continues, définies sur la droite réelle, et à valeurs dans un espace de Hilbert complexe $\mathscr{H}$, ce qui nous conduit à étudier, plus généralement, les applications stationnaires $t \to X_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ où $\mathscr{K}$ est un autre espace de Hilbert complexe. La décomposition en partie déterministe et partie purement non déterministe s'obtient trivialement par le procédé utilisé pour des suites stationnaires et notre principale préoccupation sera d'établir pour des fonctions stationnaires faiblement continues dont les valeurs sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, une formule de moyenne glissante de la forme

$$X_s = \int_{-\infty}^{s} d\zeta(t)C(t-s) \tag{1}$$

où ζ est une application qui, à chaque intervalle borné e de $\mathbb{R}$, fait correspondre un opérateur linéaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{K}$, qui est le produit d'un opérateur partiellement isométrique par un scalaire, et satisfait aux propriétés d'additivité et d'orthogonalité : $\zeta(e \cup e') = \zeta(e) + \zeta(e')$, $\zeta^*(e')\zeta(e) = 0$, si e et e' sont disjoints. Tous les opérateurs $\zeta(e)$ ont même domaine initial

$\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$ et $C(t)$ est une fonction à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathscr{N}_0$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}_0$. La signification de l'intégrale figurant au second membre de (1) sera précisée au paragraphe 4 et l'utilisation de cette formule pour le problème de la prévision linéaire sera indiquée au paragraphe 5.

Le point de départ des raisonnements permettant d'établir la formule de moyenne glissante est le même que dans Doob ([4], chap. XII) : au groupe unitaire $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ associé à la famille stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, on fait correspondre un opérateur unitaire $\tilde{T}$ puis une suite stationnaire $\tilde{X}_n = \tilde{T}^n X_0$ qui est purement non déterministe si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ l'est, et ce sont les opérateurs $\tilde{\zeta}_n$ et A_n intervenant dans la formule de décomposition de $\tilde{X}_n$ en moyenne glissante, $\tilde{X}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_{n-k} A_k$, qui permettent de définir les opérateurs $\zeta(e)$ et $C(t)$, et de démontrer l'égalité (1).

2. — Décomposition de Wold.

Soit $t \to X_t$ une application stationnaire du groupe additif des réels dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ où $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ sont deux espaces de Hilbert. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, nous désignons par $\mathscr{M}_t(X)$ le sous-espace fermé de $\mathscr{K}$ engendré par les vecteurs $X_s a$ où s parcourt l'intervalle $]-\infty, t]$ et où le vecteur a parcourt $\mathscr{H}$. On pose $\mathscr{M}_{-\infty}(X) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{M}_t(X)$ et l'on désigne par $\mathscr{M}_{+\infty}(X)$ le sous-espace fermé de $\mathscr{K}$ engendré par les sous-espaces $\mathscr{M}_t(X)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Nous dirons que la fonction stationnaire X_t est déterministe si pour tout t, $\mathscr{M}_t = \mathscr{M}_{+\infty}$, égalité qui a lieu pour toute valeur de t dès qu'elle a lieu pour une seule valeur. En raisonnant comme dans le cas des suites stationnaires on obtient immédiatement la décomposition de X_t en partie déterministe V_t et partie purement non déterministe $U_t : V_t = P_{-\infty} X_t$ où $P_{-\infty}$ est le projecteur sur $\mathscr{M}_{-\infty}(X)$ et $U_t = X_t - V_t$.

3. — Suite stationnaire associée.

Dans les raisonnements qui suivent nous aurons besoin de la théorie de la représentation dont nous rappelons brièvement les résultats essentiels (voir, par exemple [9]). Soit G un groupe abélien localement compact et $(T_t)_{t\in G}$ une représentation unitaire faiblement continue de G dans l'espace de Hilbert complexe $\mathscr{K}$. On définit une $*$-représentation de l'algèbre de convolution $L^1_C(G)$ (fonctions scalaires intégrables par rapport à la mesure de Haar sur G) dans $\mathscr{L}(\mathscr{K})$ par :

$$\varphi \to \int_G \varphi(t) T_t dt$$

Soit.

$$\hat{\varphi}(\alpha) = \int_G \varphi(x) \overline{\langle x, \alpha \rangle} \, dx$$

la transformée de Fourier $\mathscr{F}(\varphi)$ de φ. L'application

$$\hat{\varphi} \to T_{(\hat{\varphi})} = \int_G \varphi(t) T_t dt$$

peut être étendue aux fonctions mesurables bornées sur $\hat{G}$, groupe dual de G, et l'on obtient ainsi une $*$-représentation de l'algèbre multiplicative des fonctions scalaires mesurables bornées sur $\hat{G}$, dans $\mathscr{L}(\mathscr{K})$. A la fonction indicatrice de tout borélien e de $\hat{G}$ correspond un projecteur E_e et l'on a :

$$T_t = \int_{\hat{G}} \overline{\langle t, \lambda \rangle} \, dE_\lambda$$

Plus généralement, à toute fonction mesurable bornée $\psi(\lambda)$ correspond l'opérateur

$$T_{(\psi)} = \int_{\hat{G}} \psi(\lambda) dE_\lambda$$

appartenant au bicommutant de la famille $(T_t)_{t \in G}$ et défini par l'égalité

$$(T_{(\psi)} u, v) = \int_{\hat{G}} \psi(\lambda) d(E_\lambda u, v)$$

valable pour tout couple u, v de vecteurs de $\mathscr{K}$.

Dans ce paragraphe, nous partons avec une application stationnaire faiblement continue $X_t = T_t X_0$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ où $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ sont deux espaces de Hilbert complexes. Soit

$$T_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} dE_\lambda$$

la formule de décomposition spectrale de la représentation unitaire faiblement continue $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$. L'opérateur

$$\tilde{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right) dE_\lambda \tag{2}$$

est unitaire puisque $\left|\dfrac{\lambda + i}{\lambda - i}\right| \equiv 1$ et, la suite $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que nous voulons associer à $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est définie par :

$$\tilde{X}_n = \tilde{T}^n X_0$$

Cela revient à utiliser le changement de variable

$$e^{i\theta} = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \qquad \lambda = i\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \tag{3}$$

dans la formule de décomposition spectrale, puisque :

$$\tilde{T}^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^n dE_\lambda = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\tilde{E}_\theta$$

où $\tilde{E}_\theta = E_\lambda$, λ et θ étant liées par les relations (3). Plus généralement si, à toute application mesurable bornée ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on associe la fonction mesurable bornée $\tilde{\psi}$ de $]0,2\pi[$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\tilde{\psi}(\theta) = \psi\left(i\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$$

on a :

$$\tilde{T}_{(\tilde{\psi})} = \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(\theta) d\tilde{E}_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda) dE_\lambda = T_{(\psi)}$$

PROPOSITION 1 : *Soient, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert complexes, $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une représentation unitaire faiblement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{K}$, $\tilde{T}$ l'opérateur unitaire défini par l'égalité (2), X_0 un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

Si l'on pose $X_t = T_t X_0$ et $\tilde{X}_n = \tilde{T}^n X_0$, on a, pour les fonctions stationnaires X et $\tilde{X}$ ainsi définies :

$$\mathcal{M}_0(X) = \mathcal{M}_0(\tilde{X})$$

Démonstration : Pour tout entier $n \geqslant 0$, *on a :*

$$\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n = \left(1 - \frac{2i}{\lambda + i}\right)^n = 1 + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \frac{(-2i)^p}{(\lambda + i)^p}$$

$$= 1 - \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \frac{(2i)^p}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}} \left(\frac{1}{\lambda + i}\right) = 1 - \mathcal{F}(h(t) 1_{]-\infty,0]} e^t)$$

où le symbole $\mathscr{F}$ désigne la transformée de Fourier et $h(t)$ est la fonction

$$h(t) = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \frac{2^p t^{p-1}}{(p-1)!}$$

Donc

$$\tilde{\mathrm{T}}^{-n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n d\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{I} - \int_{-\infty}^{0} h(t)e^t \mathrm{T}_t dt$$

où I désigne l'opérateur identique de $\mathscr{H}$. Pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$, tout vecteur u de $\mathscr{X}$, et tout $n \geqslant 0$, on a :

$$(\tilde{\mathrm{X}}_{-n}a, u) = (\tilde{\mathrm{T}}^{-n}\mathrm{X}_0 a, u) = (\mathrm{X}_0 a, u) - \int_{-\infty}^{0} h(t)e^t(\mathrm{X}_t a, u)dt$$

Donc $u \perp \mathscr{M}_0(\mathrm{X})$ entraîne $u \perp \mathscr{M}_0(\tilde{\mathrm{X}})$, ce qui prouve l'inclusion

$$\mathscr{M}_0(\tilde{\mathrm{X}}) \subset \mathscr{M}_0(\mathrm{X}).$$

Démontrons l'inclusion opposée. En utilisant le changement de variable (3), on a :

$$\mathrm{T}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\lambda} d\mathrm{E}_\lambda = \int_0^{2\pi} g_s(\theta) d\tilde{\mathrm{E}}_\theta$$

où :

$$g_s(\theta) = \exp\left(\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} s\right) = \exp\left(\frac{si \sin\theta}{1 - \cos\theta}\right)$$

Pour $s \leqslant 0$, les coefficients de Fourier d'indices négatifs de g_s sont nuls puisque, γ désignant le contour de la portion du plan complexe constituée par le disque unité dont on a enlevé un petit disque entourant le point $z = 1$, la fonction $z^{n-1} \exp\left(s\dfrac{1+z}{1-z}\right)(n \geqslant 1, s \leqslant 0)$ est holomorphe à l'intérieur de γ et bornée sur la partie de γ voisine du point 1. Mais la convergence de la série de Fourier

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta}$$

de g_s, n'ayant pas lieu uniformément nous ne pouvons pas affirmer que

$$\mathrm{T}_s = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tilde{\mathrm{T}}^{-n}.$$

Soit σ_n la $n^{\text{ième}}$ moyenne de Cesaro de la fonction g_s, c'est-à-dire le produit de convolution de g_s avec le noyau de Fejer

$$K_n(\theta) = \frac{1}{n}\left(\frac{1 - \cos n\theta}{1 - \cos \theta}\right)$$

Pour tout θ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,2\pi[$, $\sigma_n(\theta)$ converge vers $g_s(\theta)$ quand n tend vers l'infini et puisque :

$$\| \sigma_n \|_\infty \leqslant \| g_s \|_\infty \cdot \| K_n \|_1 = 1$$

$\left(\text{où } \| \cdot \|_p \text{ désigne la norme dans } L^p_{\mathbb{C}}\left([0,2\pi[, \frac{d\theta}{2\pi}\right)\right)$ le théorème de la convergence dominée est applicable :

$$(4) \qquad (X_s a, u) = \int_0^{2\pi} g_s(\theta) d(\tilde{E}_\theta X_0 a, u) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_n(\theta) d(\tilde{E}_\theta X_0 a, u)$$

Puisque $\sigma_n(\theta)$ est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles $e^{ik\theta}$ avec $k \geqslant 0$, et que pour tout $k \geqslant 0$ et tout vecteur u de $\mathscr{K}$ perpendiculaire à $\mathscr{M}_0(\tilde{X})$ on a :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d(\tilde{E}_\theta X_0 a, u) = (\tilde{X}_{-k} a, u) = 0$$

l'intégrale figurant au dernier membre de (4) est nulle pour tout $n \geqslant 0$ et par conséquent pour $s \leqslant 0$ et $u \perp \mathscr{M}_0(\tilde{X})$, on a $(X_s a, u) = 0$, donc

$$\mathscr{M}_0(X) \subset \mathscr{M}_0(\tilde{X}). \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE. *Les hypothèses étant celles de la proposition 1,*

$$\mathscr{M}_{+\infty}(\tilde{X}) = \mathscr{M}_{+\infty}(X), \qquad \mathscr{M}_{-\infty}(\tilde{X}) = \mathscr{M}_{-\infty}(X)$$

Démonstration : Pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$, tout vecteur u de $\mathscr{K}$, perpendiculaire à $\mathscr{M}_\infty(\tilde{X})$, et tout entier relatif n, on a :

$$(\tilde{X}_n a, u) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d(\tilde{E}_\theta X_0 a, u) = 0$$

La mesure $d(\tilde{E}_\theta X_0 a, u)$ est donc nulle et

$$(X_s a, u) = \int_0^{2\pi} g_s(\theta) d(\tilde{E}_\theta X_0 a, u) = 0$$

pour tout nombre réel s. Donc $\mathscr{M}_\infty(X) \subset \mathscr{M}_\infty(\tilde{X})$. Les autres inclusions se démontrent par des raisonnements analogues. $\blacksquare$

Soient $(\tilde{U}_n)$ et $(\tilde{V}_n)$ la partie purement non déterministe et la partie déterministe de la suite stationnaire $(\tilde{X}_n)$. Puisque l'association d'une suite stationnaire $(\tilde{X}_n)$ à toute fonction stationnaire faiblement continue (X_t) se fait uniquement à l'aide du groupe d'opérateurs unitaires T_t, et que le projecteur $P_{-\infty}$ de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{M}_{-\infty}(X) = \mathscr{M}_{-\infty}(\tilde{X})$ permute avec T_t, et par conséquent permute avec les projecteurs spectraux E_λ, la suite $(\tilde{U}_n)$ est associée à (U_t) et $(\tilde{V}_n)$ est associée à (V_t).

4. — La formule de moyenne glissante.

Si la fonction stationnaire $X_t = T_tX_0 (t \in \mathbb{R})$ est purement non déterministe, il en est de même de la suite stationnaire associée $\tilde{X}_n = \tilde{T}^n X_0$ qui possède alors une décomposition en moyenne glissante

$$(5) \qquad \tilde{X}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_{n-k} A_k$$

où $(\tilde{\zeta}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire orthonormale de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. Dans ce paragraphe nous supposerons que $X_t^*X_t = X_0^*X_0 = \tilde{X}_n^*\tilde{X}_n$ est un opérateur à trace finie.

Pour tout intervalle borné $e =]\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$, posons :

$$v_e(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\lambda)\mathscr{F}(1_e)$$

où $\mathscr{F}(1_e)$ est la transformée de Fourier de la fonction indicatrice 1_e de e. Puisque $\mathscr{F}(1_e) = \dfrac{e^{-i\lambda\alpha} - e^{-i\lambda\beta}}{i\lambda}$, cette fonction v_e est bornée, et il lui correspond un opérateur de $\mathscr{L}(\mathscr{K})$ défini par

$$(6) \quad T_{(v_e)} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_e(\lambda) dE_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(1_e) dE_\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\lambda\beta} - e^{-i\lambda\alpha}) dE_\lambda$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\alpha^\beta T_t dt + \frac{1}{\sqrt{2}}(T_\beta - T_\alpha)$$

LEMME 1 : *Soient,* $\tilde{\zeta}_0$ *l'opérateur partiellement isométrique d'indice* 0 *intervenant dans* (5), Π_0 *le projecteur de* $\mathscr{H}$ *sur le domaine initial* $\mathscr{H}_0$ *de* $\tilde{\zeta}_0$, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *les projecteurs spectraux du groupe unitaire* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$, $(\tilde{E}_\theta)_{\theta\in[0,2\pi[}$ *les projecteurs spectraux du groupe unitaire associé* $(\tilde{T}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Les mesures spectrales $d(\tilde{\mathrm{E}}_\theta \tilde{\zeta}_0 a, \tilde{\zeta}_0 b)$ *et* $d(\mathrm{E}_\lambda \tilde{\zeta}_0 a, \tilde{\zeta}_0 b)$ *sont respectivement les produits par* $(\Pi_0 a, b)$ *de la mesure normalisée de Lebesgue* $\frac{d\theta}{2\pi}$ *sur le tore, et de la mesure de Cauchy* $\frac{d\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Puisque $(\tilde{\zeta}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite orthogonale d'opérateurs partiellement isométriques de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{K}$, ayant pour domaine initial commun $\mathscr{H}_0$, on a :

$$\delta_{n,m}(\Pi_0 a, b) = (\tilde{\zeta}_n a, \tilde{\zeta}_m b) = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d(\tilde{\mathrm{E}}_\theta \tilde{\zeta}_0 a, \tilde{\zeta}_0 b)$$

et par conséquent $d(\tilde{\mathrm{E}}_\theta \tilde{\zeta}_0 a, \tilde{\zeta}_0 b) = (\Pi_0 a, b)\frac{d\theta}{2\pi}$.

Pour la deuxième mesure, il suffit de remarquer que $\mathrm{E}_\lambda = \tilde{\mathrm{E}}_\theta$ où λ et θ sont liées par la formule de changement de variable $\lambda = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ qui, à la mesure de Lebesgue $\frac{d\theta}{2\pi}$ sur le tore, associe la mesure de Cauchy $\frac{d\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}$ sur la droite réelle. ■

PROPOSITION 2 : *A tout intervalle borné e de* $\mathbb{R}$, *associons l'opérateur* $\zeta(e)$ *défini par* $\zeta(e) = \mathrm{T}_{(\nu_e)}\tilde{\zeta}_0$, *où* $\tilde{\zeta}_0$ *est l'opérateur partiellement isométrique d'indice* 0 *qui intervient dans la décomposition en moyenne glissante de la suite stationnaire purement non déterministe* $(\tilde{\mathrm{X}}_n)$, *et où* $\mathrm{T}_{(\nu_e)}$ *est l'opérateur de* $\mathscr{L}(\mathscr{K})$ *défini par* (6).

Ces opérateurs $\zeta(e)$ *satisfont aux propriétés suivantes :*

(i) $\zeta(e)$ *est le produit d'un opérateur partiellement isométrique par* $\sqrt{m(e)}$ *où* $m(e)$ *désigne la mesure de Lebesgue de l'intervalle e.*

(ii) $$\zeta^*(e')\zeta(e) = m(e \cap e')\Pi_0$$

(iii) *si* e *et* e' *sont disjoints*

$$\zeta(e \cup e') = \zeta(e) + \zeta(e')$$

(iv) *si* $e^{(s)}$ *désigne l'intervalle* $\{ t : t - s \in e \}$, *on a :*

$$\mathrm{T}_s\zeta(e) = \zeta(e^{(s)})$$

Démonstration : La propriété d'additivité (*iii*) résulte immédiatement de la propriété d'additivité des opérateurs $T_{(v_e)}$. Démontrons la 2e propriété. Pour tout couple a, b de vecteurs de $\mathscr{H}$ on a :

$$(\zeta(e)a, \zeta(e')b) = (T_{(v_e\bar{v}_{e'})}\tilde{\zeta}_0 a, \tilde{\zeta}_0 b) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_e(\lambda)\overline{v_{e'}(\lambda)}d(E_\lambda\tilde{\zeta}_0 a, \tilde{\zeta}_0 b)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\lambda^2)\mathscr{F}(1_e)\overline{\mathscr{F}(1_{e'})}(\Pi_0 a, b)\frac{d\lambda}{\pi(1+\lambda^2)} = (\Pi_0 a, b)m(e\cap e')$$

La propriété (i) résulte immédiatement de (ii). Reste à démontrer la 4e propriété. Puisque

$$\mathscr{F}(1_{e(s)}) = \mathscr{F}(1_e(t-s)) = e^{-i\lambda s}\mathscr{F}(1_e)$$

on a :

$$T_{(v_e(s))} = T_{(e^{-i\lambda s}v_e)} = T_s T_{(v_e)} \quad \blacksquare$$

Pour établir la formule de moyenne glissante, nous commençons par définir le symbole

$$\mathscr{I}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\zeta(dt)\varphi(t) \qquad \text{où} \qquad \varphi \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt) \tag{7}$$

Si φ est une fonction en escalier de la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k 1_{e_k}(t) \tag{8}$$

où 1_{e_k} est la fonction indicatrice d'un intervalle borné e_k et $\alpha_k \in \mathbb{C}$, nous posons :

$$\mathscr{I}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\zeta(e_k)$$

L'écriture de φ sous la forme (8) n'est pas unique mais il résulte de la propriété d'additivité (iii) que $\mathscr{I}(\varphi)$ ne dépend pas du choix de cette écriture. Si ψ est une fonction du même type,

$$\psi = \sum_{k=1}^{n}\beta_k 1_{e_k}$$

on a, en supposant les intervalles e_k disjoints :

$$\mathscr{I}^*(\psi)\mathscr{I}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\bar{\beta}_k\zeta^*(e_k)\zeta(e_k) = \Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\bar{\beta}_k m(e_k)\Big)\Pi_0 = (\varphi, \psi)_{L^2_{\mathbb{C}}}\Pi_0$$

Il en résulte en particulier que $\dfrac{1}{\| \varphi \|} \mathscr{I}(\varphi)$ est un opérateur partiellement isométrique. L'application $\varphi \to \mathscr{I}(\varphi)$ est donc une application linéaire continue de l'espace des fonctions en escalier muni de la topologie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ muni de la topologie uniforme. Cette application peut alors être étendue par continuité à $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ tout entier, ce qui définit le symbole (7).

PROPOSITION 3 : *Soient,*

$$\varphi_k(\lambda) = \frac{i\sqrt{2}(\lambda - i)^k}{(\lambda + i)^{k+1}}$$

et $\psi_k = \bar{\mathscr{F}}(\varphi_k)$ *la transformée de Fourier inverse de* φ_k*. On a :*

$$\mathscr{I}(\psi_k) = \tilde{\zeta}_{-k}$$

Démonstration : Pour tout couple a, b de vecteurs de $\mathscr{H}$ et tout intervalle borné e de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(\tilde{\zeta}_{-k}a, \mathscr{I}(1_e)b) &= (\tilde{T}^{-k}\tilde{\zeta}_0 a, T_{(v_e)}\tilde{\zeta}_0 b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^k \overline{(1 - i\lambda)\mathscr{F}(1_e)}\, d(E_\lambda\tilde{\zeta}_0 a, \tilde{\zeta}_0 b) \\ &= \left(\psi_k, 1_e\right)_{L^2_{\mathbb{C}}}(\Pi_0 a, b) = (\mathscr{I}(\psi_k)a, \mathscr{I}(1_e)b) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Pour définir l'intégrale figurant au second membre de (1) nous procédons également par étapes. Soit $\mathscr{H}_0 = \Pi_0(\mathscr{H})$ le domaine initial commun à tous les opérateurs partiellement isométriques $\tilde{\zeta}_n$. Nous désignons par $\mathscr{N}_0$ (resp. $\mathscr{N}$) l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}_0$ (resp. dans $\mathscr{H}$) muni de la structure hilbertienne définie par le produit scalaire

$$(A, B)_{\mathscr{N}_0} = \mathrm{Tr}\,(B^*A)$$

$\mathscr{N}_0$ est complet puisque c'est un sous-espace fermé de $\mathscr{N}$. Nous désignons par $L^2_{\mathscr{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ l'espace des applications fortement mesurables $C(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{N}_0$ telles que $\mathrm{Tr}\,(C^*(t)C(t))$ soit une fonction intégrable. Muni du produit scalaire

$$\left(C, D\right)_{L^2_{\mathscr{N}_0}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Tr}\,(D^*(t)C(t))dt$$

$L^2_{\mathscr{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ est un espace de Hilbert.

Si C est de la forme

$$C(t) = \sum_{r=1}^{n} 1_{e_r}(t) A_r \tag{9}$$

où e_r est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $A_r \in \mathcal{N}_0$, on pose

$$\mathscr{I}(C) = \sum_{r=1}^{n} \zeta(e_r) A_r$$

$\mathscr{I}(C)$ ne dépend pas du choix de l'écriture de C sous la forme (9) et l'application $C \to \mathscr{I}(C)$ est une application linéaire d'un sous-espace de $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ dans l'espace de Hilbert $\hat{\mathcal{N}}$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{K}$. Cette application est en outre isométrique puisque, $(d_i)_{i \in I}$ désignant une base orthonormale de $\mathscr{H}$, et les e_k figurant dans (9) étant supposés disjoints de manière que les opérateurs $\zeta(e_k)$ soient orthogonaux, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\mathscr{I}^*(C)\mathscr{I}(C)) &= \sum_{i \in I} \| \mathscr{I}(C) d_i \|^2 = \sum_{i \in I} \left\| \sum_{r=1}^{n} \zeta(e_r) A_r d_i \right\|^2 \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{r=1}^{n} \| A_r d_i \|^2 m(e_r) = \sum_{r=1}^{n} \operatorname{Tr}(A_r^* A_r) m(e_r) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tr}(C^*(t) C(t)) dt = \| C \|^2_{L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)}
\end{aligned}$$

Les fonctions du type (9) constituant un ensemble partout dense dans $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$, nous pouvons étendre par continuité la définition de $\mathscr{I}(C)$ à l'espace $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ tout entier. Cette définition de $\mathscr{I}(C)$ justifie l'emploi du symbole d'intégration

$$\mathscr{I}(C) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(dt) C(t)$$

LEMME 2 : *Si* $\varphi \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ *et si* $A \in \mathcal{N}_0$, *alors* $C = \varphi A \in L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ *et l'on a*

$$\mathscr{I}(\varphi A) = \mathscr{I}(\varphi) A \tag{10}$$

Plus généralement, si la famille $(\varphi_i A_i)_{i \in I}$, *où* $A_i \in \mathcal{N}_0$ *et* $\varphi_i \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, *est sommable dans* $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$, *alors la famille* $(\mathscr{I}(\varphi_i) A_i)_{i \in I}$ *est sommable dans* *l'espace de Hilbert $\hat{\mathcal{N}}$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$, et l'on a :*

$$\mathscr{I}\left(\sum_{i \in I} \varphi_i A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathscr{I}(\varphi_i) A_i$$

Démonstration : Lorsque φ est une fonction en escalier, l'égalité (10) est une conséquence immédiate des définitions de $\mathscr{I}(C)$ et de $\mathscr{I}(\varphi)$. Cette propriété s'étend par continuité à toute fonction $\varphi \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$. Le reste du lemme est une conséquence immédiate des propriétés d'additivité et d'isométrie de l'application $C \to \mathscr{I}(C)$. ■

PROPOSITION 4 : *Soit (A_k) la suite d'opérateurs de Hilbert-Schmidt intervenant dans la formule de décomposition en moyenne glissante de la suite stationnaire purement non déterministe d'opérateurs de Hilbert-Schmidt $\tilde{X}_n$:*

$$\tilde{X}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_{n-k} A_k$$

et soit

$$\psi_k = \overline{\mathscr{F}}\left(\frac{i\sqrt{2}(\lambda - i)^k}{(\lambda + i)^{k+1}}\right)$$

La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k A_k$$

converge dans $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ et sa somme C est telle que $\mathscr{I}(C) = X_0$. Plus généralement, $X_s = \mathscr{I}(C_s)$ où $C_s(t) = C(t - s)$. En outre, la fonction $C(t)$ est nulle pour $t > 0$ ce qui permet d'écrire la formule de décomposition de X_s en moyenne glissante, sous la forme :

$$X_s = \int_{-\infty}^{s} \zeta(dt) C(t - s)$$

Démonstration : Puisque la suite $(\psi_k)_{k \geq 0}$ est orthonormale dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, la suite $(\psi_k A_k)_{k \geq 0}$ est orthogonale dans $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$. En outre

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| \psi_k A_k \|^2_{L^2_{\mathcal{N}_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(A_k^* A_k) < \infty$$

d'où la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k A_k$. Soit C la somme de cette série.

On a :

$$\mathscr{J}(C) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{J}(\psi_k)A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_{-k}A_k = X_0$$

Puisque, pour $k \geqslant 0$

$$\varphi_k(\lambda) = \frac{i\sqrt{2}(\lambda - i)^k}{(\lambda + i)^{k+1}} = \sum_{r=0}^{k} \frac{\beta_{r,k}}{(\lambda + i)^{r+1}} = \mathscr{F}\left(-i\sum_{r=0}^{k} \frac{\beta_{r,k}}{r!}(it)^r e^t 1_{]-\infty,0]}\right)$$

$\psi_k(t)$ $(k \geqslant 0)$ est nul pour $t > 0$, donc $C(t) = 0$ pour $t > 0$.

Enfin, en utilisant la propriété (*iv*) de la proposition 2, on a $T_s\mathscr{J}(C) = \mathscr{J}(C_s)$ pour toute fonction en escalier du type (9) et cette égalité s'étend par continuité à toute fonction $C \in L^2_{\mathscr{K}_0}(\mathbb{R}, dt)$. On a donc :

$$X_s = T_sX_0 = T_s\mathscr{J}(C) = \mathscr{J}(C_s) \quad \blacksquare$$

Proposition 5 : *Soit $\alpha < \beta$. Pour tout intervalle e contenu dans $]\alpha, \beta]$, on a :*

$$\zeta(e)(\mathscr{H}) \subset \mathscr{M}_\beta(X) \ominus \mathscr{M}_\alpha(X)$$

Démonstration : Soit $e =]\gamma, \delta]$ avec $\alpha \leqslant \gamma < \delta \leqslant \beta$. Pour tout $t \leqslant \beta$ on a :

$$T_t\tilde{\zeta}_0(\mathscr{H}) \subset T_t\mathscr{M}_0(\tilde{X}) = T_t\mathscr{M}_0(X) = \mathscr{M}_t(X) \subset \mathscr{M}_\beta(X)$$

et par conséquent pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$ et tout vecteur u de $\mathscr{K}$, perpendiculaire à $\mathscr{M}_\beta$ on a :

$$(\zeta(e)a, u) = (T_{(v_e)}\tilde{\zeta}_0 a, u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\gamma^\delta (T_t\tilde{\zeta}_0 a, u)dt$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}(T_\delta\tilde{\zeta}_0 a, u) - \frac{1}{\sqrt{2}}(T_\gamma\tilde{\zeta}_0 a, u) = 0$$

donc $\zeta(e)(\mathscr{H}) \subset \mathscr{M}_\beta$.

D'autre part, pour toute fonction $C \in L^2_{\mathscr{K}_0}(\mathbb{R}, dt)$, nulle pour $t > \alpha$, on a $\mathscr{J}(C)(\mathscr{H}) \perp \zeta(e)(\mathscr{H})$. La vérification est immédiate si C est une fonction en escalier du type (9), et le résultat général s'en déduit par continuité. Donc $X_s(\mathscr{H}) \perp \zeta(e)(\mathscr{H})$ pour tout $s \leqslant \alpha$ et par conséquent $\zeta(e)(\mathscr{H}) \perp \mathscr{M}_\alpha(X)$. $\blacksquare$

Proposition 6 : *Si $\hat{C}$ désigne la transformée de Fourier de C, on a :*

$$X_t^*X_s = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(s-t)}\hat{C}^*(\lambda)\hat{C}(\lambda)\frac{d\lambda}{2\pi}$$

Démonstration : Pour toute fonction en escalier du type (9), on définit la transformée de Fourier par :

$$\widehat{C}(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} \mathcal{F}(1_{e_r})A_r$$

Cette application $C \to \widehat{C}$, d'un sous-espace de $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ dans $L^2_{\mathcal{N}_0}\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{2\pi}\right)$ est isométrique. Puisque l'ensemble des fonctions du type (9) est dense dans $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$, l'application $C \to \widehat{C}$ peut être étendue à l'espace $L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ tout entier et définit ainsi la transformée de Fourier.

Il résulte immédiatement de cette définition que la transformée de Fourier de la fonction $C_s(t) = C(t - s)$ est $e^{-i\lambda s}\widehat{C}(\lambda)$, et si $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, la transformée de Fourier de la fonction $C(t)D$ est $\widehat{C}(\lambda)D$.

En utilisant l'opérateur $D_{(a,b)}$ défini au chapitre II, § 7, par

$$D_{(ab)}a = b, \qquad D_{(a,b)}c = 0 \quad \text{si} \quad c \perp a$$

(a, b, c, désignant des vecteurs de $\mathcal{H}$, et a étant non nul) on a les égalités successives :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\| a \|^2}(X_t^*X_s b, a) &= \operatorname{Tr}\left(X_t^*X_s D_{(ab)}\right) = (\mathcal{I}(C_s)D_{(ab)}, \mathcal{I}(C_t))_{\mathcal{N}} \\ &= (\mathcal{I}(C_s D_{(ab)}), \mathcal{I}(C_t))_{\mathcal{N}} = \left(C_s D_{(a,b)}, C_t\right)_{L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R},dt)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(e^{-is\lambda}\widehat{C}D_{(a,b)}, e^{-it\lambda}\widehat{C}\right)_{L^2_{\mathcal{N}_0}(\mathbb{R},dt)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(s-t)\lambda} \operatorname{Tr}(\widehat{C}^*(\lambda)\widehat{C}(\lambda)D_{(a,b)}) \frac{d\lambda}{2\pi} \\ &= \frac{1}{\| a \|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(s-t)\lambda}(\widehat{C}^*(\lambda)\widehat{C}(\lambda)b, a)\frac{d\lambda}{2\pi}\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition 6.

5. — Application à la prévision linéaire.

Soient, $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ un espace de probabilité, x_t une fonction aléatoire stationnaire du second ordre, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_t \in L^2_{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ et la fonction de covariance $\Gamma(s, t)$

ne dépend que de la différence $s - t$. A cette fonction aléatoire correspond une fonction stationnaire $t \to X_t$ où X_t désigne l'opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ qui, à tout vecteur a de $\mathscr{H}$, fait correspondre la variable aléatoire $(a, x_t(\omega))$. Supposons en outre que l'application $t \to x_t$ soit faiblement continue m. q. c'est-à-dire que pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$ et tout élément u de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$, l'espérance mathématique $E\{(a, x_s(\omega) - x_t(\omega))\overline{u}(\omega))\}$ tend vers zéro quand s tend vers t, ce qui est vrai *à fortiori* si $E \| x_s(\omega) - x_t(\omega) \|^2$ tend vers zéro quand s tend vers t. Alors l'application $t \to X_t$ est faiblement continue et les résultats des paragraphes précédents sont applicables.

La fonction stationnaire X_t est la somme de deux fonctions stationnaires U_t et V_t, la première étant purement non déterministe et la seconde déterministe. Il existe une fonction $C(t)$ définie sur $]-\infty, 0]$, à valeurs dans $L^2_{\mathscr{N}_0}(\mathbb{R}, dt)$ et telle que :

$$U_s = \int_{-\infty}^{s} \zeta(dt)C(t - s)$$

Pour tout $\tau > 0$, posons

$$U^{(1)}_{s,\tau} = \int_{s}^{s+\tau} \zeta(dt)C(t - s - \tau),$$

$$U^{(2)}_{s,\tau} = \int_{-\infty}^{s} \zeta(dt)C(t - s - \tau)$$

on a :

$$X_{s+\tau} = U^{(1)}_{s,\tau} + U^{(2)}_{s,\tau} + V_{s+\tau}$$

et d'après la proposition 5, pour tout vecteur a de $\mathscr{H}$,

$$U^{(1)}_{s,\tau}a \in \mathscr{M}_{s+\tau}(X) \ominus \mathscr{M}_s(X),$$

tandis que $U^{(2)}_{s,\tau}a + V_{s+\tau}a \in \mathscr{M}_s(X)$. Puisque les opérateurs $U^{(1)}_{s,\tau}$, $U^{(2)}_{s,\tau}$, $V_{s+\tau}$ sont de Hilbert-Schmidt, il leur correspond des vecteurs aléatoires $z^{(1)}_{s,\tau}$, $z^{(2)}_{s,\tau}$, $y_{s+\tau}$. $z^{(1)}_{s,\tau}$ et $z^{(2)}_{s,\tau} + y_{s+\tau}$ sont respectivement l'innovation et la prévision du processus pour un délai τ, à partir du temps s. L'erreur de prévision est :

$$\begin{aligned} E \| z^{(1)}_{s,\tau}(\omega) \|^2 &= \mathrm{Tr}\,((U^{(1)}_{s,\tau})^* U^{(1)}_{s,\tau}) \\ &= \int_{s}^{s+\tau} \mathrm{Tr}\,(C^*(t - s - \tau)C(t - s - \tau))dt = \int_{-\tau}^{0} \mathrm{Tr}\,(C^*(t)C(t))dt \end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

[1] BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. III à V. Hermann, Actualités Scientifiques, n° 1229.

[2] DEVINATZ, A., The factorization of operator valued functions. *Annals of math.*, vol. 73, n° 3, May 1961, p. 458-495.

[3] DIXMIER, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[4] DOOB, J. L., *Stochastic Processes*. Wiley and Sons, 1953.

[5] HALMOS, P. R., *Introduction to Hilbert Space*, 2e édition. Chelsea Publishing Company, 1957.

[6] HELSON, H., *Lectures on invariant subspaces*. Academic Press, 1964.

[7] HILLE, E. and PHILLIPS, R. S., Functional analysis and semi-groups. *Amer. Math. Soc. colloq. publ.*, vol. 31.

[8] KOLMOGOROV, A. N., Suites stationnaires dans l'espace de Hilbert. *Bull. Univ. d'État de Moscou* (en russe), t. **2**, 1941, p. 1-40.

[9] LOOMIS, L. H., *An introduction to abstract harmonic analysis*. Van Nostrand, 1953.

[10] MOORE, E. H., General analysis. *Mem. Amer. Phil. Soc.*, Part II, chap. V, 1939.

[11] NAIMARK, M. A., *Normed Rings*. P. Noordhoff, 1964.

[12] PAYEN, R., *C. R. Acad. Sci.*, t. **259**, 1964, p. 3678-3680 ; t. **259**, 1964, p. 3929-3932 ; t. **262**, série A, 1966, p. 579-582 ; t. **262**, série A, 1966, p. 1186-1189.

[13] ROZANOV, Yu. A., Spectral theory of multi-dimensional stationary random processes with discrete time. *Sel. transl. in math. stat. and prob.*, vol. 1, p. 253-306.

[14] WIENER, N. and MASANI, P., The prediction theory of multivariate stochastic processes. *Acta Math.*, t. **98**, 1957, p. 111-150 ; t. **99**, 1958, p. 93-137.

[15] YOOD, B., Additive groups and linear manifolds of transformations between Banach spaces. *Amer. J. Math.*, t. **71**, 1949, p. 663-677.

Manuscrit reçu le 25 mai 1967.